Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Sechzehntes Buch. Von den Potenzen und Wurzeln im allgemeinen. Rechnung mit denselben

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Visual Library

Sechzehntes Buch.

Von den Potenzen und Wurzeln im allgemeinen. Rechnung mit denselben.

201.

Wenn aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so pflegt man dies, der Kürze wegen, auch so anzudeuten: dafs man den Wurzelexponenten, als Nenner, unter den als Zähler betrachteten Potenzexponenten setzt. Um z. E. anzudeuten, dafs aus a^m die $n$te Wurzel gezogen werden soll, schreibt man statt: $\sqrt[n]{a^m}$ oftmals so: $a^{\frac{m}{n}}$, statt $\sqrt[3]{8^2}$ kürzer: $8^{\frac{2}{3}}$ (lies: 8 zweidrittel Potenz). Hiernach $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$. Jede Gröfse, die keinen Exponenten hat, kann man als die erste Potenz derselben betrachten und mit dem Exponenten 1 schreiben: $a = a^1$; daher auch: $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Hiernach ist also auch umgekehrt $x^{\frac{m}{n}}$ soviel als $\sqrt[n]{x^m}$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ &c. Der Gebrauch der (von Cartesius eingeführten) Bruch-Exponenten macht das Wurzelzeichen entbehrlich, wodurch die Übersicht und das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln ungemein erleichtert wird.

202.

Einer Potenz mit gebrochenem Exponenten kann man auch (wohl zu merken) folgende Bedeutung unterlegen: Es soll die Gröfse, an welcher der gebrochene Exponent steht, erst in soviel gleiche Faktoren zerlegt werden, als sein Nenner Einheiten hat, und dann einer dieser gleichen Faktoren so oft gesetzt werden, als sein Zähler Einheiten hat. Es ist nämlich einerlei, ob man, um eine Gröfse mit gebrochenem Exponenten zu berechnen, erst die Wurzel zieht, deren Grad der Nenner angiebt, und diese Wurzel auf die Potenz erhebt, deren Grad der Zähler angiebt, oder ob man die Gröfse erst auf diese Potenz erhebt, und daraus jene Wurzel zieht.

Es ist z. B.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Aber auch: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$

Die Richtigkeit dieses für die Potenz-Rechnung wichtigen Satzes läfst sich durch Hilfe des Folgenden beweisen:

Erhebt man eine Potenz, z. B. a^3, wieder zu einer Potenz, z. B. zur vierten, in Zeichen: $(a^3)^4$, so erhält man eine Potenz von so hohem Grade, als das Produkt aus beiden Exponenten angiebt, denn werden d r e i gleiche Faktoren $a\,a\,a$ oder a^3 wiederum viermal als Faktor gesetzt, so erhält man offenbar ein Produkt von zwölf gleichen Faktoren: $aaa \cdot aaa \cdot aaa \cdot aaa = (a^3)^4 = a^{12}$. Hiernach ist nun auch leicht einzusehen, dafs auch $(a^3)^4 = (a^4)^3$, allgemein $(a^n)^m = (a^m)^n$.

Um nun einzusehen, dafs allgemein:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$$

denke man sich die Gröfse a in n gleiche Faktoren zerlegt, oder $a = w^n$ gesetzt. Substituiert man nun w^n statt a in $(\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{(a^m)}$, so wird:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^n})^m = w^m$$

und ebenso: $\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[n]{(w^n)^m} = \sqrt[n]{(w^m)^n} = w^m$

folglich ist allgemein: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$

203.

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchexponenten oder was dasselbe ist, den Potenz- und Wurzelexponenten mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert, so bleibt deshalb der Wert der Potenz ungeändert. Es ist z. B.:

$$64^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{4}{6}}$$

$$\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[6]{64^4}$$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

* Denn wenn die Gröſse a in $p$mal soviel gleiche Faktoren zerlegt, und einer derselben dafür wieder $p$mal so oft gesetzt wird, so muſs offenbar dasselbe Resultat kommen. Es ist z. B.:

$$(\sqrt[3]{64})^2 = (\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4})^2 = 4^2 = (2 \cdot 2)^2 = 2^4$$

$$(\sqrt[6]{64})^4 = (\sqrt[6]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2})^4 = 2^4$$

Allgemein, indem man wie in § 202 die Gröſse a in np Faktoren zerlegt und w^{np} statt a gesetzt denkt:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^{pn}})^m = (w^p)^m = w^{mp}$$

$$(\sqrt[np]{a})^{mp} = (\sqrt[np]{w^{np}})^{mp} = w^{mp}$$

Vermöge dieses Satzes können mehrere Bruchexponenten auf einerlei Nenner gebracht und dadurch, wie man im folgenden Paragraphen sehen wird, manche Gröſsen-Ausdrücke sehr vereinfacht werden. *)

204.

Um Potenzen von *einerlei* Basis miteinander zu multiplizieren, braucht man nur ihre Exponenten zu addieren; das Produkt ist nämlich wieder eine Potenz von derselben Wurzel, deren Exponent jene Summe sein muſs, weil es allein so viele gleiche Faktoren enthält, als die miteinander multiplizierten Potenzen zusammen; z. B.:

$$a^5 \cdot a^2 = a^{5+2} = a^7; \quad \text{denn } a^5 \cdot a^2 = aaaaa \cdot aa = a^7$$

$$3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^{11}; \quad x^5 x^3 x = x^{5+3+1} = x^9; \quad b^{15} b^{15} = b^{30}$$

---

*) Auch kann man vermittelst dieses Satzes mehrere auszuziehende Wurzeln, ohne ihre wirklichen Gröſsen zu kennen, miteinander vergleichen und z. E. leicht entscheiden, welche von den drei Gröſsen $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{24}$ die gröſste oder kleinste ist. Setzt man nämlich statt der Wurzelzeichen Bruchexponenten, und bringt diese auf einerlei Nenner, so hat man:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\ \sqrt[6]{24} = 24^{\frac{1}{6}} = 24^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{24} \end{cases}$$

Mithin ist von den drei fraglichen Gröſsen $\sqrt{3}$ die gröſste und $\sqrt[6]{24}$ die kleinste.

Ebenso, wenn die Exponenten Brüche sind; z. B.:

$$a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{7}} \cdot = a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}} = a^{\frac{5}{7}};$$

denn die eine Gröfse enthält die 7te Wurzel aus a dreimal, die andere dieselbe Wurzel zweimal, also zusammen 5mal als Faktor:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = a^{\frac{17}{12}}$$

Beispiele:

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{p}{n}} = x^{\frac{m}{n} + \frac{p}{n}} = x^{\frac{m+p}{n}}$$

$$a^m a^n a^p = a^{m+n+p}; \qquad x^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{2n}{2}} = x^n$$

$$x^m x = x^{m+1}; \qquad x^{\frac{m}{n}} x = x^{\frac{m}{n}+1} = x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$2a^5 b^3 \cdot 3a^2 b = 2 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b = 6a^7 b^4 \quad (\S\ 89,\ 1.)$$

$$a^4 (a^3 - a^2 + 1) = a^7 - a^6 + a^4 \quad (\S\ 89,\ 2.)$$

$$3x^5 (2x^4 + 4x + 3) = 6x^9 + 12x^6 + 9x^5$$

$$a^3 b^4 (a^3 b + ab^3 + b^4) = a^6 b^5 + a^4 b^7 + a^3 b^8$$

$$(a-1)(a^3 + a^2 + a + 1) = a^4 - 1 \quad (\S\ 89,3.)$$

$$(a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4 \quad (\S\ 91.)$$

205.

Um Potenzen von einerlei Basis durcheinander zu dividieren, braucht man nur (weil eine gleiche Anzahl gemeinschaftlicher Faktoren im Divisor und Dividend sich gegenseitig tilgen) den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividend zu subtrahieren. So ist z. B.:

$$\frac{8^7}{8^4} = 8^{7-4} = 8^3; \text{ denn } \frac{8^7}{8^4} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$$

$$\frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{5}{7} - \frac{3}{7}} = a^{\frac{2}{7}}; \quad \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{12}} \quad (\S\ 203.)$$

$$\text{denn: } \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = \frac{(\sqrt[7]{a})^5}{(\sqrt[7]{a})^3} = (\sqrt[7]{a})^{5-3} = (\sqrt[7]{a})^2 = a^{\frac{2}{7}}$$

Selbst wenn der Exponent des Divisor gröſser ist, als der des Dividend, pflegt man dennoch die Subtraktion zu vollziehen, und den Quotienten mit negativem Exponenten stehen zu lassen; z. B.:

$$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}; \qquad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{1}{12}}$$

Ist also ein negativer Exponent durch die Division zweier Potenzen von gleicher Wurzel entstanden, so will dies weiter nichts sagen, als daſs der Divisor mehr Faktoren hatte, als der Dividend, und zwar soviel mehr, als der negative Exponent Einheiten hat. Eine Gröſse mit negativem Exponenten ist daher selbst nicht negativ, sondern immer gleich der Einheit, dividiert durch dieselbe Gröſse mit positivem Exponenten, nämlich:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \qquad x^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}}; \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \tfrac{1}{4}; \qquad 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Da die negativen Exponenten ebenso wie die gebrochenen den allgemeinen Regeln der Potenzrechnung unterworfen sind, so pflegt man manchmal, ohne durch die Division dazu veranlaſst zu sein, der bloſsen Gleichförmigkeit wegen, eine als Nenner stehende Potenz mit umgekehrtem Vorzeichen ihres Exponenten, in den Zähler zu setzen. So kann man z. B. statt: $\frac{a^3 x^4}{y^5}$, auch ohne Bruch so schreiben: $a^3 x^4 y^{-5}$.

Sind Dividend und Divisor gleich groſs, so ist der Quotient immer $= 1$, z. B.:

$$\frac{a^7}{a^7} = 1; \qquad \frac{x^n}{x^n} = 1;$$

die allgemeine Regel giebt aber in diesem Fall 0 zum Exponenten;

$$\text{z. B.:} \quad \frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0; \qquad \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0.$$

Eine Gröſse mit 0 als Exponent muſs also immer der Einheit gleich gesetzt, und nicht mit 0 verwechselt werden; z. B.:

$$a^0 = 1; \quad x^0 = 1; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1; \quad 1^0 = 1.$$

206.

Daſs übrigens die im vorigen und vorvorigen Paragraphen gegebenen Regeln ganz allgemein, mithin auch auf negative (inverse) Exponenten anwendbar sind, und man sich nur streng an die gegebene Theorie zu halten braucht, ist einzusehen. So ist z. B.:

Multipl. $\begin{cases} a^7 \cdot a^{-4} = a^{7-4} = a^3; & \text{weil: } a^7 \cdot a^{-4} = a^7 \cdot \dfrac{1}{a^4} = a^3; \\ a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-3-2} = a^{-5}; & \text{weil: } a^{-3} \cdot a^{-2} = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5}; \end{cases}$

Divis. $\begin{cases} \dfrac{a^7}{a^{-4}} = a^{7-(-4)} = a^{11}; & \text{weil: } \dfrac{a^7}{a^{-4}} = a^7 : \dfrac{1}{a^4} = a^7 \cdot \dfrac{a^4}{1} = a^{11}; \\ \dfrac{a^{-4}}{a^{-7}} = a^{-4-(-7)} = a^3; & \text{weil: } \dfrac{a^{-4}}{a^{-7}} = \dfrac{1}{a^4} : \dfrac{1}{a^7} = \dfrac{1}{a^4} \cdot \dfrac{a^7}{1} = a^3; \end{cases}$

Allgemein:

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}; \qquad \frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m};$$

$$a^m a^{-1} = a^{m-1}; \qquad \frac{a}{a^n} = a^{1-n};$$

$$\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{-n+m} = a^{m-n}; \qquad \frac{a^n}{a} = a^{n-1};$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a} = a^{\frac{m}{n}-1} = a^{\frac{m-n}{n}}; \qquad \frac{a}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{1-\frac{m}{n}} = a^{\frac{n-m}{n}};$$

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m; \qquad \frac{a^m}{a^{m-n}} = a^{m-m+n} = a^n;$$

$$a^{m-1} \cdot a^{1-m} = a^0 = 1; \qquad 2x^6(3x - 4x^3) = 6x^7 - 8x^9;$$

$$\frac{6a^5}{9a^9} = \frac{2}{3a^4} = \tfrac{2}{3}a^{-4}; \qquad \frac{4a^5b^7c^3}{2ab^4c^3} = 2a^4b^3;$$

$$(2a^3b^5 - 3ab^{-4})(5a^{-2}b^3 + ab^4) = 10ab^8 + 2a^4b^9 - 15a^{-1}b^{-1} - 3a^2.$$

207.

U m e i n e P o t e n z n o c h m a l s a u f e i n e P o t e n z z u e r h e b e n , b r a u c h t m a n n u r d e n u r s p r ü n g l i c h e n E x p o n e n t e n m i t d e m n e u e n z u m u l t i p l i z i e r e n . Soll z. B. a^4 auf die dritte Potenz erhoben werden, so deutet man dies durch $(a^4)^3$ an, und man hat dann:

$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad \text{denn } (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4};$$

$$(a^{-3})^2 = a^{-6}; \qquad \text{denn } (a^{-3})^2 = a^{-3} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6};$$

$$(a^{\frac{3}{8}})^2 = a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{3}{4}}; \quad \text{denn } (a^{\frac{3}{8}})^2 = [(\sqrt[8]{a})^3]^2 = (\sqrt[8]{a})^6 = a^{\frac{6}{8}}.$$

Allgemein:

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^n = \frac{a^{mn}}{b^{nn}};$$

$$[(a^m)^n]^p = a^{mnp}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m; \qquad (a^{\frac{2}{3}})^3 = a^2; \text{*)}$$

208.

Soll umgekehrt aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten zu dividieren, und die Division, wenn sie nicht vollzogen werden kann, blofs anzudeuten. Beispiele:

$$\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3; \qquad \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}};$$

$$\sqrt[3]{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}}; \qquad \sqrt[3]{a^{\frac{6}{7}}} = a^{\frac{2}{7}};$$

$$\sqrt{5^{\frac{3}{8}}} = 5^{\frac{3}{16}}; \qquad \sqrt[5]{a^{15}} = a^3;$$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \qquad \sqrt[n]{a^{m+1}} = a^{\frac{m+1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}; \qquad \sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m; \qquad \sqrt{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{2}} = a^n$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2; \qquad \sqrt{a^{-4}} = a^{-2}.$$

---

*) $(a^3)^3 = a^9; \qquad a^{3^3} = a^{27};$

$(10^{10})^{10} = 10^{100}; \qquad 10^{10^{10}} = 10^{10000000000};$

$(\sqrt{2})^2 = 2; \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = 2; \qquad \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3} = 3.$

209.

Um eine aus Faktoren bestehende Gröſse auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur jeden Faktor besonders zu potenzieren. So ist z. B.:

$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$; denn $(2 \cdot 3)^3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3$;

Allgemein: $(abc)^n = a^n\, b^n\, c^n$.

Beispiele:

$$(a^3 b^5)^3 = a^9 b^{15}; \qquad (\tfrac{2}{3}\sqrt{a})^2 = \tfrac{4}{9}a;$$

$$(\tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2; \qquad (\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{x})^3 = \frac{x}{125};$$

$$(\tfrac{1}{3}\sqrt{a})^2 = \tfrac{1}{9}a; \qquad (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

210.

Umgekehrt wird aus einer, aus Faktoren bestehenden oder zuvor in Faktoren zerlegten Gröſse eine Wurzel gezogen, wenn man sie aus jedem Faktor besonders zieht. Wenn das $\sqrt{\ }$ Zeichen vor einer aus Faktoren bestehenden, mithin einteiligen Gröſse steht, so ist die Klammer überflüssig. Statt $\sqrt{(abc)}$ schreibt man kurz: $\sqrt{abc}$; z. B.:

$$\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} = ab^2 c^3;$$

Allgemein: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Eine Gröſse, welche auf die $n$te Potenz erhoben, die Gröſse ab giebt, ist die $n$te Wurzel aus ab. Da nun (§ 209) $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$, so ist auch umgekehrt: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Beispiele:

$$\sqrt{\frac{a^2 b^4}{c^6 x^2}} = \frac{ab^2}{c^3 x}; \qquad \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^6}} = \frac{3a}{2b^2}.$$

211.

1) Läſst sich eine Gröſse unter dem Wurzelzeichen in zwei solche Faktoren zerlegen, daſs aus dem einen die Wurzel rational ist, so kann man aus diesem Faktor die Wurzel wirklich ziehen und vor dem andern das Wurzelzeichen stehen lassen und davor die ausgezogene Wurzel als Koefficient setzen, z. B.:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

Hierdurch können Wurzelgröſsen oftmals bedeutend vereinfacht und zusammengezogen werden.

Wurzelgröſsen heiſsen nämlich alle solche mit dem Wurzelzeichen behafteten Ausdrücke, aus welchen sich die verlangte Wurzel nicht wirklich ziehen, sondern nur andeuten läſst, wozu also eigentlich auch die Potenzen mit gebrochenen Exponenten und die irrationalen Gröſsen zu rechnen sind. Wurzelgröſsen sind z. B.:

$$\sqrt[3]{a};\ \sqrt{a};\ a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3};\ \sqrt{45};\ \sqrt{27}\ \&c. \qquad (\S\ 183.)$$

Gleichnamig heiſsen Wurzelgröſsen, wenn die Gröſsen unter dem Wurzelzeichen und die Wurzelexponenten dieselben sind, die Koefficienten vor dem Wurzelzeichen mögen so verschieden sein als sie wollen; z. B.: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind gleichnamig; ebenso $3\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$; oder $\sqrt{ab}$, $2\sqrt{ab}$; aber $2\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$ sind ungleichnamig. Beispiele:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$
$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}; \qquad \sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b};$$
$$\sqrt{a^4 b^5 c^2} = \sqrt{a^4 b^4 c^2 b} = a^2 b^2 c\sqrt{b};$$
$$\sqrt[3]{24 a^7 b} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot a^6 ab} = 2a^2\sqrt[3]{3ab};$$
$$2\sqrt{18 x^2 y^5} = 2\sqrt{9 \cdot 2x^2 \cdot y^4 \cdot y} = 6xy^2\sqrt{2y};$$
$$\sqrt[n]{a^{m+n} b^{2n}} = \sqrt[n]{a^m a^n b^{2n}} = ab^2\sqrt[n]{a^m}.$$

2) Umgekehrt können Faktoren auſser dem Wurzelzeichen unter dasselbe gebracht werden, wenn man sie zuvor auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt; z. B.:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}; \qquad a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b};$$
$$2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}; \qquad a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b};$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}; \qquad x\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x^{n+1}}.$$

212.

Rechnung mit Wurzelgröſsen. Man merke sich, daſs die Einfachheit einer Reduktion nicht von dem Grade der Exponenten, sondern von der kleinsten Anzahl Glieder und Wurzelzeichen abhängt. Denn, werden Potenzen und Wurzelgröſsen wirklich in Zahlen berechnet, so geschieht dies doch immer vermittelst der Logarithmen, und da verursacht die Ausziehung einer Wurzel vom hundertsten Grade nicht mehr Arbeit, als die vom zweiten Grade.

BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

1) *Addition* und *Subtraktion.* Sind die Wurzelgröſsen ungleichnamig, so kann man diese Operationen nur andeuten; sind sie aber gleichnamig, oder lassen sie sich gleichnamig machen, so braucht man bloſs die Koefficienten zu addieren oder subtrahieren.

Beispiele:

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{5}+\sqrt{6}; \qquad 2a^{\frac{2}{3}}-5a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{2}{3}}=3a^{\frac{2}{3}};$$

$$2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}=2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}; \qquad a\sqrt{h}-b\sqrt{h}=(a-b)\sqrt{h};$$

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}; \qquad ax^{\frac{m}{n}}-bx^{\frac{m}{n}}=(a-b)x^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}=\sqrt{50}; \quad (\S\,211, 2)$$

$$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}=2\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{4\cdot 3}=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0;$$

$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}.$$

2) *Multiplikation.* Man gebe den Wurzelgröſsen einerlei Wurzelexponent (§ 203), alsdann braucht man nur ein Wurzelzeichen, unter welches man sämtliche Gröſsen als Faktoren zusammenstellen kann; die etwaigen Faktoren auſser den Wurzelzeichen muſs man besonders miteinander multiplizieren und ihr Produkt vor das eine Wurzelzeichen setzen. Beispiele:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}; \qquad \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{6}}\cdot b^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{a^3 b^2};$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}; \qquad 2\sqrt{a^3b}\cdot 3\sqrt{ab}=6a^2b;$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=6; \qquad 3\sqrt{a}\cdot 5\sqrt[3]{b}=15\sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$2\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{b}=6\sqrt{ab}; \qquad \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x^{m+1}};$$

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}=a; \qquad 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=15;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2; \qquad \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a+\sqrt{ab};$$

$$a\sqrt{b}\cdot b\sqrt{a}=ab\sqrt{ab}; \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b; \ (\S\,91.)$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y \ \ (\S\,186).$$

3) *Division.* Sind die Wurzelexponenten im Dividend und Divisor gleich oder gleich gemacht, so braucht man nur ein Wurzelzeichen. Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}; \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}}; \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=1; \quad (\S\,180, 2.)$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\tfrac{8}{18}}=\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\tfrac{2}{3}; \qquad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{12}}=1;$$

$$\frac{2\sqrt{27}}{3\sqrt{12}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{27}{12}} = \tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2} = 1;$$

$$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{45}{5}} - \sqrt{\tfrac{20}{5}} = 3-2 = 1.$$

213.

Die allgemeine Aufgabe, eine beliebig vielteilige Gröſse auf eine Potenz zu erheben und umgekehrt daraus eine Wurzel zu ziehen, gehört in die Analysis, wo sie mit Hilfe des Newtonschen oder sogenannten binomischen Lehrsatzes sehr leicht gelöst wird. Für die Elemente ist es hinreichend, die Regeln anzugeben, nach welchen man die zweite und dritte Potenz bildet. Für die Bildung der zweiten Potenz ergiebt sich folgendermaſsen ein sehr leicht zu erkennendes Gesetz.

Es möge allgemein $a+b+c+d+\ldots$ eine vielteilige Gröſse bedeuten. Entwickeln wir deren Quadrat zuerst durch wirkliche Multiplikation, indem wir die einzelnen Produkte, wie angegeben, untereinander ordnen, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d+e+\ldots \\ a+b+c+d+e+\ldots \end{array}\right\}\text{ Faktoren}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a^2 & +ab & +ac & +ad & +ae+\ldots \\ \hline
ab & +b^2 & +bc & +bd & +be+\ldots \\ \hline
ac & +bc & +c^2 & +cd & +ce+\ldots \\ \hline
ad & +bd & +cd & +d^2 & +de+\ldots \\ \hline
ae & +be & +ce & +de & +e^2+\ldots
\end{array}$$

Aus den je zwei und zwei, als gleich bezeichneten Reihen ergiebt sich nun die anschauliche, leicht zu behaltende Regel, nach welcher man das Quadrat einer vielteiligen Gröſse gleich aus dem Gedächtnis niederschreiben kann, nämlich: **das Quadrat einer vielteiligen Gröſse besteht aus den Quadraten eines jeden Teils, und den doppelten Produkten eines jeden Teils in jeden nachfolgenden.** Haben einige Teile das Minus-Zeichen, so muſs man sich erinnern, daſs eine gerade Anzahl Minus-Zeichen in den zusammentretenden Faktoren, plus, eine ungerade Anzahl aber minus giebt, und die Quadrate stets positiv sind. **Beispiele:**

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (x+\frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4};$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (x-\frac{p}{2})^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4};$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2; \qquad (x-\tfrac{2}{3}a)^2 = x^2 - \tfrac{4}{3}ax + \tfrac{4}{9}a^2;$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1; \qquad (3ax+b)^2 = 9a^2x^2 + 6abx + b^2;$$

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2; \qquad (x^m + a)^2 = x^{2m} + 2ax^m + a^2;$$

$$(x+\tfrac{1}{2})^2 = x^2 + x + \tfrac{1}{4}; \qquad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y;$$

$$x^2 - (a-x)^2 = x^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = 2ax - a^2;$$

$$b^2 - a^2 - c^2 + 2ac = b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac) = b^2 - (a-c)^2;$$

$$\begin{aligned} b^2 - (a-c)^2 &= [b + (a-c)]\,[b - (a-c)] \\ &= (b + a - c)(b - a + c). \qquad (\S\ 91.) \end{aligned}$$

2) Ebenso könnte man auch zur Bildung des Kubus eine allgemeine Regel aufsuchen. Diese ist jedoch viel zu weitläufig. Muſs der Kubus einer vielteiligen Gröſse entwickelt werden, so bilde man nach dem Vorhergehenden erst das Quadrat und multipliziere dieses nochmals mit der Basis. In den Elementen wird selten und nie mehr als der Kubus einer zweiteiligen Gröſse verlangt und hiefür ist die Formel § 198 angegeben, bei welcher nur noch die oben gemachte Bemerkung über die gerade und ungerade Anzahl Minus-Zeichen zu beachten ist. Beispiele:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a^m - b^n)^3 = a^{3m} - 3a^{2m}b^n + 3a^mb^{2n} - b^{3n}.$$

214.

Die Regeln für die umgekehrte Aufgabe: aus einer vielteiligen Gröſse die Quadrat- und Kubikwurzel zu ziehen, folgen unmittelbar aus den vorhergehenden. Ein Geübterer wird jedoch keine Regeln nötig haben, sondern die Wurzel, wenn sie möglich ist, gleich auf den ersten Blick erkennen. Selten ist es übrigens möglich, die Wurzeln auszuziehen. Im allgemeinen kann man es nur andeuten, indem man das Wurzelzeichen vor die in Klammern geschlossene mehrteilige Gröſse setzt, oder sie mit gebrochenen Exponenten schreibt, mit welchen man dann geradeso wie mit einteiligen Wurzelgröſsen oder Potenzen rechnet.

Um z. B. die Quadratwurzel aus der zweiteiligen Gröſse $a+b$ anzudeuten, schreibt man: $\sqrt{(a+b)}$, oder $\sqrt{a+b}$, oder $(a+b)^{\frac{1}{2}}$. Anfänger pflegen oft $\sqrt{(a+b)}$ mit $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ zu verwechseln.

Den grofsen Unterschied zeigen folgende Zahlen-Beispiele:

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=7; \qquad \sqrt{25}-\sqrt{16}=1;$$
$$\sqrt{(16+9)}=5; \qquad \sqrt{(25-16)}=3;$$
$$16+\sqrt{9}=19; \qquad \sqrt{16+9}=13.$$

Hinsichtlich der Wurzel-Ausziehung merke man noch: da jede Potenz einer einteiligen Gröfse wieder einteilig ist, das Quadrat einer zweiteiligen Gröfse aber drei Teile hat, worunter zwei vollkommene positive Quadrate, und der Kubus einer zweiteiligen Gröfse vier Teile hat, worunter zwei Kuben sind, so folgt, dafs aus keiner zweiteiligen Gröfse eine Quadratwurzel möglich ist, und dafs die Quadratwurzel aus einer dreiteiligen Gröfse, wenn sie überhaupt möglich ist, immer zweiteilig sein mufs. Diese beiden Teile findet man dann leicht aus den beiden Gliedern, welche vollkommene Quadrate sind; denn die Wurzeln aus beiden gezogen und durch das Vorzeichen des dritten Gliedes vereinigt, müssen, ins Quadrat erhoben, dem vorgegebenen vollkommen gleich sein, wo nicht, so ist die Wurzel als irrational zu betrachten. Ein Gleiches gilt von der Kubikwurzel. Beispiele (vergl. § 324):

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=x+y;$$
$$\sqrt{9x^2-6xy+y^2}=\sqrt{(3x-y)^2}=3x-y;$$
$$\sqrt{x^2+px+\tfrac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2};$$
$$\sqrt{(1-2x+x^2)}=\sqrt{(1-x)^2}=1-x;$$
$$\sqrt{x^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{4}{9}}=\sqrt{(x-\tfrac{2}{3})^2}=x-\tfrac{2}{3};$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x^2+4ax+x^2}&=\sqrt{a^2+4ax+x^2}\\ \sqrt{x^2+2xy-y^2}&=\sqrt{x^2+2xy-y^2}\\ \sqrt{a^2+b^2}&=\sqrt{a^2+b^2}\\ \sqrt{a^2-b^2}&=\sqrt{(a+b)(a-b)}\end{aligned}\right\}\ \text{Wurzelgrößen (§ 211.)}$$

$$\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$\sqrt{(x+y)^3}=\sqrt{(x+y)^2(x+y)}=(x+y)\sqrt{x+y};$$
$$\sqrt[3]{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)}=\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y;$$
$$\sqrt[3]{(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)}=\sqrt[3]{(a-x)^3}=a-x;$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[3]{(a^3+b^3)}&=(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}\\ \sqrt[3]{(a^3-y^3)}&=(a^3-y^3)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\}\ \text{Wurzelgrößen}$$

Wie die Quadratwurzel aus vielgliedrigen Ausdrücken analog dem in § 191 gelehrten Verfahren gefunden werden kann, zeigt § 324.

215.

Folgende Reduktionen und Form-Veränderungen verdienen noch beachtet zu werden:

1) Wenn der Nenner eines Bruchs eine einteilige Wurzelgröſse ist, so kann man denselben rational machen, indem man Zähler und Nenner mit einer solchen gebrochenen Potenz des Nenners multipliziert, wodurch das Wurzelzeichen im Nenner wegfällt; z. B.:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{72}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^2};$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2};\qquad \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{a}}=\frac{a^1}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2};$$

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{(a+x)(a-x)}}{a-x}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x};$$

2) Ist der Nenner eine zweiteilige Wurzelgröſse, aber nur vom 2ten Grade, so muſs man das Vorzeichen von einem Gliede entgegengesetzt nehmen. (§ 91.) Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y};$$

$$\frac{x}{a+\sqrt{x}}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{a^2-x}$$

3) Wurzelgröſsen kann man immer auf einerlei Nenner bringen; z. B.:

$$\sqrt{ax}-\frac{ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{(a+\sqrt{ax})\sqrt{ax}-ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{a\sqrt{ax}}{a+\sqrt{ax}};$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

4) Verschiedene Reduktionen:

$$\frac{\sqrt{9y^2(a^2-x^2)}}{y\sqrt{a+x}}=\frac{3y\sqrt{(a+x)\cdot(a-x)}}{y\sqrt{a+x}}=3\sqrt{a-x};$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)}}=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$$

$$(a+x)^m(a+x)^n=(a+x)^{m+n};\quad \frac{(a+x)^m}{(a+x)^n}=(a+x)^{m-n}$$

$$([a+x]^m)^n=(a+x)^{mn};\quad \sqrt[n]{(a+x)^m}=(a+x)^{\frac{m}{n}};$$

$$a^m\left(1+\frac{x^m}{a^m}\right)=a^m+x^m;\quad a^m-x^m=a^m\left(1-\frac{x^m}{a^m}\right);$$

$$\sqrt[3]{(a^3-x^3)}=a\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)}\quad \sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)};$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;\ \text{folglich ist auch:}$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b};\quad \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b};$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{x^2+2x+1-4}{x^2+4x+4+x+2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+2)^2+x+2}$$

$$=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+2)(x+2+1)}=\frac{x-1}{x+2}.$$

216.

Bei der Berechnung der Potenzen und Wurzeln hat man endlich noch auf die Vorzeichen derselben zu achten. Die Sätze darüber, welche wir absichtlich bis zu Ende dieses Kapitels verschoben haben, sind folgende fünf:

1) Von einer positiven Gröſse ist jede Potenz wieder positiv, $(+a)^n=+a^n$.

2) Von einer negativen Gröſse aber ist jede gerade Potenz positiv, jede ungerade negativ; denn eine gerade Anzahl Faktoren mit dem Minus-Zeichen geben plus, eine ungerade Anzahl aber minus; z. B.:

$$(-3)^2=9,\ \text{denn}\ (-3)^2=-3\cdot-3=9;$$
$$(-3)^3=-3\cdot-3\cdot-3=9\cdot-3=-27;$$
$$(-3)^4=\overbrace{-3\cdot-3}\cdot\overbrace{-3\cdot-3}=9\cdot9=81.$$

Bedeutet n eine beliebige ganze Zahl, so ist $2n$ immer eine gerade und $2n+1$ eine ungerade Zahl und daher allgemein:

$$(-a)^{2n}=+a^{2n};\quad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

Beispiele:

$$(-2)^3 = -8; \quad (-2)^4 = 16; \quad (-\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{9};$$

$$(-a)^{10} = +a^{10}; \quad (-a)^{11} = -a^{11}; \quad (-4)^2 = 16.$$

Man mufs also $-a^2$ wohl von $(-a)^2 = a^2$ unterscheiden, $-a^2$ lies: minus a quadrat; $(-a)^2$ lies: minus a ins quadrat. Ebenso $\frac{1}{2}a^2$ lies: ein halb a quadrat; aber $(\frac{1}{2}a)^2$ lies ein halb a ins quadrat, $= \frac{1}{4}a^2$.

3) Umgekehrt folgt, dafs jede ungerade Wurzel aus einer positiven Gröfse nicht anders als positiv, aus einer negativen Gröfse aber nur negativ sein kann; z. B.: $\sqrt[3]{(+8)} = +2$; $\sqrt[3]{(-8)} = -2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$, denn nur $(+2)^3$ giebt wieder $+8$, und nur $(-2)^3$ kann wieder -8 geben &c.

Allgemein:

$$\sqrt[2n+1]{(+a)} = +\sqrt[2n+1]{a}; \quad \sqrt[2n+1]{(-a)} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

4) Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl kann hiernach sowohl negativ als positiv sein, indem sowohl von einer negativen als positiven Gröfse jede gerade Potenz positiv ist. Da z. B. $(+3)^2 = (-3)^2 = 9$, so ist umgekehrt $\sqrt{9} = \pm 3$, lies: plus oder minus 3. Ebenso $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$; $\sqrt{16} = \pm 4$; $\sqrt[4]{81} = \pm 3$, denn $(+3)^4 = (-3)^4 = +81$.

Allgemein:

$$\sqrt[2n]{(+a)} = \pm\sqrt[2n]{a}.$$

Anmerkung. In den vorhergehenden und den meisten nachfolgenden Beispielen ist der Einfachheit wegen nur ein und zwar das obere Vorzeichen gesetzt. In der Praxis darf man aber nie vergessen, vor jede ausgezogene gerade Wurzel, so lange man noch nicht weifs, welches Vorzeichen ihr zukommt, immer das doppelte Vorzeichen zu setzen. Andere vorliegende Umstände müssen dann erst entscheiden, ob das obere oder untere Zeichen, der Natur der Sache gemäfs, vorzugsweise gilt, oder ob es gleichgültig ist, in welchem Sinne eine Wurzel mit doppeltem Vorzeichen genommen wird. Stellt sich z. E. im Laufe der Rechnung das Wurzelzeichen mit geradem Exponenten vor eine aus $-a$ entstandene gleich hohe gerade Potenz, so darf nur, eben weil man es weifs, das untere Zeichen genommen werden, und umgekehrt; z. B.:

$$\sqrt{-a \cdot -a} = \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a.$$

*5) Endlich kommt noch der Fall vor, dafs sich das Wurzelzeichen mit geradem Exponenten vor eine negative Zahlt stellt,

z. B.: $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt{-a}$; oder, da jede gerade Wurzel das doppelte Vorzeichen haben muſs, $\pm\sqrt{-4}$; $\pm\sqrt{-a}$ &c. Da nun aber keine Zahl, sie möge + oder — zum Vorzeichen haben, auf eine gerade Potenz erhoben, eine negative Zahl geben kann, so folgt sogleich, daſs aus einer negativen Zahl eine gerade Wurzel nicht wirklich gezogen, sondern nur angedeutet werden kann; z. B.: $\sqrt{-4}=\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-5}=\sqrt[4]{-5}$; $\sqrt[6]{-a}=\sqrt[6]{-a}$; denn es ist keine positive oder negative Zahl denkbar, welche auf die 2te, 4te oder 6te Potenz &c. erhoben, -4, -9, -5 &c. geben könnte. Solche Gröſsen-Ausdrücke, wie $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a^2}$, nennt man imaginaire, (richtiger laterale) Gröſsen. (S. § 325 und 326).