Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Fünfzehntes Buch. Vorläufige Begriffe von den Potenzen und Wurzeln, Ausziehung [...]

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Visual Library

Fünfzehntes Buch.

Vorläufige Begriffe von den Potenzen und Wurzeln. Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

174.

Wenn eine Zahl mehrmals mit sich selbst multipliziert werden soll, so wird dies kurz dadurch angedeutet, daſs man die Zahl nur einmal hinschreibt und oben rechts und etwas kleiner geschrieben diejenige Zahl setzt, welche angiebt, wie oft die unter ihr stehende Grundzahl als Faktor zu setzen ist.

Soll z. E. die Zahl 7 fünfmal als Faktor gesetzt werden, so schreibt man statt $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ kürzer: 7^5. Hiernach bedeutet also 3^3 soviel als $3 \cdot 3 \cdot 3$; $a^4 = aaaa$. Allgemein: a^n daſs a $n$mal als Faktor zu setzen ist.

175.

Jeder solcher Ausdruck wie 7^5, 3^3, a^4, a^n &c., sowie auch jedes aus gleichen Faktoren entwickelte Produkt heiſst, in Beziehung auf die mehrmals als Faktor gesetzte Zahl, eine Potenz derselben. Die Zahl selbst hingegen heiſst die Basis oder Grundzahl der Potenz, und die Zahl, welche angiebt, wie oft die Wurzel als Faktor zu setzen ist, der Exponent der Potenz. In dem Ausdruck 2^3 ist also 2 die Basis, 3 der Exponent und 2^3 oder das wirklich berechnete Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ die Potenz. Man muſs also Exponenten wohl von Koefficienten unterscheiden. So ist z. B.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, \text{ aber } 3 \cdot a = a + a + a.$$

Anmerkung. Das Potenzieren ist also eine vereinfachte Multiplikation gleicher Faktoren, daher die 5. Spezies.

176.

Potenzen von verschiedenen Basen und Exponenten können, entwickelt, einerlei Gröſse geben. Es ist z. B. $2^6 = 8^2 = 4^3 = 64$; $3^4 = 9^2 = 81$. Man benennt daher die Potenzen nach ihrer Basis und dem Grade ihres Exponenten. So ist z. B. 64 die 6te Potenz von 2, die 2te Potenz von 8, die 3te Potenz von 4; ebenso ist 81 die 4te Potenz von 3, oder die 2te Potenz von 9 &c. Allgemein: a^n lies: a zur $n$ten Potenz, oder kurz: a zur $n$ten (oder a hoch n); 7^5 lies: 7 zur fünften (oder 7 hoch 5).

Die 2. Potenz einer Gröſse nennt man gewöhnlich das Quadrat, die 3. Potenz den Kubus derselben. Diese Ausdrücke sind der Geometrie entlehnt. Das Quadrat von a (die 2. Potenz von a) ist aa oder a^2; man liest letzteren Ausdruck: „a Quadrat". Der Kubus von a (die 3. Potenz von a) ist aaa oder a^3, gelesen: „a zur 3ten" oder „a Kubus".

177.

Sucht man umgekehrt die Basis einer Potenz aus der Potenz und ihrem Exponent, so nennt man diese 6. Spezies: Radizieren oder Wurzelausziehen. Wäre z. B. in $7^3 = 343$ (es ist $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$) die Basis 7 aus 343 und 3 zu suchen, so schreibt man $\sqrt[3]{343} = 7$ und nennt 343 die Wurzelbasis, 3 (die Zahl, welche den Grad der Wurzel angiebt) den Wurzelexponent, $\sqrt[3]{343}$ oder die berechnete Zahl 7: Wurzel und liest jenen Ausdruck $\sqrt[3]{343}$: „3te Wurzel aus 343". Ebenso folgt aus $2^6 = 64$: $\sqrt[6]{64} = 2$, gelesen; „6te Wurzel aus 64 = 2".

Das Zeichen $\sqrt{\ }$ ist aus dem r des Wortes *radix* (Wurzel) entstanden. Offenbar sind, wie aus der Entstehung folgt, Potenzieren und Radizieren entgegengesetzte Operationen und können daher auch zur gegenseitigen Probe dienen. So ist $\sqrt[6]{64} = 2$, weil die Wurzel 2 mit dem Wurzelexponent 6 potenziert die Wurzelbasis 64 giebt ($2^6 = 64$). Ebenso ist $\sqrt[4]{81} = 3$ richtig, weil $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

178.

Für die 2. Wurzel schreibt man nicht $\sqrt[2]{\ }$, sondern nur $\sqrt{\ }$, und liest dann dieses Zeichen (statt „2. Wurzel"): „Quadratwurzel", oft auch nur Wurzel, wenn damit nur die 2. Wurzel gemeint sein kann. Statt $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[2]{25} = 5$, $\sqrt[2]{a}$ schreibt man daher $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{a}$ („Quadratwurzel aus a").

Die 3. Wurzel wird auch „Kubikwurzel" genannt. Z. B. $\sqrt[3]{1000} = 10$, gelesen: „Kubikwurzel aus 1000 = 10".

179.

Jede Potenz von 1 ist = 1. So ist z. B. $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1^4 = 1$; allgemein: $1^n = 1$.

Umgekehrt ist auch jede Wurzel aus 1 = 1, z. B. $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[4]{1} = 1$. Allgemein: $\sqrt[n]{1} = 1$.

180.

1) Um einen Bruch zu potenzieren, mufs man sowohl Zähler als Nenner, jeden besonders, auf die verlangte Potenz erheben. So ist z. B.:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}; \qquad \text{denn } \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}; \qquad \text{denn } \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}; \qquad \text{denn } \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}; \quad \left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}; \qquad \left(1\tfrac{1}{4}\right)^3=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}$$

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; $\qquad \left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$

2) Umgekehrt mufs auch die Wurzel aus einem Bruche aus Zähler und Nenner besonders gezogen werden. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\tfrac{2}{3}; \qquad \sqrt[3]{\tfrac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\tfrac{2}{3};$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}=\tfrac{1}{2}; \qquad \sqrt{\tfrac{16}{25}}=\tfrac{4}{5}; \qquad \sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2};$$

$$\sqrt{\tfrac{81}{16}}=\tfrac{9}{4}; \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}}=\tfrac{3}{5}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

181.

Auf je höhere Potenzen man einen echten Bruch erhebt, je kleiner werden diese. So ist z. B. $(\frac{2}{3})^4<(\frac{2}{3})^2$.

Umgekehrt aber, je höhere Wurzeln man aus einem echten Bruche zieht, je gröfser werden diese. So ist z. B.:

$$\sqrt[4]{\tfrac{16}{81}}=\tfrac{2}{3}, \quad \sqrt[2]{\tfrac{16}{81}}=\tfrac{4}{9}, \text{ also } \sqrt[4]{\tfrac{16}{81}}>\sqrt[2]{\tfrac{16}{81}}.$$

Hingegen ist leicht einzusehen, dafs die Potenzen von Zahlen >1, immer gröfser, die höheren Wurzeln daraus immer kleiner werden. Ferner: dafs, weil jede Wurzel aus $1=1$ ist, jede Wurzel aus einer Zahl >1 auch >1 sein mufs; z. B. $\sqrt[100]{2}>1$; $\sqrt[n]{2}>1$.

*182.

Wenn man einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegeneinander sind, wie $\frac{4}{9}$ oder $\frac{9}{4}$ auf eine beliebige Potenz erhebt, so ist die Potenz wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ebenfalls Primzahlen gegeneinander sind, und der sich daher nicht weiter abkürzen läſst. (§ 319.)

Wie oft man also auch eine gemischte Zahl, wie $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{5}$, oder die dafür gesetzten Brüche $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{8}{5}$, &c. mit sich selbst multipliziert, nie kann die dadurch entstehende Potenz eine reine, ganze Zahl geben. Man hat z. B.:

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5\tfrac{1}{16}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64} = 11\tfrac{25}{64}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{6561}{256} = 25\tfrac{161}{256}$$

183.

Wenn also eine Wurzel aus einer ganzen Zahl keine reine, ganze Zahl ist, so ist sie auch keine gemischte Zahl und mithin gar nicht vorhanden. So ist z. B. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ und die Quadratwurzeln aus den zwischen 4 und 9 liegenden Zahlen müſsten also, wenn sie möglich wären, zwischen 2 und 3 fallen, mithin gemischte Zahlen sein. Nun kann aber nach vorhergehendem Paragraphen keine gemischte Zahl mit sich selbst multipliziert, eine reine ganze Zahl, wie 5, 6, 7, 8, geben. Folglich ist auch aus diesen Zahlen keine vollkommen genau durch ganze Zahlen (z. B. in Form von echten oder unechten gemeinen Brüchen) abgegrenzte Quadratwurzel möglich. Ferner, da $\sqrt[3]{8}=2$ und $\sqrt[3]{27}=3$ ist, so sind auch die Kubikwurzeln aus den zwischen 8 und 27 fallenden Zahlen unmöglich, weil sie sonst > 2 und < 3, folglich gemischte Zahlen sein müſsten, diese aber auf die dritte Potenz erhoben, keine ganze Zahl wiedergeben können.

184.

Alle solche nicht durch abgegrenzte Zahlen darstellbare Wurzeln, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ . . ., $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ . . ., $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$ . . . &c. heiſsen daher irrationale oder inkommensurabele Gröſsen, im Gegensatz der wenigen übrigen durch Zahlen darstellbaren Wurzeln, wie

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{49}{4}}$, $\sqrt[3]{8}$ &c., welche man rationale (kommensurabele) Gröfsen nennt. So ist z. B. $\sqrt{\frac{81}{16}}$ eine rationale Gröfse, indem sie mit der Bruch-Einheit $\frac{1}{4}$, welche gerade 9mal darin enthalten ist, völlig genau ausgemessen und mithin das Verhältnifs (ratio) derselben zur Einheit durch ganze Zahlen völlig genau dargestellt werden kann. Weil nämlich $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$, so verhält sich auch 1 zu $\sqrt{\frac{81}{16}}$, wie 1 zu $\frac{9}{4}$.

185.

Obgleich nun die irrationalen Gröfsen, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$ &c. sich mit keinem Teil der Einheit, theoretisch genommen, völlig genau ausmessen lassen, so kann man doch mit Hilfe der Decimalbrüche einen so grofsen Teil davon ausmessen, als für die Praxis nur immer erforderlich ist, oder dafs der an der wahren Wurzel noch fehlende Teil für die Sinne verschwindet. Multipliziert man z. B. die um kein zehn Milliontel verschiedenen Gröfsen, 2,44949 und 2,44948999··· mit sich selbst, so kommt:

$$(2{,}44949)^2 = 6{,}000001\cdots$$
$$(2{,}44948999)^2 = 5{,}9999999\cdots$$

Das erste Quadrat ist um kein Milliontel, das zweite um noch viel weniger, von der Zahl 6 verschieden. Und wenn nun auch, streng genommen, keine Zahl möglich ist, die mit sich selbst multipliziert, genau die Zahl 6 gäbe, so kann man doch in der Praxis die Zahl 2,44949 oder genauer 2,449489··· als die Quadratwurzel aus 6 betrachten. Selten wird man mehr Decimalen, deren man übrigens nach § 192 leicht beliebig viele finden kann, nötig haben. Es ist also näherungsweise

$$\sqrt{6} = 2{,}4495, \text{ oder genauer: } \sqrt{6} = 2{,}4494899\cdots$$

Wie man übrigens mit Hilfe der Logarithmen diese Decimalen findet, und überhaupt jede beliebige Potenz von einer Gröfse bildet, und umgekehrt, jede Wurzel beliebigen Grades ungemein leicht daraus ziehen kann, kann erst im 20. Buche gezeigt werden. Hier müssen wir zuerst das sehr umständliche Verfahren mitteilen, nach welchem man aus einer vorgegebenen Zahl die Quadrat- und Kubikwurzel ziehen kann. Und wenn auch der, der es bis zum 21. Buche bringt, wegen der dort gezeigten, viel bequemern Methode, von diesem Verfahren nur in Ermangelung von Logarithmentafeln Gebrauch machen wird, so ist es doch erforderlich, sich wenigstens mit der Ausziehung der Quadratwurzel bekannt zu machen. Zuvor merke man sich deshalb folgende vier Hilfssätze.

186.

Wenn man eine aus zwei Teilen bestehende Gröfse, wovon der erste allgemein a, der zweite b, und also die zweiteilige Gröfse selbst $a+b$ heifsen mag, ins Quadrat erhebt, so enthält das daraus entstehende Quadrat, wie nebenstehende Multiplikation lehrt, drei Teile, nämlich: das Quadrat des ersten Teils, das doppelte Produkt aus dem ersten und zweiten Teil und das Quadrat des zweiten Teils.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \end{array}$$

Diese kleine Formel, so wie sie hier in Worten und Zeichen ausgesprochen ist, mufs man im Gedächtnis behalten, um danach das Quadrat einer jeden andern zweiteiligen Gröfse, ohne es, wie oben, durch wirkliche Multiplikation zu suchen, gleich aus dem Gedächtnisse niederschreiben zu können; z. B.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2; \qquad (70+6)^2 = 4900 + 840 + 36.$$

187.

Um eine Zahl, welche auf Nullen endigt, auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur die Einheiten enthaltenden Ziffern auf die verlangte Potenz zu bringen und derselben die Anzahl Nullen so viel mal anzuhängen, als der Exponent Einheiten hat. So ist z. B.:

$$800^2 = 640000; \quad 200^3 = 8000000; \quad 1000^2 = 1000000.$$

188.

Das Quadrat einer jeden beliebig vielziffrigen Zahl (Basis) mufs entweder zweimal soviel Ziffern haben, als die Basis, oder zweimal soviel, weniger eine Ziffer. Das Quadrat einer jeden fünfziffrigen Zahl, z. B. von 33592, mufs entweder $2 \cdot 5 = 10$ Ziffern, oder $2 \cdot 5 - 1 = 9$ Ziffern haben, denn es fällt zwischen die Quadrate der beiden kleinsten fünf- und sechsziffrigen Zahlen 10000 und 100000. Nun wird aber das Quadrat der kleinsten fünfziffrigen Zahl (10000^2) mit ein- und zweimal vier Nullen, also mit 9 Ziffern, und das Quadrat von der kleinsten sechsziffrigen Zahl (100000^2) mit ein- und zweimal 5 Nullen, also mit 11 Ziffern, geschrieben.

Die Quadrate aller einziffrigen Zahlen und umgekehrt die rationalen Wurzeln aus allen ein- und zweiziffrigen Zahlen liegen im Einmaleins und können daher als bekannt vorausgesetzt werden.

189.

Wenn eine vollkommene Quadratzahl, rückwärts durchlaufen, in Klassen von je zwei Ziffern geteilt wird (die erste, links stehende Klasse kann aber auch nur eine Ziffer bekommen), so mufs die Quadratwurzel aus dieser Zahl genau so viele Ziffern haben, als

Klassen vorhanden sind, und die erste Ziffer der Wurzel mufs die gröfstmöglichste einziffrige Wurzel aus der ersten Klasse sein. Die Quadratwurzel aus 80945678 z. B. mufs vier Ziffern haben, und die erste mufs 8 sein. Denn diese Zahl giebt eingeteilt vier Klassen und 8 ist die gröfstmöglichste Wurzel aus 80:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 81 & 00 & 00 & 00 = 9000^2 \\ 80 & 94 & 56 & 78 = (8xyz)^2 \quad (\S\ 187) \\ 64 & 00 & 00 & 00 = 8000^2 \end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 80945678 fällt also zwischen 8000 und 9000; indem 8000 zu klein und 9000 zu grofs ist. Um nun aber auch die folgenden zweite, dritte und vierte hier durch x, y, z angedeuteten Ziffern nach bestimmten Regeln finden zu können, müssen wir erst das Gesetz aufsuchen, nach welchem sich das Quadrat von einer gegebenen Basis bildet, und namentlich darauf achten, wie die erste Ziffer und die zweite, die beiden ersten und die dritte, die drei ersten und die vierte &c. dazu beitragen, um dann rückwärts aus den bekannten anfänglichen Ziffern der Basis die folgende unbekannte ableiten zu können.

190.

Erhebt man beliebige zwei-, drei-, vierziffrige Basen, z. B. 76, 764, 7643, ins Quadrat, indem man der gröfsern Anschauung wegen die letzte Ziffer von den übrigen trennt, mithin die Basen als zweiteilige Gröfsen ausdrückt, nämlich:

$$76^2 = (70+6)^2; \quad 764^2 = (760+4)^2; \quad 7643^2 = (7640+3)^2$$

Entwickeln wir die Quadrate nach der Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und stellen dann die drei Teile derselben, wie bei No. 1, 2, 3 geordnet, untereinander, so lehrt die Anschauung: dafs, wenn die Basis zwei Ziffern hat (No. 1), das Quadrat der ersten Ziffer ganz in der ersten Klasse liegt, das doppelte Produkt aus der ersten und zweiten Ziffer sich bis in die erste Ziffer der zweiten Klasse erstreckt und das Quadrat der zweiten Ziffer ganz in der zweiten Klasse liegt. Ferner, dafs (No. 2) das Quadrat der beiden ersten Ziffern der Basis in die beiden ersten Klassen fällt, das doppelte Produkt derselben mit der dritten multipliziert, sich bis in die erste Ziffer der dritten Klasse erstreckt und das Quadrat der dritten Ziffer in der dritten Klasse liegt &c. Kurz: dafs die n ersten Klassen einer Zahl kein gröfseres Quadrat enthalten können, als das von den n ersten Ziffern der Basis, und mithin auch umgekehrt, die gröfstmöglichste Quadratwurzel aus den n ersten Klassen gezogen, die n ersten Ziffern der gesuchten Wurzel sind.

No. 1.		No. 2.		No. 3.	
$(\overset{a}{70}+\overset{b}{6})^2$		$(\overset{a}{760}+\overset{b}{4})^2$		$(\overset{a}{7640}+\overset{b}{3})^2$	
$a^2 = 49$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 5776$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 583696$	$\dot{0}\dot{0}$
$2ab = 8$	$4\dot{0}$	$2ab = 60$	$8\dot{0}$	$2ab = 458$	$4\dot{0}$
$b^2 =$	36	$b^2 =$	16	$b^2 =$	9
$76^2 = 5\dot{7}$	76	$764^2 = 58\vert 36$	96	$7643^2 = 58\vert 41\vert 54$	49

191.

Aus dem vorstehenden Paragraph fließen nun folgende Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel:

1) Man teile die Zahl, aus welcher eine Quadratwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke in Klassen von je zwei Ziffern; setze als erste Ziffer (a) der Wurzel, die größtmöglichste (einziffrige) Wurzel aus der ersten Klasse und subtrahiere deren Quadrat. In No. 1 und No. 2 ist die Wurzel aus der 1. Klasse: 7, daher wird $7^2 = 49$ subtrahiert.

No. 1)
$$\begin{array}{rl}
\sqrt{57|76} = & \overset{ab}{76}: \\
a^2 = 49 & :: \\
2a = 14)\ \overline{87} & : \\
2a \cdot b = 84 & : \\
\overline{36} & \\
b^2 = 36 & \\
\hline
\end{array}$$

2) Zu dem bleibenden Reste setze die erste Ziffer der folgenden Klasse, dividiere hierin mit dem Doppelten der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel ($2a$), setze den Quotienten (b) als zweite Ziffer derselben und multipliziere mit ihm das Doppelte der ersten und subtrahiere das Produkt ($2ab$).

No. 2)
$$\begin{array}{rl}
\sqrt{58|36|96} = & \overset{a}{\overbrace{\overset{a}{7}\overset{b}{6}}}\overset{b}{4} \\
a^2 = 49 & :::: \\
2a = 14)\ \overline{93} & ::: \\
2a \cdot b = 84 & ::: \\
\overline{96} & :: \\
b^2 = 36 & :: \\
2a = 152)\ \overline{609} & : \\
2a \cdot b = 608 & : \\
\overline{16} & \\
b^2 = 16 & \\
\hline
\end{array}$$

3) Zu dem Reste setze die zweite Ziffer der zweiten Klasse und subtrahiere das Quadrat der zweiten Ziffer der Wurzel (b^2).

Sind nun noch mehrere Klassen vorhanden, so braucht man nur die vorhergehenden Regeln 2. und 3. zu wiederholen, nämlich:

4) Setze zu dem etwa bleibenden Reste die erste Ziffer der dritten Klasse, dividiere hierin mit dem Doppelten der beiden gefundenen ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den bekannt

gewordenen ersten Teil a derselben ansieht), so ist der Quotient die dritte Ziffer der Wurzel, mit welcher man wie vorhin mit der zweiten verfährt, und so weiter bis zur letzten Klasse.

Um eine folgende Ziffer in der Wurzel zu finden, mufs man immer mit dem Doppelten der vorhergehenden dividieren, hier kann man aber den Quotienten leicht zu grofs annehmen, so dafs dessen Quadrat nicht subtrahiert werden kann. Dieser Irrtum entdeckt sich aber eher, als wenn man den Quotienten zu klein angenommen hat.

Multipliziert man die gefundene Quadrat-Wurzel mit sich selbst, so mufs, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, die Zahl, aus welcher sie gezogen worden, wieder kommen.

Anmerkung. Die vorhergehenden Regeln lassen sich auch ohne Hilfe der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ leicht behalten und ausüben. Die Operation selbst kann aber noch verkürzt werden, so dafs man beinahe nur halb so viele Zahlen zu schreiben braucht, wenn man, statt der ersten Ziffer einer folgenden Klasse, gleich alle beide Ziffern zu dem jedesmaligen Reste setzt, dann bis in die, durch ein Komma bezeichnete erste Ziffer dividiert, den Quotienten gleich mit sich selbst und mit dem Divisor multipliziert und beide Produkte auf einmal subtrahiert &c., wie folgende Beispiele zeigen.

$$\begin{array}{rl}
 & \phantom{\sqrt{57|}}\;\; a\,b \\
 & \sqrt{57|76} = 76; \\
a^2 = & 49 \\
2a,b = & \overline{14,6 \quad 87,6}\,(87:14=7) \\
2ab + b^2 = & 87\,6\,(=146 \cdot 6)
\end{array}$$

kürzer:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{58|36|96} = 764 \\
 & 49 \\
14,6) & \overline{93,6}\,(93:14=6) \\
 & 87\,6\,(=146 \cdot 6) \\
152,4) & \overline{6\,09,6}\,(609:152=4) \\
 & 6\,09\,6\,(=1524 \cdot 4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{58|41|54|49} = 7643; \\
 & 49 \\
14,6) & \overline{94,1}\,(94:14=6) \\
 & 87\,6\,(=146 \cdot 6) \\
152,4) & \overline{6\,55,4}\,(655:152=4) \\
 & 6\,09\,6\,(=1524 \cdot 4) \\
1528,3) & \overline{45\,84,9}\,(4584:1528=3) \\
 & 45\,84\,9\,(=15283 \cdot 3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{4|03|20|64} = 2008 \\
 & 4 \\
400,8) & \overline{32,06,4} \\
 & 32\,06\,4
\end{array}$$

$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{400} = 20$$
$$\sqrt{10000} = 100$$

192.

Um die Regel zu finden, nach welcher man eine irrationale Wurzel, z. B. $\sqrt{6}$, bis zu beliebig vielen Decimalen genau bestimmen kann, beachte man erst Folgendes. Es ist $6 = \frac{600}{100} = \frac{60000}{10000}$ &c., also (§ 180):

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{600}{100}} = \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{600}}{10} = \tfrac{24}{10} = 2,4$$

Die Wurzel aus 600 ist nämlich in ganzen Zahlen = 24, daher bis auf Zehntel genau: $\sqrt{6} = 2{,}4\ldots$

$\sqrt{6|00} = 24$
4
4,4 20,0 (20 : 4 = 4)
17 6 (= 44 . 4)

Ferner:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{60000}{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{100}$$

Nun ist in ganzen Zahlen: $\sqrt{60000} = 244$, daher bis auf Hundertel genau: $\sqrt{6} = \frac{244}{100} = 2{,}44\ldots$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich, wie man die Wurzel aus einer unvollkommenen Quadratzahl näherungsweise bis auf so viele Decimalstellen als man will, finden kann.

Man ziehe nämlich aus der vorgegebenen Zahl die Wurzel erst in ganzen Einheiten und setze danach das Decimalzeichen, hänge hierauf dem Reste zwei Nullen an und verfahre wie vorhin, indem man die beiden Nullen als die folgende Klasse betrachtet, so findet man die Zehntel; dem jetzt bleibenden Reste abermals zwei Nullen angehängt, findet man auch die Hundertel der Wurzel &c. So findet man z. B. $\sqrt{283} = 16{,}8226\ldots$

$\sqrt{2|83} = 16{,}8226\ldots$
1
2,6) 18,3 (18 : 2 = 6, 7 zu viel!)
15,6 (= 26 · 6)
32,8) 2 70,0 (270 : 32 = 8)
2 62 4 (= 328 · 8)
336,2) 7 60,0 (760 : 336 = 2)
6 72 4 (= 3362 . 2)
3364,2) 87 60,0 (8760 : 3364 = 2)
67 28 4 (= 33642 · 2)
33644,6) 20 31 60,0
20 18 67 6
12 92 40,0
&c.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
1
2,4) 100 (10 : 2 = 4)
96 (24 · 4)
28,1) 40,0 (40 : 28 = 1)
28 1 (= 281 · 1)
282,4) 11 900
11 296
2828,2) 60400
56564
28284,1) 38360,0
28284 1
10075 90,0
&c.

193.

Ist aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Quadratwurzel zu ziehen, so zieht man die Wurzel erst aus der ganzen Zahl und hängt den bleibenden Resten, statt wie vorhin zwei Nullen, immer zwei der folgenden Decimalen an. So findet man z. B. $\sqrt{312{,}506} = 17{,}677\ldots$

Ebenso findet man die Wurzel aus einem bloſsen Decimalbruch, z. B. $\sqrt{0{,}00465} = 0{,}068\ldots$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{3|12,|50|60} = 17,677\ldots \\
 & 1 \\
2,7) & 212 \\
 & 189 \\
34,6) & 235,0 \\
 & 207\,6 \\
352,7) & 27\,46,0 \\
 & 24\,68\,9 \\
3534,7) & 2\,77\,10,0 \\
 & 2\,47\,42\,9 \\
 & 29\,67\,10,0 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{0,00|46|50} = 0,06819\ldots \\
 & 36 \\
12,8) & 105,0 \\
 & 102\,4 \\
136,1) & 2\,60,0 \\
 & 1\,36\,1 \\
1362,9) & 1\,23\,90,0 \\
 & 1\,22\,66\,1 \\
 & \&c.
\end{array}$$

Es ist nämlich:

$$\sqrt{0,00465} = \sqrt{\tfrac{4650}{1000000}} = \frac{\sqrt{4650}}{1000} = \frac{68}{1000} = 0,068.$$

194.

Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, ist es am bequemsten, entweder den Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder erst Zähler und Nenner mit dem Nenner zu multiplizieren, damit die Wurzel aus dem Nenner rational wird und man nur eine Wurzel, aus dem Zähler nämlich, zu ziehen braucht. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{0,428571} = 0,654\ldots$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{\tfrac{3\,.\,7}{7\,.\,7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,582\ldots}{7} = 0,654\ldots$$

Ebenso ist:

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{2,3750} = 1,541$$

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{\tfrac{19}{8}} = \sqrt{\tfrac{38}{16}} = \frac{\sqrt{38}}{4} = \frac{6,164\ldots}{4} = 1,541\ldots$$

Zur Übung im numerischen Rechnen ziehe man folgende Wurzeln aus:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{76807696} = 8764 & \sqrt{25\tfrac{5}{7}} = 5,07092\,.. \\
\sqrt{1129969} = 1063 & \sqrt{\tfrac{3}{5}} = 0,77459\,.. \\
\sqrt{3} = 1,73205\,.. & \sqrt{13\tfrac{4}{5}} = 3,71483\,.. \\
\sqrt{5} = 2,23606\,.. & \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0,86602\,.. \\
\sqrt{8} = 2,82842\,.. & \sqrt{\tfrac{7}{25}} = 0,52915\,.. \\
\sqrt{10} = 3,16227\,.. & \sqrt{0,0004} = 0,02 \\
\sqrt{25,0400057} = 5,00399\,.. &
\end{array}$$

195.

Ausziehung der Kubikwurzel. Mit der Ausziehung der Wurzeln von höheren Graden nach der älteren, eben gezeigten Methode, nehmen die praktischen Schwierigkeiten in ungemein gröſserem Maſse zu. Schon die Ausziehung der Kubikwurzel ist so unerträglich mühsam und zeitraubend, daſs jeder, der nicht das groſse Einmaleins weiſs und eine auſserordentliche Sicherheit und Fertigkeit im Rechnen hat, sich gewiſs mit der bloſsen Theorie begnügen, und dafür mit den beiden folgenden Kapiteln vertraut machen wird. Übrigens hat die Theorie über die Ausziehung der Kubikwurzeln, sowie auch die aller höheren Grade, nicht die geringste Schwierigkeit, indem sie der vorhergehenden über die Ausziehung der Quadratwurzel durchaus ähnlich ist. Man merke sich also zunächst folgende Sätze:

196.

Der Kubus einer jeden Zahl (Basis) muſs entweder 3mal soviel Ziffern haben als die Basis, oder 3mal soviel, weniger eine, oder 3mal soviel, weniger 2 Ziffern. Der Kubus von einer vierziffrigen Zahl, 4356 z. B. hat entweder 12, 11 oder 10 Ziffern, denn er muſs zwischen die Kuben der beiden nächsten einfachen, Rangzahlen 1000 und 10000 fallen, wovon die eine ebensoviel, die andere aber eine Ziffer mehr hat, als die gegebene Basis. Nun hat aber (§ 187) der Kubus von 1000 gerade 10 und der Kubus von 10000 gerade 13 Ziffern.

Der Kubus einer jeden einziffrigen, und umgekehrt, die Kubikwurzel aus jeder vollkommenen ein-, zwei- und dreiziffrigen Kubikzahl ist mit Hilfe der folgenden Tabelle, oder auch leicht im Kopfe zu berechnen, und mithin als bekannt vorauszusetzen.

Wurzelbasis	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Kubikwurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9

197.

Wenn man also eine vollkommene Kubikzahl rückwärts in Klassen von je drei Ziffern teilt (die höchste kann auch nur eine oder zwei enthalten), so muſs die Kubikwurzel daraus gerade so viel Ziffern haben, als Klassen vorhanden sind, und die erste Ziffer muſs die möglichst gröſste (einziffrige) Kubikwurzel aus der ersten Klasse sein. Die Kubikwurzel aus 635478923 z. B. muſs 3 Ziffern haben, und 8 muſs die erste sein; denn die Zahl giebt eingeteilt 3 Klassen und der Kubus von 8, nämlich $8^3 = 512$ ist der möglichst gröſste, welcher sich von der ersten Klasse (635) subtrahieren läſst.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

$$\begin{aligned} 512|000|000 &= 800^3 \\ 635|478|923 &= (8xy)^3 \quad (\S\ 187) \\ 729|000|000 &= 900^3 \end{aligned}$$

Die Kubikwurzel aus 635478923 mufs also zwischen 800 und 900 liegen. Um nun auch die allgemeinen Regeln zu finden, nach welchen man die folgenden Ziffern x, y bestimmt, müssen wir erst das Gesetz entwickeln, nach welchem bei der Bildung eines Kubus die Ziffern der Wurzeln dazu beitragen.

198.

Erhebt man eine zweiteilige Gröfse, $a+b$, zum Kubus, indem man das Quadrat nochmals mit der Basis multipliziert; so kommt, wie nachstehende Multiplikation zeigt:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Diese Formel, welche man im Gedächtnis behalten mufs, um darnach den Kubus einer jeden andern zweiteiligen Gröfse, ohne ihn durch wirkliche Multiplikation entwickeln zu brauchen, gleich niederschreiben zu können, lautet in Worten: der Kubus einer jeden zweiteiligen Gröfse enthält folgende vier Teile: den Kubus des ersten Teils, das dreifache Produkt aus dem Quadrate des ersten Teils mit dem zweiten multipliziert, das dreifache Produkt aus dem ersten Teil mit dem Quadrate des zweiten multipliziert und den Kubus des zweiten Teils. Erheben wir nach dieser Formel beliebig vielziffrige Zahlen zum Kubus, indem wir, um den Einflufs der Ziffern aufeinander leichter zu erkennen, die Zahlen erst in zwei solche Teile zerlegen, dafs die Einer den zweiten Teil bilden, und also die vorhergehenden Ziffern, um ihren Rang zu behalten, auf eine Null endigen, und schreiben dann die vier Teile der entwickelten Kuben wie folgt untereinander:

No. 1.

$$74^3 = (\overset{a}{70} + \overset{b}{4})^3 = \left\{ \begin{array}{rr|l} & & \dots \\ 70^3 = & 343 & 000 = a^3 \\ 3 \cdot 70^2 \cdot 4 = & 58 & 800 = 3a^2b \\ 3 \cdot 70 \cdot 4^2 = & 3 & 360 = 3ab^2 \\ 4^3 = & & 64 = b^3 \\ \hline 74^3 = & 405 & 224 \end{array} \right.$$

No. 2.

$$748^3 = (\overset{a}{740} + \overset{b}{8})^3 = \left\{ \begin{array}{rr|r|l} & & & \dots \\ 740^3 = & 405 & 224 & 000 = a^3 \\ 3 \cdot 740^2 \cdot 8 = & 13 & 142 & 400 = 3a^2b \\ 3 \cdot 740 \cdot 8^2 = & & 142 & 080 = 3ab^2 \\ 8^3 = & & & 512 = b^3 \\ \hline 748^3 = & 418 & 508 & 992 \end{array} \right.$$

so wird man bei No. 1 folgendes Gesetz erkennen: der Kubus der ersten Ziffer liegt ganz in der ersten Klasse, das dreifache Produkt aus dem Quadrate der ersten Ziffer mit der 2ten multipliziert, erstreckt sich nur bis in die erste Ziffer der 2ten Klasse, das dreifache Produkt der ersten Ziffer mit dem Quadrate der 2ten multipliziert, erstreckt sich bis in die 2te Ziffer der 2ten Klasse, und der Kubus der 2ten Ziffer liegt ganz in der 2ten Klasse.

Ferner ist hiernach und nach § 187 leicht allgemein zu schliefsen: dafs, wenn eine Kubikzahl mehr als zwei Klassen hat, die erste Klasse (zwei, drei, vier ersten Klassen &c.) keinen gröfsern Kubus enthalten kann, als den von der ersten (zwei, drei, vier ersten &c.) Ziffer der Wurzel, und dafs das dreifache Produkt aus dem Quadrate der ersten (zwei, drei, vier.. ersten) Ziffer mit der folgenden multipliziert, sich bis in die erste Ziffer der 2ten (3ten, 4ten, 5ten) Klasse erstrecken mufs &c. Umgekehrt kann man also durch unmittelbare Wiederholung einer und derselben, durch die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gegebenen Regel, die Kubikwurzel aus jeder Zahl von noch so vielen Klassen finden.

199.

Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzel. 1) Man teile die gegebene Zahl, aus welcher eine Kubikwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke, in Klassen von je drei Ziffern (die erste kann aber auch zwei oder nur eine enthalten).

2) Setze als erste Ziffer der Kubikwurzel diejenige (einzifferige) Kubikwurzel, welche aus der ersten Klasse in ganzen Einheiten möglich ist, und subtrahiere diesen Kubus.

3) Setze zu dem etwaigen Reste die erste Ziffer der 2ten Klasse, dividiere hierin mit dem dreifachen Quadrate der ersten Ziffer der Wurzel, setze den Quotienten als 2te Ziffer derselben und subtrahiere das mit ihr multiplizierte dreifache Quadrat der ersten Ziffer. (Den erwähnten Quotienten, als die gesuchte folgende Ziffer der Wurzel, kann man leicht zu grofs annehmen, ein Irrtum, der sich aber weit eher entdeckt, als wenn man den Quotienten zu klein annimmt.)

4) Zu dem Reste füge jetzt die 2te Ziffer der 2ten Klasse und subtrahiere hiervon das dreifache Produkt der ersten Ziffer mit dem Quadrate der bekannt gewordenen 2ten Ziffer multipliziert.

5) Zu dem jetzt gebliebenen Reste füge die dritte Ziffer der 2ten Klasse und subtrahiere hiervon den Kubus der bekannt gewordenen 2ten Ziffer.

Sind mehr als zwei Klassen vorhanden, so mufs man die vorhergehenden Regeln 3, 4 und 5 wiederholen, nämlich: zu dem gebliebenen Reste die erste Ziffer der 3ten Klasse setzen, hierin mit dem dreifachen Quadrate der beiden ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den gefundenen ersten Teil (a) derselben ansieht) dividieren, den Quotienten als die dritte Ziffer der Wurzel setzen, und damit wie vorhin bei 3, 4, 5 verfahren.

Man sieht leicht, dafs die Arbeit mit jeder neuen Ziffer der Wurzel immer beschwerlicher wird, indem man jedesmal alle vorhergehenden quadrieren, sowie überhaupt immer gröfser werdende Produkte entwickeln mufs. Beispiele:

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt[3]{405|224} = \overset{a}{7}\overset{b}{4} \\
a^3 = 7^3 = & 343 : : : \\
\hline
3a^2 = 3 \cdot 7^2 = 147) & 622 : : \\
3a^2b = 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = & 588 : : \\
\hline
 & 342 : \\
3ab^2 = 3 \cdot 7 \cdot 4^2 = & 336 : \\
\hline
 & 64 \\
b^3 = 4^3 = & 64 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt[3]{418|508|992} = \overbrace{\overset{a}{7}\overset{b}{4}}^{a}\overset{b}{8} \\
a^3 = & 343 : : : \; : : : \\
\hline
3a^2 = 147) & 755 : : \; : : : \\
3a^2b = 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = & 588 : : \; : : : \\
\hline
 & 1670 : \; : : : \\
3ab^2 = 3 \cdot 7 \cdot 4^2 = & 336 : \; : : : \\
\hline
 & 13348 \; : : : \\
b^3 = 4^3 = & 64 \; : : : \\
\hline
3a^2 = 3 \cdot 74^2 = 16428) & 132849 : : \\
3a^2b = 3 \cdot 74^2 \cdot 8 = & 131424 : : \\
\hline
 & 14259 : \\
3ab^2 = 3 \cdot 74 \cdot 8^2 = & 14208 : \\
\hline
 & 512 \\
b^3 = 8^3 = & 512 \\
\hline
\end{array}
$$

Als Probe der richtigen Rechnung mufs die Wurzel, dreimal mit sich selbst multipliziert, die Wurzelbasis wiedergeben.

200.

Nach den vorhergehenden Regeln kann man nun auch die irrationalen Wurzeln bis auf beliebig viele Decimalen finden. Hat man nämlich erst die ganzen Einheiten der Wurzel gefunden, so hänge man der vorgegebenen Zahl beliebig viel Klassen von je drei

Nullen an, und verfahre wie vorhin, so findet man auch die Zehntel, Hundertel &c. (§ 192.)

Soll aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Kubikwurzel gezogen werden, so ziehe man sie erst aus der ganzen Zahl und hänge den Resten, statt wie vorhin jedesmal drei Nullen, drei der folgenden Decimalen an.

Ebenso verfährt man mit einem bloſsen Decimalbruch.

Ist aus einem gemeinen Bruche die Kubikwurzel zu ziehen, so ist es am bequemsten, ihn erst in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder auch die Wurzel aus dem Nenner rational zu machen, indem man Zähler und Nenner zuvor mit dem Quadrate des Nenners multipliziert. So findet man z. E.:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{9|007} = 20{,}806\,.\,. \\
 & 8 \\ \hline
3a^2 = 12) & 10 \ (10:12 = 0!) \\ \hline
3a^2 = 1200) & 10070 \\
3a^2b = & 9600 \\ \hline
 & 4700 \\
3ab^2 = & 3840 \\ \hline
 & 8600 \\
b^3 = & 512 \\ \hline
3a^2 = 129792) & 80880 \\ \hline
3a^2 = 12979200) & 80880000 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{2} = 1{,}25\,.\,. \\
 & 1 \\ \hline
3a^2 = 3) & 10 \\
3a^2b = & 6 \\ \hline
 & 40 \\
3ab^2 = & 12 \\ \hline
 & 280 \\
b^3 = & 8 \\ \hline
3a^2 = 432) & 2720 \\
3a^2b = & 2160 \\ \hline
 & 5600 \\
3ab^2 = & 900 \\ \hline
 & 47000 \\
b^3 = & 125 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{2{,}057|600} = 1{,}2\,.\,.\,. \\
 & 1 \\ \hline
3a^2 = 3) & 10 \\
3a^2b = & 6 \\ \hline
 & 45 \\
3ab^2 = & 12 \\ \hline
 & 337 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{0{,}007|040} = 0{,}19\,.\,. \\
 & 1 : \\ \hline
3a^2 = 3) & 60 \\
3a^2b = & 27 : \\ \hline
 & 334 \\
3ab^2 = & 243 \\ \hline
 & 910 \\
b^3 = & 729 : \\ \hline
 & 1810 \\
 & \&c.
\end{array}$$

Zufolge § 194 ist $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{0,8}$, oder:

$$\sqrt[3]{\tfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\tfrac{4.5.5}{5.5.5}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{5}$$

Beispiele:

$\sqrt[3]{731432701} = 901$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} = 1,44224\,..$

$\sqrt[3]{1367631} = 111.$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}} = 0,90855\,..$

$\sqrt[3]{351} = 7,054004\,..$ $\qquad$ $\sqrt[3]{6\tfrac{2}{3}} = 1,88207\,..$

$\sqrt[3]{100} = 4,641588\,..$ $\qquad$ $\sqrt[3]{0,032768} = 0,32.$