Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Vierzehntes Buch. Gleichungen ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Vierzehntes Buch.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren unbekannten Gröfsen.

159.

In allen Teilen der angewandten Mathematik und namentlich auch in allen Teilen der Naturwissenschaft, wo man nach Naturgesetzen forscht, kommen oftmals Fälle vor, wo mehrere unbekannte Gröfsen gesucht werden, deren Zusammenhang unter sich und mit den bekannten Gröfsen nicht durch eine, sondern durch mehrere zusammengehörige Gleichungen (Bedingungen) gegeben ist, aus welchen die unbekannten Gröfsen so bestimmt werden müssen, dafs sie allen Gleichungen zugleich Genüge leisten.

Seien z. E. folgende drei zusammengehörige Gleichungen gegeben, mit der Aufgabe, die Werte der darin vorkommenden unbekannten Gröfsen x, y, z so zu bestimmen, dass sie, substituiert, alle drei Bedingungen zugleich erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\\ 2x+5y-4z&=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)\\ 7x-2y+3z&=25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)\end{aligned}\right\}$$

Diese drei Gleichungen kann man sich aus einer Aufgabe, z. B. aus folgender entstanden denken: Es werden drei Zahlen von der Beschaffenheit gesucht, dafs erstens: die Summe aller drei $= 14$ ist; zweitens: das Zweifache der ersten, plus dem Fünffachen der zweiten, weniger dem Vierfachen der dritten soll $= 1$ sein und drittens: das Siebenfache der ersten weniger dem Zweifachen der zweiten, plus dem Dreifachen der dritten soll $= 25$ sein.

Diese drei zu erfüllenden Bedingungen sind, wenn die gesuchten Zahlen vorläufig mit x, y, z bezeichnet werden, durch obige drei Gleichungen dargestellt. Zugleich ist aus diesem Beispiel ersichtlich, dafs bei einem solchen System von Gleichungen x (ebenso y u. s. w.) in allen Gleichungen denselben Wert hat.

Um sich zuvor zu überzeugen, dafs die Werte, welche statt x, y, z gesetzt, wohl der einen oder der andern Gleichung Genüge leisten, deshalb aber noch nicht für alle passen, wollen wir einmal $x = 5$, $y = 3$, $z = 6$ annehmen. Die Probe zeigt, dafs diese Werte wohl für die erste und auch für die zweite Gleichung passen, jedoch nicht die dritte Bedingung erfüllen und deshalb nicht die rechten sind.

Die Werte von x, y, z, welche alle Bedingungen erfüllen, durch Versuche finden zu wollen, würde nicht allein einen großsen Zufall und Zeitverlust voraussetzen, sondern in vielen Fällen selbst unmöglich sein und man kommt deshalb auf den Gedanken: ob sich nicht ein allgemein anwendbares wissenschaftliches Verfahren erfinden läßst, nach welchem man aus mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit ebenso vielen unbekannten Grösen, diese immer mit Sicherheit bestimmen kann.

Solche sichere Methoden giebt es allerdings mehrere, von denen wir jedoch nur folgende drei, als die gewöhnlichsten, mitteilen wollen. Der Anfänger aber möge erst selbst versuchen, ob er eine solche Methode angeben kann.

160.

Erste Methode. *Elimination durch Substitution.* Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x + y + z = 14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 5y - 4z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$7x - 2y + 3z = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Wir schliefsen nun so: da jede der drei unbekannten Grösen (z. B. x) in allen drei Gleichungen einerlei Wert hat, und dieser aus jeder der drei Gleichungen gefunden werden könnte, wenn die beiden andern (y, z) erst bekannt wären, so können wir eine der (dazu bequemsten) Gleichungen auf die eine unbekannte Grösse (x) reduzieren und den für x erhaltenen Grösen-Ausdruck in die beiden andern Gleichungen anstatt x setzen (substituieren), wodurch x aus diesen beiden Gleichungen herausgeworfen (eliminiert) wird. Hierdurch erhalten wir also aus drei Gleichungen mit drei unbekannten Grösen, x, y, z, zwei neue Gleichungen mit nur zwei unbekannten Grösen, y, z.

Nach demselben Verfahren, welches man Elimination durch Substitution nennt, kann man aus den beiden neuen von x befreiten (von x eliminierten) Gleichungen, indem man eine von ihnen wieder auf eine zweite unbekannte Grösse, z. B. auf y, reduziert und den für y erhaltenen Grösen-Ausdruck statt y in die andere substituiert, wieder eine neue Gleichung bilden, welche nur noch eine unbekannte Grösse, z, enthält; diese kann also berechnet werden, und durch Rückwärtssubstituieren findet man auch die beiden andern.

Aus der ersten Gleichung folgt nämlich:

$$x = 14 - y - z \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Setzen wir nun diesen für x erhaltenen Grösen-Ausdruck $14 - y - z$ in die beiden andern Gleichungen (2) und (3) statt x, so wird durch diese Stellvertretung daraus x eliminiert, nämlich:

$$2(14-y-z)+5y-4z=1$$
$$7(14-y-z)-2y+3z=25$$

oder, indem man die Klammern auflöst und gleichnamige Glieder zusammenzieht &c., einfacher:

$$\begin{matrix} 3y-6z=-27 \\ 9y+4z=73 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} y-2z=-9 \ldots\ldots (4) \\ 9y+4z=73 \ldots\ldots (5) \end{matrix}$$

Jetzt eine dieser beiden neuen Gleichungen, z. B. (4) auf y reduziert, kommt:

$$y=2z-9 \ldots\ldots\ldots\ldots (4')$$

Diesen für y erhaltenen Ausdruck $2z-9$ statt y in (5) substituiert, kommt:

$$9(2z-9)+4z=73 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Diese sogenannte Endgleichung auf z reduziert, giebt:

$$22z=154$$
$$\text{also:}\quad z=7$$

Substituieren wir nun rückwärts diesen für z gefundenen Wert in (4'), so ist $y=2\cdot 7-9$ oder $y=5$. Endlich beide für z und y erhaltenen Werte in (1') substituiert, erhält man auch $x=14-5-7=2$. Es sind also:

$$x=2;\quad y=5;\quad z=7$$

die drei gesuchten Zahlen, welche die aufgestellten Bedingungen erfüllen.

161.

Es ist leicht einzusehen, daſs die eben gezeigte Auflösungsmethode auf jede beliebige Anzahl Gleichungen mit ebenso vielen unbekannten Gröſsen anwendbar ist. Hätte man z. B. sechs Gleichungen mit sechs unbekannten Gröſsen, x, y, z, t, v, w, so könnte man wieder eine derselben auf x reduzieren, den für x erhaltenen Ausdruck in die übrigen fünf Gleichungen substituieren, dann eine dieser fünf neuen von x befreiten Gleichungen wieder auf eine andere unbekannte Gröſse, y, reduzieren, und den für y erhaltenen Ausdruck in die übrigen vier Gleichungen substituieren u. s. f., bis man auf die Endgleichung kommt, welche nur noch eine unbekannte Gröſse enthält, und nachdem diese berechnet, findet man durch Rückwärtssubstituieren auch die übrigen. Auch wird dieses Verfahren nicht erschwert, sondern gerade umgekehrt erleichtert, wenn eine der unbekannten Gröſsen nicht in allen Gleichungen vorkommt. Alsdann wird es am bequemsten sein, diejenigen unbekannten Grössen, welche in den wenigsten Gleichungen enthalten sind, zuerst zu eliminieren. Seien z. E. die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$3x-2v=13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2y+3v=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$5y-7z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$3y-6z+5v=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die erste Gleichung auf x reduziert, giebt:

$$x = \frac{13 + 2v}{3} \dots\dots\dots\dots\dots (1')$$

Wäre nun auch in einer der drei übrigen Gleichungen die unbekannte Gröfse x enthalten, so würde man sie durch die Substitution des für dieselbe erhaltenen Ausdrucks (1') daraus eliminieren; da aber x in den übrigen nicht vorkommt, so fällt auch diese Arbeit weg. Man eliminiere also aus den drei übrigen Gleichungen die Gröfse z, weil diese nur in zwei Gleichungen vorkommt; die dritte Gleichung giebt:

$$z = \frac{5y - 25}{7} \dots\dots\dots\dots\dots (3')$$

Diesen für z erhaltenen Ausdruck in die beiden übrigen substituiert (hier also blofs in (4), weil die zweite Gleichung kein z enthält und nur wieder abgeschrieben wird), kommt:

$$3y - 6\frac{(5y - 25)}{7} + 5v = 0$$

oder ein wenig geordnet, den Nenner 7 fortgeschafft und die Klammer aufgelöst:

$$21y - 30y + 150 + 35v = 0$$
$$-9y + 35v = -150 \dots\dots (5)$$

hiezu die zweite Gleichung: $2y + 3v = 1 \dots\dots\dots (2)$

Aus (2) folgt:

$$y = \frac{1 - 3v}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (2')$$

diesen für y erhaltenen Ausdruck in (5) substituiert, kommt die Endgleichung:

$$-9\left(\frac{1 - 3v}{2}\right) + 35v = -150 \dots\dots\dots (6)$$

hieraus: $-9 + 27v + 70v = -300$

$$97v = -291$$

mithin: $v = -3$

Den Wert von v in (2') substituiert, kommt: $y = \frac{1 - 3(-3)}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$; den von y in (3') und den von v in (1') substituiert, kommt:

$$z = \frac{5.5 - 25}{7} = 0; \quad x = \frac{13 + 2. -3}{3} = 2\tfrac{1}{3}$$

Die gesuchten Werte, welche die vier vorgeschriebenen Bedingungen zugleich erfüllen, sind also:

$$x = 2\tfrac{1}{3}; \quad y = 5; \quad z = 0; \quad v = -3.$$

162.

Zweite Methode. *Elimination durch Reduktion.* Die gegebenen Gleichungen seien wieder:

$$\begin{array}{lrl} (1) & x+y+z=14 & \left.\begin{array}{l} x=14-y-z \ldots\ldots (1') \\ x=\dfrac{1-5y+4z}{2} \ldots\ldots (2') \\ x=\dfrac{25+2y-3z}{7} \ldots\ldots (3') \end{array}\right. \\ (2) & 2x+5y-4z=1 & \\ (3) & 7x-2y+3z=25 & \end{array}$$

Man reduziere, wie hier nebenstehend angedeutet, jede der gegebenen Gleichungen auf eine und dieselbe unbekannte Gröſse, x. Da nun x in allen Gleichungen denselben Wert hat, so müssen auch alle drei für x erhaltenen Ausdrücke (1′), (2′), (3′) notwendig einander gleich sein. Man kann sie also paarweise einander gleich setzen, den 1′sten dem 2′ten und den 1′sten dem 3′ten (oder auch den 2′ten dem 3′ten). Dadurch hat man also aus den drei gegebenen Gleichungen mit drei unbekannten Gröſsen, zwei neue Gleichungen, (4), (5), abgeleitet, welche nur noch zwei unbekannte enthalten, nämlich:

$$\begin{array}{ll} (4)\ 14-y-z=\dfrac{1-5y+4z}{2} & y=-9+2z \ldots (4') \\ (5)\ 14-y-z=\dfrac{25+2y-3z}{7} & y=\dfrac{73-4z}{9} \ldots (5') \end{array}$$

Jede dieser beiden neuen Gleichungen reduziere man wieder (wie nebenstehend angedeutet) auf eine andere unbekannte, y, und bilde aus den beiden für y erhaltenen und gleichwertigen Ausdrücken die Endgleichung, nämlich:

$$(6) \qquad -9+2z=\frac{73-4z}{9}$$

hieraus folgt $z=7$ und durch Rückwärtssubstituieren in (4′) und (1′), $y=5$ und $x=2$.

Hinsichtlich der allgemeinen Brauchbarkeit dieser Methode gelten offenbar dieselben Bemerkungen wie in § 162 und man kann 1 z. B. auch nach dieser Methode die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen bestimmen:

$$\begin{array}{rl} 3x-2v=13 & x=\dfrac{13+2v}{3} \ldots\ldots (1) \\ 2y+3v=1 & y=\dfrac{1-3v}{2} \ldots\ldots (2) \\ 5y-7z=25 & z=\dfrac{5y-25}{7} \ldots\ldots (3) \\ 5v+3y-6z=0 & z=\dfrac{3y+5v}{6} \ldots\ldots (4) \end{array}$$

Die beiden Ausdrücke von z geben:

$$\frac{5y-25}{7}=\frac{3y+5v}{6}; \text{ hieraus } y=\frac{150+35v}{9} \quad \ldots\ldots (5)$$

Die Ausdrücke für y aus (5) und (2) geben:

$$\frac{150+35v}{9}=\frac{1-3v}{2}; \text{ hieraus: } v=-3$$

den Wert von v in (1) und (2) substituiert, kommt $x=2\frac{1}{3}$, $y=5$; aus (3) folgt dann $z=0$.

163.

Dritte Methode. *Elimination durch Addition oder Subtraktion.* Diese Methode ist den beiden andern vorzuziehen, wenn entweder die Koefficienten derselben Unbekannten gleich sind, oder bequem gleich gemacht werden können. Sind die Koefficienten Buchstaben, so ist sie in der Regel vorzuziehen.

Da die Werte der unbekannten Gröfsen nicht verändert werden, wenn man alle Glieder einer Gleichung mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert, so kann man dadurch leicht bewirken, dafs die zu eliminierende Gröfse in zwei Gleichungen denselben Koefficienten bekommt. Ist dies aber der Fall, so braucht man offenbar nur die beiden Gleichungen von einander zu subtrahieren, wenn die gleichgemachten Koefficienten einerlei Vorzeichen haben; und zu einander zu addieren, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben; in dem einen oder andern Fall erhält man aus den beiden Gleichungen eine neue, welche die durch Addition oder Subtraktion eliminierte Gröfse nicht enthält. Ebenso kann man mit je zwei andern Gleichungen, in welchen die zu eliminierende Gröfse vorkommt, verfahren, und so aus n Gleichungen $n-1$ neue bilden, welche eine unbekannte Gröfse weniger haben. Dasselbe Verfahren auf die erhaltenen $n-1$ Gleichungen angewandt, giebt $n-2$ Gleichungen &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$x+y+z=14 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x+5y-4z=1 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$7x-2y+3z=25 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$-3y+6z=27 \quad \ldots\ldots (4)$$
$$9y+4z=73 \quad \ldots\ldots (5)$$
$$22z=154 \quad \ldots\ldots (6)$$

also: $z=7$; $y=5$; $x=2$.

Um aus den drei gegebenen Gleichungen die zwei neuen von x befreiten (4) und (5) zu erhalten, verbinde man durch Subtraktion die erste zuvor mit 2 multiplizierte Gleichung mit der zweiten, und dann wieder die erste zuvor mit 7 multiplizierte Gleichung mit der dritten. Diese leichten Rechnungen, welche wir hier noch andeuten wollen, lassen sich meistens leicht im Kopfe ausführen. Man hat nämlich die erste Gleichung mit 2 multipliziert:

$$\begin{array}{rr}
 & 2x+2y+2z=28 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1') \\
\text{subtr.:*} & +2x+5y-4z=+1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \\
 & -\quad -\quad +\qquad - \\
\hline
\text{kommt:} & -3y+6z=27 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)
\end{array}$$

Die erste mit 7 multiplizierte Gleichung giebt:

$$\begin{array}{rr}
 & 7x+7y+7z=98 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1'') \\
\text{subtr.:} & 7x-2y+3z=25 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3) \\
 & -\quad +\quad -\qquad - \\
\hline
 & 9y+4z=73 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)
\end{array}$$

Man hätte auch, statt aus der ersten und dritten, aus der zweiten und dritten Gleichung eine neue von x befreite ableiten können, indem man, um x in (2) und (3) gleiche Koefficienten zu geben, die zweite mit 7 und die dritte mit 2 multipliziert.

Um aus den beiden Gleichungen (4) und (5) eine neue von y befreite Gleichung zu erhalten, multipliziere man (damit y in beiden gleiche Koefficienten bekommt) die vierte (in Gedanken) mit 3 und addiere sie dann (weil die Vorzeichen verschieden sind) zur fünften, so fällt y heraus und man erhält die Endgleichung (6).

Man hat (4) mit 3 multipliziert:

$$\begin{array}{rr}
 & -9y+18z=81 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4) \\
\text{addiert} & 9y+\;\;4z=73 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5) \\
\hline
 & 22z=154
\end{array}$$

Aus dieser Endgleichung folgt $z=7$ und diesen Wert von z in (5) oder (4) substituiert $y=5$; die Werte von z und y in (1) gesetzt: $x=2$.

Beispiel. Es seien die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{array}{r}
3x-2v=13 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1) \\
2y+3v=1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \\
5y-7z=25 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3) \\
8y-6z+5v=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)
\end{array}\right\}$$

Die unbekannte Gröſse x kommt nur in einer Gleichung vor und kann daher nicht eliminiert werden. Weil nun y und v in drei,

---

* Beim Subtrahieren muſs man den Subtrahend mit umgekehrtem Vorzeichen dem Minuend hinzufügen. Es ist nämlich (§ 88):

$$2x+2y+2z-(2x+5y-4z)=-3y+6z.$$

z aber nur in zwei Gleichungen vorkommt, so ist es offenbar kürzer, erst z zu eliminieren. Man multipliziere also die dritte Gleichung mit 6 und die vierte mit 7, dadurch bekommt z in beiden Gleichungen gleiche Koefficienten $(6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42)$ und weil diese einerlei Vorzeichen haben, so subtrahiere man sie von einander, so kommt:

$$9y - 35v = 150 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\text{hierzu: } 2y + 3v = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$97v = -291$$
$$v = -3$$

Den Wert von v in (2) und (1) substituiert &c., kommt:

$$x = 2\tfrac{1}{3};\quad y = 5;\quad z = 0;\quad v = -3.$$

164.

Aufgabe. Die Werte von x, y, z, v aus folgenden zusammengehörigen Gleichungen zu finden:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + v = 16 \ldots\ldots (1) \\ -x + y + 2z + 3v = 33 \ldots\ldots (2) \\ 2x + 5y + 5z - 6v = 0 \ldots\ldots (3) \\ 3x + 4y - z - 2v = -4 \ldots\ldots (4) \end{array}\right\}$$

Auflösung. Die Gleichungen (1) und (2) addiert, geben die fünfte; dann die zweite Gleichung mit 2 multipliziert und zur dritten addiert, kommt die sechste; die zweite wieder mit 3 multipliziert und zur vierten addiert, kommt die siebente neue Gleichung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} 2y + 3z + 4v = 49 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ 7y + 9z = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ 7y + 5z + 7v = 95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{array}\right\}$$

Weil hier v nur in zwei Gleichungen vorkommt, so multipliziere man (5) mit 7 und (7) mit 4 und subtrahiere, so kommt:

$$-14y + z = -37 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$
$$\text{hierzu (siehe die 6. Gleichung): } 7y + 9z = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Jetzt die untere Gleichung mit 2 multipliziert und dann zu (8) addiert, kommt die Endgleichung:

$$19z = 95$$

also: $z = 5$; aus der 6. Gleichung $y = 3$; aus der 5. Gleichung $v = 7$ und aus der 1. Gleichung $x = 1$.

165.

Wenn eine Gleichung nur eine unbekannte Gröſse enthält, so kann man die dadurch völlig bestimmte Gröſse daraus berechnen. Weil nun, wie im Vorhergehenden gezeigt, aus n Gleichungen mit n unbekannten Gröſsen allemal eine Endgleichung abgeleitet werden kann, welche nur *eine* der unbekannten und mithin *bestimmten* Gröſsen enthält, und dann durch Rückwärtssubstituieren auch jede der übrigen unbekannten Gröſsen durch eine Gleichung bestimmt und bekannt wird, so ist einleuchtend, daſs die Werte von n unbekannten Grösen völlig bestimmt sind und immer gefunden werden können, wenn zu ihrer Bestimmung ebenso viele von einander *unabhängige* und sich nicht *widersprechende* Gleichungen gegeben sind. Aus diesem Grunde nennt man auch alle Aufgaben *bestimmte*, wenn sich aus den Bedingungen derselben gerade so viele von einander unabhängige Gleichungen bilden lassen, als sie unbekannte Grösen zu finden verlangen.

Anmerkung. Bei Anwendung der gezeigten Eliminationsmethoden muss man immer *alle* Gleichungen berücksichtigen; denn hätte man z. B., statt wie in eben gelöster Aufgabe zu verfahren, die erste Gleichung mit der zweiten, die erste mit der dritten und dann die zweite wieder mit der dritten verbunden, mithin die vierte Gleichung ganz unberücksichtigt gelassen, so hätte man dadurch allerdings auch drei von x befreite Gleichungen erhalten, die dann aber weiter behandelt, auf eine *identische* Gleichung, d. h. auf eine solche führen müssen, die etwas schon Bekanntes sagt, nämlich: dass jede Gröse sich selbst gleich, oder das $0=0$ ist. Dieser Fall, wo man sich gleichsam im Kreise dreht, pflegt indessen bei verwickelten Untersuchungen selbst Geübteren zuzustossen.

166.

Wenn sich aber aus den Bedingungen einer Aufgabe *nicht* so viele Gleichungen bilden lassen, als unbekannte Grösen verlangt werden, so heisst die Aufgabe eine *unbestimmte*, und zwar aus dem Grunde, weil man dann den Bedingungen der Aufgabe oder den daraus gebildeten Gleichungen, auf mehr als eine, oftmals unzählig verschiedene Weise Genüge leisten kann. In diesem Fall bleiben nämlich so viele unbekannte Grösen unbestimmt, und daher willkürlich anzunehmen, als Gleichungen zu wenig sind.

Würde z. E. die Aufgabe gestellt, zwei, vorläufig mit x und y zu bezeichnende Zahlen zu finden, deren Summe 12 ist, so lässt sich aus der Bedingung dieser Aufgabe nur eine einzige Gleichung bilden, nämlich:

$$x+y=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{woraus:}\quad x=12-y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Man sieht also, dass eine der beiden Grösen, z. B. x, nicht eher gefunden werden kann, als bis die andere, y, bekannt ist. Da nun y durch keine Gleichung gegeben ist, so bleibt nichts übrig, als den Wert derselben willkürlich anzunehmen. Nimmt man z. B. $y=1$, so wird $x=11$; für $y=2$ ist $x=10$; $y=3$, $x=9$; $y=-2$, $x=14$; $y=\frac{1}{2}$, $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. und je zwei dieser Werte müssen der Gleichung (1) Genüge leisten.

Sucht man die Werte, welche folgenden zwei Gleichungen Genüge leisten

$$\left.\begin{aligned} 4x-3y-4z&=12 \ldots\ldots (1) \\ 4x+\ y-8v&=48 \ldots\ldots (2) \end{aligned}\right\} \qquad x=\frac{12+3y+4z}{4} \ldots\ldots (1')$$

so kann man (die erste von der zweiten subtrahiert) daraus nur eine einzige Gleichung ableiten, in welcher zwei Grösen unbestimmt bleiben und beliebig angenommen werden müssen, nämlich:

$$4y-8v+4z=36$$

$$\text{woraus:}\quad y=9+2v-z$$

Nimmt man z. B. $z=1$, $v=2$; so wird $y=12$ und $x=13$; für $z=1$, $v=1$ wird $y=10$ und $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. Je vier solcher zusammengehörigen Werte leisten den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge.

Die Theorie über die unbestimmten (sogenannten diophantischen) Aufgaben, welche mit der Theorie über Eigenschaften der Zahlen und andern, sehr tiefsinnigen Untersuchungen zusammenhängt, ist von einem sehr grossen

Umfange und deshalb in eigenen Werken darüber zu studieren. *Gauss*, disquisitiones arithmeticae; *Euler; Fermat; Legendre*, théorie des nombres; Dirichlet etc. Wir müssen uns hier auf die bestimmten Aufgaben beschränken. Hierbei ist jedoch noch zu bemerken, daſs die Gleichungen voneinander unabhängig, d. h. so beschaffen sein müssen, daſs keine derselben durch arithmetische Operationen aus den übrigen abgeleitet werden kann. So sind z. E. die beiden Gleichungen:

$$x + y = 12 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x + 2y = 24 \quad \ldots\ldots (2)$$

voneinander abhängig, weil die zweite aus der ersten (indem man die erste mit 2 multipliziert) abgeleitet werden kann. Beide Gleichungen (Bedingungen) bilden nur eine. Denn dieselben Werte, welche die Bedingung der ersten erfüllen, müssen notwendig auch, der Abhängigkeit wegen, die in der ersten Bedingung schon enthaltene zweite Bedingung erfüllen. Ebenso sind die drei folgenden Gleichungen voneinander abhängig:

$$2x - 3y = 16 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$5x - 12y - 5z = 47 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$3x + 5z = 17 \quad \ldots\ldots (3)$$

Die dritte Gleichung ist schon in den beiden ersten enthalten. Man kann sie daraus ableiten, wenn man die erste mit 4 multipliziert und dann die zweite subtrahiert. Die drei Gleichungen können also nur für zwei gerechnet werden, welche, da sie drei unbekannte Gröſsen enthalten, zu den unbestimmten Aufgaben gehören. — Die Abhängigkeit der Gleichungen liegt manchmal sehr versteckt, indessen entdeckt man sie, wenn auch nicht eher, doch immer am Ende der Rechnung durch die Endgleichung, welche dann mehr unbekannte Gröſsen enthält, als wenn die Gleichungen unabhängig wären.

Ferner ist klar, daſs, wenn eine Aufgabe bestimmt sein soll, die daraus gebildeten Gleichungen nichts Widersprechendes enthalten dürfen. So enthalten z. E. die beiden Gleichungen:

$$2x + 3y = 5 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x + 3y = 17 \quad \ldots\ldots (2)$$

einen Widerspruch, weil eine und dieselbe zweiteilige Gröſse $2x + 3y$ nicht zu gleicher Zeit 5 und auch 17 sein kann.

Schlieſslich bemerken wir noch, daſs es Fälle giebt, wo viel mehr Bedingungs-Gleichungen vorhanden sind, als unbekannte Gröſsen gesucht werden. Diese Fälle gehören aber, wenn auch gleich in praktischer Hinsicht zu einem der wichtigsten und nützlichsten, doch auch zu den schwierigsten Teilen der höheren Mathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate) und können also schon deshalb hier nicht weiter zur Sprache gebracht werden.

167.

Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 12 und deren Differenz 6 ist.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden unbekannten Zahlen mit x und y, so geben die Bedingungen der Aufgabe die beiden folgenden Gleichungen, welche zugleich stattfinden sollen:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \quad \ldots\ldots (1) \\ x - y = 6 \quad \ldots\ldots (2) \end{array}\right\}$$

(1) und (2) addiert kommt: $2x = 18$, mithin $x = 9$

(2) von (1) subtr. kommt: $2y = 6$, mithin $y = 3$

Anmerkung. Die Aufgabe, aus der bekannten Summe und Differenz zweier unbekannten Gröfsen die Gröfsen selbst zu finden, kommt oft vor. Man merke sich, dafs die eine Gröfse dann immer gleich ist der halben bekannten Summe *plus* der halben Differenz und die andere = der halben Summe weniger der halben Differenz. Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes läfst sich im allgemeinen Zeichen leicht anschaulich machen. Bezeichnet man nämlich die bekannte Summe der beiden unbekannten Gröfsen x und y allgemein durch s, und die bekannte Differenz derselben allgemein mit d, so hat man:

$$x + y = s \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$x - y = d \dots\dots\dots\dots (2)$$

(1) und (2) addiert, kommt: $2x = s + d$; mithin: $x = \frac{s+d}{2}$

(2) von (1) subtr., kommt: $2y = s - d$; also: $y = \frac{s-d}{2}$

168.

Aufgabe. Jemand hat zwei Haufen Markstücke. Legt er 10 Stück vom zweiten zum ersten, so enthält dieser gerade halb so viel, als noch im zweiten bleiben. Legt er aber 30 Stück vom ersten zum zweiten, so enthält der zweite gerade 6mal so viel, als noch im ersten bleiben. Wieviel sind in jedem?

Auflösung. Der erste enthalte x, der zweite y. Nimmt man 10 Stück vom zweiten zum ersten, so bleiben im zweiten $y - 10$, und im ersten sind dann: $x + 10$, und da der erste jetzt halb so viel enthalten soll, so hat man: $x + 10 = \frac{y-10}{2}$. Nimmt man 30 Stück vom ersten zum zweiten, so sind im ersten $x - 30$, im zweiten $y + 30$, und da nun der zweite 6mal so viel enthalten soll, so hat man $y + 30 = 6(x - 30)$. Um auf diese beiden Gleichungen die dritte Eliminationsmethode anzuwenden, mufs man sie erst ein wenig bequemer dazu einrichten, nämlich: die Klammer auflösen, die Nenner fortschaffen und sie dann so stellen, dafs gleichnamige Gröfsen auf einerlei Seite untereinander zu stehen kommen. Die beiden Gleichungen:

$$x + 10 = \frac{y-10}{2} \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$y + 30 = 6(x - 30) \dots\dots\dots\dots (2)$$

stehen nämlich geordnet so:

$$2x - y = -30 \dots\dots\dots\dots (1')$$
$$6x - y = 210 \dots\dots\dots\dots (2')$$

(1') von (2') subtrahiert, kommt:

$$4x = 240, \text{ also: } x = 60$$

(1') mit 3 multipliziert und dann von (2') subtrahiert, kommt:

$$2y = 300, \text{ also: } y = 150.$$

169.

Aufgabe. Es giebt einen Bruch, der sich, wenn man vom Zähler und Nenner 1 subtrahiert, in $\frac{1}{5}$, und wenn man zum Zähler und Nenner 4 addiert, in $\frac{2}{5}$ verwandelt; welcher ist's?

Auflösung. Sei x der Zähler und y der Nenner, mithin $\frac{x}{y}$ der unbekannte Bruch, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Reduziert man beide Gleichungen auf x, indem man zuvor durch Multiplikation die Nenner $y-1$ und $y+4$ fortschafft, so folgt:

$$\left.\begin{array}{ll}(1') & x-1=\frac{y-1}{5} \\ (2) & x+4=\frac{2y+8}{5}\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x=\frac{y-1}{5}+1 \\ x=\frac{2y+8}{5}-4 \end{array}$$

$$\frac{2y+8}{5}-4=\frac{y-1}{5}+1$$

hieraus: $y=16$

folglich: $x=4$

mithin der Bruch $\frac{x}{y}=\frac{4}{16}$

170.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren, A, B, C, gefüllt werden, und zwar in 10 Minuten, wenn nur A und B, in 30 Minuten, wenn B und C, und in 15 Minuten, wenn A und C zugleich geöffnet werden. Wieviel Zeit wird jede einzelne Röhre und wieviel werden alle, zugleich geöffnet, zur Füllung des Behälters nötig haben?

Auflösung. Man setze die Quantität des Wassers im Behälter = 1 (z. B. 1 Oxhoft, 1 Tonne &c.). Da A und B dies in 10 Minuten geben, so geben sie in einer Minute $\frac{1}{10}$ desselben, ebenso geben B und C zusammen $\frac{1}{20}$ und A und C zusammen $\frac{1}{15}$ in einer Minute. Nennt man nun die Zeiten, welche A, B, C einzeln zur Füllung gebrauchen x, y und z Minuten, so giebt A in einer Minute den x. Teil, also $\frac{1}{x}$, ebenso B $\frac{1}{y}$ und C $\frac{1}{z}$; folglich A und B zusammen in einer Minute $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, B und C zusammen $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ und A und C zusammen $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$. Mithin ist:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Da hier die unbekannten Gröfsen *alle* als Nenner mit gleichen Zählern vorkommen, so ist es offenbar bequemer, statt die Gleichungen erst von diesen Nennern zu befreien, geradezu die Werte der Brüche $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, für welche man während der Rechnung auch andere einfachere Zeichen, wie etwa x', y', z', substituieren könnte, zu bestimmen, woraus dann durch blofse Umkehrung der Brüche die Werte von x, y, z folgen. Man hat sogleich:

$$\text{(2) von (1) subtr.:}\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{20}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\text{(3) und (4) addiert:}\quad 2.\frac{1}{x}=\frac{7}{60}$$

$$\text{woraus:}\quad \frac{1}{x}=\frac{7}{120}$$

den Wert von $\frac{1}{x}$ in (1) und (4) substituiert, kommt:

$$\frac{1}{y}=\frac{5}{120};\qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{120}$$

$$\text{mithin ist:}\quad x=17\tfrac{1}{7};\quad y=24;\quad z=120.$$

Alle drei Röhren zugleich geöffnet geben also in einer Minute $\frac{7}{120}+\frac{5}{120}+\frac{1}{120}=\frac{13}{120}$, mithin brauchen sie zur Füllung des ganzen Fasses $1:\frac{13}{120}=9\frac{3}{13}$ Minuten.

Anmerkung. Noch schneller wäre man zum Ziele gekommen, wenn man die Gleichungen (1), (2) und (3) addiert hätte:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{13}{60},\ \text{durch 2 dividiert:}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{120}\ \ldots\ldots (4')$$

Subtrahiert man hiervon Gleichung (1), so ergiebt sich z; subtrahiert man (2) von (4'), so ergiebt sich x u. s. w.

171.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch die beiden Röhren A und B in a Minuten, durch B und C in b Minuten, durch A und C in c Minuten gefüllt werden. Man sucht die Formeln, nach welchen man die Zeiten berechnen kann, welche jede einzelne, und alle Röhren zur Füllung nötig haben?

Auflösung. Seien x, y, z die Zeiten, welche jede einzelne Röhre gebraucht, so hat man:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{(2) von (1) subtr., kommt:}\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\text{(3)+(4) kommt:}\quad 2.\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc-ac}{abc}$$

folglich: $\frac{1}{x}=\frac{ab+bc-ac}{2abc}$; $\frac{1}{y}=\frac{ac+bc-ab}{2abc}$; $\frac{1}{z}=\frac{ab+ac-bc}{2abc}$.

Mithin ist:

$$x=\frac{2abc}{ab+bc-ac};\quad y=\frac{2abc}{ac+bc-ab};\quad z=\frac{2abc}{ab+ac-bc}.$$

Die Zeit, welche alle drei Röhren zur Füllung gebrauchen, ist also:

$$=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

oder wenn man in diesen Ausdruck die für $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ gefundenen Werte substituiert und gehörig reduziert:

$$=\frac{2abc}{ab+ac+bc}$$

172.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die Werte von x, y durch die Gröſsen a, b, c, m, n ausgedrückt, zu finden:

$$\frac{xy}{ax+by}=m \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{3xy}{cx-by}=n \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Man reduziere beide Gleichungen auf x, indem man zuvor die Nenner fortschafft. Aus (1) folgt:

$$xy=amx+bmy$$
$$xy-amx=bmy$$
$$(y-am)x=bmy$$

also: $x=\frac{bmy}{y-am}$ .... (1')

Aus (2) folgt:

$$3xy=cnx-bny$$
$$3xy-cnx=-bny$$
$$(3y-cn)x=-bny$$
$$x=\frac{-bny}{3y-cn}$$

Die beiden für x erhaltenen Gröſsen geben:

$$\frac{bmy}{y-am}=\frac{-bny}{3y-cn} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Faktor by dividiert, kommt:

$$\frac{m}{y-am}=\frac{-n}{3y-cn}$$

mit dem allgemeinen Nenner $(y-am)(3y-cn)$ multipliziert, kommt:

$$3my - cmn = - ny + amn$$
$$3my + ny = amn + cmn$$
$$(3m + n)\,y = mn\,(a + c)$$
$$y = \frac{mn\,(a + c)}{3m + n}$$

Diesen Wert von y in (1') substituiert, kommt:

$$x = \frac{bm\,.\frac{mn\,(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn\,(a+c)}{3m+n} - am} = \frac{\frac{bmmn\,(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn\,(a+c) - (3m+n)\,am}{3m+n}}$$

$$x = \frac{bmmn\,(a+c)}{mn\,(a+c) - (3m+n)\,am} = \frac{bmn\,(a+c)}{an + cn - 3am - an}$$

Die gesuchten Werte von x und y sind also:

$$x = \frac{bmn\,(a+c)}{cn - 3am}$$
$$y = \frac{mn\,(a+c)}{n + 3m}$$

Anmerkung. Oft lassen sich derartige Gleichungen durch besondere Kunstgriffe weit einfacher lösen. Vorstehende (1) und (2) hätten z. B. zunächst umgekehrt werden können:

$$\frac{ax + by}{xy} = \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{cx - by}{3xy} = \frac{1}{n}.$$

Führt man die Division aus:

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = \frac{1}{m}; \qquad \frac{c}{3y} - \frac{b}{3x} = \frac{1}{n}.$$

Gedacht:

$$a\,.\,\frac{1}{y} + b\,.\,\frac{1}{x} = \frac{1}{m}; \qquad c\,.\,\frac{1}{y} - b\,.\,\frac{1}{x} = \frac{3}{n}.$$

Ferner $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ gesetzt:

$$av + bu = \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

und $cv - bu = \frac{3}{n}$.

Durch die Addition beider Gleichungen ergiebt sich:

$$(a + c)\,v = \frac{1}{m} + \frac{3}{n};\ \text{d. i.}$$

$$(a + c)\,.\,\frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{3}{n};\ \text{mit } mny \text{ mult.:}$$

$$mn\,(a + c) = ny + 3my;\ \text{folglich}$$

$$y = \frac{mn\,(a + c)}{n + 3m}.$$

Da nun v und y bekannt sind, so ergiebt sich aus der Gleichung A: u d. i. $\frac{1}{x}$ und mithin auch x selbst.

173.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die durch a, b, c, d, m, n bestimmten Werte von x und y zu finden:

$$ax + by = c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$mx - ny = d \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Multipliziere (1) mit n und (2) mit b, und addiere dann die beiden Gleichungen, nämlich:

$$anx + bny = cn \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$
$$bmx - bny = bd \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$
$$(1') + (2'); \quad anx + bmx = cn + bd$$
$$(an + bm)\,x = cn + bd$$
$$\text{mithin:} \quad x = \frac{cn + bd}{an + bm}$$

Ferner, die Gleichung (1) mit m und (2) mit a multipliziert und dann subtrahiert, kommt:

$$bmy + any = cm - ad$$
$$\text{woraus:} \quad y = \frac{cm - ad}{an + bm}.$$