Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Siebzehntes Buch. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Siebzehntes Buch.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

217.

Erklärung. Wenn in einer von Klammern und Nenner befreiten Gleichung die daraus zu bestimmende unbekannte Gröſse nur in der ersten Potenz vorkommt, so heiſst die Gleichung eine einfache, oder vom *ersten* Grade; wenn die unbekannte Gröſse aber in einer höheren Potenz darin vorkommt, eine *höhere* algebraische Gleichung, deren Grad der höchste Exponent der unbekannten Gröſse bestimmt. Ferner heiſst eine höhere Gleichung *rein* oder *verwickelt*, je nachdem die unbekannte Gröſse nur in einerlei oder verschiedenen Potenzen darin enthalten ist. So sind z. B.:

$2x = 6$ $3x - 7 = 14 - x$	Gleichungen *ersten* Grades oder einfache Gleichungen.
$x^2 = 9$ $2x^2 + 16 = \frac{6}{5}x^2$	*reine* Gleichungen zweiten Grades oder reine quadratische Gleichungen.
$x^2 + 2x = 16$ $8 - \frac{3}{4}x = 6x^2$	*verwickelte* oder *gemischte* quadratische Gleichungen, weil in diesen Gleichungen die unbekannte Gröſse auſser in ihrer zweiten auch noch in der ersten Potenz darin vorkommt.
$x^3 = 27$ $x^3 + \frac{136}{31} - 7x^3 = -\frac{2}{3}x^3$	*reine* Gleichungen vom dritten Grade oder reine kubische Gleichungen.
Allgemein: $x^n = a$ $ax^n + bx^n = c - dx^n$	*reine* Gleichungen vom $n$ten Grade.
$x^n + ax^{n-1} = x + b$	*verwickelte* oder *gemischte* Gleichung vom $n$ten Grade.

Die allgemeine Theorie der höheren Gleichungen gehört in die Analysis. In den Elementen kommen bloſs reine Gleichungen und auſserdem noch die *gemischten* quadratischen Gleichungen vor.

218.

Die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen hat keine Schwierigkeit, indem man sehr leicht das Quadrat der unbekannten

Gröſse (x^2) von Nenner und Koefficienten befreien und mit dem Vorzeichen $+$ auf eine Seite allein schaffen kann und dann nur auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszuziehen braucht. Hat man nämlich die reine quadratische Gleichung erst auf die allgemeine Form

$$x^2 = q$$

reduziert, wo x die unbekannte und q die bekannten oder gegebenen Gröſsen bedeutet, so folgt, wenn man auf beiden Seiten die Wurzel auszieht:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$$

$$\text{oder:} \quad x = \pm\sqrt{q}. \qquad (\S\ 216,\ 4.)$$

Ein Wert, welcher, statt der gesuchten Gröſse substituiert, der Gleichung Genüge leistet, heiſst Auflösung oder Wurzel der Gleichung (§ 100). Die reine quadratische Gleichung hat also immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln, nämlich $x = +\sqrt{q}$ und $x = -\sqrt{q}$.

1. Aufgabe. Welchen Wert (Werte) hat x in folgender Gleichung:

$$2x^2 - 3 = 69.$$

Auflösung. Man hat gleich: $2x^2 = 72$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = \pm 6.$$

Sowohl $+6$ als -6 leistet, statt x gesetzt, obiger Gleichung Genüge.

2. Aufgabe. Aus folgender Gleichung x zu finden:

$$\frac{x^2}{4} + 7 - \frac{2x^2}{3} = \frac{5x^2}{6} - 153.$$

Auflösung. Alle Glieder, welche x^2 enthalten, diesseits, die bekannten Glieder jenseits gebracht, kommt:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{2x^2}{3} - \frac{5x^2}{6} = -160.$$

Mit dem allgemeinen Nenner 12 multipliziert, kommt:

$$3x^2 - 8x^2 - 10x^2 = -12.160.$$

Die Koefficienten von x^2 in eine Zahl zusammengezogen:

$$-15x^2 = -12.160$$

$$x^2 = \frac{12.160}{15} = 128$$

$$\text{mithin } x = \pm\sqrt{128}$$

also: $x = 11,313\ldots$ oder auch: $x = -11,313$.

3. Aufgabe. Den Wert von x durch die Gröſsen a, b, c, h, m, n auszudrücken. Den Zusammenhang aller Gröſsen stellt folgende Gleichung dar:

$$\frac{cx^2}{m}+h-\frac{bx^2}{n}=-\frac{ax^2}{n}+\frac{ab}{c}-\frac{cx^2}{m}$$

Auflösung. Das Unbekannte vom Bekannten getrennt, kommt:

$$\frac{ax^2}{n}-\frac{bx^2}{n}+\frac{cx^2}{m}+\frac{cx^2}{m}=\frac{ab}{c}-h.$$

Jetzt die Gleichung mit mn multipliziert &c.:

$$amx^2-bmx^2+2cnx^2=mn\,\frac{(ab-ch)}{c}$$

$$(am-bm+2cn)x^2=mn.\frac{ab-ch}{c}$$

$$x^2=\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}$$

$$\text{folglich: } x=\pm\sqrt{\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}}$$

4. Aufgabe. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man die um 4 vergröſserte Zahl durch 3 dividiert, dasselbe kommt, als wenn man 3 durch die um 4 verminderte Zahl dividiert.

Auflösung. Heiſst x die fragliche Zahl, so soll laut Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{x+4}{3}=\frac{3}{x-4}$$

multipliziert mit dem allgemeinen Nenner 3 $(x-4)$, kommt:

$$(x+4)(x-4)=9$$
$$x^2-16=9$$
$$x^2=25$$
$$x=\pm 5$$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist:

$$\frac{5+4}{3}=\frac{3}{5-4}=3.$$

Nimmt man das untere Zeichen, so ist:

$$\frac{-5+4}{3}=\frac{3}{-5-4}=-\tfrac{1}{3}.$$

219.

Auf gleiche Weise, wie die reine quadratische, wird auch jede andere reine Gleichung vom beliebigen $n$ten Grade gelöst, indem man erst die $n$te Potenz der unbekannten Gröſse auf eine Seite allein bringt, und dann nur auf beiden Seiten die $n$te Wurzel zieht, welches, wie wir § 234 zeigen werden, mit Hilfe der Logarithmen ungemein leicht bewerkstelligt werden kann. Wenn nun auch, streng genommen, eine reine Gleichung vom $n$ten Grade immer n Wurzeln hat, und mithin n verschiedene Werte, statt der unbestimmten Gröſse substituiert, derselben Genüge leisten müssen,*) so giebt man doch in der Elementar-Arithmetik gewöhnlich nur die reellen Wurzeln an; die übrigen Wurzeln der reinen Gleichungen, welche imaginäre (komplexe) Gröſsen sind, können nur durch höhere Mathematik gefunden werden. So findet man z. B. aus folgender Gleichung:

$$x^3 + \frac{136}{81} - 7x^3 = -\tfrac{1}{3}x^3$$

leicht den reellen Wert von x. Es ist nämlich:

$$x^3 - 7x^3 + \tfrac{1}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$-5\tfrac{2}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$\frac{17x^3}{3} = \frac{136}{81}$$

$$x^3 = \frac{3 \cdot 136}{81 \cdot 17} = \frac{8}{27}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Aus: $x^{30} + 30x^{30} = 10$

folgt: $x^{30} = \dfrac{10}{31}$

$$x = \sqrt[30]{\left(\frac{10}{31}\right)} \text{ \&c.} \qquad (\S\ 284.)$$

220.

Gemischte quadratische Gleichungen. Die Auflösung dieser Art Gleichungen, welche zuerst ein Araber (Mohamed-Ben-Musa) gefunden haben soll, beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man kann und muſs nämlich (indem man alle Glieder, welche das Quadrat der unbekannten Gröſse und ebenso alle Glieder, welche

*) Die Gleichung $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x = 12$ z. B. hat die vier Wurzeln 1, 2, -2, 3. Die Gleichung: $x^3 = 8$ hat drei Wurzeln, nämlich: 2, $-1 + \sqrt{-3}$, $-1 - \sqrt{-3}$. Die Gleichung: $x^4 = 4$ hat vier Wurzeln, nämlich: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{-2}$, $-\sqrt{-2}$.

die erste Potenz derselben enthalten, jedes in e i n Glied zusammenzieht) die gemischten quadratischen Gleichungen immer erst so ordnen, daſs sie nur drei Glieder haben, und zwar so, daſs das Quadrat der unbekannten Gröſse, ohne Nenner und Koefficienten und mit dem Vorzeichen +, voransteht, darauf die unbekannte Gröſse in der ersten Potenz mit ihrem Koefficienten folgt, und auf der andern Seite bloſs die bekannten oder gegebenen Gröſsen stehen, durch welche x bestimmt werden soll, so daſs also die Gleichung immer folgende Form erhält:

$$x^2 + px = q$$

wo p und q bekannte Gröſsen bedeuten, die den Umständen nach positiv oder negativ, ganze oder gebrochene Zahlen sein können.

Um z. B. die Gleichung:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}x^2 = 2x^2 + 10 - 3x$$

auf die angegebene Form zu bringen, setzt man zuerst:

$$\frac{3x^2}{4} - 2x^2 + \frac{2x}{3} + 3x = -\tfrac{1}{4}.$$

Die Gleichung mit 12 multipliziert:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 24x^2 + 8x + 36x &= -\tfrac{1}{4} \cdot 12 \\ -15x^2 + 44x &= -3 \\ 15x^2 - 44x &= 3 \\ x^2 - \frac{44}{15}x &= \frac{3}{15} \end{aligned}$$

Ebenso läſst sich die Gleichung:

$$\frac{cx}{n} + c - \frac{bx^2}{m} = \frac{hx}{c} - \frac{ax^2}{n} + d$$

leicht ordnen. Es folgt aus ihr:

$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{n} - \frac{bx^2}{m} + \frac{cx}{n} - \frac{hx}{c} &= d - c \\ macx^2 - nbcx^2 + mc^2x - mnhx &= mnc(d - c) \\ (mac - nbc)x^2 + m(c^2 - nh)x &= mnc(d - c) \\ x^2 + \frac{m(c^2 - nh)}{c(ma - nb)} \cdot x &= \frac{mnc(d - c)}{c(ma - nb)} \end{aligned}$$

221.

Nachdem man nun, um eine gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, dieselbe erst, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, auf die dazu nötige Form:

$$x^2 + px = q \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gebracht hat, betrachte man jetzt die beiden links stehenden Glieder $x^2 + px (= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}px)$ als das Bruchstück eines Quadrats und addiere den zur Vollständigkeit fehlenden dritten Teil [welcher nach § 213 offenbar stets das Quadrat vom halben Koefficienten von x, nämlich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ sein muſs] auf beiden Seiten der Gleichung (1), so wird dadurch die gesuchte unbekannte Gröſse x nicht geändert.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q \ldots\ldots (2)$$

Auf der linken Seite steht nun ein vollkommenes Quadrat,*) aus welchem sich die zweiteilige Wurzel $x + \frac{p}{2}$ ziehen läſst. Zieht man also jetzt auf beiden Seiten die Wurzel (welche Operation, so lange p und q nicht in bestimmten Zahlen gegeben, auf der rechten Seite bloſs angedeutet werden kann [vergl. § 214]), so erhält man eine Gleichung ersten Grades. Aus (2) folgt nämlich:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \qquad (§ 216, 4. Anmk.)$$

$$\text{hieraus: } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}$$

---

*) Daſs durch die erwähnte Zulage auf beiden Seiten, die linke Seite immer ein vollkommenes Quadrat werden muſs, können Anfänger sich auf folgende Weise klar machen: da das entwickelte Quadrat einer zweiteiligen Gröſse, wovon der erste Teil x heiſst, aus dem Quadrate des ersten Teils, dem doppelten Produkte des ersten und zweiten Teils, und dem Quadrate des zweiten Teils besteht, z. B. $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, so ist klar, daſs der Koefficient von x immer das Doppelte vom zweiten Teil der Wurzel ist. Betrachtet man also die Gröſse: $x^2 + 2ax$ als die beiden ersten bekannten Teile eines vollständig zu machenden Quadrats, so muſs offenbar der hinzukommende Teil das Quadrat vom halben Koefficienten von x, nämlich: $\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$ sein.

Um also $x^2 + 6x = x^2 + 2.3x$ zu einem vollständigen Quadrate zu machen, muſs man $(\frac{6}{2})^2 = 3^2 = 9$ zulegen, alsdann hat man $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Um $x^2 - 6x = x^2 - 2.3x$ zu einem Quadrate zu machen, muſs man $(-\frac{6}{2})^2 = (-3)^2 = 9$ hinzulegen (die Zulage ist nämlich immer positiv, weil sie ein Quadrat ist), dann ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Zu $x^2 - px = x^2 - 2.\frac{1}{2}px$ muſs also $(\frac{1}{2}p)^2$ hinzukommen. Zu $x^2 + 3x (= x^2 + 2.\frac{3}{2}x)$ muſs $(\frac{3}{2})^2$; zu $x^2 - x (= x^2 - 2.\frac{1}{2}x)$ muſs $(\frac{1}{2})^2$; zu $x^2 - \frac{ab}{c}.x (= x^2 - 2.\frac{ab}{2c}x)$ muſs $\left(\frac{ab}{2c}\right)^2$ hinzukommen &c.

oder auch, indem man die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf gleiche Benennung bringt und aus dem Nenner die Wurzel zieht:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2+4q}{4}} \text{ oder } x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$$

222.

1. Aufgabe. Welche Werte von x leisten folgender Gleichung Genüge?

$$5x^2 = 30x - 40 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung erst geordnet (§ 220), führt auf:

$$5x^2 - 30x = -40$$

$$x^2 - 6x = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2 - 6x + 3^2 = 9 - 8$$

$$\text{oder } x^2 - 6x + 3^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x - 3 = \pm 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$x = 3 \pm 1$$

Die beiden gesuchten Werte von x sind also: $x=3+1=4$ und $x=3-1=2$, welche beide, statt x gesetzt, der gegebenen Gleichung (1) Genüge leisten. Dafs dies notwendig sei, folgt daraus, dafs man eine Kette von Schlüssen auch rückwärts durchlaufen kann, und wieder auf die Voraussetzungen treffen mufs, von welchen man ausging. Quadriert man beide Seiten der Gleichung (4), so folgt die Gleichung (3) &c., man möge dabei das obere oder untere Zeichen von $\pm$ zu Grunde legen.

Es würde ganz auf dasselbe führen und folglich überflüssig sein, wenn man auch die Wurzel aus der linken Seite der Gleichung (3) mit dem doppelten Vorzeichen schreiben wollte. Denn nimmt man von $\pm(x-3) = \pm 1$, das untere Zeichen linker Hand, so folgt aus $-(x-3) = \pm 1$ wiederum $x = 3 \pm 1$.

223.

2. Aufgabe. Die Werte von x aus folgender Gleichung zu finden:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \frac{3x^2}{4} = 2x^2 + 10 - 3x \ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung gehörig geordnet (§ 220), kommt:

$$x^2 - \frac{44}{15}x = \frac{3}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auf beiden Seiten $\left(\frac{22}{15}\right)^2$ addiert:

$$x^2 - \frac{44}{15}x + \left(\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, kommt:

$$x - \frac{22}{15} = \pm\sqrt{\left(\frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Um rechter Hand die Wurzel wirklich auszuziehen, mufs die zweiteilige Gröfse unter dem $\sqrt{}$ Zeichen erst in eine einteilige verwandelt, folglich erst gleichnamig gemacht werden. (§ 214.) Da nun:

$$\frac{22^2}{15^2}+\frac{3}{15}=\frac{22^2}{15^2}+\frac{15.3}{15^2}=\frac{484+45}{15^2}=\frac{529}{15^2}, \text{ so ist:}$$

$$x-\frac{22}{15}=\pm\sqrt{\frac{529}{15^2}}$$

$$x=\frac{22}{15}\pm\frac{\sqrt{529}}{15}$$

$$x=\frac{22\pm\sqrt{529}}{15}$$

$$x=\frac{22\pm 23}{15}$$

Der eine Wert von x ist also: $=\frac{22+23}{15}=3$ und der andere $=\frac{22-23}{15}=-\frac{1}{15}$.

224.

3. Aufgabe. Folgende Gleichung auf x zu reduzieren:

$$acx-bcx=ab-c^2x^2 \ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung geordnet, giebt:

$$c^2x^2+c(a-b)x=ab$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x=\frac{ab}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x+\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4c^2}+\frac{ab}{c^2}.$$

$$x+\frac{a-b}{2c}=\pm\sqrt{\frac{(a-b)^2+4ab}{4c^2}}$$

Löst man die Klammer unter dem Wurzelzeichen, so ist:

$$(a-b)^2+4ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

und folglich: $x=-\frac{a-b}{2c}\pm\frac{a+b}{2c}=\frac{b-a\pm(a+b)}{2c}$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist der eine Wert von $x=\frac{b}{c}$; das untere Zeichen bestimmt den andern Wert von $x=-\frac{a}{c}$ und beiderlei Werte müssen, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leisten.

225.

4. Aufgabe. Ein Vermögen von 16000 ℳ soll unter eine gewisse Anzahl Erben gleichmäfsig verteilt werden. Wären zwei

Erben weniger, so würde jeder 4000 ℳ mehr erhalten; wieviel Erben sind da?

Auflösung. Man setze x Erben, so bekommt jeder $\frac{16000}{x}$. Wären nun zwei Erben weniger, so würde jeder $\frac{16000}{x-2}$ erhalten, und da dies um 4000 gröfser sein soll, so hat man:

$$\frac{16000}{x-2}=\frac{16000}{x}+4000$$

Die Gleichung durch 4000 dividiert:

$$\frac{4}{x-2}=\frac{4}{x}+1$$

Mit $x\ (x-2)$ multipliziert:

$$4x=4x-8+x^2-2x$$
$$x^2-2x=8$$
$$x^2-2x+1=9$$
$$x-1=\pm\sqrt{9}$$
$$x=1\pm 3$$
$$x=4$$

Käme es nur darauf an, einen Wert zu finden, welcher der obigen Gleichung Genüge leistet, so hätte man auch $x=1-3=-2$ nehmen können. Da aber hier nach einer Anzahl Personen gefragt wird, und negative Personen nicht stattfinden können, weil es keine positive giebt, so sieht man den Grund, weshalb hier vorzugsweise das obere Zeichen genommen werden mufste. (Vergl. § 144, Anmerkung 2.)

226.

5. Aufgabe. Eine Dame wurde um ihr Alter befragt und sie antwortete: das 53fache meiner Jahre übertrifft die Zahl 696 um geradesoviel, als das Quadrat meiner Jahre beträgt. Wie alt war die Dame?

Auflösung. Man setzte x Jahre, so mufs laut Bedingung folgende Gleichung stattfinden:

$$53x=696+x^2$$
$$x^2-53x=-696$$
$$x^2-53x+\left(\frac{53}{2}\right)^2=\frac{53^2}{4}-696$$
$$x-\frac{53}{2}=\pm\frac{\sqrt{53^2-696.4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{25}}{2}$$
$$x=\frac{53\pm 5}{2}$$
$$\text{mithin: } x=\frac{53-5}{2}=24$$

Hier mufs aus Höflichkeit das untere Zeichen genommen werden.*)

227.

6. Aufgabe. Eine Linie von $a=10$ cm Länge in zwei solche Teile zu teilen, dafs sich der kleinere Teil zum gröfsern verhält, wie der gröfsere zur ganzen Länge.

Auflösung. Sei x der kleinste, mithin $a-x$ der gröfste, so mufs, weil $\frac{a-x}{x}$ denselben Quotienten geben soll, wie $\frac{a}{a-x}$, folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{a-x}{x}=\frac{a}{a-x}$$

oder: $\frac{x}{a-x}=\frac{a-x}{a}$;

$$(a-x)(a-x)=ax$$
$$a^2-2ax+x^2=ax$$
$$x^2-2ax-ax=-a^2$$
$$x^2-3ax=-a^2$$
$$x^2-3ax+\left(-\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{9a^2}{4}-a^2$$
$$\left(x-\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}$$
$$x-\frac{3a}{2}=\frac{\sqrt{5a^2}}{2}$$

folglich: $x=\dfrac{3a\pm a\sqrt{5}}{2}$

oder $x=a\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)=a\left(\dfrac{3\pm 2{,}236\ldots}{2}\right)$

folglich, der Annahme gemäfs, $x=0{,}382a$.

Mithin ist der kleinste Teil $x=0{,}382a$, und der gröfste Teil $a-x=a-0{,}382a=0{,}618a$, oder, weil hier $a=10$ gegeben ist, $x=3{,}82$..cm und $a-x=6{,}18\ldots$ cm.

Hier mufste offenbar deshalb das untere Zeichen genommen werden, weil das obere Zeichen den gesuchten kleinen Teil x gröfser als die ganze Linie, und mithin den gröfsern Teil $a-x$ negativ gemacht hätte, welches beides ungereimt wäre. Käme es aber blofs darauf an, Werte für x zu finden, welche der Gleichung Genüge leisten, oder würde die Frage so gestellt: die Zahl $a=10$ in zwei Teile zu teilen, welche die erwähnte Eigenschaft haben, so kann man gleichgültig das obere oder untere Zeichen nehmen. Übrigens sind hier beide Werte von x irrational und deshalb nur näherungsweise anzugeben.

228.

7. Aufgabe. Welche Werte leisten, statt x substituiert, folgender Gleichung Genüge:

$$x^2=2x-5\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

---

*) Anfänger pflegen sich darüber zu wundern, dafs die Auflösung hier zwei Antworten giebt und dies für eine Unvollkommenheit der Analysis zu halten. Es ist offenbar gerade eine ihrer Vollkommenheiten (und ein grofser Vorzug vor der Geometrie), dafs ihre Resultate ganz allgemein sind, und dafs sie alle möglichen Fälle und Antworten durch einen einzigen Ausdruck angiebt.

Auflösung. Man hat gleich:

$$x^2 - 2x = -5$$
$$x^2 - 2x + 1 = 1 - 5$$
$$(x-1)^2 = -4$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{-4}$$
$$\text{und } x = 1 \pm \sqrt{-4}\,^{*)}$$

229.

8. Aufgabe. Aus folgender Gleichung die durch a, b, c bestimmten Werte von x zu finden:

$$\frac{bc}{a} - ax - c = \frac{bx^2}{a} - \frac{ax^2}{b} - bx$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{ax^2}{b} - \frac{bx^2}{a} - ax + bx = c - \frac{bc}{a}$$

Multipliziert mit ab:

$$a^2x^2 - b^2x^2 - a^2bx + ab^2x = abc - b^2c$$
$$(a^2 - b^2)x^2 - ab(a-b)x = bc(a-b)$$
$$x^2 - \frac{ab(a-b)}{a^2-b^2} \cdot x = \frac{bc(a-b)}{a^2-b^2}$$
$$x^2 - \frac{ab}{a+b} \cdot x = \frac{bc}{a+b} \qquad (\S\ 91.)$$
$$x^2 - \frac{ab}{a+b} \cdot x + \left[\frac{ab}{2(a+b)}\right]^2 = \frac{a^2b^2}{4(a+b)^2} + \frac{bc}{a+b}$$
$$x - \frac{ab}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + 4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$
$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 + 4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$

230.

Kommt in einer Gleichung die unbekannte Gröſse mit einem gebrochenen Exponenten oder mit dem Wurzelzeichen behaftet vor, so heiſst die Gleichung irrational. Eine irrationale Gleichung läſst sich aber manchmal rational machen, wenn man die Wurzelgröſse

---

*) Substituiert man die für x gefundenen Ausdrücke in (1), so erhält man als Probe der richtigen Rechnung: $(1 \pm \sqrt{-4})^2 = 2(1 \pm \sqrt{-4}) - 5$; denn löst man die Klammern, so kommt:

$$1 \pm 2\sqrt{(-4)} - 4 = 2 \pm 2\sqrt{(-4)} - 5$$
$$-3 \pm 2\sqrt{-4} = -3 \pm 2\sqrt{-4}. \qquad \text{(Siehe § 325.)}$$

erst auf eine Seite allein schafft, und dann beide Seiten auf die dem Wurzelexponenten entgegengesetzte Potenz erhebt. (Wenn man beide Seiten einer Gleichung ins Quadrat (Kubus &c.) erhebt, so wird dadurch die unbekannte Gröſse ebensowenig geändert, als wenn man auf beiden Seiten mit einerlei Zahl multipliziert.) So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$ax = b \pm \sqrt{x}$$

$$ax - b = \pm \sqrt{x}$$

Erhebt man jetzt beide Seiten ins Quadrat, so fällt, weil $(\pm \sqrt{x})^2 = x$, das Wurzelzeichen weg und man erhält dadurch die rationale Gleichung:

$$a^2x^2 - 2abx + b^2 = x$$

$$a^2x^2 - 2abx - x = -b^2$$

$$x^2 - \frac{(1+2ab)}{a^2}x = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$x - \frac{1+2ab}{2a^2} = \pm \sqrt{\left\{\frac{(1+2ab)^2}{4a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right\}}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{(1+2ab)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{1+4ab}}{2a^2}$$

Hat eine Gleichung mehrere irrationale Glieder, so muſs man das vorhergehende Verfahren wiederholen, und sie nach und nach rational machen, so folgt z. B. aus der Gleichung:

$$\sqrt{2x+7} = 2 + \sqrt{5-4x}$$

indem man beide Seiten ins Quadrat erhebt und beachtet, daſs allgemein $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$; und $(a+\sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$; und $[a\sqrt{b-c}]^2 = a^2(b-c)$;

$$2x + 7 = 4 + 5 - 4x + 4\sqrt{5-4x}$$

$$6x - 2 = 4\sqrt{5-4x}$$

wiederum quadriert:

$$36x^2 - 24x + 4 = 80 - 64x$$

$$36x^2 + 40x = 76$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x = \frac{19}{9}$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x + \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{9^2} + \frac{19}{9} = \frac{25 + 9 \cdot 19}{9^2}$$

$$x+\frac{5}{9}=\pm\frac{\sqrt{196}}{9}$$

$$x=\frac{-5\pm 14}{9}$$

$$x=1,\ \text{und}\ x=-\frac{19}{9};$$

der eine Wert gilt für das obere, der andere für das untere Vorzeichen der gegebenen Gleichung, welche, weil die Wurzelexponenten gerade sind, so zu lesen ist: $\pm\sqrt{2x+7}=2\pm\sqrt{5-4x}$.

231.

Auf gleiche Weise, wie die gemischten quadratischen Gleichungen, können auch alle diejenigen höhern Gleichungen gelöst werden, welche sich auf die Form:

$$x^{2m}+px^m=q$$

bringen lassen, wo nämlich nur zweierlei Potenzen der unbekannten Gröfse vorkommen, und zwar so: dafs der gröfste Exponent gerade 2mal so grofs ist, als der kleinste, indem dann eine solche Gleichung als eine wirklich quadratische dargestellt werden kann.

Setzt man nämlich: $x^m=z$, mithin: $x^{2m}=(x^m)^2=z^2$, so wird die Gleichung:

$$x^{2m}+px^m=q$$

wenn man einstweilen z statt x^m und z^2 statt x^{2m} substituiert, in folgende quadratische Gleichung verwandelt:

$$z^2+pz=q$$

$$\text{hieraus:}\quad z=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

und wenn man für z dessen Wert x^m wieder zurücksetzt:

$$x^m=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

$$\text{mithin:}\ x=\sqrt[m]{\left\{\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}\right\}}$$

wo auch vor die $m$te Wurzel, wenn sie gerade ist, das doppelte Zeichen $\pm$ gesetzt werden mufs. Beispiele:

232.

Aufgabe. Die Zahl 18 in zwei solche Faktoren zu zerlegen, dafs wenn man jeden Faktor quadriert, die Summe dieser Quadrate $=45$ ist.

Auflösung. Sei x der eine, mithin $\frac{18}{x}$ der andere Faktor, so hat man:

$$x^2 + \frac{18^2}{x^2} = 45$$

$$x^4 + 18^2 = 45x^2$$

$$x^4 - 45x^2 = -324$$

also, indem man $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$ setzt:

$$z^2 - 45z = -324$$

$$z^2 - 45z + \left(\frac{45}{2}\right)^2 = \frac{45^2 - 4.324}{4}$$

$$z - \frac{45}{2} = \frac{\sqrt{729}}{2}$$

$$x^2 = \frac{45 \pm 27}{2}$$

$$z = \pm\sqrt{\left\{\frac{45 \pm 27}{2}\right\}}$$

Je nachdem man von den beiden doppelten Vorzeichen zwei gleiche oder zwei ungleiche nimmt, erhält man vier verschiedene Werte für x, wovon jedoch, weil die Wurzelgröſse zweiteilig ist, zwei einander gleich sind. Man hat nämlich:

für: $+ +$; $x = 6$	und $\frac{18}{x} = 3$
für: $+ -$; $x = 3$	und $\frac{18}{x} = 6$
für: $- +$; $x = -6$	und $\frac{18}{x} = -3$
für: $- -$; $x = -3$	und $\frac{18}{x} = -6$

233.

Aufgabe. Die Zahl 12 in zwei solche Faktoren zu zerlegen, daſs die Differenz der Kuben $= 37$ sei.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $\frac{12}{x}$ der andere Faktor, so hat man:

$$x^3 - \frac{12^3}{x^3} = 37$$

$$x^6 - 12^3 = 37x^3$$

$$x^6 - 37x^3 = 12^3$$

und wenn man $x^3 = z$, und $x^6 = x^3 . x^3 = z^2$ setzt:

$$z^2 - 37z = 1728$$

$$z = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 + 4.1728}}{2}$$

$$\text{d. i. } x^3 = \frac{37 \pm \sqrt{8281}}{2}$$

$$\text{mithin } x = \sqrt[3]{\left(\frac{37 \pm 91}{2}\right)}$$

$$\text{also } x = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ oder auch } x = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\text{und } \frac{12}{x} = \frac{12}{4} = 3 \text{ oder auch } \frac{12}{x} = \frac{12}{-3} = -4$$

233 a.

* **Aufgabe.** Man suche x aus folgenden Gleichungen:

(1) $\frac{50}{2x+1} + 3 = \frac{8x-3}{9-4x}$; (2) $b = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$

(3) $\sqrt[2m]{2x^2 + 4ax - b^2} = \sqrt[m]{a+x}$ *) (4) $2x\sqrt[3]{x} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} = 20$ **)

Antwort. Man findet aus:

(1) $x = -2 \pm 4$; (2) $x = \pm \frac{2a\sqrt{b}}{1+b}$

(3) $x = -a \pm \sqrt{2a^2 + b^2}$; (4) $x = \pm 8, = \sqrt{\frac{-125}{8}}$

234.

Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Gröfsen. Sind unter den n Gleichungen mit n unbekannten Gröfsen einige oder auch alle quadratisch, so mufs man jede unbekannte Gröfse durch Elimination der übrigen zu bestimmen suchen. Sind aber mehr als zwei Gleichungen vorhanden, so ist die Auflösung nur in besonders günstigen Fällen möglich.

235.

1. Aufgabe. Es ist gegeben die Summe zweier Zahlen x und y, $= s$, z. B. $= 10$ und ihr Produkt $= p$, z. B. $= 24$; wie lassen sich die beiden Gröfsen x und y durch s und p bestimmen?

Auflösung. Es ist:

$$x + y = s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$xy = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

---

*) Beide Seiten auf die $2m$te Potenz erhoben (§ 207).

**) Man schreibe die vierte Gleichung so: $2x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 20$ und setze $x^{\frac{2}{3}} = z$ &c. (§ 231.)

Die erste Gleichung mit x multipliziert, kommt:

$$x^2+xy=sx \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

hiervon die zweite subtrahiert, kommt:

$$x^2=sx-p$$

hieraus: $x^2-sx=-p$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (4) \\ \text{substituiert in (1) kommt: } y=\dfrac{s\mp\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (5) \end{array}\right\}$$

(Nimmt man von dem doppelten Zeichen $\pm$ für x das obere, so gilt das untere für y, und so umgekehrt.)

236.

2. Aufgabe. Es ist gegeben: die Summe zweier Gröſsen und die Summe ihrer Quadrate, nämlich:

$$x+y=a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x^2+y^2=b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Der kürzeste Weg ist hier: vom Quadrate der ersten Gleichung die zweite zu subtrahieren, dann kommt:

$$2xy=a^2-b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Subtrahiert man (3) von (2), so kommt:

$$x^2-2xy+y^2=2b-a^2$$
$$x-y=\sqrt{2b-a^2} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus den Gleichungen (4) und (1) erhält man (§ 167, Anmerk.):

$$x=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

$$y=\frac{a\mp\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

237.

3. Aufgabe. Das Produkt p zweier Gröſsen und die Summe ihrer Quadrate a ist gegeben, nämlich:

$$xy=p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x^2+y^2=a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Die erste mit 2 multiplizierte Gleichung zur zweiten addiert und davon subtrahiert, erhält man leicht die Summe und Differenz der beiden gesuchten Gröſsen, nämlich:

$$x+y=\sqrt{a+2p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$x-y=\sqrt{a-2p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und hieraus nach § 167, Anmerkung:

$$x = \frac{\pm\sqrt{a+2p} \pm \sqrt{a-2p}}{2} \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{a+2p} \mp \sqrt{a-2p}}{2} \ldots\ldots\ldots (6)$$

oder wenn man die Gleichungen (5) und (6) quadriert (§ 186):

$$x^2 = \frac{a+2p+a-2p \pm 2\sqrt{a^2-4p^2}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4p^2}}{2}$$

folglich ist auch: $x = \pm\sqrt{\left\{\frac{a \pm \sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$ und $y = \pm\sqrt{\left\{\frac{a \mp \sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$

238.

4. Aufgabe. Gegeben:

$$3x + 2y = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4x^2 - 3y^2 = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Den Wert von x aus (1) in (2) substituiert &c., kommt:

$$y = 1,\ x = 2, \text{ oder } y = -\frac{139}{11} \text{ und } x = \frac{122}{11}$$

239.

5. Aufgabe. Gegeben:

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y^2 + yz + z^2 = 19 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2 + xz + z^2 = 13 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Auflösung. Subtrahiere (2) von (1), und (2) von (3) kommt:

$$x+y+z = \frac{-12}{x-z} \text{ und } x+y+z = \frac{-6}{x-y}$$

Aus beiden Gleichungen folgt $\frac{12}{x-z} = \frac{6}{x-y}$ oder $x = 2y - z$.

Diesen Wert von x in (3) gesetzt, vom Resultat die Gleichung (2) subtrahiert, kommt: $z = \frac{y^2+2}{y}$. Diesen Wert von z in (2) substituiert kommt:

$$y^4 - \frac{13}{3}y^2 = -\frac{4}{3} \text{ woraus: (§ 231)}$$

$$y = \pm 2,\ = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ z = \pm 3,\ = \pm\frac{7}{\sqrt{3}};\ x = \pm 1,\ = \mp\frac{5}{\sqrt{3}}$$