

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Achtzehntes Buch. Von den sogenannten arithmetischen und geometrischen [...]

[urn:nbn:de:bsz:31-264709](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-264709)

Achtzehntes Buch.

Von den sogenannten arithmetischen und geometrischen Progressionen oder Zahlen-Reihen.

I. Arithmetische Progressionen.

240.

Eine jede Reihe von Zahlen, bei welcher ein solches Gesetz stattfindet, daß durchgehends einerlei Differenzen kommen, wenn man ein beliebiges Glied vom nächstfolgenden subtrahiert, heist eine arithmetische Reihe oder Progression, und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die folgenden Glieder immer grösser oder kleiner werden. Solche arithmetische Progressionen sind z. B.:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (1)
 5, 6, 7, 8, 9, 10 (2)
 4, 9, 14, 19, 24, 29 (3)
 8, 5, 2, -1, -4, -7 (4)

Bei der ersten und zweiten steigenden Progression ist die beständige Differenz 1. Bei der dritten ist sie 5; bei der vierten fallenden Progression -3.

241.

Ist das Anfangs-Glied einer arithmetischen Progression und die beständige Differenz gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu einem beliebigen Gliede entwickeln: man erhält offenbar das zweite Glied, wenn man die Differenz zum ersten addiert, ferner das dritte, indem man die Differenz zu dem erhaltenen zweiten Gliede, oder, was dasselbe ist, die Differenz zweimal zum ersten addiert u. s. f.; z. B. das hundertste Glied, indem man die Differenz entweder einmal zum vorhergehenden neunundneunzigsten Gliede oder 99mal zum ersten addiert.

Soll z. B. 3 das Anfangs-Glied und 4 die Differenz sein, so hat man:

$$\begin{array}{cccccc} \overset{1}{3}, & \overset{2}{3+4}, & \overset{3}{3+2\cdot 4}, & \overset{4}{3+3\cdot 4\dots 3+9\cdot 4\dots} & \overset{10\text{tes Glied}}{3+9\cdot 4\dots} & \\ \text{oder: } 3, & 7, & 11, & 15\dots\dots\dots 39 & \dots & \end{array}$$

Soll 15 das erste Glied und -5 die Differenz sein, so hat man:

$$\begin{array}{cccccc} \overset{1}{15}, & \overset{2}{15-5}, & \overset{3}{15-2\cdot 5}, & \overset{4}{15-3\cdot 5\dots 15-19\cdot 5\dots} & \overset{20\text{tes Glied}}{15-19\cdot 5\dots} & \\ \text{oder: } 15, & 10, & 5, & 0, & \dots - 80 & \dots \end{array}$$

242.

Bei einer arithmetischen Reihe muß man sich folgende fünf Größen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich das Anfangsglied $= a$, die Differenz $= d$, das letzte oder Endglied $= t$ (*terminus*), die Anzahl der Glieder $= n$ (*numerus*), und endlich die Summe aller Glieder $= s$. Jede dieser fünf Größen a, d, t, n, s ist eine bestimmte Funktion von irgend drei der übrigen, und kann, wenn letztere in Zahlen gegeben sind, sehr leicht daraus berechnet werden, ohne daß man zuvor die ganze Reihe zu entwickeln braucht. Die praktisch wichtigsten und oft vorkommenden Fragen sind jedoch nur nach der Größe eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

243.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man jedes beliebige Glied einer arithmetischen Reihe berechnen kann, wenn die Stellenzahl n desselben (nämlich das wievielte sein soll), das Anfangsglied a , und die Differenz d gegeben ist.

Auflösung. Da das 1ste Glied $= a$, so ist (§ 241) das 2te $= a + d$; das dritte $= a + 2d$ &c., das n te Glied $= a + (n-1)d$. Bezeichnet man demnach die Größe dieses n ten Gliedes mit t , so hat man sogleich:

$$t = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

1) Sucht man z. B. das 21ste Glied der arithmetischen Reihe: 5, 8, 11, ..., so hat man hier: $a=5$; $d=3$; $n=21$.

$$\begin{array}{l} t = 5 + (21-1)3 \\ \text{mithin: } t = 5 + 20 \cdot 3 = 65 \end{array}$$

2) Wie groß ist das hundertste Glied der arithmetischen Reihe 10, $8\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, ...; da hier $a=10$, $d=-\frac{2}{3}$ und $n=100$, so hat man:

$$\begin{array}{l} t = 10 + (100-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \\ t = 10 - 165 = -155. \end{array}$$

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man dem ersten und letzten Gliede und der Anzahl der Glieder a , t , n die Summe s einer arithmetischen Reihe berechnen kann.

Auflösung. Betrachtet man die arithmetische Progression aus dem 1sten Gliede durch das schrittweise Zulegen der Differenz gebildet, so daß diesem Ursprunge gemäß, jedes folgende Glied die Differenz einmal mehr, als das nächst vorhergehende enthält, so folgt sogleich, daß je zwei vom Anfange und Ende gleich weit abstehende Glieder addiert, einerlei Summe geben müssen, z. B. das erste und letzte, das zweite und vorletzte &c. Schreibt man z. B. die Reihe 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 zweimal untereinander, und zwar einmal in umgekehrter Ordnung, so daß sich das letzte Glied unter das erste, das vorletzte unter das zweite stellt &c., und addiert dann je zwei übereinander stehende Glieder, so kommen lauter gleiche Summen, nämlich:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & 17, & 19 \\ 19, & 17, & 15, & 13, & 11, & 9, & 7, & 5, & 3, & 1 \\ \hline 20, & 20, & & 20, & & & & & & 20. \end{array}$$

Heißt das 1ste Glied a , das letzte t , und die Differenz d , so ist das zweite Glied $a+d$, das vorletzte $t-d$, das 3te $a+2d$, das vorvorletzte $t-2d$ &c., mithin: $a+t=a+d+t-d=a+2d+t-2d$ &c.

Addiert man also das erste und letzte Glied einer arithmetischen Progression und multipliziert die Summe mit der Anzahl der Glieder, so erhält man die doppelte Summe, folglich durch 2 dividiert, die einfache Summe der ganzen Reihe. Die gesuchte allgemeine Summationsformel ist mithin:

$$s = n(a+t) \cdot \frac{1}{2} \dots \dots \dots (2)$$

1) Sucht man z. B. die Summe der ersten tausend Glieder der sogenannten natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3...1000; so ist hier $a=1$, $t=1000$ und $n=1000$, mithin:

$$s = (1+1000) \cdot \frac{1000}{2} = 500500$$

2) Sucht man die Summe der folgenden zehn, eine arithmetische Reihe bildenden Zahlen 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, so hat man $a=6$, $t=-12$, $n=10$ und

$$s = (6-12) \cdot \frac{10}{2} = -30.$$

Da die bei einer arithmetischen Progression in Betracht kommenden fünf Größen, a , d , n , t , s und deren Zusammenhang in den beiden Gleichungen:

$$t = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

$$s = (a+t) \frac{n}{2} \dots \dots \dots (2)$$

enthalten sind, indem die Gröfsen, weil sie sich auf einerlei Reihe beziehen, in der einen Gleichung denselben Wert, wie in der andern haben, mithin beide zugleich stattfinden müssen, so ist klar, daß, wenn von einer arithmetischen Progression irgend drei der fünf Gröfsen, a, d, n, t, s gegeben sind, die beiden übrigen als unbekannt angesehenen Gröfsen leicht berechnet werden können, indem zu ihrer Bestimmung die beiden Gleichungen (1) und (2) vorhanden sind, woraus man die übrigen Formeln leicht ableiten kann. Sind nämlich die vier Gröfsen, von welchen drei gegeben und eine gesucht sein soll, alle in einer der beiden Grund-Formeln (1), (2) enthalten, so braucht man dieselbe offenbar nur auf die gesuchte unbekannte zu reduzieren. Sind aber die vier Gröfsen in beide Gleichungen zerstreut, so muß man erst die fünfte Gröfse eliminieren.

246.

1. Aufgabe. Zwischen 4 und 10 sollen acht Zahlen eingeschaltet (interpoliert) werden, so daß dann alle zehn Zahlen eine arithmetische Progression bilden.

Auflösung. Es ist gegeben: $a=4, t=10, n=10$ und d gesucht. Alle vier Gröfsen, a, t, n, d sind in der Grundformel $t = a + (n-1)d$ enthalten; reduziert man diese auf die unbekannte Gröfse d , so kommt:

$$d = \frac{t-a}{n-1}$$

$$\text{also } d = \frac{10-4}{10-1} = \frac{2}{3}$$

die fragliche Progression ist mithin:

$$4, 4\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}, 6, 6\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}, 8, 8\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, 10.$$

247.

2. Aufgabe. Auf einem Dache liegen 21 Reihen Ziegel; in jeder folgenden Reihe einer mehr, im Ganzen 588 Stück; wieviel liegen in der ersten Reihe?

Auflösung. Gegeben $n=21, d=1, s=588$, und a gesucht. Diese vier Gröfsen, n, d, s, a sind in keiner der beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

$$s = (a+t) \frac{n}{2} \dots \dots \dots (2)$$

allein enthalten, sondern in beiden zerstreut. Man eliminiert also die fünfte Gröfse t (am leichtesten, indem man den Wert von t aus (1) in (2) substituiert),

so erhält man eine von t befreite Gleichung, welche die vier Größen n , d , s , a enthält, und die man also nur auf die unbekannte Größe a zu reduzieren braucht. Setzt man nämlich in (2) statt t die Größe $a+(n-1)d$, so kommt:

$$s = [a + a + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$\text{woraus: } \frac{2s}{n} = 2a + (n-1)d$$

$$2a = \frac{2s}{n} - (n-1)d$$

$$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$$

$$\text{daher: } a = \frac{588}{21} - \frac{(21-1)}{2} \cdot 1 = 18.$$

248.

3. Aufgabe. Es ist von einer arithmetischen Reihe das erste Glied $a=16$, die Differenz $d=32$, die Summe $s=1600$ gegeben. Wieviel Glieder hat die Reihe?

Auflösung. Die vier Größen a , d , s , n , wovon die letzte aus den ersteren gesucht wird, sind in den beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

$$s = (a+t) \frac{n}{2} \dots \dots \dots (2)$$

enthalten. Eliminieren wir also die fünfte unbekannte und nicht gesuchte Größe t , indem wir deren Wert aus (1) in (2) substituieren, so kommt:

$$s = [a + a + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

Diese Gleichung muß nun auf die gesuchte unbekannte Größe n reduziert werden. Man hat (§ 220):

$$2an + n(n-1)d = 2s$$

$$n^2d + 2an - dn = 2s$$

$$n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2s}{d}$$

$$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2s}{d}}$$

$$\text{Folglich } n = \frac{32-2 \cdot 16}{2 \cdot 32} \pm \sqrt{\left(\frac{32-2 \cdot 16}{2 \cdot 32}\right)^2 + \frac{2 \cdot 1600}{32}}$$

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot 1600}{32}} = 10.$$

249.

4. Aufgabe. Von einer arithmetischen Progression ist das 1ste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Summe aller Glieder $= s$ gegeben; man sucht die Formel für das Endglied t .

Auflösung. Die beiden unbekanntenen Größen t , n der fraglichen Progression sind in den beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)d \dots\dots\dots (1)$$

$$s = (a+t) \frac{n}{2} \dots\dots\dots (2)$$

zerstreut enthalten. Wir eliminieren also die nicht verlangte unbekanntene Größe n , indem wir am bequemsten ihren Wert aus (1) ziehen und in (2) substituieren.

$$n = \frac{t-a}{d} + 1$$

$$\text{mithin: } s = (a+t) \cdot \frac{t-a+d}{2d}$$

$$\text{hieraus: } t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2}$$

II. Geometrische Progressionen.

250.

Eine Zahlenreihe, bei welcher durchgehends ein solches Gesetz stattfindet, daß immer gleiche Quotienten kommen, wenn man mit einem beliebigen Gliede in das nächstfolgende dividiert, heißt eine geometrische Progression und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die Glieder immer größer oder kleiner werden. Der beständige Quotient heißt hier der Exponent der Reihe. Geometrische Reihen oder Progressionen sind z. B. folgende:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96 \dots\dots$$

$$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \dots\dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \dots\dots$$

Bei der 1sten steigenden Progression ist 2 der Exponent, bei der 2ten fallenden Progression $\frac{1}{3}$, bei der 3ten $\frac{1}{2}$ der Exponent.

251.

Ist das Anfangs-Glied und der Exponent einer geometrischen Progression gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu jedem beliebigen Gliede entwickeln. Man erhält offenbar das 2te Glied, indem man das erste mit dem Exponenten multipliziert, ferner das 2te Glied mit dem Exponenten, oder was dasselbe ist, das 1te Glied mit der 2ten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 3te Glied &c., das 99ste Glied mit dem Exponenten oder das 1ste Glied mit der 99ten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 100ste Glied &c.

Soll z. B. 2 das erste Glied und 3 der Exponent sein, so kommt die Reihe:

$$\begin{array}{cccccc} \overset{1}{2}; & \overset{2}{2 \cdot 3}; & \overset{3}{2 \cdot 3^2}; & \overset{4}{2 \cdot 3^3}; & \overset{5}{2 \cdot 3^4} \dots & \overset{10\text{tes Glied}}{2 \cdot 3^9} \dots \\ \text{oder: } & 2, & 6, & 18, & 54, & 162 \dots \end{array}$$

Soll 64 das erste Glied und $\frac{1}{2}$ der Exponent sein, so hat man:

$$\begin{array}{cccccc} \overset{1}{64}; & \overset{2}{64 \cdot \frac{1}{2}}; & \overset{3}{64 \cdot (\frac{1}{2})^2}; & \overset{4}{64 \cdot (\frac{1}{2})^3} \dots & \overset{10}{64 \cdot (\frac{1}{2})^9} \dots \\ \text{oder: } & 64, & 32, & 16 & 8 \dots & \frac{1}{8} \dots \end{array}$$

252.

Sowie bei der arithmetischen Reihe, muß man sich auch bei der geometrischen Reihe folgende fünf Größen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich: das Anfangsglied = a , den Exponenten = e , die Anzahl der Glieder = n , das Endglied = t , und die Summe aller Glieder = s .

Jede dieser fünf Größen ist eine bestimmte Funktion von je drei der übrigen, und kann, sobald diese drei in bestimmten Zahlen gegeben sind, daraus berechnet werden, ohne daß man die Reihe selbst zu entwickeln braucht. Die wichtigsten Fragen sind jedoch nach der Größe eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

253.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Größe t eines bestimmten Gliedes berechnen kann, wenn die Stellzahl n desselben, das erste Glied a , und der Exponent e der Progression gegeben sind.

Auflösung. Nach § 251 ist die Reihe:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{aq}, \overset{3}{aq^2}, \overset{4}{aq^3}, \overset{5}{aq^4} \dots \overset{n\text{tes Glied}}{aq^{n-1}}$$

Man hat also: $t = a \cdot e^{n-1} \dots \dots \dots (1)$

In Worten: Um die Größe des n ten Gliedes einer geometrischen Progression zu finden, muß man den Exponenten auf die $(n-1)$ te Potenz erheben und damit das erste Glied multiplizieren.

Anmerkung. Ist n sehr groß, so wird die Berechnung von t durch Logarithmen ungemein erleichtert. Überhaupt kommen die Logarithmen bei Aufgaben über geometrische Progressionen sehr zu statten, was jedoch erst im 21. Buche gezeigt werden kann, und bis dahin werden wir nur solche Erläuterungs-Beispiele wählen, welche sich ohne Logarithmen berechnen lassen.

Beispiel. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist $\frac{1}{64}$, der Exponent 2, wie groß ist das neunte Glied?

Auflösung. Gegeben $a = \frac{1}{4}$, $e = 2$, $n = 9$ und t gesucht.

$$t = a \cdot e^{n-1}$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2^{9-1} = 4.$$

254.

Aufgabe. Die Summationsformel (das summatorische Glied) zu finden, nach welcher man aus dem ersten Gliede a , dem Exponenten e und dem letzten Gliede t die Summe der ganzen Progression berechnen kann.

Auflösung. Die Auflösung beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man bezeichne die Summe der geometrischen Progression: $a + ae + ae^2 + \dots + t$ mit s , nämlich:

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + \frac{t}{e^2} + \frac{t}{e} + t \dots \dots \dots (1)$$

multipliziere diese Gleichung (1) (in welcher das vorletzte Glied offenbar $\frac{t}{e}$ das vorvorletzte $\frac{t}{e^2}$ ist) auf beiden Seiten mit dem Exponenten e , so kommt:

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \dots + \frac{t}{e} + t + te \dots \dots (2)$$

subtrahiert man nun die 1ste Gleichung von der 2ten, so erhält man:

$$es - s = te - a$$

$$(e - 1)s = te - a$$

$$s = \frac{te - a}{e - 1} \dots \dots \dots (3)$$

In Worten: Um die Summe einer geometrischen Progression zu finden, muß man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplizieren, hiervon das erste Glied subtrahieren und dann durch den um 1 verminderten Exponenten dividieren.

Der für s erhaltene Ausdruck findet häufig Anwendung und ist daher wohl zu merken.

Beispiele. Wie groß ist die Summe der folgenden geometrischen Progression: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}$. (§ 329.)

Auflösung. Gegeben: $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{1024}$, s gesucht:

$$s = \frac{1q - a}{q - 1}$$

$$s = \frac{1 \cdot \frac{1}{1024} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{2047}{1024}}{-\frac{1}{2}}$$

$$s = 1\frac{923}{512}.$$

255.

Aus den beiden Grundformeln für die geometrische Progression:

$$\left. \begin{aligned} t &= a \cdot e^{n-1} \dots\dots (I) \\ s &= \frac{te - a}{e - 1} \dots\dots (II) \end{aligned} \right\}$$

müssen nun, wenn irgend drei der Größen a, e, n, t, s gegeben sind, die Formeln für die beiden übrigen auf ähnliche Weise, wie im § 245 gezeigt, abgeleitet werden. Einige auf geometrische Reihen führende Aufgaben lassen sich vermittelst Logarithmen lösen, andere führen auf höhere verwickelte Gleichungen, deren Auflösung die höhere Analysis lehrt.

256.

Auch Buchstaben-Ausdrücke, welche geometrische Progressionen bilden, können nach Formel II sehr kurz in eine Summe zusammengezogen werden. So sieht man z. B. gleich, daß die vierteilige Größe:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 + bz^4 + \dots + bz^{n-1}$$

eine geometrische Progression bildet, wo b das erste, bz^{n-1} das letzte Glied und z der Exponent ist. Substituiert man also diese Größen statt a, t und e in die Formel $s = \frac{te - a}{e - 1}$, so ist:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 \dots + bz^{n-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$1 + e + e^2 + e^3 + e^4 \dots + e^{n-1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + x^{2n} = \frac{-x^{2n+1} - 1}{-x - 1} = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x}$$

$$y + x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^4}{y^3} + \dots + \frac{x^n}{y^{n-1}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{(x - y) y^{n-1}}$$