Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Dreizehntes Buch. Von den Funktionen und Formeln

Dreizehntes Buch.

Von den Funktionen und Formeln.

148.

In der mathematischen Sprache kommt oftmals der Ausdruck vor: eine Gröſse sei eine Funktion von einer oder mehreren andern Gröſsen, und dies soll dann soviel heiſsen: daſs erstere Gröſse von letzteren, gleichwie eine Wirkung von ihrer Ursache (Ursachen) abhängt, und folglich mit ihnen in einem gewissen Zusammenhange steht.

So ist z E. die Gröſse der Wurfsweite, welche eine abgeschossene Kanonenkugel erreicht, von mehreren andern Gröſsen abhängig, wie z. B. von der Anfangsgeschwindigkeit, von der Gröſse der Kugel, von dem Gewichte derselben, von der Menge und Güte des Pulvers, von der Länge des Rohrs, von der Gröſse des Richtungswinkels, von dem Widerstande der Luft, von der Anziehungskraft der Erde &c. &c., weil alle diese Gröſsen Einfluſs auf die Wurfsweite haben, mit ihr zusammenhängen und dieselbe bestimmen, und man sagt daher kurz: die Wurfsweite ist eine Funktion von den eben genannten Gröſsen.

149.

Zur gröſseren Erläuterung des vorstehenden Paragraphen diene folgende einfache Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, deren 5ter und 7ter Teil zusammen genommen 24 giebt.

Auflösung. Es ist klar, daſs die gesuchte Zahl (x) durch die Bedingung der Aufgabe und durch die gegebenen Zahlen 5, 7, 24 bestimmt, mit andern Worten eine Funktion von 5, 7, 24 ist, es muſs nämlich sein:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

$$\text{hieraus: } 7x + 5x = 35 \cdot 24$$

$$12x = 840$$

$$x = 70$$

Hier haben wir freilich die fragliche Zahl $x = 70$ gefunden, allein die Art und Weise, das eigentliche Gesetz (Formel, Regel), wie mit den Zahlen 5, 7, 24 gerechnet werden mufs, um die durch sie bestimmte Gröfse zu finden, konnte wegen der Verschmelzung dieser Zahlen ineinander nicht hervortreten. Wollen wir dieses Gesetz aufstellen, um dadurch eine klare Übersicht von dem Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung zu erhalten, nämlich wie die Ursachen sich miteinander verbinden, um die durch sie bestimmte Wirkung hervorzubringen, so müssen wir bei der Reduktion der obigen Gleichung auf x die dabei vorkommenden arithmetischen Operationen nicht wirklich vollziehen, sondern nur andeuten, alsdann stellt sich das fragliche Gesetz, wie die gesuchte Gröfse von den gegebenen abhängt, durch eine Formel dar, welche alle mit letzteren vorzunehmenden Rechnungen vor Augen legt.

Aus der Gleichung

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

folgt nämlich, indem wir, um x von den Nennern zu befreien, mit $5 \cdot 7$ multiplizieren, diese Operation aber blofs andeuten:

$$7x + 5x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

Jetzt die Koefficienten von x addiert, jedoch nur andeutend, kommt:

$$(7 + 5)\,x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{7 + 5}$$

Dies wäre also die gesuchte Formel oder das Gesetz, aus welchem wir mit einem Blick ersehen, auf welche Weise die gesuchte Gröfse x in unserer Aufgabe, aus den gegebenen Zahlen 5, 7, 24 entsteht. In Worten ausgesprochen, würde es so lauten: man mufs alle drei Zahlen miteinander multiplizieren und das Produkt durch die Summe der beiden ersten dividieren.

150.

Es ist leicht einzusehen, dafs das Gesetz, nach welchem eine Gröfse von anderen abhängt, nicht durch das absolute Quantum der letzteren, sondern blofs durch die Beziehungen, in welchen sie mit ersterer stehen, bestimmt ist. Würde z. B. gefragt: welche Zahl ist es, deren 3ter und 4ter Teil addiert 21 giebt, so finden hier offenbar unter der gesuchten Gröfse und denen, von welchen sie eine Funktion ist, ganz dieselben Beziehungen und Schlüsse wieder statt, wie in der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphen. Man braucht also auch nur in die dort entwickelte

Formel 21 statt 24 und 3, 4 statt 5 und 7 zu setzen und die angedeuteten Rechnungen zu vollziehen, um die fragliche Zahl (36) zu erhalten.

Man kann also auch, um das Gesetz, nach welchem eine Gröfse von andern anhängt, zu finden (was bei allen mathematischen Untersuchungen immer die Hauptsache ist), die miteinander in Beziehung stehenden Gröfsen einfacher und, um ihre Verschmelzung zu verhindern, vorläufig mit allgemeinen Zeichen andeuten, die Beziehungen (Bedingungen) durch eine Gleichung ausdrücken und diese dann auf diejenige Gröfse reduzieren, für welche man die Formel sucht. (Vergl. § 82.)

Die Schlüsse, welche bei der Auflösung einer so allgemein ausgedrückten Gleichung gemacht werden müssen, sind offenbar ganz dieselben, als wenn statt der Buchstaben bestimmte Zahlen ständen, nur mit dem Unterschiede, dafs wir hier alle vorkommenden arithmetischen Operationen blofs andeuten, die erhaltenen Buchstaben-Ausdrücke aber immer möglichst reduzieren, um alle unnötigen Rechnungen zu entfernen. Die vorhergehende Aufgabe können wir allgemein so ausdrücken:

Eine Zahl zu finden, deren $m$ter und $n$ter Teil addiert, a giebt.

Auflösung. Sei x die fragliche durch m, n, a bestimmte Zahl, so deutet $\frac{x}{m}$ den $m$ten und $\frac{x}{n}$ den $n$ten Teil derselben an, und die Bedingung der Aufgabe ist dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a$$

Um hier x von den Nennern zu befreien, multiplizieren wir die ganze Gleichung mit mn, so kommt

$$nx + mx = amn$$

Ferner, die Koefficienten von x addiert (den gemeinschaftlichen Faktor x auf der linken Seite herausgesetzt), kommt:

$$(n + m)\,x = mna$$

Jetzt durch den Koefficienten $n + m$ dividiert hat man:

$$x = \frac{mna}{m + n}$$

151.

Aufgabe. Die Zahl 140 in zwei Teile zu teilen, die sich wie 2 : 5 verhalten.

Auflösung. Die Teile sollen sich wie $2:5$ oder, was dasselbe ist, wie $1:\frac{5}{2}$ verhalten (§ 65); heiſst also x der eine Teil, so ist $\frac{5}{2}x$ der andere, folglich:

$$x + \tfrac{5}{2}x = 140$$
$$2x + 5x = 280$$
$$7x = 280$$
$$x = 40 \quad \text{(der eine Teil)}$$
$$\text{und } \tfrac{5}{2}x = 100 \quad \text{(der andere Teil)}$$

Aufgabe. Eine Zahl a in zwei Teile zu teilen, die sich wie $m:n$ verhalten.

Auflösung. Da sich die Teile wie $m:n$ oder, was dasselbe ist, wie $1:\frac{n}{m}$ verhalten, so ist, wenn x der eine Teil, $\frac{n}{m}x$ der andere, daher

$$x + \frac{n}{m}x = a$$

multipliziert mit m kommt: $mx + nx = ma$

$$(m + n)\,x = ma$$

mithin der eine Teil: $x = \dfrac{ma}{m+n}$

und der andere Teil: $\dfrac{n}{m}x = \dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{ma}{m+n} = \dfrac{na}{m+n}$

Als Probe der richtigen Rechnung müssen beide für x und $\frac{n}{m}x$ gefundenen Ausdrücke, nämlich: $\dfrac{ma}{m+n}$ und $\dfrac{na}{m+n}$ zusammen addiert, die Gröſse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, denn:

$$\frac{ma}{m+n} + \frac{na}{m+n} = \frac{a\,(m+n)}{m+n} = a$$

152.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl a in drei solche Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m, n, p verhalten.

Auflösung. Die drei Teile sollen sich wie m, n, p, oder, was dasselbe ist, wie $1, \frac{n}{m}, \frac{p}{m}$, verhalten; heiſst also x der erste Teil, so ist $\frac{n}{m}x$ der zweite, $\frac{p}{m}x$ der dritte, und da alle drei zusammen $=$ a sein müssen, so hat man:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$$

Um diese Gleichung auf x zu reduzieren, multipliziere man die ganze Gleichung erst mit m, so kommt:

$$mx + nx + px = ma$$

Die Koefficienten von x addiert, kommt:

$$(m + n + p)\, x = ma$$

also der erste Teil: $x = \dfrac{ma}{m+n+p}$

" zweite " $\dfrac{n}{m} x = \dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{ma}{m+n+p} = \dfrac{na}{m+n+p}$

" dritte " $\dfrac{p}{m} x = \dfrac{p}{m} \cdot \dfrac{ma}{m+n+p} = \dfrac{pa}{m+n+p}$

Soll z. E. 100 in drei solche Teile geteilt werden, die sich wie $2:5:3$ verhalten, so ist hier: $a = 100$, $m = 2$, $n = 5$, $p = 3$; mithin der erste Teil $2 \cdot \dfrac{100}{10} = 20$; der zweite $5 \cdot 10 = 50$; der dritte $3 \cdot 10 = 30$.

153.

Aufgabe. Eine Zahl $a = 100$ in zwei solche Teile zu teilen, daſs, wenn der eine Teil durch $m = 5$, der andere durch $n = 8$ dividiert wird, die Summe der Quotienten $b = 17$ sei:

Auflösung. Sei x der eine, folglich $(a - x)$ der andere Teil, so hat man laut Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$$

Die ganze Gleichung mit mn multipliziert, kommt:

$$nx + ma - mx = mnb$$

Jetzt die bekannten Glieder von den unbekannten gesondert:

$$nx - mx = mnb - ma$$

$$(n - m)x = m(nb - a)$$

$$x = \frac{m(nb - a)}{n - m}$$

Subtrahiert man diesen für den einen Teil x gefundenen Ausdruck $\frac{m(nb-a)}{n-m}$ von a, so erhält man auch die Formel für den andern Teil $a-x$. Es ist nämlich:

$$a-x=a-\frac{m(nb-a)}{n-m}$$

Dieser für $a-x$ gefundene Ausdruck läfst sich aber noch bedeutend abkürzen, wenn man ihn auf einerlei Benennung bringt, nämlich:

$$a-x=\frac{a(n-m)-m(nb-a)}{n-m}$$

Die Klammern aufgelöst:

$$a-x=\frac{an-am-mnb+am}{n-m}$$

$$a-x=\frac{an-mnb}{n-m}$$

$$a-x=\frac{n(a-mb)}{n-m}$$

Um sich zu überzeugen, dafs man keinen Rechnungsfehler begangen habe, müssen die beiden für x und $a-x$ gefundenen Ausdrücke addiert die Gröfse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, weil:

$$\frac{m(nb-a)}{n-m}+\frac{n(a-mb)}{n-m}=\frac{mnb-ma+na-nmb}{n-m}$$

$$=\frac{na-ma}{n-m}=\frac{(n-m)a}{n-m}=a$$

154.

Aufgabe. Es hat jemand in verschiedenen Terminen mehrere Zahlungen zu leisten: eine gewisse Summe s nach m Monaten, eine andere Summe s' nach m' Monaten, eine dritte Summe s'' nach m'' Monaten &c. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe $s+s'+s''+\ldots$ auf einmal zu erhalten. Nach wieviel Monaten mufs diese Zahlung geleistet werden, damit weder der eine noch der andere Teil Schaden leidet? (Gröfsen einerlei Art pflegt man oft durch dieselben Buchstaben zu bezeichnen, und ihre Verschiedenheit durch Striche anzudeuten, wodurch der Überblick offenbar leichter wird, als wenn man lauter verschiedene Buchstaben gebrauchen wollte.)

Auflösung. Um leichter auf den Ansatz zu kommen, nehme man beliebige monatliche Prozente an, und setze den Gewinn, den 100 Thlr. in 1 Monat bringen $=p$, so ist der Nutzen, welchen der Schuldner von der erst nach m Monaten zu bezahlenden Summe s ziehen könnte $=\frac{spm}{100}$; ebenso ist der Nutzen, den die zweite nach m' Monaten zu bezahlende Summe bringt $=\frac{s'pm'}{100}$ &c., so dafs also $\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+\ldots$ den Nutzen aller terminsweise zu bezahlenden Beträge ausdrückt. Die Zeit, wo die ganze Summe $s+s'+s''+\ldots$ auf einmal bezahlt wird, mufs nun so weit hinausgesetzt werden, dafs die ganze Summe erst einen dem obigen gleichen Nutzen bringen kann. Heifst also diese Zeit x, so mufs sein:

$$\frac{(s+s'+s''+\ldots)px}{100}=\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+\ldots$$

Alle Glieder haben hier den Faktor p und den Nenner 100 gemeinschaftlich, läfst man diese als überflüssig weg, indem man die ganze Gleichung; mit $\frac{100}{p}$ multipliziert, dann auf beiden Seiten durch $s+s'+s''+\ldots$ dividiert, so kommt:

$$x=\frac{sm+s'm'+s''m''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots}$$

Man sieht also, dafs die gesuchte Zeit eine von p unabhängige Funktion ist. In Worten lautet diese Formel: Man mufs die zu bezahlenden Beträge mit den in einerlei Einheiten ausgedrückten Zeiten multiplizieren, und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Beträge dividieren.

Beispiel. Es hat jemand folgende vier an einem Tage ausgestellt Wechsel ohne Zinsen zu zahlen: 300 ℳ nach 14 Tagen; 200 ℳ nach 3 Wochen 150 ℳ nach 2 Monaten, und 100 ℳ nach 28 Tagen; alle diese Summen sollen auf einmal bezahlt werden, welchen Termin (x) mufs man setzen?

Antwort. Hier ist:

$$\begin{array}{cccc} s=300 & s'=200 & s''=150 & s'''=100 \\ m=14 & m'=21 & m''=60 & m'''=28 \\ \hline sm=4200; & s'm'=4200; & s''m''=9000; & s'''m'''=2800 \end{array}$$

$$sm+s'm'+s''m''+s'''m'''=20200$$
$$s+s'+s''+s'''=750$$

$$x=\frac{20200}{750}=27 \text{ Tage (beinahe)}$$

155.

In allen Fällen, wo eine zu suchende Gröfse nur scheinbar Funktion von einer andern ist, wie im vorhergehenden Beispiel x von p, hat letztere Gröfse auch nichts in der Funktion zu schaffen, und mufs nach gehöriger Reduktion immer wieder herausfallen. So ist z. E. der Wert des schlecht reduzierten Ausdrucks:

$$\left(\left[a-\frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\frac{n-m}{n}+mb\right)\frac{x}{3a}$$

nur scheinbar eine Funktion von a, b, m, n. Setzt man z. B. $x=5$, so kann man statt a, b, m, n setzen, was man will, der Ausdruck giebt doch immer nur $1\frac{2}{3}$.*

Ebenso ist der Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$, eine von b unabhängige Funktion.

* Der Ausdruck läfst sich (durch Einrichten der Gröfse in der ersten Klammer) auf den einfachen $\frac{x}{3}$ reduzieren.

156.

Wenn eine Gröſse eine Funktion von mehreren andern Gröſsen ist, so ist auch umgekehrt jede der letzteren eine Funktion von allen übrigen. So ist z. B. der Zinsertrag eines Kapitals eine Funktion von dem angelegten Kapital, von den Prozenten, zu welchen es belegt wird, und von der Zeit, während welcher es steht. Umgekehrt ist aber jede der letzteren Gröſsen, z. B. die Zeit, in welcher ein gewisser Zinsertrag fällig wird, durch die Gröſse dieses Zinsertrags, des Kapitals und der Prozente bestimmt. Kann man nun zwischen mehreren zusammengehörigen, durch allgemeine Zeichen angedeuteten Gröſsen eine Gleichung auffinden, und diese dann auf jede der, durcheinander bestimmten Gröſsen reduzieren, so erhält man ebenso viele Formeln, welche dann eine klare Übersicht geben, wie jede Gröſse von den mit ihr verbundenen abhängt und daraus bestimmt werden kann.

157.

Aufgabe. Wenn die n jährigen Zinsen eines zu p Prozent belegten Kapitals, C, zum Kapital geschlagen, und die Gröſse dieses neuen Kapitals mit C′ bezeichnet wird, so ist jede dieser vier Gröſsen n, p, C, C′ eine Funktion von den drei übrigen. Es werden die Formeln derselben verlangt.

Auflösung. Der Ausdruck: $\frac{Cpn}{100}$ stellt die n jährigen Zinsen und folglich $C + \frac{Cpn}{100}$ Kapital samt den $n$jährigen Zinsen dar, und da diese Gröſse durch C′ bezeichnet werden soll, so hat man sogleich:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100}$$

Um diese Gleichung auch auf C, p und n zu reduzieren, multipliziere man erst auf beiden Seiten mit 100, so kommt:

$$100\,C + Cpn = 100C'$$

die Koeffizienten von C addiert, kommt:

$$(100 + pn)\,C = 100C'$$

jetzt durch den Koeffizienten von C dividiert, kommt: $C = \frac{100\,C'}{100 + np}$

Aus der Gleichung: $100\,C + Cpn = 100C'$

folgt: $Cpn = 100C' - 100\,C$

durch Cn dividiert, kommt: $p = \frac{100(C' - C)}{nC}$

durch Cp dividiert, kommt auch: $n = \frac{100(C' - C)}{pC}$

Die verlangten Formeln sind also:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100} \ldots\ldots (1)$$

$$C = \frac{100\,C'}{100 + pn} \ldots\ldots (2)$$

$$p = \frac{100(C' - C)}{nC} \ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{100(C' - C)}{pC} \ldots\ldots (4)$$

Beispiel. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches mit seinen 6jährigen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % vereinigt, ein Kapital von 762 ℳ giebt?

Formel 2 in § 157 giebt mit $n = 6$, $p = 4\frac{1}{2}$, $C' = 762$:

$$C = \frac{100 \cdot 762}{100 + 6 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{76200}{127}$$

$$C = 600 \text{ ℳ}$$

Wie lange mufs das Kapital von 600 ℳ zu 5 % auf Zinsen stehen, um an Kapital und Zinsen 800 ℳ zu erhalten?

Gegeben: $C = 600$, $p = 5$, $C' = 800$, gesucht n. Nach Formel 4 ist:

$$n = \frac{100\,(800 - 600)}{5 \cdot 600}$$

also: $n = 6\frac{2}{3}$ Jahre.

158.

Aufgabe. Jede der folgenden 8 Gleichungen auf x zu reduzieren:

1. $ax = b + \frac{cx}{m}$;
2. $\frac{ax}{m} + \frac{bx}{n} - \frac{c}{a} = 0$;
3. $\frac{ax}{m} - 1 - \frac{bx}{n} + c = 0$;
4. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + c$;
5. $c = a + \frac{a(a - x)}{a + x}$;
6. $\frac{mx - (c - x)\,n}{m\,(2x - c)} = 1$;
7. $\frac{a\,(dd + x)}{dx} = ac + \frac{a}{d}$;
8. $\frac{c}{a + bx} = \frac{h}{d + ex}$.

Auflösung. Es folgt aus:

1. $x = \frac{bm}{am - c}$;
2. $x = \frac{mnc}{a\,(an + bm)}$;
3. $x = \frac{mn(1 - c)}{an - bm} = \frac{mn(c - 1)}{bm - an}$;
4. $x = \frac{a + b + 1}{c}$;
5. $x = \frac{a(2a - c)}{c}$;
6. $x = c$;
7. $x = \frac{d}{c}$;
8. $x = \frac{cd - ah}{bh - ce} = \frac{ah - cd}{ce - bh}$.