Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Zwölftes Buch. Anwendung der Algebra.- Auflösung sogenannter algebraischer Aufgaben [...]

Zwölftes Buch.

Anwendung der Algebra. — Auflösung sogenannter algebraischer Aufgaben mit einer unbekannten Gröſse.

108.

Die algebraischen Aufgaben sind so mannigfaltiger Art, daſs sie sich nicht, wie die der speziellen Arithmetik, klassifizieren lassen. Nicht allein mit den bekannten, sondern auch mit der noch unbekannten Gröſse, für welche man vorläufig irgend ein beliebiges Zeichen (gewöhnlich einen der letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, t &c.) als Stellvertreter setzt, müssen arithmetische Operationen vorgenommen werden, welche man jedoch bei letzterer, eben weil sie noch unbekannt ist, nur andeuten kann.

Allgemeine Auflösungs-Regeln lassen sich hier nicht geben. Man muſs bei jeder besondern Aufgabe durch ruhiges Nachdenken und Überlegen den Sinn derselben auffassen, durch richtige Schlüsse die in der Aufgabe durch Worte ausgedrückten Forderungen und Bedingungen in die algebraische Zeichensprache übersetzen, in Gleichungen zu kleiden suchen, nämlich: die bekannten und unbekannten Gröſsen so miteinander verbinden oder zwei solche Zusammenfassungen treffen, daſs man, der Bedingung der Aufgabe gemäſs, die eine der andern als = gegenüber stellen kann.

Hat man erst die Gleichung zwischen den bekannten und unbekannten Gröſsen gefunden, so ist es leicht, daraus die unbekannte Gröſse nach den Regeln des vorhergehenden Kapitels zu finden. — Was aber die Auffindung der Gleichung anbelangt, so ist dieses Sache der reinen Vernunft und des Scharfsinns. Beides kann nicht gelehrt, durch fleiſsige Übung aber entwickelt werden.

Hier, sowie überhaupt bei allen Anwendungen der Mathematik, ist der Mathematiker sich immer selbst überlassen. Selbst muſs er auf die Bündigkeit seiner Schlüsse achten, und das Wahre vom Falschen unterscheiden. Für Anfänger, welche noch nicht an den Gebrauch ihrer eignen Kräfte, an Selbstdenken und Selbsterfinden gewöhnt sind, hat dies anfangs groſse Schwierigkeit; doch muſs man sich nicht gleich abschrecken lassen. Übung und beharrlicher Fleiſs geben im schnellen Auffassen, richtigen Urteilen und Schlieſsen zuletzt eine gewisse Fertigkeit, welche den Gebrauch der eigenen

Kräfte nicht allein erleichtert, sondern auch bald zum Bedürfnis und Vergnügen macht. Übrigens beherzige man ja, dafs es in keiner Wissenschaft auf die Menge von Beispielen und unverdauten Begriffen ankommt. Eine einzige Aufgabe gehörig durchdacht, einen einzigen richtigen Schlufs allein gemacht zu haben, hat weit mehr Nutzen, als tausend, die in derselben Zeit, aber durch Hilfe gemacht worden. Um zuerst auf den Weg zu helfen und zu zeigen, wie man die Sache angreifen mufs, lassen wir hier einige rein algebraische Aufgaben mit beigefügten Auflösungen folgen. Der Anfänger wird wohl thun, sie zweimal durchzugehen, und zwar das zweite Mal ohne die gegebenen Auflösungen zu benutzen. Eigentlich besteht die ganze Mathematik aus Aufgaben. Die sogenannten algebraischen sind aber die leichtesten, weil sie keine Sachkenntnis, sondern blofs richtiges Urteil und Scharfsinn fordern. Sie sind eigens für Anfänger gemacht und es ist durchaus erforderlich, sich einige Zeit allein darin zu üben. Wer gar keine algebraische Aufgabe lösen kann, wird alles Folgende schwer finden und keine raschen Fortschritte in der Mathematik machen.

109.

1. **Aufgabe.** Es giebt eine gewisse Zahl von der Beschaffenheit, dafs das Zweifache und Dreifache derselben addiert, ganz dasselbe giebt, als wenn man das Siebenfache der Zahl von 36 subtrahiert. Welche Zahl ist es?

Auflösung. Deutet man die zu findende Zahl vorläufig durch x an, mithin das Zweifache derselben durch 2x, das Dreifache durch 3x und das Siebenfache durch 7x, so bedeutet $2x + 3x$ die Summe des Zweifachen und Dreifachen, und $36 - 7x$ die erwähnte Differenz. Nun mufs, laut Bedingung der Aufgabe, die gesuchte Gröfse x in den ersten Ausdruck $2x + 3x$ substituiert, dasselbe geben, als wenn sie in den zweiten Ausdruck $36 - 7x$ substituiert wird, mithin mufs folgende Gleichung stattfinden:

$$2x + 3x = 36 - 7x$$

$$\text{hieraus: } 2x + 3x + 7x = 36$$

$$12x = 36$$

$$\text{folglich: } x = 3$$

Als Probe der richtigen Rechnung mufs die gefundene Zahl 3 in obige Gleichung, statt x substituiert, derselben Genüge leisten.

110.

2. **Aufgabe.** Es giebt eine Zahl, welche mit 10 multipliziert, dasselbe giebt, als wenn man 3 zu ihr addiert, welche ist's?

Auflösung. Die Zahl heifse x, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$10x = x + 3$$

$$10x - x = 3$$

$$9x = 3$$

$$\text{und } x = \tfrac{1}{3}$$

111.

3. Aufgabe. Drei Personen, A, B, C, sollen 36 ℳ dergestalt unter sich teilen, daſs B zweimal soviel als A, und C dreimal soviel als B erhält. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung. Sei x das, was A erhält, so erhält B 2x und C 6x, und da sie zusammen 36 ℳ erhalten, so muſs folgende Gleichung stattfinden:

$$\begin{aligned} x + 2x + 6x &= 36 \\ \text{oder: } 9x &= 36 \\ x &= 4 \\ \text{mithin erhält A, } x &= 4 \\ \text{B, } 2x &= 8 \\ \text{C, } 6x &= 24 \\ \hline \text{Summe } & 36 \end{aligned}$$

112.

4. Aufgabe. Vier Personen, A, B, C, D, sollen 100 ℳ so unter sich teilen, daſs die Teile sich wie die Zahlen 3, 5, 8, 4 verhalten. Wieviel bekommt jeder?

Auflösung. Was A erhält, heiſse x, so muſs, da sich die Teile wie 3, 5, 8, 4, oder was dasselbe ist, wie 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{4}{3}$ verhalten (§ 65), B $\frac{5}{3}$x, C $\frac{8}{3}$x und D $\frac{4}{3}$x erhalten, mithin ist:

$$x + \frac{5x}{3} + \frac{8x}{3} + \frac{4x}{3} = 100$$

$$\text{oder: } \frac{20x}{3} = 100$$

$$\begin{aligned} 20x &= 300 \\ x &= 15, \text{ für A} \\ \tfrac{5}{3}x &= 25, \quad \text{„ B} \\ \tfrac{8}{3}x &= 40, \quad \text{„ C} \\ \tfrac{4}{3}x &= 20, \quad \text{„ D} \end{aligned}$$

113.

5. Aufgabe. Ein Vermögen von 6000 ℳ soll unter drei Personen, A, B, C, so verteilt werden, daſs B dreimal soviel als A, weniger 200 ℳ; C aber viermal soviel als B, und auſserdem noch 200 ℳ erhält; wie muſs geteilt werden?

Auflösung. A erhalte x, so erhält B 3x — 200 und C 4 (3x — 200) + 200; folglich laut Bedingung:

$$\begin{aligned} x + 3x - 200 + 4(3x - 200) + 200 &= 6000 \\ x + 3x + 12x - 800 &= 6000 \\ 16x &= 6800 \\ \text{und } x &= 425 \end{aligned}$$

Mithin muſs A 425 ℳ, B 1075 ℳ und C 4500 ℳ erhalten.

114.

6. Aufgabe. Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiter und bat um die Verdoppelung ihres Geldes. Jupiter that es, und sie opferte aus Dankbarkeit 2 Obolen. Mit dem Reste begab sie sich in den Tempel des Apollo, und bat um die Verdoppelung dieses Restes. Auch hier wurde ihre Bitte erhört und sie opferte aus Dankbarkeit 4 Obolen. Als die Griechin nun ihr Geld nachzählen wollte, fand sie, der Verdoppelung ungeachtet, alles weggegeben; wieviel hatte sie anfangs?

Auflösung. Ihr anfängliches Geld sei $= x$, so ist $2x$ das Doppelte und nachdem sie 2 davon geopfert hatte, blieb ihr noch $2x - 2$. Dieser Rest wurde, durch Apollo verdoppelt, zu: $2(2x - 2)$, hiervon 4 geopfert, blieb ihr noch $2(2x - 2) - 4$; und da sie nun alles weggegeben haben soll, so mufs sein:

$$2(2x - 2) - 4 = 0$$

$$4x - 4 - 4 = 0$$

$$4x = 8$$

$$\text{also: } x = 2$$

115.

7. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Teile zu teilen, dafs, wenn man den gröfsten Teil durch 6 und den kleinsten durch 4 dividiert, in beiden Fällen gleiche Quotienten kommen. Welches sind die Teile?

Auflösung. Es scheinen hier zwei Zahlen unbekannt zu sein. Hat man aber die eine, so ergiebt sich die andere von selbst, indem man erstere von 100 abzieht. Bezeichnet man also die eine unbekannte Zahl, z. B. die gröfste, vorläufig mit x, so kann man die andere, ohne dafür ein neues Zeichen nötig zu haben, durch $100 - x$ andeuten. Da nun x durch 6 dividiert, laut Bedingung der Aufgabe, ebensoviel geben soll, als $100 - x$ durch 4 dividiert, so hat man:

$$\frac{x}{6} = \frac{100 - x}{4}$$

multipliziert mit 12 kommt: $2x = 3(100 - x)$ (§ 107.)

$$2x = 300 - 3x$$

$$5x = 300$$

$$x = 60$$

Mithin ist $x = 60$ der eine, und $100 - x = 100 - 60 = 40$ der andere Teil.

116.

8. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Teile zu teilen, dafs, wenn der eine durch 5, der andere durch 3 dividiert und dann die Quotienten addiert werden, die Summe derselben 24 beträgt.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $100 - x$ der andere Teil, so soll, laut Bedingung der Aufgabe sein:

$$\frac{x}{5} + \frac{100 - x}{3} = 24$$

multipliziert mit 3 . 5 kommt: $3x + 500 - 5x = 360$

$$-2x = -140$$

$$x = 70 \quad (\text{§ 98 u. 106.})$$

folglich ist 70 der eine und $100 - 70 = 30$ der andere Teil.

117.

9. Aufgabe. Jemand wurde um sein Alter gefragt, und er antwortete, wenn ich so viele Jahre über 100 hinauskäme, als mir jetzt daran fehlen, so würde ich gerade 2mal so alt werden, als ich jetzt bin; wie alt ist er?

Auflösung. Sei x das jetzige Alter, so deutet $100-x$ die Jahre an, die noch an 100 fehlen; hätte er diese Jahre über 100, so würde er $100+(100-x)$ Jahre alt sein, und da nun dies das Doppelte vom gegenwärtigen Alter, nämlich $= 2x$ sein soll, so hat man:

$$2x = 100 + 100 - x$$
$$3x = 200$$
$$x = 66\tfrac{2}{3}$$

118.

10. Aufgabe. Pythagoras wurde gefragt, wieviel Schüler er habe. Er antwortete auf folgende rätselhaft klingende Weise: die Hälfte studiert Philosophie, der dritte Teil Mathematik, die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, samt den drei Schülern, welche ich eben jetzt angenommen (also vorhin nicht mitgerechnet) habe, machen den vierten Teil derjenigen Schüler, welche Philosophie und Mathematik studieren, wieviel Schüler waren anfangs da?

Auflösung. Die Anzahl heiſse x, so studiert $\frac{x}{2}$ Philosophie und $\frac{x}{3}$ Mathematik; subtrahiert man nun $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x \left(=\frac{5x}{6}\right)$, von x, so bleiben noch $x-\frac{5}{6}x=\frac{x}{6}$, welche sich im Stillschweigen üben, und da nun diese samt den 3 hinzugekommenen (nämlich $\frac{x}{6}+3$) den vierten Teil von denen, welche Philosophie und Mathematik studieren, machen sollen, nämlich $\frac{1}{4}$ von $\frac{5x}{6}$, so hat man:

$$\frac{x}{6}+3=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}x$$
$$\frac{x}{6}-\frac{5x}{24}=-3$$

multipliziert mit 24 kommt: $4x-5x=-72$

$$-x=-72 \text{ und mit } -1 \text{ mult.:}$$
$$x=72$$

119.

11. Aufgabe. Ein Mauermann kann eine Mauer in 6 Tagen aufführen, ein anderer kann es in drei Tagen. In wieviel Zeit werden beide, zugleich arbeitend, damit fertig?

Auflösung. Der Mauermann, der in 6 Tagen die ganze Mauer aufführt, macht in einem Tage $\frac{1}{6}$ dieser Arbeit, und ebenso der andere in einem Tage $\frac{1}{3}$, also beide zusammen in einem Tage $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{9}{18}$ dieser Arbeit; heiſst also x die Zeit, welche beide zur Vollendung der ganzen Arbeit $(=1)$ gebrauchen, so muſs sein:

$$\frac{9}{18}x=1$$
$$x=2$$

120.

12. Aufgabe. Eine Wasserhebemaschine kann ein Land in 30 Tagen entwässern, eine andere kann dies in 40 Tagen, eine dritte braucht nur 20 Tage, wieviel Zeit ist erforderlich, wenn alle drei zugleich arbeiten?

Auflösung. Man setze die Menge des Wassers $=1$; da nun die erste Maschine dies in 30 Tagen hebt, so hebt sie an einem Tage $\frac{1}{30}$ desselben, ebenso die zweite $\frac{1}{40}$, die dritte $\frac{1}{20}$; alle drei heben also in einem Tage $\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}=\frac{13}{120}$ und in x Tagen $\frac{13}{120}.x$, folglich:

$$\frac{13x}{120}=1$$
$$x=\frac{120}{13}=9\tfrac{3}{13}$$

121.

13. Aufgabe. Ein Vater wollte seinen Kindern Äpfel schenken. Um jedem 5 Stück geben zu können, hätte er 2 Stück mehr haben müssen; er gab darauf jedem 4 Stück und behielt noch 3 Stück übrig. Wieviel Kinder und wieviel Äpfel waren da?

Auflösung. Die Aufgabe scheint zwei unbekannte Gröfsen zu enthalten, die eine ist aber schon durch die andere gegeben. Sei nämlich die Anzahl der Kinder $=x$. Soll jedes 5 Äpfel haben, so fehlen 2, mithin stellt der Ausdruck: $5x-2$ die Anzahl der Äpfel dar; bekommt jedes Kind 4 Äpfel, so bleiben 3 übrig, folglich stellt auch der Ausdruck $4x+3$ die Anzahl der Äpfel dar, und man hat also:

$$5x-2=4x+3$$
$$\text{hieraus: } x=5$$

Es waren also 5 Kinder, und $5.5-2=4.5+3=23$ Äpfel da.

122.

14. Aufgabe. In einer Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal soviel Männer als Frauen, später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggegangen waren, blieben noch fünfmal soviel Männer als Frauen zurück. Wieviel Männer und Frauen waren anfangs da?

Auflösung. Man setzte die anfängliche Zahl der Frauen $=x$ und mithin die der Männer $=3x$. Nachdem 8 Männer und 8 Frauen weggegangen waren, blieben noch $x-8$ Frauen und $3x-8$ Männer zurück, und da die Anzahl der Männer jetzt fünfmal so grofs sein soll, so hat man:

$$3x-8=5(x-8)$$
$$\text{woraus: } -2x=-32$$
$$\text{und } x=16$$

Mithin waren anfänglich 16 Frauen und $3.16=48$ Männer da.

123.

15. Aufgabe. Ein Bedienter, welcher zum jährlichen Lohn 135 ℳ und ein Kleid erhielt, forderte nach 7 Monaten seinen Abschied und bekam für diese Zeit aufser dem Kleide noch 67 ℳ. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

Auflösung. Setze den Wert des Kleides in Mark ausgedrückt $=x$, so beträgt der ganze jährliche Lohn $135+x$, mithin der Lohn für 1 Monat $\frac{135+x}{12}$ und für 7 Monate $=\frac{7}{12}(135+x)$, dies mufs soviel betragen als 67 ℳ und x, der Wert des Kleides. Mithin ist:

$$67+x=\tfrac{7}{12}(135+x)$$
$$804+12x=945+7x$$
$$5x=141$$
$$x=28\tfrac{1}{5}$$

NB. Die Glieder in einer Gleichung müssen alle *einnamig* und *gleichnamig* sein.

124.

16. Aufgabe. Ein Meister nimmt einen Gesellen an, und verspricht ihm jeden Tag, den er bei ihm arbeitet, 1 ℳ. Arbeitet er aber nicht, so mufs er dem Meister 60 ₰ für die Kost zahlen. Nach 80 Tagen halten sie Abrechnung und es findet sich, dafs keiner dem andern etwas schuldig ist. Wieviel Tage hat der Geselle gearbeitet?

Auflösung. Seien x die Tage, wo er gearbeitet, und mithin $80-x$ die Tage, wo er nicht gearbeitet hat, alsdann beträgt sein Lohn x ℳ und das Kostgeld $\frac{(80-x)60}{100}$ ℳ, und da nun der Lohn aufgezehrt sein soll, so hat man:

$$x - \frac{(80-x).60}{100} = 0$$
$$10x - 480 + 6x = 0$$
$$16x = 480$$
$$x = 30$$

125.

17. Aufgabe. Ein Kaufmann fordert für 12 Meter Tuch 300 ℳ; Käufer dingt aber von diesen 300 ℳ soviel ab, als ihm hernach 2 Meter wirklich kosten; wieviel wurde abgedungen?

Auflösung. Man setze den Abzug $= x$, so kosten die 12 Meter $300 - x$, mithin 1 Meter $\frac{300-x}{12}$, also 2 Meter $2.\frac{300-x}{12} = \frac{300-x}{6}$, und da dies dem Abzuge x gleich sein soll, so hat man:

$$x = \frac{300-x}{6}$$
$$6x = 300 - x$$
$$7x = 300$$
$$x = 42\tfrac{6}{7}$$

126.

18. Aufgabe. Man sucht eine Zahl von folgender Beschaffenheit: wenn man sie mit 3 multipliziert, vom Produkt 11 subtrahiert und hierauf den Rest wieder mit 4 multipliziert und zum Produkte 6 addiert und die erhaltene Summe nochmals mit 5 multipliziert, so soll 50 kommen.

Auflösung. Um hier die Bedingungen der Aufgabe ganz in Zeichen andeuten zu können, werden zwei Klammern notwendig. Heifst nämlich x die gesuchte Zahl, so deutet $3x - 11$ den zuerst erwähnten Rest und $4(3x-11)+6$ die erwähnte Summe an. Um nun anzudeuten, dafs diese Summe noch mit 5 multipliziert werden soll, brauchen wir noch eine zweite Klammer, welche sich, um Irrtum zu verhüten, von der ersten unterscheiden mufs, daher:

$$5[4(3x-11)+6] = 50$$

Um die unbekannte Gröfse von den Klammern zu befreien, kann man erst die innern und dann die äufsern Klammern auflösen (oder auch umgekehrt). Lösen wir erst die inneren Klammern, so hat man:

$$5[12x - 44 + 6] = 50;$$
$$5[12x - 38] = 50; \text{ durch 5 dividiert:}$$
$$12x - 38 = 10;$$
$$12x = 48;$$
$$x = 4.$$

127.

19. Aufgabe. Eine Frau bringt Äpfel zu Markt und verkauft zuerst die Hälfte und einen halben. Von dem Reste verkauft sie wieder die Hälfte und einen halben; von dem jetzt noch bleibenden Reste wiederum die Hälfte und einen halben; worauf sie noch 24 Stück übrig behält. Wieviel hatte sie anfangs?

Auflösung. Sie habe x gehabt, so bleiben hiervon übrig nach dem ersten Handel, die Hälfte weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; von diesem Reste bleibt nach dem zweiten Verkauf wiederum die Hälfte $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$ weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$; hiervon nach dem dritten Verkauf wiederum die Hälfte weniger einen halben, nämlich $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$, und da sie jetzt noch 24 Stück übrig behalten soll, so hat man:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 24$$

Die innern Klammern aufgelöst, kommt:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 24$$

$$\text{oder: } \frac{1}{2}[\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}] - \frac{1}{2} = 24$$

$$\text{ferner: } \frac{x}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 24$$

$$\frac{x}{8} = 24\frac{7}{8}$$

$$x = 199$$

128.

20. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches zu 5% belegt, in 4 Jahren ebensoviel Zinsen bringt, als das Kapital von 635 ℳ zu 4% in 7 Jahren?

Auflösung. So oft 100 ℳ in 635 ℳ enthalten sind, erhält man 4 ℳ Zinsen; der Ausdruck $\frac{635}{100}.4$ stellt also die einjährigen, und der Ausdruck $\frac{635}{100}.4.7$ die siebenjährigen Zinsen des bekannten Kapitals dar. Heifst also das gesuchte Kapital x, so stellt gleicherweise $\frac{x}{100}.5$ die einjährigen, und mithin $\frac{x}{100}.5.4$ die vierjährigen Zinsen des unbekannten Kapitals x dar. Man hat also laut Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{100}.5.4 = \frac{635}{100}.4.7$$

$$x = 889.$$

129.

21. Aufgabe. Zu wieviel Prozent mufs das Kapital von 225 ℳ belegt werden, um in 6 Jahren ebensoviel Zinsen zu bringen, als 300 ℳ zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Jahren?

Auflösung. Heifsen x die gesuchten Prozente, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{225}{100}.x.6 = \frac{300}{100}.\frac{7}{2}.8$$

$$45x = 10.7.4$$

$$9x = 56$$

$$x = 6\frac{2}{9}\,\%.$$

130.

22. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches mit seinen 5jährigen Zinsen zu 4% auf 600 ℳ anwächst?

Auflösung. Heifse x das gesuchte Kapital. So oft 100 in x enthalten ist, erhält man $4^0/_0$, der Ausdruck $\frac{x}{100}.4.5$ stellt also die 5jährigen Zinsen, und der Ausdruck $x + \frac{x}{100}.4.5$ Kapital samt den 5jährigen Zinsen dar. Man hat also laut Bedingung:

$$x + \frac{x}{100}.4.5 = 600$$
$$x + \frac{x}{5} = 600$$
$$5x + x = 3000$$
$$x = 500$$

131.

23. Aufgabe. Eine Person, A, hat für eine andere Person, B, 5100 ℳ einkassiert, B wünscht dies Geld frei mit der Post zu erhalten. Wieviel wird B bekommen, wenn A $2^0/_0$ Postgeld bezahlen mufs?

Auflösung. Das, was A auf die Post giebt, heifse x, so beträgt das dafür bezahlte Postgeld $\frac{x}{100}.2$, weil nun A die 5100 ℳ hiermit ausgegeben, nichts davon behalten haben soli, so hat man:

$$x + \frac{x}{100}.2 = 5100$$
$$51x = 5100.50$$
$$x = 5000$$

132.

24. Aufgabe. A mufs 4900 ℳ postfrei an B senden, das Postgeld beträgt $2^0/_0$, kann aber am Orte der Absendung nicht entrichtet werden. Wieviel mufs also A samt dem beigelegten Postgeld auf die Post geben, damit B nach Bezahlung desselben, seine 4900 ℳ übrig behält?

Auflösung. Man nenne x die fragliche Versendung, so mufs B dafür bezahlen $\frac{x}{100}.2$, daher:

$$x - \frac{x}{100}.2 = 4900$$
$$49x = 4900.50$$
$$x = 5000$$

133.

25. Aufgabe. Jemand will 30000 ℳ so versichern lassen, dafs die Prämie, welche $20^0/_0$ beträgt, gleich mit versichert ist, wieviel beträgt die Prämie?

Auflösung. Nennt man dieselbe x, so wird im Ganzen $30000 + x$ versichert, welches $\frac{30000 + x}{100}.20$ kostet. Da nun die zu zahlende Prämie $x =$ den Prozenten für versichertes Kapital und Prämie sein soll, so hat man:

$$x = \frac{30000 + x}{100}.20$$
$$4x = 30000$$
$$x = 7500$$

134.

26. Aufgabe. Einem Kurier, der täglich 5 Meilen macht, wird nach 8 Tagen ein anderer, der täglich 9 Meilen macht, nachgeschickt. In wieviel Tagen wird letzterer den erstern einholen?

Auflösung. Man setze in x Tagen, so macht der zweite einen Weg von 9x Meilen und der erste, welcher 8 Tage voraus hat, einen Weg von 5 (8+x) Meilen. Auf dem Punkt des Zusammentreffens müssen beide von Haus aus einen gleichen Weg zurückgelegt haben, daher:

$$9x = 5(8 + x)$$
$$9x = 40 + 5x$$
$$x = 10$$

135.

27. Aufgabe. Der Stundenzeiger einer Uhr steht auf VI, der Minutenzeiger auf XII. In wieviel Zeit werden beide Zeiger sich decken?

Auflösung. Man setze die fragliche Zeit in Stunden ausgedrückt = x. Der Minutenzeiger macht in jeder Stunde 60 Striche, also in x Stunden 60x Striche, der Stundenzeiger legt hingegen in jeder Stunde nur 5 Striche zurück, mithin in x Stunden 5x; wo beide Zeiger sich decken, da müssen sie gleichviel Striche von XII abstehen. Da nun der Stundenzeiger auf VI steht und mithin $6 . 5 = 30$ Striche voraus hat, so erhält man die Gleichung:

$$60x = 30 + 5x$$
$$x = \tfrac{6}{11} \text{ Stunden} = 32\tfrac{8}{11} \text{ Minuten.}$$

136.

28. Aufgabe. Jemand, der um die Zeit gefragt wurde, antwortete: Stunden- und Minutenzeiger decken sich eben zwischen X und XI; wie spät war es?

Auflösung. Der Minutenzeiger stand gerade auf XII, als der Stundenzeiger auf X stand und mithin $10 . 5 = 50$ Striche voraus hatte, daher:

$$60x = 50 + 5x$$
$$x = \tfrac{10}{11}$$

Es war also $\frac{10}{11}$ auf XI d. i. $5\frac{5}{11}$ Minuten vor XI.

137.

29. Aufgabe. Ein Hase wird von einem Hunde verfolgt. Der Hase hat 100 Sprünge voraus und macht jedesmal 6, wenn der Hund 5 macht. Dagegen reicht aber der Hund mit 7 Sprüngen ebensoweit, als der Hase mit 9. Wieviel Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

Auflösung. Man setze x, so beträgt der ganze Weg, den der Hase zurückgelegt, 100+x Hasensprünge. Da der Hase 6 Sprünge macht, während der Hund 5 thut, so macht der Hase jedesmal 1 Sprung, wenn der Hund $\frac{5}{6}$ Sprung macht. Während also der Hase noch x Sprünge macht, macht der Hund nur $\frac{5}{6}$ so viel Sprünge, also $\frac{5x}{6}$, womit er den Weg von 100+x Hasensprüngen zurücklegen mufs. Um beide Ausdrücke einander gleichsetzen zu können, müssen die $\frac{5x}{6}$ Hundesprünge auf Hasensprünge reduziert werden. Da nun an Gröfse 7 Hundesprünge = 9 Hasensprünge, so ist 1 Hundesprung = $\frac{9}{7}$ Hasensprünge, mithin $\frac{5x}{6}$ Hundesprünge = $\frac{9}{7} . \frac{5}{6} . x$ Hasensprünge, daher:

$$\tfrac{9}{7} . \tfrac{5}{6} . x = 100 + x$$
$$15x = 1400 + 14x$$
$$x = 1400$$

138.

30. Aufgabe. Jemand hat zweierlei Sorten Wein. Von der ersten kostet die Mafs 1 ℳ 50 ₰; von der zweiten 87,5 ₰. Da nun die erste Sorte wegen zu geringer Güte keine Abnehmer findet, so will er aus beiden eine 200 Mafs haltende Mischung machen, von welcher, ohne Schaden zu leiden, die Mafs nur 1 ℳ 12,5 ₰ kostet. Wieviel mufs von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung. Die ganze Mischung soll 200 Mafs halten; nimmt man also von der bessern Sorte x Mafs, so müssen die übrigen Mafse, nämlich $200 - x$ von der schlechtern genommen werden. Jedes der x Mafse kostet 150 ₰ und jedes der $(200 - x)$ Mafse kostet 87,5, der in der Mischung steckende Wert ist also $150x + 87{,}5(200 - x)$. Da nun jede Mafs der Mischung für 112,5 ₰ verkauft werden soll, so erhält man für die ganze 200 Mafs haltende Mischung $112{,}5 . 200$ ₰. Mithin mufs der Wert von x folgender Gleichung Genüge leisten:

$$\begin{aligned} 150x + 87{,}5.(200 - x) &= 112{,}5.200 \\ 300x + 175.(200 - x) &= 225.200 \\ 300x + 35000 - 175x &= 45000 \\ 125x &= 10000 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

139.

31. Aufgabe. Wieviel Mark 8lötiges Silber mufs zu $6\frac{2}{3}$ Mark 14lötigem gesetzt werden, damit der Gehalt 12lötig wird? (1 Mark = 16 Lot gerechnet).

Auflösung. Sei der Zusatz von 8lötigem Silber x Mark. Jede dieser x Mark enthält 8 Lot und jede der $6\frac{2}{3}$ Mark 14 Lot Silber, die ganze Mischung enthält an Gewicht $6\frac{2}{3} + x$ Mark und an Silber $14.6\frac{2}{3} + 8x$ Lot und da nun die Mischung im Durchschnitt 12lötig sein soll, so enthält sie an Silber $12(6\frac{2}{3} + x)$ Lot. Mithin:

$$12(6\tfrac{2}{3} + x) = 14.6\tfrac{2}{3} + 8x$$
$$\text{hieraus: } x = 3\tfrac{1}{3}$$

140.

32. Aufgabe. Jemand hat 30 Mark 14lötiges Silber; wieviel Kupfer mufs er zusetzen, damit der Gehalt 10lötig wird?

Auflösung. Man setze x Mark Kupfer, so hat man:

$$\begin{aligned} 10(30 + x) &= 14.30 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

141.

33. Aufgabe. Ein Stück Blei, welches in freier Luft 23 Kilogramm wiegt, wiegt nur 21 kg, wenn es im Wasser gewogen wird, oder so ausgesprochen: 23 kg Blei verlieren im Wasser 2 kg, und so in diesem Verhältnis, nämlich 2.23 kg Blei verlieren im Wasser $2.2 = 4$ kg &c. Ebenso verlieren 37 kg Zinn im Wasser 5 kg. Schmelzt man 23 kg Blei und 37 kg Zinn zusammen, so wiegt die Komposition 60 kg und wird im Wasser $2 + 5 = 7$ kg verlieren. Wie läfst sich nach dieser Angabe berechnen, wieviel Zinn in einer Komposition von 217 kg enthalten ist, wenn blofs gesagt wird, dafs die Komposition nur aus Zinn und Blei besteht und im Wasser gewogen 26 kg verliert?

Auflösung. Seien in der 217 kg wiegenden Komposition x Kilogramm Zinn und folglich $(217 - x)$ kg Blei enthalten.

So oft 37 in x enthalten, so oft mufs das in der Komposition enthaltene Zinn 5 kg verlieren, so oft 23 in 217 — x enthalten ist, so oft mufs auf das Blei ein Verlust von 2 kg gerechnet werden. Der ganze Verlust mufs also: $\frac{x}{37} \cdot 5 + \frac{217 - x}{23} \cdot 2$ sein, und da dieser Verlust = 26 gegeben ist, so hat man:

$$\frac{x}{37} \cdot 5 + 2 \frac{(217 - x)}{23} = 26$$

$$\text{hieraus: } 115x + 74 \cdot 217 - 74x = 23 \cdot 26 \cdot 37$$

$$41x = 6068$$

$$x = 148$$

Die Komposition enthält also: 148 kg Zinn und 69 kg Blei.

142.

34. Aufgabe. Der König Hiero von Syrakus gab einem Goldschmied 16 Pfund Gold und 4 Pfund Silber, um ihm daraus eine Krone zu machen. Die fertige Krone wog richtig 20 Pfund. Der König aber argwohnte, dafs der Goldschmied einen Teil des Goldes für sich behalten und dieses wieder durch ein gleiches Gewicht an Silber ersetzt habe. Er bat deshalb den Mathematiker Archimedes die Sache zu untersuchen.

Archimedes wog die Krone im Wasser, worin sie $1\frac{1}{4}$ Pfund verlor, aufserdem fand er, dafs 21 Pfund Silber im Wasser 2 Pfund und 20 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund verliert, und konnte hieraus den etwaigen Betrug leicht berechnen. Er fand ihn — wie grofs?

Auflösung. Die Krone enthalte x Pfund Gold, mithin (20 — x) Pfund Silber, so mufs der ganze Verlust im Wasser $= \frac{x}{20} \cdot 1 + \frac{20 - x}{21} \cdot 2$ sein, da nun dieser Verlust $= 1\frac{1}{4}$ Pfund bekannt ist, so hat man:

$$\frac{x}{20} + 2 \cdot \frac{(20 - x)}{21} = \frac{5}{4}$$

$$\text{hieraus: } x = 14\tfrac{9}{19}$$

Die Krone enthielt statt 16 Pfund nur $14\frac{9}{19}$ Pfund Gold, und statt 4 Pfund Silber: $5\frac{10}{19}$ Pfund Silber.

143.

35. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 18 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater 2mal so alt sein als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die Anzahl Jahre, welche noch verfliefsen oder zu beider Alter hinzukommen müssen, um den fraglichen Zustand zu erhalten, so ist alsdann des Vaters Alter 58 + x, und des Sohnes Alter 18 + x, und da dann der Vater 2mal so alt sein soll, so hat man:

$$2(18 + x) = 58 + x$$

$$36 + 2x = 58 + x$$

$$x = 22$$

Der fragliche Zustand tritt also nach 22 Jahren ein, und der Vater ist dann 58 + 22 = 80, und der Sohn 18 + 22 = 40.

144.

36. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 10 Jahre alt; wieviel Jahre müssen noch verfliefsen oder zu beider Alter hinzukommen, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater gerade $3\frac{1}{2}$mal so alt ist, als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die fraglichen Jahre, so ist alsdann des Vaters Alter 58+x und des Sohnes Alter 18+x, und da dann der Vater $3\frac{1}{2}$mal so alt sein soll, so hat man:

$$3\tfrac{1}{2}(18+x)=58+x$$
$$63+3\tfrac{1}{2}x=58+x$$
$$2\tfrac{1}{2}x=58-63$$
$$\tfrac{5}{2}x=-5$$
$$x=-2$$

Anmerkung 1. Die Rechnung führt hier auf ein Resultat, welches mit dem Minus-Zeichen, als ein wesentliches Merkmal desselben behaftet ist. Um den Sinn dieses Vorzeichens durch unmittelbare Schlüsse herauszubringen, überlege man folgendes:

Der Gang einer Rechnung bildet immer eine Kette reiner Vernunftschlüsse, die folgerecht durchgeführt, durchaus auf ein solches Resultat führen müssen, das auf die in Untersuchung gezogene Frage vollkommen paſst. Nun kann es aber in der Natur der Sache liegen, in der Stellung der Frage &c., daſs die zu suchende Gröſse nicht in den vorausgesetzten, sondern gerade in den entgegengesetzten Sinn fällt.

Wir suchten, der Bedingung der vorliegenden Aufgabe gemäſs, eine Gröſse, welche statt x substituiert, der Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}(18+x)=58+x$$

Genüge leistet, oder im Sinne der Aufgabe gesprochen: eine Gröſse (x), welche mit 18 und 58 vereint, den fraglichen Zustand der beiden Alter giebt. Die obige Gleichung, kunstgerecht behandelt, muſs nun notwendig für x einen solchen Wert geben, der den Betrag auf beiden Seiten gleich macht, und dieser Wert, welcher er auch sein mag, muſs, zu 18 und 58 gelegt (addiert), den fraglichen Zustand geben, das ist klar. Kann nun aber die Gleichheit der beiden Seiten nicht anders stattfinden, als wenn von 18 und von 58 einerlei Gröſse subtrahiert wird, so muſs auch notwendig der für x gesuchte Wert mit dem Minus-Zeichen behaftet sein; die Rechnung, als eine Zeichensprache, kann den Umstand, daſs statt zu addieren, subtrahiert werden muſs, nicht in Worten, sondern nur in Zeichen andeuten. Da wir nämlich im Sinne der Addition rechnen, so muſs wohl die zu addierende Gröſse als eine inverse gefunden werden, weil eine direkte Gröſse hier nicht möglich ist. Die unbekannte Gröſse x ist nicht allein hinsichtlich ihrer wirklichen Gröſse, sondern auch hinsichtlich des Sinnes (Vorzeichens), in welchem sie genommen werden muſs, unbekannt. Das vorläufig vor x gesetzte +Zeichen bezieht sich nicht auf den bestimmten Wert von x, sondern deutet bloſs die (algebraische) Operation an, die damit vorgenommen werden soll, und steht also abgekürzt, statt des Wortes plus (lege hinzu). Hiernach ergiebt sich nun die Bedeutung des mit dem Minus-Zeichen behafteten Resultats. Die gesuchte Gröſse fällt nämlich nicht, wie vorausgesetzt, direkt in die Zukunft, sondern gerade umgekehrt (invers), zwei Jahre zurück in die Vergangenheit. Für den fraglichen Zustand ist also des Vaters Alter 58 plus $-2=56$; des Sohnes Alter: 18 plus $-2=16$ Jahre. Solche Fälle haben eigentlich zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Gröſsen geführt und die § 320 aus dem bloſsen Begriff abgeleiteten Regeln kennen gelehrt.

Anmerkung 2. Entgegengesetzte Gröſsen können nur da Sinn haben, wo es wirklich reine Gegensätze giebt, wie Zukunft, Vergangenheit; rechts, links; vorwärts, rückwärts &c. Licht und Schatten sind keine reine Gegensätze, Licht hat keinen Gegensatz; alle wirklichen Dinge, Substanzen (Baum, Tier &c.), haben keine Gegensätze.

145.

37. Aufgabe. Ein Mann ist jetzt 58 Jahre, sein Sohn 18 Jahre; wieviel mufs man zurückrechnen, oder von beider Alter subtrahieren, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater 6mal so alt war, als sein Sohn?

Auflösung. Man setze die zu subtrahierenden Jahre $= x$, so war des Vaters Alter $= 58 - x$ und des Sohnes Alter $18 - x$, und da nun jenes 6mal so grofs sein soll, so hat man:

$$58 - x = 6(18 - x)$$
$$58 - x = 108 - 6x$$
$$5x = 50$$
$$x = 10$$

folglich müssen 10 Jahre subtrahiert werden, und des Vaters Alter ist dann 58 minus $10 = 48$, des Sohnes Alter 18 minus $10 = 8$.

146.

38. Aufgabe. Der Vater sei wieder 58, der Sohn 18 Jahre alt, und gefragt: wieviel mufs von beider Alter subtrahiert werden, um den Zustand zu erhalten, wo des Vaters Alter 3mal so grofs war, als des Sohnes Alter?

Auflösung. Man setze die zu subtrahierenden Jahre $= x$, so ist des Vaters Alter $58 - x$, des Sohnes Alter $= 18 - x$, mithin laut Bedingung:

$$58 - x = 3(18 - x)$$
$$58 - x = 54 - 3x$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Der fragliche Augenblick fällt also nicht, wie vorausgesetzt, direkt in die Vergangenheit, sondern gerade entgegengesetzt (invers) in die Zukunft, und des Vaters Alter ist dann $= 58$ minus $-2 = 60$; und des Sohnes Alter $= 18 - (-2) = 20$ Jahre. (Siehe vorhergehende Anmerkungen und § 320.)

147.

39. Aufgabe. Wie grofs, und in welchem Sinn mufs der Faktor x genommen werden, damit er folgender Gleichung Genüge leistet?

$$25 + 4x = 7 - 2x$$

Auflösung. Man hat gleich

$$6x = -18$$
$$x = -3$$

Substituiert man diesen Wert -3 statt x in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$25 + 4.(-3) = 7 - 2.(-3)$$
$$\text{d. i. } 25 - 12 = 7 + 6$$

Die Gleichung lehrt, dafs sie nur dann Sinn haben kann, wenn der inverse Faktor, wie § 320 gedeutet wird.