Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Elftes Buch. Algebra

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Elftes Buch.

Algebra.

Von den einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse.

96.

Die meisten mathematischen Untersuchungen, auf welche Gegenstände sie auch Bezug haben mögen, führen in der Regel auf Probleme, deren vollständige Lösung die Hilfe der Arithmetik in Anspruch nimmt, oft eine umfassende Kenntnis derselben und einen gewissen Grad mechanischer Gewandtheit darin verlangt. Deshalb fordert auch, nicht allein rein wissenschaftliches, sondern schon praktisches Bedürfnis, die arithmetische Wissenschaft noch viel weiter auszubilden, als der vorhergehende Teil sie enthält. Dieser erste Teil enthält eigentlich nur die Theorie des Zahlensystems, der darauf gegründeten vier ersten Species in ganzen und gebrochenen Zahlen sowie in Buchstaben, und der Regel de tri, als eine der einfachsten praktischen Anwendungen dieser Theorieen.

Im Grunde kommen freilich alle Rechnungen, wie verwickelt sie auch sein mögen, zuletzt doch auf die einfachen Operationen der vier Rechnungsarten zurück. Ehe man jedoch bei einer mathematischen Untersuchung die Sache bis zu diesem Ziele führen kann, müssen oftmals erst viele Folgerungen und Schlüsse gezogen und die vier einfachen Rechnungsarten auf mannigfache Weise miteinander verbunden und wiederholt werden. Aus diesem Grunde werden auch, um die Begriffe und Schlüsse leicht übersichtlich bezeichnen zu können, und um nicht in Weitläufigkeit zu geraten, zweckmäfsig abkürzende Zeichen und Kunstwörter notwendig. Vor Allem müssen wir, dem Entwickelungsgange der Arithmetik folgend, zuerst die sogenannten einfachen Gleichungen und deren Gebrauch zur Auflösung verwickelter Aufgaben, als die, welche auf die einfache Regel de tri führen, kennen lernen. Man merke sich deshalb die folgenden, zwar sehr leichten, aber sehr wichtigen Sätze.

97.

Zwei Größenausdrücke von gleichem Betrage kann man ineinander gleich setzen, da z. B. $18-4$ ebenso viel ist, als $6+3+5$, so schreibt man dies so:

$$18-4=6+3+5$$

und nennt eine so angedeutete Gleichheit, wie schon § 16 erklärt, eine Gleichung. Was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, heißt die rechte, was linker Hand steht, die linke Seite, und die einzelnen Teile die Glieder dieser Seiten. So ist z. B. $+5$ das dritte Glied der rechten und -4 das zweite Glied der linken Seite.

98.

Wenn man von der einen Seite einer Gleichung ein oder auch mehrere Glieder mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite setzt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$18-4=6+3+5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

indem man das zweite Glied der linken Seite (-4) mit umgekehrtem Zeichen auf die rechte setzt, die folgende zweite Gleichung:

$$18=6+3+5+4 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses leichten, aber wichtigen Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze: „Gleiches zu (von) Gleichem, giebt Gleiches“ (§ 18). Auf beiden Seiten der Gleichung (1) ist der Betrag 14. Fügt man auf beiden Seiten $+4$ hinzu, so muß man offenbar wieder Gleiches erhalten; auf der linken Seite stände dann aber $18-4+4$ oder nur 18, weil hier zwei gleiche entgegengesetzte Größen sich tilgen und weggelassen werden können $(-4+4=0)$.

Kurzum, indem man ein Glied von der einen Seite einer Gleichung mit umgekehrtem Zeichen auf die andere Seite setzt, geschieht ganz dasselbe, als wenn man dieses Glied zuvor mit umgekehrtem Zeichen auf beiden Seiten hinzugefügt hätte.

Setzen wir aus der zweiten Gleichung $18=6+3+5+4$ die beiden ersten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Zeichen auf die linke, so kommt die notwendig richtige Gleichung:

$$18-6-3=5+4 \ldots\ldots\ldots (3)$$

indem dadurch die Gleichung (2) ganz dieselbe Umformung erlitten, als wenn man auf beiden Seiten -6 und -3 hinzugefügt, und dann rechter Hand die sich tilgenden Größen weggelassen hätte. Auf beiden Seiten ist der Betrag jetzt $=9$.

Versetzen wir noch das erste Glied der linken Seite auf die andere, so folgt aus (3):

$$-6-3=5+4-18\ldots\ldots.(4)$$

hier ist der nach § 76 gehörig zusammengerechnete Betrag (algebr. Summe) auf beiden Seiten $= -9$.

Aus (4) folgt noch, indem man die beiden Glieder der linken Seite auf die rechte setzt:

$$0=5+4-18+6+3\ldots\ldots(5)$$

Wenn man alle Vorzeichen in einer Gleichung umkehrt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus:

$$18-4=6+3+5\ldots\ldots\ldots(6)$$

indem man alle $+$ in $-$ und alle $-$ in $+$ verwandelt:

$$-18+4=-6-3-5\ldots\ldots\ldots(7)$$

denn in beiden Gleichungen müssen die Beträge, sowohl der linken als der rechten Seite, an Gröſse gleich, aber entgegengesetzt sein. In der sechsten Gleichung ist die (algebr.) Summe auf beiden Seiten $=14$, in der siebenten $=-14$. (§ 76.)

99.

Weil bei allen Umformungen einer Gleichung die Beträge auf beiden Seiten immer einander gleich bleiben müssen, so ist auch klar, daſs wenn man eine Gleichung auf ein bestimmtes Glied reduziert (d. h. die Gleichung durch Versetzen der Glieder so umformt, daſs dieses bestimmte Glied auf einer Seite ganz allein zu stehen kommt), dann auch der Betrag der andern Seite diesem alleinstehenden Gliede an Gröſse und Vorzeichen vollkommen gleich sein muſs.

Reduzieren wir z. B. die Gleichung:

$$6+5-3=10-2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

auf das Glied $+5$, indem man die beiden damit verbundenen Glieder $+6$ und -3 auf die andere Seite setzt, so kommt:

$$5=10-2-6+3\ldots\ldots\ldots(2)$$

und der Betrag der rechten Seite dieser Gleichung muſs notwendig $+5$ sein. (§ 98.)

Wäre demnach in einer Gleichung, z. B. in der vorstehenden (1) ein Glied unbekannt, an dessen Stelle ein beliebiges Zeichen x, als Stellvertreter gesetzt, und nun verlangt: den Wert von x zu bestimmen, welcher der Gleichung:

$$6+x-3=10-2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Genüge leistet, d. h. eine Zahl anzugeben, welche statt x gesetzt (substituiert), die Bedingung der Gleichung erfüllt, vermöge welcher die Beträge auf beiden Seiten gleich sein müssen, so können wir diese unbekannte Gröſse x sehr leicht finden, indem wir die Gleichung (1) auf x reduzieren. Aus (1) folgt nämlich (99):

$$x = 10 - 2 + 3 - 6$$

oder zusammengezogen (§ 76):

$$x = 5.$$

100.

Eine Gleichung auflösen heiſst: einen Wert für die in der Gleichung enthaltene unbekannte Gröſse (x) finden, der die linke Seite der rechten gleich macht. Die Lehre von der Auflösung der Gleichung heiſst Algebra. Die Gleichung $4 + x = 13$ z. B. ist aufgelöst, wenn man $x = 9$ (Auflösungsgleichung) gefunden hat; denn es ist $4 + 9 = 13$. Der für die unbekannte gefundene Wert (9 im vorstehenden Beispiel) heiſst Auflösung (oder Wurzel) der Gleichung. Da die unbekannte auf verschiedene Weise mit den bekannten (gegebenen) Gröſsen verbunden sein kann, so müssen wir, um jede Gleichung auflösen zu können, diese verschiedenen Fälle einzeln durchnehmen und durch leichte Beispiele erläutern, bevor wir die Anwendung der Gleichungen zur Auflösung algebraischer Aufgaben zeigen können.

101.

Erster Fall. Wenn die unbekannte Gröſse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, jedoch mit einem Faktor (Koefficient) behaftet ist.

Alsdann reduziere man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, ziehe dann die auf einerlei Seite stehenden bekannten Glieder in eins (algebr. Summe) zusammen, und dividiere hierauf durch den Koefficienten (Faktor) der unbekannten Gröſse.

Angenommen, in der Gleichung $4 + 7 \cdot 8 = 60$ sei die Zahl 8 unbekannt, an deren Stelle das Zeichen x gesetzt und nun verlangt, den Wert von x zu finden, welcher der Gleichung

$$4 + 7x = 60$$

Genüge leistet.

So hat man zuerst:

$$7x = 60 - 4$$

oder zusammengezogen:

$$7x = 56$$

$$\text{folglich } x = 8$$

denn wenn das Siebenfache einer unbekannten Gröſse 56 ist ($7x = 56$), so ist offenbar die Gröſse selbst $= \frac{56}{7} = 8$.

Aufgabe. Wenn man von dem Sechsfachen einer gewissen Zahl 5 subtrahiert, so kommt 14. Was ist dies für eine Zahl?

Auflösung. Bezeichnen wir die fragliche unbekannte Zahl vorläufig mit x, also das Sechsfache mit 6x, so können wir die Bedingung der Aufgabe durch folgende Gleichung:

$$6x - 5 = 14$$

ausdrücken, und aus dieser folgt nun:

$$6x = 14 + 5$$
$$6x = 19$$
$$x = 3\tfrac{1}{6}.$$

102.

Zweiter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, aber mit einem Divisor behaftet ist. In diesem Fall reduziere man die Gleichung wieder auf dieses unbekannte Glied, und multipliziere dann beiderseits mit dem Divisor.

Sei z. B. in der Gleichung $\tfrac{18}{6} + 4 = 7$ die Zahl 18 unbekannt, dafür x gesetzt, und nun verlangt die Gleichung:

$$\frac{x}{6} + 4 = 7$$

auf die unbekannte Gröſse x zu reduzieren, so hat man hieraus:

$$\frac{x}{6} = 7 - 4$$
$$\frac{x}{6} = 3$$
$$x = 18$$

denn wenn der sechste Teil von einer Gröſse 3 ist $\left(\frac{x}{6} = 3\right)$, so muſs die Gröſse selbst offenbar $= 6 \cdot 3 = 18$ sein.

Aufgabe. Wenn man einen gewissen Bruch durch 5 dividiert, vom Quotienten $\tfrac{2}{3}$ subtrahiert, so kommt $\tfrac{3}{7}$. Welcher ist's?

Auflösung. Die in der Aufgabe in Worten ausgedrückten Bedingungen und zu machenden Rechnungen führen, wenn man dieses alles vorläufig durch Zeichen andeutet, auf die Gleichung:

$$\frac{x}{5} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{3}{7}$$

hieraus folgt: $$\frac{x}{5} = \tfrac{3}{7} + \tfrac{2}{3}$$
$$\frac{x}{5} = \tfrac{23}{21}$$
$$x = \tfrac{115}{21}$$

Anmerkung. Ist die Unbekannte auf der linken Seite negativ, so multipliziert man beide Seiten mit -1. Z. B.:

$$3x + 5 = 4x;$$
$$3x - 4x = -5;$$
$$-x = -5;$$
$$\text{mit } -1 \text{ mult.: } x = 5.$$

103.

Dritter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse nur in einem Gliede vorkommt, aber mit einem Faktor und Divisor zugleich behaftet ist. Alsdann reduziere man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, und dividiere den Betrag auf der andern Seite durch den Bruchkoefficienten, d. h. multipliziere mit dem Divisor und dividiere durch den Faktor (§ 47), so hat man x.

Sei z. B. in $6 + \frac{4.10}{5} = 14$ statt 10 das Zeichen x gesetzt und der Wert desselben aus der Gleichung:

$$6 + \frac{4x}{5} = 14$$

zu finden, so hat man hieraus:

$$\frac{4x}{5} = 8$$

$$\text{und folglich: } x = 8 \cdot \tfrac{5}{4}$$
$$x = 10$$

denn wenn $\frac{4}{5}$ von einer Gröſse 8 ist ($\frac{4}{5}x = 8$), so ist offenbar die Gröſse selbst $= \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$. Man kann aber auch so schlieſsen: Wenn der 5te Teil von 4x, 8 ist $\left(\frac{4x}{5} = 8\right)$, so muſs offenbar $4x = 8 \cdot 5$ und mithin $x = \frac{8 \cdot 5}{4}$ sein.

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl: wenn man sie mit 7 multipliziert, darauf das Produkt durch 9 dividiert, und zum Quotienten $\frac{2}{5}$ addiert, so kommt $\frac{6}{11}$. Welche ist es?

Auflösung. Übersetzen wir die in Worten ausgedrückte Aufgabe in die algebr. Zeichensprache, so muſs folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{7x}{9} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{11}$$

$$\text{hieraus folgt: } \frac{7x}{9} = \tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{5}$$

$$\frac{7x}{9} = \tfrac{8}{55}$$

$$x = \frac{8}{55} \cdot \frac{9}{7}$$

$$x = \frac{72}{385}$$

104.

Vierter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse in mehreren Gliedern einer Gleichung vorkommt.

Um in diesem Fall das Bekannte von dem Unbekannten zu trennen, bringe man erst alle unbekannten Glieder auf die eine (linke) und alle bekannten auf die andere (rechte) Seite,* ziehe darauf die linke Seite in ein Glied zusammen und ebenso die rechte, dann ist dieser Fall auf den dritten zurückgeführt.

Sei z. B. in der Gleichung $4 + 3 \cdot 5 = 49 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 5$ die Zahl 5 unbekannt, und die Aufgabe gegeben: den Wert von x zu finden, welcher folgender Gleichung:

$$4 + 3x = 49 - 4x - 2x$$

Genüge leistet, so folgt aus dieser Gleichung, indem man die beiden unbekannten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die linke Seite, und ebenso das bekannte Glied der linken Seite auf die rechte setzt:

$$3x + 4x + 2x = 49 - 4$$

$$9x = 45$$

$$x = 5$$

daſs eine Gröſse (x) 3mal und 4mal und 2mal genommen, ebensoviel ist, als dieselbe 9mal genommen, ist klar.

Aufgabe. Was für eine Zahl ist es, die mit 10 multipliziert, dasselbe Resultat giebt, als wenn man 10 zu ihr addiert?

Auflösung. Sei x die Zahl, so soll $10 \cdot x$ ebensoviel sein, als $x + 10$, daher die Gleichung:

$$10x = x + 10$$

hieraus folgt: $10x - x = 10$

$$9x = 10$$

$$x = 1\tfrac{1}{9}.$$

105.

Fünfter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse mit bekannten verbunden in Klammern steht. In diesem Fall löst man erst die Klammern dadurch auf, indem man jeden innerhalb derselben stehenden Teil mit dem auſserhalb stehenden Faktor multipliziert (§ 19).

Setzt man in der Gleichung $6 \cdot 4 = 9 + 3 \cdot 5$, statt der einteiligen Faktoren 4 und 5 die zweiteiligen $7 - 3$ und $12 - 7$, welche

* Gewöhnlich stellt man die unbekannten Glieder auf die linke Seite, indem man, im Fall ihre algebr. Summe negativ ist, die Vorzeichen umkehrt. (§ 98.)

dann aber (nach § 19) in Klammern gesetzt werden müssen, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$6\,(7-3) = 9 + 3\,(12-7)$$

Angenommen nun, die in Klammern stehende Zahl 7 sei unbekannt, und die Frage vorgelegt: welcher Wert von x leistet folgender Gleichung:

$$6\,(x-3) = 9 + 3\,(12-x) \ldots\ldots (1)$$

Genüge?

Um die unbekannte Gröſse x von den Klammern zu befreien, lösen wir dieselben dadurch auf, indem man (nach § 19) jeden innerhalb stehenden Teil mit dem auſserhalb stehenden Faktor multipliziert; so folgt aus vorstehender Gleichung zuerst:

$$6x - 18 = 9 + 36 - 3x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und hieraus: $6x + 3x = 9 + 36 + 18$

$$9x = 63$$
$$x = 7$$

106.

Bei dieser Klammerauflösung muſs man besonders noch auf den Fall achten, wo das mit einer Klammer behaftete Glied ein Minus-Zeichen vor sich hat.

Sei z. B. folgende Gleichung:

$$6\,(x-3) - 3\,(12-x) = 9 \ldots\ldots (3)$$

auf x zu reduzieren, so folgt hieraus (nach § 89, 2. Fall):

$$6x - 18 - 36 + 3x = 9 \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$6x + 3x = 9 + 18 + 36$$
$$9x = 63$$
$$x = 7$$

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl, wenn man 6 von ihr subtrahiert, den Rest mit 5 multipliziert, und dieses Produkt wieder von 10 subtrahiert, so kommt Null. Wie findet man diese Zahl?

Auflösung. Deuten wir die gesuchte Zahl durch x an, so bezeichnet $x - 6$ den ersten Rest, und $5\,(x-6)$ die Multiplikation desselben mit 5. Daſs dieses Produkt wieder von 10 subtrahiert werden soll, ist durch $10 - 5\,(x-6)$ angedeutet, und da dieser Ausdruck $= 0$ sein soll, so hat man die Gleichung:

$$10 - 5\,(x-6) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hieraus: $10 - 5\,x + 30 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$$-5\,x = -30 - 10 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$-5\,x = -40 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Vorzeichen umgekehrt (§ 98), kommt:

$$5x = 40$$
$$x = 8$$

Statt in (4) die Vorzeichen umzukehren, hätte man auch das unbekannte Glied in (2) auf die andere Seite bringen, oder auch (nach § 79) -40 durch -5 dividieren können.

107.

Schliefslich wollen wir noch den Fall betrachten, wenn die unbekannte Gröfse in mehreren Gliedern mit einem Divisor (Nenner) behaftet ist. Sei in der Gleichung:

$$2 \cdot 24 + \frac{7 \cdot 24}{6} - 22 = 40 - \frac{2 \cdot 24}{3} + \frac{5 \cdot 24}{4}$$

der Faktor 24 unbekannt, dafür x gesetzt und dieses x aus folgender Gleichung zu finden:

$$2x + \frac{7x}{6} - 22 = 40 - \frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} \ldots\ldots (1)$$

so hat man zuerst, nach Trennung des Bekannten vom Unbekannten (§ 104):

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 40 + 22 \ldots\ldots (2)$$

Jetzt die Koefficienten von x zusammengerechnet, indem man die Brüche $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$ auf einerlei Nenner bringt, so kommt: (da $2 + \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{5}{4} = 2 + \frac{14}{12} + \frac{8}{12} - \frac{15}{12} = 2\frac{7}{12}$)

$$2\tfrac{7}{12}x = 62$$
$$\frac{31x}{12} = 62$$
$$x = 24$$

Statt aber, wie hier bei Gleichung (2) geschehen, die Bruchkoefficienten zu addieren, pflegt man gewöhnlich nur die ganzzahligen Glieder in ein Glied zusammenzuziehen, nämlich:

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 62 \ldots\ldots\ldots (3)$$

und dann die Brüche dadurch fortzuschaffen, indem man die ganze Gleichung, d. h. auf beiden Seiten mit dem kleinsten allgemeinen Nenner multipliziert, und dabei immer den § 23 gezeigten Rechnungsvorteil benutzt.

Multipliziert man also obige Gleichung (3) mit 12, so müssen alle Nenner 6, 3, 4 wegfallen, weil sie in 12 ohne Rest enthalten sind. Es ist nämlich:

$$12 \cdot 2x + 12 \cdot \frac{7x}{6} + 12 \cdot \frac{2x}{3} - 12 \cdot \frac{5x}{4} = 62 \cdot 12$$

oder gleich kürzer: (NB. § 23.)

$$\begin{aligned} 24x + 14x + 8x - 15x &= 62 \cdot 12 \\ 31x &= 62 \cdot 12 \\ x &= \frac{62 \cdot 12}{31} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs wenn $\frac{2}{5}$ derselben von $\frac{3}{4}$ derselben subtrahiert wird, die Zahl 14 übrig bleibt?

Auflösung. Sei x die Zahl, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$\tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x = 14$$

hieraus (auf beiden Seiten mit $4 \cdot 5$ multipliziert):

$$\begin{aligned} 15x - 8x &= 280 \\ 7x &= 280 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs wenn man von dem Sechsfachen derselben 15 subtrahiert, den Rest mit $\frac{4}{5}$ multipliziert und das Produkt wieder von dem Achtfachen der gesuchten Zahl subtrahiert, die Zahl 12 übrig bleibt.

Auflösung. Die fragliche Zahl, wenn sie möglich ist, heifse x, so ist:

$$8x - \tfrac{4}{5}(6x - 15) = 12$$

hieraus (auf beiden Seiten mit 5 multipliziert):

$$\begin{aligned} 40x - 4(6x - 15) &= 60 \\ 40x - 24x + 60 &= 60 \\ 16x &= 0 \\ x &= \tfrac{0}{16} = 0. \end{aligned}$$