Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Zweiter Teil. Allgemeine Arithmetik

Zweiter Teil.

Allgemeine Arithmetik.

(Buchstabenrechnung und Algebra).

Zehntes Buch.

Rechnung mit allgemeinen Gröſsenzeichen.

(Sogenannte Buchstabenrechnung.)

74.

Das Rechnen mit allgemeinen Zahlen (Buchstaben) setzt zunächst die Bekanntschaft mit den entgegengesetzten Gröſsen (§ 74 bis 79) voraus, mit denen wir uns daher vor allen Dingen zu beschäftigen haben.

Wenn mehrere Gröſsen addiert, und von der Summe mehrere andere Gröſsen subtrahiert werden sollen, so kann man diese zu machenden Rechnungen kurz dadurch andeuten, daſs man sämtliche Gröſsen nacheinander hinschreibt, vor jede der zu addierenden Gröſsen aber das + Zeichen, und vor jede zu subtrahierende Gröſse das — Zeichen setzt.

Sollen z. E. die Zahlen 9 und 12 addiert, und von ihrer Summe die Zahlen 5, 3 und 2 subtrahiert werden, so kann man diese Forderung so andeuten:

$$+9+12-5-3-2$$

und dieser aus mehreren Teilen bestehende Gröſsenausdruck ist also nicht so zu verstehen, als ob 2 von 3 oder 3 von 5 subtrahiert werden soll, sondern daſs die Summe aller mit dem —Zeichen behafteten Teile von der Summe der Teile, welche das + Zeichen führen, subtrahiert werden soll.

Dies wohl bemerkt, kann auch eine andere beliebige Folge der Teile eines mehrteiligen Gröſsenausdrucks auf den Betrag desselben (insofern man ihn wirklich berechnen wollte) keinen

Einfluſs haben. Man schreibt indessen eine vielteilige Gröſse gewöhnlich so, daſs ein Teil mit dem + Zeichen voransteht, indem man dann dieses voranstehende + Zeichen (als sich von selbst verstehend), der Einfachheit wegen, weglässt. Nur wenn ein Teil mit dem — Zeichen voransteht, darf dies Zeichen nicht fehlen. Vorstehenden Gröſsenausdruck kann man also, ohne seinen wirklichen Betrag (= 11) dadurch zu verändern, auch so schreiben:

$$\begin{array}{r} 9+12-5-3-2 \\ 12+9-3-2-5 \\ 9-5+12-2-3 \\ -5+9-3+12-2 \end{array}$$

75.

In jedem vielteiligen Gröſsenausdruck nennt man die Teile von verschiedenen Vorzeichen entgegengesetzte Gröſsen, und zwar die, welche mit dem + Zeichen behaftet sind, kurzweg *positive (direkte)* und die, welche das — Zeichen führen, *negative (inverse)* Gröſsen. Ebenso heiſsen die Zeichen + und — entgegengesetzte Vorzeichen, und eins das umgekehrte des andern. Jedes Vorzeichen gehört immer zu dem Teil, vor dem es steht.

76.

Addition entgegengesetzter Gröſsen. Will man den Betrag einer vielteiligen Gröſse (die Summe von positiven und negativen Zahlen) berechnen, so sind folgende Fälle zu berücksichtigen:

1) Alle Teile haben einerlei Vorzeichen (sind alle positiv oder alle negativ), alsdann addiere man sie unmittelbar, und gebe der Summe dasselbe Vorzeichen. So ist z. B.:

$$\begin{array}{r} 6+4+3=13 \\ -6-4-3=-13. \end{array}$$

2) Die Teile haben verschiedene Vorzeichen, alsdann suche man die Summe der positiven und ebenso die Summe der negativen, jede besonders, und tilge die kleinere Summe durch einen ebenso groſsen Teil der gröſseren, d. h. man ziehe die kleinere Summe von der gröſseren ab, und lasse dem Rest dasjenige Vorzeichen, welches die gröſsere Summe hat.

Einen solchen Rest (der den Umständen nach positiv oder negativ sein kann) nennt man den Betrag, oder auch wohl algebraische Summe der vielteiligen Gröſse.

Wären die Summen der positiven und negativen Teile an Gröſse gleich, so ist in diesem Fall der Betrag der vielteiligen Gröſse = 0, denn das zwei zusammengehörige gleiche, aber entgegengesetzte Gröſsen sich tilgen, ist klar. So ist z. B.:

$$+5-5=0$$
$$-6+6=0$$
$$+8-5=3$$
$$-8+5=-3$$
$$9-5+12-2-3=11$$
$$8-10-6+3=-5.$$

77.

Subtraktion entgegengesetzter Gröfsen. Soll $4-10+7$ von 9 subtrahiert werden, so schreibt man $9-(4-10+7)$. Um eine solche Subtraktion zu berechnen, löst man die Parenthese auf und bildet aus der Subtraktionsaufgabe eine Additionsaufgabe, indem man die in der Parenthese befindlichen positiven Zahlen in negative, die negativen in positive verwandelt. In vorstehender Aufgabe ist also 4, d. i. $+4$, in -4, -10 in $+10$, $+7$ in -7 zu verwandeln, um dieselbe in die Additionsaufgabe $9-4+10-7=19-11=8$ zu verwandeln. Die Subtraktion mufs nämlich richtig sein, wenn der Rest zum Subtrahend addiert, den Minuend giebt, folglich mufs z. B. $9-(+4-10)=9-4+10$ richtig sein, weil Rest $9-4+10$ und Subtrahend $+4-10$ addiert: $9-4+10+4-10=9$ giebt und diese Zahl dem Minuend wirklich gleich ist. Soll $-7+2$ um $-13+25-6$ vermindert werden, so erhält man $-7+2-(-13+25-6)=-7+2+13-25+6=21-32=-11$.

78.

Multiplikation entgegengesetzter Gröfsen. Es ist $+7\cdot+3$ offenbar $=7\cdot3=21=+21$;

$-7\cdot+3$, d. i. -7, 3mal genommen $=-7-7-7=-21$;

daher auch $+3\cdot-7=-21$;

$-7\cdot-3$? Da $+7\cdot-3=-21$, so mufs $-7\cdot-3$ das entgegengesetzte Produkt, also $+21$ geben.

Hieraus folgt die Regel: Gleiche Zeichen geben + (plus), ungleiche: — (minus).

Beispiele. $-5\cdot-2=+10$;
$9\cdot-1=+9\cdot-1=-9$;
$-2\cdot5=-2\cdot+5=-10$;
$3\cdot4=+3\cdot+4=+12=12$;
$-6\cdot-5\cdot-4=+30\cdot-4=-120$.

79.

Division entgegengesetzter Gröfsen. Auch hier gilt die in der Multiplikation gegebene Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche: —; denn z. B. $\frac{-12}{-4} = +3$, weil $+3 \cdot -4 = -12$ ist (siehe § 11).

Beispiele. $\frac{3}{-2} = \frac{+3}{-2} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$;

$\frac{-8}{6} = \frac{-8}{+6} = -\frac{8}{6} = -1\frac{1}{3}$;

$\frac{+2}{+10} = +\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$;

$\frac{5 \cdot -7}{-2} = \frac{-35}{-2} = +17\frac{1}{2}$.

Anmerkung. Wer sich eingehender über die Rechnung mit positiven und negativen Gröſsen unterrichten will, mag hier zunächst § 320 (s. Anhang) nachlesen.

80.

Einleitung in die Buchstabenrechnung. Manche verwickelte Rechnungen lassen sich oftmals bedeutend vereinfachen, wenn man die vorzunehmenden Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation &c. nicht gleich vollzieht, sondern vermittelst der Zeichen +, — &c. vorher erst andeutet, weil man dann alle zu vollziehenden Rechnungen auf einmal vor Augen hat, die stattfindenden Abkürzungen und Zusammenziehungen, die Vorteile, welche gemeinschaftliche Faktoren gewähren &c., sowie auch die Fälle, wo sich widerstreitende Gröſsen gegenseitig tilgen und mithin als überflüssig ausgelassen werden können u. m. dergl. leichter gewahren und benutzen kann. Ein paar Beispiele werden dies erläutern:

Erstes Beispiel. Welche Gröſse kommt heraus, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Brüche: $\frac{4576}{8777}$ und $\frac{213}{7691}$ addiert?

Auflösung. Deuten wir die zu machende Rechnung vorläufig nur an, so bedeutet $\frac{4576}{8777} + \frac{213}{7691}$ die Summe und mithin $\frac{1}{2}(\frac{4576}{8777} + \frac{213}{7691})$ die halbe Summe und ebenso $\frac{1}{2}(\frac{4576}{8777} - \frac{213}{7691})$ die halbe Differenz der beiden Brüche. Beide zusammengelegt, geben den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4576}{8777} + \frac{213}{7691}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4576}{8777} - \frac{213}{7691}\right)$$

welcher alle zu machenden Rechnungen vor Augen legt. Statt sie nun aber gleich zu vollziehen, überlege man erst, ob sich der Ausdruck (etwa durch Auflösung der Klammern &c.) nicht noch etwas zusammenziehen und auf einen leichter zu berechnenden Ausdruck zurückführen (reduzieren) läſst.

Die Klammern aufgelöst, läßt sich obiger Ausdruck auch so schreiben (§ 19):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4576}{8777} + \frac{1}{2} \cdot \frac{213}{7691} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4576}{8777} - \frac{1}{2} \cdot \frac{213}{7691}.$$

Hier sieht man nun gleich, daß die vorliegende vierteilige Größe zwei gleiche einstimmige und zwei gleiche widerstreitende Teile enthält. Letztere beiden, nämlich der 2te und 4te Teil, tilgen sich gegenseitig und können daher, als auf das Resultat keinen Einfluß habend, ganz ausgelassen werden. Erstere beiden Teile, nämlich der 1ste und 3te, lassen sich leicht in ein Glied zusammenziehen; denn eine und dieselbe Größe ein halb mal und noch ein halb mal nehmen, ist soviel als die ganze Größe einmal nehmen. Mithin reduziert sich der obige Ausdruck auf ein einziges Glied $\frac{4576}{8777}$, welches das gesuchte, ohne Rechnung, durch eine bloße Reduktion erhaltene Resultat ist.

Ein anderer sehr naheliegender Gedanke, uns bei Reduktionen, wie die vorhergehende, noch größere Vorteile zu verschaffen, ist folgender: da wir beim Reduzieren der Größenausdrücke auf einfachere, die Teile der Größen ganz unverändert lassen, sie gleichsam nur hin- und herschieben, kleine Zusammenfassungen und Auslassungen vornehmen, gleiche Faktoren gegeneinander aufheben &c., so können wir hinsichtlich der klareren Übersicht, des schnellern und bequemern Schreibens, dadurch offenbar einen bedeutenden Vorteil erlangen, wenn man statt der Größen, an welchen Rechnungen vollzogen werden sollen, vorläufig und bis zu Ende der Reduktion einfachere, leichter zu schreibende und zu unterscheidende Zeichen als Stellvertreter setzt. Mit diesen Stellvertretern kann man dann, vermittelst der Zeichen +, — &c., die zu machenden Rechnungen ebenfalls andeuten und die etwa möglichen Reduktionen vollziehen und dann am Ende der Reduktion, statt der gebrauchten einfachen Zeichen, die Werte, welche sie vertreten haben, wieder zurücksetzen.

Was für einfache Zeichen man dieserhalb gebrauchen will, ist offenbar ganz willkürlich. Da wir jedoch, vermöge der Gewohnheit, die Buchstaben schnell nennen, schreiben und unterscheiden können, so sind sie auch zu Stellvertretern der Größen am bequemsten.

Zur Erläuterung wollen wir wieder das vorhergehende Beispiel nehmen, wo die halbe Summe und halbe Differenz der beiden Größen $\frac{4576}{8777}$ und $\frac{213}{7691}$ zusammengelegt werden soll, und der Kürze wegen für die erste Größe einen beliebigen Buchstaben, z. B. a, und für die andere Größe einen andern, z. B. b, setzen, alsdann deutet $a + b$ die Summe, mithin $\frac{1}{2}(a + b)$ oder $\frac{a + b}{2}$ die halbe Summe und ebenso $\frac{1}{2}(a - b)$ oder $\frac{a - b}{2}$ die halbe Differenz der beiden, einstweilen durch a und b vertretenen Gröfsen an, und der Ausdruck:

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$$

stellt, wie vorhin, alle Rechnungen dar, welche die Aufgabe zu machen verlangt. Statt nun aber diese angedeutetermafsen gleich zu vollziehen, indem man für die Buchstaben ihre Werte wieder zurücksetzt, versuche man erst den Ausdruck auf einen einfachern zu reduzieren. Offenbar kann man ihn auch so schreiben (§ 20):

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

Hier wird nun $+\frac{b}{2}$ durch $-\frac{b}{2}$ getilgt, $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ ist soviel als a. Mithin reduziert sich der ganze Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$ auf die einteilige Gröfse a, wofür der Wert $\frac{4576}{8777}$, als das gesuchte Resultat, zurückgesetzt werden mufs.

81.

Zweites Beispiel. Ein Fufsgänger ist mit stets gleich bleibender Geschwindigkeit von einem Orte, O, nach einem andern Orte, W, gegangen. Er ging vormittags 8 Uhr 4 Minuten 59 Sekunden von O ab, und kam nachmittags 3 Uhr 57 Minuten 48 Sekunden in W an. Man frägt nach dem Stande der Uhr, als er gerade die Mitte seines Weges erreichte.

Auflösung. Die Hälfte der auf den ganzen Weg verwandten Zeit zur Vormittagszeit addiert, giebt den fraglichen Stand der Uhr. Um aber erst die auf den ganzen Weg verwandte Zeit zu erhalten, müssen wir, weil die Uhr nur bis 12 in einem fortzählt, erst die Vormittagszeit von 12 subtrahieren, um die bis 12 verflossene Zeit zu erhalten, und diese dann zur Nachmittagszeit addieren, von der Summe die Hälfte nehmen und zur Vormittagszeit hinzulegen, wie es folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{lcl} O\text{————————} & : & \text{————————}W \\ 8^h\ 4'\ 59'' & & 3^h\ 57'\ 48''; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
 & & 12^h\ \ 0'\ \ 0'' \\
\text{Vormittagszeit} & = & 8^h\ \ 4'\ 59'' \\ \hline
\text{die bis } 12^h \text{ verflossene Zeit} & = & 3^h\ 55'\ \ 1'' \\
\text{Nachmittagszeit} & = & 3^h\ 57'\ 48'' \\ \hline
\text{Auf den ganzen Weg verflossene Zeit} & = & 7^h\ 52'\ 49'' \\
 2) & & \\ \hline
\text{Auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit} & = & 3^h\ 56'\ 24\tfrac{1}{2}'' \\
\text{Hierzu die Vormittagszeit} & = & 8^h\ \ 4'\ 59'' \\ \hline
\text{Stand der Uhr} & = & 12^h\ \ 1'\ 23\tfrac{1}{2}''
\end{array}$$

Folglich hatte der Fuſsgänger 1 Minute $23\frac{1}{2}$ Sekunden nach 12 Uhr die Mitte seines Weges erreicht.

Dasselbe Resultat kann man aber folgendermaſsen viel kürzer erhalten.

Deuten wir die oben gleich vollzogenen Rechnungen vorläufig nur an, indem wir zugleich, des leichtern Schreibens wegen, für die Gröſse der gegebenen Vormittagszeit einstweilen das einfache Zeichen a und für die Nachmittagszeit das Zeichen b substituieren, so können wir durch $12 - a$ die bis 12 Uhr, durch $12 - a + b$ die auf den ganzen Weg und mithin durch $\frac{12 - a + b}{2}$ die auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit kurz andeuten. Wird hierzu wieder die Vormittagszeit gerechnet, so erhalten wir für den fraglichen Stand der Uhr den Ausdruck:

$$\frac{12 - a + b}{2} + a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dieser Ausdruck läſst sich noch etwas vereinfachen, wenn wir ihn auf einerlei Nenner bringen. Statt der ohne Nenner stehenden Gröſse a, kann man auch $\frac{2a}{2}$ setzen, und mithin den obigen Ausdruck so schreiben:

$$\frac{12 - a + b}{2} + \frac{2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\frac{12 - a + b + 2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

In dem Zähler dieses Ausdrucks befinden sich jetzt zwei entgegengesetzte Gröſsen, nämlich $-a$ und $+2a$. Nun ist aber $-a + 2a = -a + a + a = a$. Setzen wir also a, statt $-a + 2a$, so läſst sich der obige Ausdruck noch einfacher so schreiben:

$$\frac{12 + a + b}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Alle vier verschiedenen Ausdrücke müssen offenbar einerlei Resultat geben, wenn man statt der Buchstabengröſsen die numerischen Werte derselben substituiert. Der letzte Ausdruck, der sich nicht weiter reduzieren läſst, ist aber für die numerische Rechnung am bequemsten. Nach seiner Vorschrift braucht man nur, um die fragliche Zeit zu erhalten, die gegebenen Vormittags- und Nachmittags-Zeiten zu 12 zu addieren, und von der Summe die Hälfte zu nehmen. Für die vorliegende Aufgabe ist nämlich:

$$\begin{array}{rl} 12 = & 12^{st.}\ \ 0'\ \ 0'' \\ a = & \ \ 8 \text{ „ }\ \ 4'\ 59'' \\ b = & \ \ 3 \text{ „ } 57'\ 48'' \\ \hline & 24^{st.}\ \ 2'\ 47'' \\ 2 \,| & 12^{st.}\ \ 1'\ 23\tfrac{1}{2}'' \end{array}$$

Nach dieser Vorbereitung wird der folgende Paragraph dem Anfänger hoffentlich verständlicher werden, ihm doch wenigstens einen ungefähren Begriff von dem eigentlichen Sinn und Zweck der sogenannten Buchstabenrechnung geben, und dadurch das Fremdartige und Dunkle, welches dieser Teil der Mathematik für Anfänger hat, entfernen.

82.

Begriff der Buchstabenrechnung. 1) Wenn eine Gröſse aus andern berechnet werden soll, so ist offenbar die Hauptsache, daſs man erst überlege, wie gerechnet werden muſs, das Rechnen selbst ist das wenigste. Um nun die Aufmerksamkeit nicht durch Nebensachen zu stören, wie durch addieren, multiplizieren &c., was bis zuletzt aufgeschoben werden kann, suche man den Gang, den die Rechnung nimmt, möglichst kurz darzustellen, indem man alle vorzunehmenden Operationen vorläufig bloſs andeutet, und des bequemern Schreibens wegen, für die Hauptgröſsen einstweilen einfache Zeichen (Buchstaben) als Stellvertreter setzt. Dies ist offenbar das beste Mittel, bei verwickelten Untersuchungen den Lauf der Gedanken zu verfolgen und eine Kette von Schlüssen schnell zu bezeichnen.

2) Die Art und Weise, wie eine Aufgabe gelöst wird, beruht auf Vernunftschlüssen, die für alle Aufgaben derselben Art immer dieselben sind und nicht von der Gröſse der Data abhängen. So gilt z. E. der vorhin gefundene Buchstaben-Ausdruck: $\frac{12 + a + b}{2}$ nach welchem wir die dort gesuchte Zeit berechneten, auch zugleich für jeden andern Fall derselben Art, wo also nicht die Aufgabe, sondern nur die Data verändert sind, und daher ist durch $\frac{12 + a + b}{2}$ die allgemeine Regel (Formel) bezeichnet, nach welcher wir aus den hier allgemein durch a und b angedeuteten Vormittags- und Nachmittags-Zeiten, sobald sie nur in bestimmten Zahlen gegeben werden, die fragliche Zeit immer leicht finden können. Würde z. B. gesagt, der Fuſsgänger sei um 9 Uhr von O abgegangen und um 3 Uhr in W angekommen und nach der Zeit gefragt, als er die Mitte des Weges erreichte, so braucht man in den Ausdruck $\frac{12 + a + b}{2}$ nur 9 statt a, und 3 statt b, zu setzen. Man sieht also, daſs die Buchstaben keine bestimmte Werte haben, sondern bald dies, bald jenes bedeuten können.

3) Endlich dienen auch die Buchstaben, als Gröſsenzeichen, zur Abkürzung des Vortrags, sowohl des schriftlichen als mündlichen; deshalb werden auch, um nicht durch Zahlen und die sieben Species Raum und Zeit unnötig auszufüllen, in der Theorie die Untersuchungen gleich allgemein durchgeführt, die Gröſsen durch Buchstaben bezeichnet, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloſs angedeutet und dann die etwa möglichen, gleich näher zu erläuternden Reduktionen vollzogen. Wer eine allgemein gestellte Aufgabe lösen kann, der kann es auch in jedem besondern Fall, (wo die Data in bestimmten Zahlen gegeben werden) und umgekehrt, denn die Schlüsse sind ja in beiden Fällen dieselben. Die allgemeine Auflösung unterscheidet sich von der besondern bloſs dadurch, daſs sie, weil die Gröſse der Data unbestimmt gelassen ist, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloſs andeuten kann, die erhaltenen Ausdrücke jedoch, nach den Regeln der Buchstabenrechnung, gleich auf die bequemste Form reduziert. Die allgemeine Auflösung ist aber immer belehrender, indem sie allgemeine Begriffe giebt, Ursache und Wirkung vor Augen legt, welche in der speziellen Auflösung nicht so deutlich hervortreten können, weil durch die Vereinigung der Zahlen die Anschauung der Art und Weise, wie dieselben eigentlich wirken und sich miteinander verbinden, verloren geht.

83.

Geht man von einer richtigen Vorstellung aus, so muſs man dies Kapitel über die Buchstabenrechnung als das allerleichteste in der ganzen Mathematik finden, wenn auch die Reduktionen selbst ein wenig Aufmerksamkeit und mechanische Fertigkeit verlangen. Man bemerke nur noch, daſs das sogenannte Buchstabenrechnen kein wirkliches (numerisches) Rechnen, sondern nur ein andeutendes Rechnen, ein wissenschaftliches Zusammenstellen, Zergliedern, Zusammenziehen (Reduzieren) der durch Buchstaben vertretenen Gröſsen ist. Die Buchstabenrechnung stellt zu dem Ende verschiedene Gröſsen-Ausdrücke auf und lehrt das Verfahren, wie man dieselben auf kürzere reduzieren kann, oder auch ihre Form so zu verändern, daſs dadurch Reduktionen möglich werden. Die üblichen Gebräuche bei der Buchstabenrechnung und die sich übrigens von selbst ergebenden leichten Regeln sind in folgenden Paragraphen enthalten.

84.

Weil es dem Auge gefälliger ist, so pflegt man hinsichtlich der Aufeinanderfolge mehrerer Buchstaben manchmal die alphabetische Ordnung zu beobachten. Soll z. B. die Addition der durch c, a, b vertretenen Gröſsen angedeutet werden, so schreibt man statt $c + a + b$ lieber $a + b + c$.

85.

Um die Multiplikation mehrerer Buchstaben-Grössen anzudeuten, setzt man die Faktoren unmittelbar nebeneinander und zwar ohne Multiplikationszeichen, welches hier entbehrlich ist. Sollen z. B. die Grössen b, a, x miteinander multipliziert werden, schreibt man statt $a \cdot b \cdot x$ kurz abx. Ebenso 3 mit a und mit y multipliziert $= 3ay$.

Ist eine Buchstaben-Grösse mit einer Zahl zu multiplizieren, so setzt man den numerischen Faktor, hier Koefficient genannt, immer voran. Soll z. B. a mit 3 multipliziert werden, so schreibt man $3a$, und 3 ist hier der Koefficient von a. In $\frac{2}{3}ax$ ist $\frac{2}{3}$ der Koefficient von ax. In $\dfrac{4ab}{5}$ (d. i. $\frac{4}{5} \cdot ab$) ist $\frac{4}{5}$ der Koefficient von ab.

Den Koefficienten 1 schreibt man nicht, weil $1 \cdot 8 = 8$ ist; man schreibt daher statt $1 \cdot a$; $1 \cdot abc$ kurz a, abc. In $\dfrac{a}{5b}$ ist mithin der Koefficient $\frac{1}{5}$, denn $\dfrac{1 \cdot a}{5 \cdot b} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{a}{b}$.

86.

Buchstaben-Ausdrücke heissen gleichartig, wenn sie aus denselben Buchstaben und auf dieselbe Weise gebildet sind, wobei aber die Koefficienten verschieden sein können. So sind z. B. $2ab$, $-\frac{2}{3}ab$, $12ab$ gleichartig. Ebenso $3aax$, $25aax$ &c.; die Ausdrücke ab, $a + b$, $3abc$, $2abb$ hingegen sind ungleichartig.

87.

Addition. Es ist $7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7$, daher auch $a + a + a = 3a$. Da nun $3a + 2a = a + a + a + a + a = 5a$, so ergiebt sich hieraus die Regel: Man schreibt die zu addierenden Grössen mit ihrem Vorzeichen in beliebiger Folge nacheinander hin, indem man die etwa gleichartigen Teile durch (algebr.) Addition ihrer Koefficienten in eine Summe zusammenzieht. Folglich $7x - 10x = -3x$, denn es ist $7 - 10 = -3$; $abc + 6abc = 1 \cdot abc + 6abc = 7abc$; $\frac{2}{3}ax + \frac{3}{4}ax = \frac{17}{12}ax$; $2ab + 3ax + ab = 3ab + 3ax$; $a - 5a = -4a$.

Ebenso verfährt man, wenn die in eine Summe zu bringenden Buchstabengrössen vielteilige sind, indem man sie nacheinander hinsetzt und dann die gleichartigen Teile, welche man, der leichtern Übersicht wegen, auch erst untereinander stellen kann, in eins zusammenzieht. Sollen z. E. die Grössen $8ax - 3bc$; $2aax - 3$; $-5ax + 7$; $6bc - 4ax$ addiert werden, so hat man:

$$8ax - 3bc + 2aax - 3 - 5ax + 7 + 6bc - 4ax = 2aax - ax + 3bc + 4$$

oder untereinander geordnet:

$$
\begin{array}{rl}
& 8ax - 3bc \\
& \qquad\qquad\quad + 2aax - 3 \\
& -5ax \ldots\ldots\ldots\ldots + 7 \\
& -4ax + 6bc \\
\hline
\text{Summe:} & -\ ax + 3bc + 2aax + 4
\end{array}
$$

Um sich noch in anderer Weise von der Richtigkeit einer Reduktion durch Beispiele zu überzeugen, mögen Anfänger, sowohl in die gegebenen, als durch Reduktion daraus abgeleiteten Ausdrücke, statt der Buchstaben ganz beliebige Zahlen setzen, und zusehen, ob beide einerlei Resultat geben (§ 328).

88.

Subtraktion. Man addiere, wie es im 77. Satze gelehrt worden ist, den Subtrahend mit umgekehrtem Vorzeichen algebraisch zum Minuend, und ziehe die etwa gleichartigen Teile in eins zusammen (§ 77). Soll z. B. $2a$ von $6a$ subtrahiert werden, so hat man $6a - 2a = 4a$. Ebenso ist $2ax$ von $6ax$ subtrahiert: $6ax - 2ax = 4ax$; b von a subtrahiert, giebt $a - b$. Will man bloſs andeuten, daſs eine vielteilige Gröſse von einer andern, einteiligen oder vielteiligen Gröſse subtrahiert werden soll, so muſs man den vielteiligen Subtrahend in Klammern schlieſsen, und mithin beim Auflösen der Klammer alle in derselben stehenden Vorzeichen umkehren; z. B. $y - a$ von x subtrahiert giebt:

$$x - (y - a) = x - y + a.$$

$2ab + 6bc - 4x$ von $2ab - 3bc$ giebt angedeutet:

$$2ab - 3bc - (2ab + 6bc - 4x).$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man die Klammern auflöst:

$$= 2ab - 3bc - 2ab - 6bc + 4x = 4x - 9bc.$$

Ebenso ist:

$$a + b - (a - b) = a + b - a + b = 2b$$

Sind Minuend und Subtrahend vielteilig, so kann man sie auch erst geordnet untereinander stellen und die Aufgabe dann in eine A d d i t i o n s a u f g a b e verwandeln, indem man die Zeichen des Subtrahend (der zweiten Zeile) in die entgegengesetzten verwandelt, denn nach § 77 heiſst $+4$ und -10 subtrahieren soviel als -4 und $+10$ addieren.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Von:} & 2ab - 3bc \\
\text{subtr.:} & 2ab + 6bc - 4x; \\
& (-)\quad (-)\quad (+) \\
\hline
\text{Differenz:} & -9bc + 4x;
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\text{von:} & 2ax - 6bz + 7 \\
\text{subtr.:} & 6ax - 3by - 3 \\
& (-)\quad (+)\quad (+) \\
\hline
& -4ax - 6bz + 3by + 10.
\end{array}
$$

Addiert man den Rest zum Subtrahend, so muſs, als Probe der richtigen Rechnung, der Minuend wieder kommen.

89.

Multiplikation. Erster Fall. Sind die Faktoren einteilige Gröſsen, so stelle man sie, alphabetisch geordnet, nebeneinander, und multipliziere nur die etwaigen numerischen Faktoren (Koefficienten) miteinander (§ 320), z. B. $2a$ mit $3b$ multipliziert, giebt $2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot ab = 6ab$. Ebenso ist:

$$3ab \,.\, 5ac = 15aabc; \qquad 17ax \cdot 3b = 51abx;$$
$$\tfrac{2}{3}ab \cdot \tfrac{3}{4}x = \tfrac{1}{2}abx; \qquad 3abx \cdot 3bx = 9abbxx;$$
$$\tfrac{1}{3}a \cdot \tfrac{3}{4}bc = \frac{abc}{4}; \qquad 5a \cdot \tfrac{1}{6}b \cdot \tfrac{4}{5}c = \frac{2abc}{3};$$
$$\tfrac{2}{3}ax \cdot \tfrac{3}{5}b \cdot \tfrac{5}{6} = \frac{abx}{3}; \qquad \tfrac{2}{7}am \cdot \tfrac{7}{8}n = \frac{amn}{4};$$

Zweiter Fall. Ist der eine Faktor einteilig, der andere vielteilig, so muſs man, um die Multiplikation bloſs anzudeuten, den vielteiligen Faktor in Klammern schlieſsen. Zuweilen ist es aber (Behuf einer Reduktion) erforderlich, die Klammern aufzulösen, und dann muſs man (nach § 19 und § 78) mit dem einteiligen Faktor jeden Teil des vielteiligen multiplizieren. Soll z. B. die Gröſse $a + b - c$ mit a multipliziert werden, so ist $a(a + b - c) = aa + ab - ac$. Ebenso ist:

$$2a(b - 3c) = 2ab - 6ac$$
$$3ab(7ab - 3ax + 1) = 21aabb - 9aabx + 3ab$$
$$(9ax - \tfrac{5}{7}by) \cdot 7b = 63abx - 5bby;$$
$$4 + 5(x + 6) = 4 + 5x + 5 \cdot 6 = 34 + 5x;$$
$$x(y - 1) = xy - x; \quad (a + 1)b = ab + b;$$
$$2ac - ab + a(b - c + x) = 2ac - ab + ab - ac + ax = ac + ax$$

Hat hierbei der einteilige Faktor ein Minuszeichen, so sind gleichfalls die Regeln des § 78 anzuwenden. Z. B.:

$$a + 7 - 3(a - 2b + 4) = ?$$

Hier ist zu multiplizieren: -3 mit $+a = -3a$,
-3 mit $-2b = +6b$.
-3 mit $+4 = -12$,

folglich erhält man $a + 7 - 3a + 6b - 12 = 6b - 2a - 5$.

Dritter Fall. Sind beide Faktoren vielteilig, so multipliziere man mit jedem Teil des einen (am bequemsten des kürzesten) Faktors jeden Teil des andern, und ziehe im entstehenden Produkte die etwa gleichnamigen Teile in eins zusammen. Man kann, der leichtern Übersicht wegen, die Faktoren auch erst unter einander stellen und wie No. 1, 2, 3 zeigt, verfahren.

Es ist übrigens gleichgültig, mit welchem Teil des Multiplikators man zuerst multipliziert. Soll z. B. die Gröſse $a + b - c$ mit $a - b$ multipliziert werden, so ist, indem man die Gröſse $a + b - c$ oder jeden Teil derselben a mal und dann $-b$ mal nimmt

$$(a - b)(a + b - c) = aa + ab - ac - ab - bb + bc = aa - ac - bb + bc.$$

$$\begin{array}{ccc}
(1) & (2) & (3) \\
\begin{array}{l}
\quad a+b-c \\
\quad a-b \\
\hline
aa+ab-ac \\
\qquad -ab-bb+bc \\
\hline
aa-bb-ac+bc
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\quad a+b \\
\quad a-b \\
\hline
aa+ab \\
\qquad -ab-bb \\
\hline
aa-bb
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a-b \\
a+b \\
\hline
aa-ab \\
\qquad +ab-bb \\
\hline
aa-bb
\end{array}
\end{array}$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a+b)=aa+ab+ab+bb=aa+2ab+bb \\
&(a-b)(a-b)=aa-ab-ab+bb=aa-2ab+bb \\
&(x+1)(y-1)=xy-x+y-1 \\
&(3ax-4by)(5bx+1)=15abxx+3ax-20\,bbxy-4by \\
&(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{5}{4}y)(3x-\tfrac{6}{7}y-\tfrac{3}{2})=2xx-\tfrac{121}{28}xy-x+\tfrac{15}{14}yy+\tfrac{15}{8}y.
\end{aligned}$$

90.

Faktorenzerlegung. Ebenso oft als die vorhergehenden Aufgaben, eine vielteilige Gröſse mit einer andern zu multiplizieren, kommt der umgekehrte Fall vor: eine vielteilige Gröſse in Faktoren zu zerlegen, und da gerade hierin der Hauptschlüssel zu den Reduktionen liegt, so müssen Anfänger sich darin einige Fertigkeit erwerben. Allgemeine Regeln lassen sich aber hierzu nicht geben. Ein wenig Umsicht und Übung ist erforderlich. Folgende Beispiele werden indessen zeigen, wie man dabei zu verfahren hat.

Multipliziert man die Gröſse $3a-4c+2$ mit $3ab$, so erhält man $9aab-12abc+6ab$. Käme nun umgekehrt in einer Rechnung der Gröſsen-Ausdruck $9aab-12abc+6ab$ vor, so würde ein nur wenig geübter Blick gleich wahrnehmen, daſs alle Teile dieser Gröſse erstlich den numerischen Faktor 3 gemeinschaftlich haben, weil alle Teile durch 3 ohne Rest teilbar sind, auſserdem aber noch den literalen Faktor ab, weil auch dieser in allen Gliedern vorkommt. Man kann also diesen Ausdruck als ein unentwickeltes Produkt darstellen, oder in Faktoren zerlegen, wenn man den, allen Teilen gemeinschaftlichen, Faktor $3ab$ heraushebt und vor die in Klammer geschlossene Summe der eigentümlichen Faktoren $3a-4c+2$ setzt. Es ist nämlich auf die einfachste Form reduziert:

$$9aab-12abc+6ab=3ab(3a-4c+2)$$

Ebenso kann der Ausdruck $xx+xy$ in Faktoren zerlegt werden, wenn man den, beiden Teilen gemeinschaftlichen Faktor x heraussetzt; es ist nämlich $xx+xy=x(x+y)$. Anfänger pflegen gewöhnlich bei folgenden Fällen, wo der eine eigentümliche Faktor 1 ist, Schwierigkeiten zu machen: $yx+y=y\cdot x+y\cdot 1=y(x+1)$; $x-xx=x(1-x)$; $x+mx+nx=(1+m+n)x$. Von der Richtigkeit einer Faktorenzerfällung kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Faktoren wieder miteinander multipliziert. Beispiele:

$$3ab+3ax=3a(b+x); \quad 2Rn-4R=2R(n-2);$$

$$y - yz = y(1-z); \qquad \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{h}{2}(a+b) = h \cdot \frac{a+b}{2}$$

Ist das 1. Glied mit einem Minuszeichen versehen, so denke man sich zuvor nach dem Minuszeichen eine Klammer. Z. B.:

$$a - bc - bd + be = a - (bc + bd - be) = a - b(c + d - e).$$

Daſs hier die Zeichen in der Klammer entgegengesetzt werden, erklärt sich leicht aus der Multiplikation des Ausdrucks $-b(c+d-e)$.

$$5ax - 3by + 6bz = 5ax - 3b(y - 2z) = 5ax + 3b(2z - y).$$

Durch die Zerlegung in Faktoren läſst sich ein Gröſsenausdruck oftmals sehr zusammenziehen und vereinfachen. So haben in dem folgenden Ausdruck die beiden ersten Glieder den Faktor ac, die beiden folgenden Glieder den Faktor bc gemeinschaftlich &c., hebt man diese heraus, so ist:

$$\begin{aligned} &abc - acc - bbc + bcc + abd - acd - bbd + bcd \\ &\qquad = ac(b-c) - bc(b-c) + ad(b-c) - bd(b-c) \end{aligned}$$

Hier haben alle Teile den zweiteiligen Faktor $b - c$ gemeinschaftlich, setzt man diesen wieder heraus, so ist der vorstehende Ausdruck

$$\begin{aligned} &= (b-c)[ac - bc + ad - bd] \\ &= (b-c)[c(a-b) + d(a-b)] \\ &= (b-c)[(a-b)(c+d)] \\ &= (a-b)(b-c(c+d) \end{aligned}$$

91.

Wenn man eine Gröſse mit sich selbst multipliziert, so nennt man (aus geometrischen Gründen) das entstehende Produkt das Quadrat dieser Gröſse; so ist z. B. $8 \cdot 8$ oder 64 das Quadrat von 8; von 5 ist das Quadrat 25; die Quadrate von 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, &c. sind 1, 4, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{25}$; das Quadrat von a ist aa (lies: a-quadrat). Das Quadrat von $\frac{a}{2}$ ist $\frac{aa}{4}$ (lies: „ein viertel a-quadrat“ oder „a-quadrat durch 4“). Dies beachtet, merke man sich folgende zwei wichtige Sätze:

1) Die Summe zweier Gröſsen $(a+b)$ mit der Differenz derselben $(a-b)$ multipliziert, giebt die Differenz ihrer Quadrate. Man hat nämlich durch wirkliche Multiplikation

$$(a+b)(a-b) = aa + ab - ab - bb = aa - bb.$$

Nach diesem Satze können wir also das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Gröſsen gleich aus dem Gedächtnis niederschreiben. Beispiele:

$$(a+x)(a-x) = aa - xx; \qquad (a+1)(a-1) = aa - 1$$

$$(1+x)(1-x) = 1 - xx; \qquad (2a + \tfrac{1}{2}b)(2a - \tfrac{1}{2}b) = 4aa - \frac{bb}{4}$$

2) Wenn also umgekehrt die Differenz der Quadrate zweier Gröſsen vorkommt, wie $aa-bb$; $bb-yy$ &c., so kann man diese jedesmal in zwei Faktoren (Summe und Differenz) auflösen. So ist z. E.

$$xx-zz=(x+z)(x-z); \qquad zz-1=(z+1)(z-1)$$
$$xx-aa=(x+a)(x-a); \qquad 1-xx=(1+x)(1-x)$$
$$4aa-\frac{bb}{9}=\left(2a+\frac{b}{3}\right)\left(2a-\frac{b}{3}\right)$$
$$57\cdot 57-43\cdot 43=(57+43)(57-43)=100\cdot 14$$

92.

Division. Die Division kann im allgemeinen nur angedeutet werden, wodurch man Gröſsen-Ausdrücke in Bruchform erhält. Ist z. B. a durch b zu dividieren, so schreibt man: $\frac{a}{b}$ (gelesen: „a durch b“), ebenso $2ax$ durch $3by$ dividiert: $\frac{2ax}{3by}$; $a+b$ durch $a-b$ dividiert: $\frac{a+b}{a-b}$

1) Haben aber Dividend und Divisor Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegeneinander ausstreichen, weil der Quotient von der Gröſse derselben unabhängig ist. So ist z. E. (§§ 22, 23, 38):

$$\frac{ac}{c}=a; \frac{2abc}{3bc}=\frac{2a}{3}; \frac{2abx}{3aabx}=\frac{2}{3a}; \frac{6abb}{4bc}=\frac{3ab}{2c};$$
$$\frac{xy}{6y}=\frac{x}{6}; \quad \frac{a}{a}=1; \quad \frac{b}{b}=1; \quad \frac{a+b}{a+b}=1; \quad \frac{a+c-d}{a+c-d}=1;$$
$$\frac{(d+b)(a-b)}{a-b}=d+b; \quad \frac{ab(a+b)}{2b(a+b)}=\frac{a}{2}; \quad \frac{m(a+b)}{m(a+c)}=\frac{a+b}{a+c}$$

2) Ist der Dividend eine vielteilige, der Divisor eine einteilige Gröſse, so kann man mit dem Divisor in jeden Teil des Dividend dividieren (§ 20). Es ist z. E.:

$$\frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}$$
$$\frac{8abb-10ax}{2ab}=\frac{8abb}{2ab}-\frac{10ax}{2ab}=4b-\frac{5x}{b}$$

3) Sind beide, Dividend und Divisor, vielteilige Gröſsen, so kann die Division in zweierlei Weise ausgeführt werden:

a) durch Faktorenzerlegung für den Fall, daſs sich die Faktoren heben. Der Ausdruck wird alsdann wesentlich vereinfacht. Z. B.:

$$\frac{ab-ax}{bb-bx}=\frac{a(b-x)}{b(b-x)}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{ax+xx}{3bx-xx}=\frac{x(a+x)}{x(3b-x)}=\frac{a+x}{3b-x}$$

$$\frac{y-yy}{3by-3byy}=\frac{y(1-y)}{3by(1-y)}=\frac{1}{3b}$$

$$\frac{ac-bcx-cz}{9bcz-cz}=\frac{c(a-bx-z)}{cz(9b-1)}=\frac{a-bx-z}{z(9b-1)}$$

$$\frac{6aa-3ab}{12ac-6bc}=\frac{3a(2a-b)}{6c(2a-b)}=\frac{a}{2c}$$

$$\frac{4ax-3bx-xx}{8ayz-6byz-2xyz}=\frac{x(4a-3b-x)}{2yz(4a-3b-x)}=\frac{x}{2yz}$$

$$* \frac{ay+ty-av-tv}{az+tz-2au-2tu}=\frac{y(a+t)-v(a+t)}{z(a+t)-2u(a+t)}=\frac{(y-v)(a+t)}{(z-2u)(a+t)}=\frac{y-v}{z-2u}$$

$$\frac{(a+b)(a+b)}{aa-bb}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}\ (\S\ 91,\ 2)$$

$$\frac{xx+x}{1-xx}=\frac{x(x+1)}{(1+x)(1-x)}=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{mz-m}{m-my}=\frac{m(z-1)}{m(1-y)}=\frac{z-1}{1-y}=\frac{(-1)(z-1)}{(-1)(1-y)}=\frac{1-z}{y-1}$$

b) Durch die sogenannte Partialdivision (siehe § 321).

Brüche. Hat man mit Gröſsen-Ausdrücken in Bruchform zu rechnen (siehe die nachstehenden §§ 93 und 94), so werden sie ganz nach den Regeln und Grundsätzen der allgemeinen Bruchrechnung behandelt.

93.

1. *Addition* und *Subtraktion.* Haben die Brüche einerlei Nenner, so braucht man nur ihre Zähler algebraisch zu addieren oder subtrahieren und der Summe oder Differenz den gemeinschaftlichen Nenner wieder unterzuschreiben. So ist z. B. (§ 42):

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}; \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c};$$

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}; \qquad \frac{a}{a-z}-\frac{z}{a-z}=\frac{a-z}{a-z}=1;$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a;$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b-(a-b)}{2}=b;$$

$$\frac{ac-by}{ac}+\frac{cx}{ac}+\frac{by}{ac}=\frac{ac+cx}{ac}=\frac{c(a+x)}{ac}=\frac{a+x}{a}$$

$$\frac{a}{aa-yy}+\frac{y}{aa-yy}=\frac{a+y}{(a+y)(a-y)}=\frac{1}{a-y}\,(\S\ 91,\ 2)$$

Haben die Brüche nicht einerlei Nenner, so pflegt man sie, der Gleichförmigkeit wegen, oftmals auf einerlei Nenner zu bringen, obgleich dadurch die Ausdrücke nicht immer vereinfacht werden.

Um z. B. die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Nenner zu bringen, multipliziere man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit d, des andern mit b. Es ist nämlich: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Beispiele:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}\ ;\ (\S\ 34)$$

$$\frac{12-a+b}{2}+a=\frac{12-a+b+2a}{2}=\frac{12+a+b}{2}$$

$$\frac{8a+6b}{4}-\frac{6a-2b}{3}=\frac{3(8a+6b)-4(6a-2b)}{12}=\frac{13b}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}=\frac{acd+b(a+b)}{bcd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}+\frac{aa-bb-ab}{bcd}=\frac{acd+ab+bb+aa-bb-ab}{bcd}=\frac{a(cd+a)}{bcd}$$

$$a-\frac{az}{z+1}=\frac{a(z+1)}{z+1}-\frac{az}{z+1}=\frac{a}{z+1}$$

$$a-\frac{am}{m+n}=\frac{am+an-am}{m+n}=\frac{an}{m+n}$$

94.

2. *Multiplikation* und *Division*. Um zwei Brüche mit einander zu multiplizieren, multipliziere man wie gewöhnlich, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Soll ein Bruch durch einen andern dividiert werden, so braucht man nur mit dem umgekehrten Divisor zu multiplizieren. (§§ 44, 47.) Beispiele:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad\qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1 \qquad c : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$$

$$8mn \cdot \frac{3xy}{4my} = 6nx \qquad \frac{1}{x} \cdot \frac{6x}{z} \cdot \frac{z}{3x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{5am}{bc} : \frac{15mxx}{6ac} = \frac{5am}{bc} \cdot \frac{6ac}{15mxx} = \frac{2aa}{bxx}$$

$$\frac{2ax}{3} : \frac{2ax}{3bc} = \frac{2ax}{3} \cdot \frac{3bc}{2ax} = bc$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{ma}{m+n+p} = \frac{na}{m+n+p}$$

$$\frac{a+x}{a-x} : \frac{ax+xx}{ax-xx} = \frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{x(a-x)}{x(a+x)} = 1.$$

95.

Folgende Buchstaben-Ausdrücke wird ein Geübterer allein zu reduzieren wissen:

1) $a+2b-5+a$; 2) $a-(+b)$; 3) $a-(-b)$; 4) $-a \cdot -b$;

5) $-a \cdot -1$; 6) $a \cdot \frac{b}{2} \cdot 4$; 7) $3a \cdot 4b \cdot \frac{2}{3}c$; 8) $\frac{3}{4}ax \cdot \frac{2}{3}by$;

9) $\frac{4}{9}tz \cdot 3x \cdot \frac{3}{2}$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{-a}{b}$; 12) $\frac{a}{-b}$;

13) $\frac{-a}{-b}$; 14) $\frac{x}{x}$; 15) $\frac{-x}{x}$; 16) $\frac{2a}{2b}$;

17) $\frac{2x}{x}$; 18) $\frac{x}{2x}$; 19) $\frac{3axyy}{9axy}$; 20) $\frac{6abb}{4bc}$;

21) $\frac{a+y}{a+y}$; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{\frac{2}{3}abb}{\frac{3}{4}aab}$; 24) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x}$;

25) $ax + 6ax - 8ax + 5bx$; 26) $\frac{1}{3}ay - \frac{2}{3}ay + ay$;

27) $2ax - 5by - 16 - (ax - 16 + 5by)$; 28) $(a+b)(a+b)$;

29) $\frac{2}{3}atx - \frac{2}{3}bzz - (-3atx + \frac{3}{5}bzz)$; 30) $(ax+by)(ax-by)$;

31) $(a+b+c)(a+b-c)$; 32) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$;

33) $6aab - 12abc + 3ab$; 34) $x + mx + nx + px$;

35) $\frac{m}{2nx} \cdot \frac{n}{3m}$; 36) $\frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{a-x}{a+x}$; 37) $\frac{aa-bb}{a-b}$;

38) $\frac{aa-bb}{a+b}$; 39) $\frac{ay+yx}{3abx+3bxx}$; 40) $\frac{2ay-5by}{4axy-10bxy}$;

41) $\frac{a+x}{3}+\frac{a+x}{3}$; 42) $\frac{a}{b}:\frac{1}{c}$; 43) $\frac{a}{x}:\frac{2x}{y}$;

44) $7ax:\frac{14ax}{5by}$; 45) $\frac{a-x}{a+x}:\frac{aa-xx}{ax+xx}$;

46) $\frac{a(b-c)}{2}-\frac{b(a-c)}{2}$; 47) $\frac{100a+ap}{100}:\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

48) $\frac{az+bc}{az}-\frac{bc+xz}{az}$; 49) $\frac{16a-5b}{4b}-\frac{12a-2b}{3b}$;

50) $\frac{2x}{2y-c}\cdot\left(\frac{y+c}{3}-\frac{c}{2}\right)$; 51) $\frac{x}{a-\frac{ac}{x+c}}$;

52) $\frac{1-\frac{aa}{xx}}{\frac{1}{x}-\frac{a}{xx}}$; 53) $\frac{a+\frac{x-a}{1+ax}}{1-\frac{a(x-a)}{1+ax}}$;

* 54) $\left(\left[a-\frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\cdot\frac{n-m}{n}+mb\right):\frac{a}{x}$

* 55) $\left(\left[\frac{1+\frac{aa-xx}{aa+xx}}{1-\frac{aa-xx}{aa+xx}}+1\right]\cdot\frac{1}{1+\frac{aa}{xx}}+\frac{aa-xx}{a-x}\right)\frac{a}{1+a+x}$.

* 56) $\left(\frac{\left[\frac{(a-1)(ax-bx)}{x-a}+c\right](a-x)}{a(b+c-a)}+\frac{(a-x)}{a}\right)\cdot\frac{aa+ax}{2(aa-xx)}$

Man findet: 1) $2(a+b)-5$; 2) $a-b$; 3) $a+b$;
4) ab; 5) a; 6) $2ab$; 7) $8abc$;
8) $\frac{abxy}{2}$; 9) $2txz$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $-\frac{a}{b}$;
12) $-\frac{a}{b}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) -1;
16) $\frac{a}{b}$; 17) 2; 18) $\frac{1}{2}$; 19) $\frac{y}{3}$;
20) $\frac{3ab}{2c}$; 21) 1; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{8b}{9a}$;

24) $\frac{a+b}{x}$; 25) $5bx - ax = (5b - a)x$; 26) $\frac{2}{3}ay$;

27) $ax - 10by$; 28) $aa + 2ab + bb$;

29) $\frac{11atx}{3} - \frac{19bzz}{15}$; 30) $aaxx - bbyy$;

31) $aa + 2ab + bb - cc$; 32) $\frac{xx}{4} - \frac{yy}{9}$;

33) $3ab(2a - 4c + 1)$; 34) $(1 + m + n + p)x$;

35) $\frac{1}{6x}$; 36) 1; 37) $a + b$;

38) $a - b$; 39) $\frac{y}{3bx}$; 40) $\frac{1}{2x}$;

41) $\frac{2}{3}(a + x)$; 42) $\frac{ac}{b}$; 43) $\frac{ay}{2xx}$;

44) $\frac{5by}{2}$; 45) $\frac{x}{a+x}$; 46) $\frac{c(b-a)}{2}$; 47) a;

48) $\frac{a-x}{a}$; 49) $-\frac{7}{12}$; 50) $\frac{x}{3}$; 51) $\frac{x+c}{a}$;

52) $a + x$; 53) x; 54) x; 55) a; 56) 1.

Elftes Buch.

Algebra.

Von den einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse.

96.

Die meisten mathematischen Untersuchungen, auf welche Gegenstände sie auch Bezug haben mögen, führen in der Regel auf Probleme, deren vollständige Lösung die Hilfe der Arithmetik in Anspruch nimmt, oft eine umfassende Kenntnis derselben und einen gewissen Grad mechanischer Gewandtheit darin verlangt. Deshalb fordert auch, nicht allein rein wissenschaftliches, sondern schon praktisches Bedürfnis, die arithmetische Wissenschaft noch viel weiter auszubilden, als der vorhergehende Teil sie enthält. Dieser erste Teil enthält eigentlich nur die Theorie des Zahlensystems, der darauf gegründeten vier ersten Species in ganzen und gebrochenen Zahlen sowie in Buchstaben, und der Regel de tri, als eine der einfachsten praktischen Anwendungen dieser Theorieen.

Im Grunde kommen freilich alle Rechnungen, wie verwickelt sie auch sein mögen, zuletzt doch auf die einfachen Operationen der vier Rechnungsarten zurück. Ehe man jedoch bei einer mathematischen Untersuchung die Sache bis zu diesem Ziele führen kann, müssen oftmals erst viele Folgerungen und Schlüsse gezogen und die vier einfachen Rechnungsarten auf mannigfache Weise miteinander verbunden und wiederholt werden. Aus diesem Grunde werden auch, um die Begriffe und Schlüsse leicht übersichtlich bezeichnen zu können, und um nicht in Weitläufigkeit zu geraten, zweckmäfsig abkürzende Zeichen und Kunstwörter notwendig. Vor Allem müssen wir, dem Entwickelungsgange der Arithmetik folgend, zuerst die sogenannten einfachen Gleichungen und deren Gebrauch zur Auflösung verwickelter Aufgaben, als die, welche auf die einfache Regel de tri führen, kennen lernen. Man merke sich deshalb die folgenden, zwar sehr leichten, aber sehr wichtigen Sätze.

97.

Zwei Gröſsenausdrücke von gleichem Betrage kann man ineinander gleich setzen, da z. B. $18-4$ ebenso viel ist, als $6+3+5$, so schreibt man dies so:

$$18-4=6+3+5$$

und nennt eine so angedeutete Gleichheit, wie schon § 16 erklärt, eine Gleichung. Was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, heiſst die rechte, was linker Hand steht, die linke Seite, und die einzelnen Teile die Glieder dieser Seiten. So ist z. B. $+5$ das dritte Glied der rechten und -4 das zweite Glied der linken Seite.

98.

Wenn man von der einen Seite einer Gleichung ein oder auch mehrere Glieder mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite setzt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$18-4=6+3+5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

indem man das zweite Glied der linken Seite (-4) mit umgekehrtem Zeichen auf die rechte setzt, die folgende zweite Gleichung:

$$18=6+3+5+4 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses leichten, aber wichtigen Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze: „Gleiches zu (von) Gleichem, giebt Gleiches" (§ 18). Auf beiden Seiten der Gleichung (1) ist der Betrag 14. Fügt man auf beiden Seiten $+4$ hinzu, so muſs man offenbar wieder Gleiches erhalten; auf der linken Seite stände dann aber $18-4+4$ oder nur 18, weil hier zwei gleiche entgegengesetzte Gröſsen sich tilgen und weggelassen werden können $(-4+4=0)$.

Kurzum, indem man ein Glied von der einen Seite einer Gleichung mit umgekehrtem Zeichen auf die andere Seite setzt, geschieht ganz dasselbe, als wenn man dieses Glied zuvor mit umgekehrtem Zeichen auf beiden Seiten hinzugefügt hätte.

Setzen wir aus der zweiten Gleichung $18=6+3+5+4$ die beiden ersten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Zeichen auf die linke, so kommt die notwendig richtige Gleichung:

$$18-6-3=5+4 \ldots\ldots\ldots (3)$$

indem dadurch die Gleichung (2) ganz dieselbe Umformung erlitten, als wenn man auf beiden Seiten -6 und -3 hinzugefügt, und dann rechter Hand die sich tilgenden Gröſsen weggelassen hätte. Auf beiden Seiten ist der Betrag jetzt $=9$.

Versetzen wir noch das erste Glied der linken Seite auf die andere, so folgt aus (3):

$$-6-3=5+4-18 \ldots\ldots. (4)$$

hier ist der nach § 76 gehörig zusammengerechnete Betrag (algebr. Summe) auf beiden Seiten $= -9$.

Aus (4) folgt noch, indem man die beiden Glieder der linken Seite auf die rechte setzt:

$$0=5+4-18+6+3 \ldots\ldots (5)$$

Wenn man alle Vorzeichen in einer Gleichung umkehrt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus:

$$18-4=6+3+5 \ldots\ldots\ldots (6)$$

indem man alle $+$ in $-$ und alle $-$ in $+$ verwandelt:

$$-18+4=-6-3-5 \ldots\ldots\ldots (7)$$

denn in beiden Gleichungen müssen die Beträge, sowohl der linken als der rechten Seite, an Gröſse gleich, aber entgegengesetzt sein. In der sechsten Gleichung ist die (algebr.) Summe auf beiden Seiten $=14$, in der siebenten $=-14$. (§ 76.)

99.

Weil bei allen Umformungen einer Gleichung die Beträge auf beiden Seiten immer einander gleich bleiben müssen, so ist auch klar, daſs wenn man eine Gleichung auf ein bestimmtes Glied reduziert (d. h. die Gleichung durch Versetzen der Glieder so umformt, daſs dieses bestimmte Glied auf einer Seite ganz allein zu stehen kommt), dann auch der Betrag der andern Seite diesem alleinstehenden Gliede an Gröſse und Vorzeichen vollkommen gleich sein muſs.

Reduzieren wir z. B. die Gleichung:

$$6+5-3=10-2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

auf das Glied $+5$, indem man die beiden damit verbundenen Glieder $+6$ und -3 auf die andere Seite setzt, so kommt:

$$5=10-2-6+3 \ldots\ldots\ldots (2)$$

und der Betrag der rechten Seite dieser Gleichung muſs notwendig $+5$ sein. (§ 98.)

Wäre demnach in einer Gleichung, z. B. in der vorstehenden (1) ein Glied unbekannt, an dessen Stelle ein beliebiges Zeichen x, als Stellvertreter gesetzt, und nun verlangt: den Wert von x zu bestimmen, welcher der Gleichung:

$$6+x-3=10-2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Genüge leistet, d. h. eine Zahl anzugeben, welche statt x gesetzt (substituiert), die Bedingung der Gleichung erfüllt, vermöge welcher die Beträge auf beiden Seiten gleich sein müssen, so können wir diese unbekannte Gröfse x sehr leicht finden, indem wir die Gleichung (1) auf x reduzieren. Aus (1) folgt nämlich (99):

$$x = 10 - 2 + 3 - 6$$

oder zusammengezogen (§ 76):

$$x = 5.$$

100.

Eine Gleichung **auflösen** heifst: einen Wert für die in der Gleichung enthaltene unbekannte Gröfse (x) finden, der die linke Seite der rechten gleich macht. Die Lehre von der Auflösung der Gleichung heifst **Algebra**. Die Gleichung $4 + x = 13$ z. B. ist aufgelöst, wenn man $x = 9$ (Auflösungsgleichung) gefunden hat; denn es ist $4 + 9 = 13$. Der für die unbekannte gefundene Wert (9 im vorstehenden Beispiel) heifst Auflösung (oder Wurzel) der Gleichung. Da die unbekannte auf verschiedene Weise mit den bekannten (gegebenen) Gröfsen verbunden sein kann, so müssen wir, um jede Gleichung auflösen zu können, diese verschiedenen Fälle einzeln durchnehmen und durch leichte Beispiele erläutern, bevor wir die Anwendung der Gleichungen zur Auflösung algebraischer Aufgaben zeigen können.

101.

Erster Fall. Wenn die unbekannte Gröfse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, jedoch mit einem Faktor (**Koefficient**) behaftet ist.

Alsdann reduziere man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, ziehe dann die auf einerlei Seite stehenden bekannten Glieder in eins (algebr. Summe) zusammen, und dividiere hierauf durch den Koefficienten (Faktor) der unbekannten Gröfse.

Angenommen, in der Gleichung $4 + 7 \cdot 8 = 60$ sei die Zahl 8 unbekannt, an deren Stelle das Zeichen x gesetzt und nun verlangt, den Wert von x zu finden, welcher der Gleichung

$$4 + 7x = 60$$

Genüge leistet.

So hat man zuerst:

$$7x = 60 - 4$$

oder zusammengezogen:

$$7x = 56$$

$$\text{folglich } x = 8$$

denn wenn das Siebenfache einer unbekannten Gröfse 56 ist ($7x = 56$), so ist offenbar die Gröfse selbst $= \frac{56}{7} = 8$.

Aufgabe. Wenn man von dem Sechsfachen einer gewissen Zahl 5 subtrahiert, so kommt 14. Was ist dies für eine Zahl?

Auflösung. Bezeichnen wir die fragliche unbekannte Zahl vorläufig mit x, also das Sechsfache mit 6x, so können wir die Bedingung der Aufgabe durch folgende Gleichung:

$$6x - 5 = 14$$

ausdrücken, und aus dieser folgt nun:

$$6x = 14 + 5$$
$$6x = 19$$
$$x = 3\tfrac{1}{6}.$$

102.

Zweiter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, aber mit einem Divisor behaftet ist. In diesem Fall reduziere man die Gleichung wieder auf dieses unbekannte Glied, und multipliziere dann beiderseits mit dem Divisor.

Sei z. B. in der Gleichung $\frac{18}{6} + 4 = 7$ die Zahl 18 unbekannt, dafür x gesetzt, und nun verlangt die Gleichung:

$$\frac{x}{6} + 4 = 7$$

auf die unbekannte Gröſse x zu reduzieren, so hat man hieraus:

$$\frac{x}{6} = 7 - 4$$
$$\frac{x}{6} = 3$$
$$x = 18$$

denn wenn der sechste Teil von einer Gröſse 3 ist $\left(\frac{x}{6} = 3\right)$, so muſs die Gröſse selbst offenbar $= 6 \cdot 3 = 18$ sein.

Aufgabe. Wenn man einen gewissen Bruch durch 5 dividiert, vom Quotienten $\frac{2}{3}$ subtrahiert, so kommt $\frac{3}{7}$. Welcher ist's?

Auflösung. Die in der Aufgabe in Worten ausgedrückten Bedingungen und zu machenden Rechnungen führen, wenn man dieses alles vorläufig durch Zeichen andeutet, auf die Gleichung:

$$\frac{x}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$$

hieraus folgt: $$\frac{x}{5} = \frac{3}{7} + \frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{23}{21}$$
$$x = \frac{115}{21}$$

Anmerkung. Ist die Unbekannte auf der linken Seite negativ, so multipliziert man beide Seiten mit -1. Z. B.:

$$3x + 5 = 4x;$$
$$3x - 4x = -5;$$
$$-x = -5;$$
$$\text{mit } -1 \text{ mult.: } x = 5.$$

103.

Dritter Fall. Wenn die unbekannte Gröſse nur in einem Gliede vorkommt, aber mit einem Faktor und Divisor zugleich behaftet ist. Alsdann reduziere man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, und dividiere den Betrag auf der andern Seite durch den Bruchkoefficienten, d. h. multipliziere mit dem Divisor und dividiere durch den Faktor (§ 47), so hat man x.

Sei z. B. in $6 + \frac{4.10}{5} = 14$ statt 10 das Zeichen x gesetzt und der Wert desselben aus der Gleichung:

$$6 + \frac{4x}{5} = 14$$

zu finden, so hat man hieraus:

$$\frac{4x}{5} = 8$$

$$\text{und folglich: } x = 8 \cdot \tfrac{5}{4}$$
$$x = 10$$

denn wenn $\frac{4}{5}$ von einer Gröſse 8 ist ($\frac{4}{5}x = 8$), so ist offenbar die Gröſse selbst $= \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$. Man kann aber auch so schlieſsen: Wenn der 5te Teil von 4x, 8 ist $\left(\frac{4x}{5} = 8\right)$, so muſs offenbar $4x = 8 \cdot 5$ und mithin $x = \frac{8 \cdot 5}{4}$ sein.

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl: wenn man sie mit 7 multipliziert, darauf das Produkt durch 9 dividiert, und zum Quotienten $\frac{2}{5}$ addiert, so kommt $\frac{6}{11}$. Welche ist es?

Auflösung. Übersetzen wir die in Worten ausgedrückte Aufgabe in die algebr. Zeichensprache, so muſs folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{7x}{9} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{11}$$

$$\text{hieraus folgt: } \frac{7x}{9} = \tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{5}$$

$$\frac{7x}{9} = \tfrac{8}{55}$$

$$x = \frac{8}{55} \cdot \frac{9}{7}$$
$$x = \frac{72}{385}$$

104.

Vierter Fall. Wenn die unbekannte Gröfse in mehreren Gliedern einer Gleichung vorkommt.

Um in diesem Fall das Bekannte von dem Unbekannten zu trennen, bringe man erst alle unbekannten Glieder auf die eine (linke) und alle bekannten auf die andere (rechte) Seite,* ziehe darauf die linke Seite in ein Glied zusammen und ebenso die rechte, dann ist dieser Fall auf den dritten zurückgeführt.

Sei z. B. in der Gleichung $4 + 3 \cdot 5 = 49 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 5$ die Zahl 5 unbekannt, und die Aufgabe gegeben: den Wert von x zu finden, welcher folgender Gleichung:

$$4 + 3x = 49 - 4x - 2x$$

Genüge leistet, so folgt aus dieser Gleichung, indem man die beiden unbekannten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die linke Seite, und ebenso das bekannte Glied der linken Seite auf die rechte setzt:

$$3x + 4x + 2x = 49 - 4$$
$$9x = 45$$
$$x = 5$$

dafs eine Gröfse (x) 3mal und 4mal und 2mal genommen, ebensoviel ist, als dieselbe 9mal genommen, ist klar.

Aufgabe. Was für eine Zahl ist es, die mit 10 multipliziert, dasselbe Resultat giebt, als wenn man 10 zu ihr addiert?

Auflösung. Sei x die Zahl, so soll $10 \cdot x$ ebensoviel sein, als $x + 10$, daher die Gleichung:

$$10x = x + 10$$
hieraus folgt: $$10x - x = 10$$
$$9x = 10$$
$$x = 1\tfrac{1}{9}.$$

105.

Fünfter Fall. Wenn die unbekannte Gröfse mit bekannten verbunden in Klammern steht. In diesem Fall löst man erst die Klammern dadurch auf, indem man jeden innerhalb derselben stehenden Teil mit dem aufserhalb stehenden Faktor multipliziert (§ 19).

Setzt man in der Gleichung $6 \cdot 4 = 9 + 3 \cdot 5$, statt der einteiligen Faktoren 4 und 5 die zweiteiligen $7 - 3$ und $12 - 7$, welche

* Gewöhnlich stellt man die unbekannten Glieder auf die linke Seite, indem man, im Fall ihre algebr. Summe negativ ist, die Vorzeichen umkehrt. (§ 98.)

dann aber (nach § 19) in Klammern gesetzt werden müssen, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$6\,(7 - 3) = 9 + 3\,(12 - 7)$$

Angenommen nun, die in Klammern stehende Zahl 7 sei unbekannt, und die Frage vorgelegt: welcher Wert von x leistet folgender Gleichung:

$$6\,(x - 3) = 9 + 3\,(12 - x) \ldots\ldots (1)$$

Genüge?

Um die unbekannte Gröſse x von den Klammern zu befreien, lösen wir dieselben dadurch auf, indem man (nach § 19) jeden innerhalb stehenden Teil mit dem auſserhalb stehenden Faktor multipliziert; so folgt aus vorstehender Gleichung zuerst:

$$6x - 18 = 9 + 36 - 3x \ldots\ldots\ldots (2)$$

und hieraus:
$$6x + 3x = 9 + 36 + 18$$
$$9x = 63$$
$$x = 7$$

106.

Bei dieser Klammerauflösung muſs man besonders noch auf den Fall achten, wo das mit einer Klammer behaftete Glied ein Minus-Zeichen vor sich hat.

Sei z. B. folgende Gleichung:

$$6\,(x - 3) - 3\,(12 - x) = 9 \ldots\ldots (3)$$

auf x zu reduzieren, so folgt hieraus (nach § 89, 2. Fall):

$$6x - 18 - 36 + 3x = 9 \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$6x + 3x = 9 + 18 + 36$$
$$9x = 63$$
$$x = 7$$

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl, wenn man 6 von ihr subtrahiert, den Rest mit 5 multipliziert, und dieses Produkt wieder von 10 subtrahiert, so kommt Null. Wie findet man diese Zahl?

Auflösung. Deuten wir die gesuchte Zahl durch x an, so bezeichnet $x - 6$ den ersten Rest, und $5\,(x - 6)$ die Multiplikation desselben mit 5. Daſs dieses Produkt wieder von 10 subtrahiert werden soll, ist durch $10 - 5\,(x - 6)$ angedeutet, und da dieser Ausdruck $= 0$ sein soll, so hat man die Gleichung:

$$10 - 5\,(x - 6) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hieraus:
$$10 - 5\,x + 30 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$-5\,x = -30 - 10 \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$-5\,x = -40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Vorzeichen umgekehrt (§ 98), kommt:

$$5x = 40$$
$$x = 8$$

Statt in (4) die Vorzeichen umzukehren, hätte man auch das unbekannte Glied in (2) auf die andere Seite bringen, oder auch (nach § 79) -40 durch -5 dividieren können.

107.

Schliefslich wollen wir noch den Fall betrachten, wenn die unbekannte Gröfse in mehreren Gliedern mit einem Divisor (Nenner) behaftet ist. Sei in der Gleichung:

$$2 \cdot 24 + \frac{7 \cdot 24}{6} - 22 = 40 - \frac{2 \cdot 24}{3} + \frac{5 \cdot 24}{4}$$

der Faktor 24 unbekannt, dafür x gesetzt und dieses x aus folgender Gleichung zu finden:

$$2x + \frac{7x}{6} - 22 = 40 - \frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} \ldots\ldots (1)$$

so hat man zuerst, nach Trennung des Bekannten vom Unbekannten (§ 104):

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 40 + 22 \ldots\ldots (2)$$

Jetzt die Koefficienten von x zusammengerechnet, indem man die Brüche $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$ auf einerlei Nenner bringt, so kommt: (da $2 + \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{5}{4} = 2 + \frac{14}{12} + \frac{8}{12} - \frac{15}{12} = 2\frac{7}{12}$)

$$2\tfrac{7}{12}x = 62$$
$$\frac{31x}{12} = 62$$
$$x = 24$$

Statt aber, wie hier bei Gleichung (2) geschehen, die Bruchkoefficienten zu addieren, pflegt man gewöhnlich nur die ganzzahligen Glieder in ein Glied zusammenzuziehen, nämlich:

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 62 \ldots\ldots\ldots (3)$$

und dann die Brüche dadurch fortzuschaffen, indem man die ganze Gleichung, d. h. auf beiden Seiten mit dem kleinsten allgemeinen Nenner multipliziert, und dabei immer den § 23 gezeigten Rechnungsvorteil benutzt.

Multipliziert man also obige Gleichung (3) mit 12, so müssen alle Nenner 6, 3, 4 wegfallen, weil sie in 12 ohne Rest enthalten sind. Es ist nämlich:

$$12 \cdot 2x + 12 \cdot \frac{7x}{6} + 12 \cdot \frac{2x}{3} - 12 \cdot \frac{5x}{4} = 62 \cdot 12$$

oder gleich kürzer: (NB. § 23.)

$$\begin{aligned} 24x + 14x + 8x - 15x &= 62 \cdot 12 \\ 31x &= 62 \cdot 12 \\ x &= \frac{62 \cdot 12}{31} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs wenn $\frac{2}{5}$ derselben von $\frac{3}{4}$ derselben subtrahiert wird, die Zahl 14 übrig bleibt?

Auflösung. Sei x die Zahl, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$\tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x = 14$$

hieraus (auf beiden Seiten mit $4 \cdot 5$ multipliziert):

$$\begin{aligned} 15x - 8x &= 280 \\ 7x &= 280 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs wenn man von dem Sechsfachen derselben 15 subtrahiert, den Rest mit $\frac{4}{5}$ multipliziert und das Produkt wieder von dem Achtfachen der gesuchten Zahl subtrahiert, die Zahl 12 übrig bleibt.

Auflösung. Die fragliche Zahl, wenn sie möglich ist, heifse x, so ist:

$$8x - \tfrac{4}{5}(6x - 15) = 12$$

hieraus (auf beiden Seiten mit 5 multipliziert):

$$\begin{aligned} 40x - 4(6x - 15) &= 60 \\ 40x - 24x + 60 &= 60 \\ 16x &= 0 \\ x &= \tfrac{0}{16} = 0. \end{aligned}$$

Zwölftes Buch.

Anwendung der Algebra. — Auflösung sogenannter algebraischer Aufgaben mit einer unbekannten Gröſse.

108.

Die algebraischen Aufgaben sind so mannigfaltiger Art, daſs sie sich nicht, wie die der speziellen Arithmetik, klassifizieren lassen. Nicht allein mit den bekannten, sondern auch mit der noch unbekannten Gröſse, für welche man vorläufig irgend ein beliebiges Zeichen (gewöhnlich einen der letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, t &c.) als Stellvertreter setzt, müssen arithmetische Operationen vorgenommen werden, welche man jedoch bei letzterer, eben weil sie noch unbekannt ist, nur andeuten kann.

Allgemeine Auflösungs-Regeln lassen sich hier nicht geben. Man muſs bei jeder besondern Aufgabe durch ruhiges Nachdenken und Überlegen den Sinn derselben auffassen, durch richtige Schlüsse die in der Aufgabe durch Worte ausgedrückten Forderungen und Bedingungen in die algebraische Zeichensprache übersetzen, in Gleichungen zu kleiden suchen, nämlich: die bekannten und unbekannten Gröſsen so miteinander verbinden oder zwei solche Zusammenfassungen treffen, daſs man, der Bedingung der Aufgabe gemäſs, die eine der andern als = gegenüber stellen kann.

Hat man erst die Gleichung zwischen den bekannten und unbekannten Gröſsen gefunden, so ist es leicht, daraus die unbekannte Gröſse nach den Regeln des vorhergehenden Kapitels zu finden. — Was aber die Auffindung der Gleichung anbelangt, so ist dieses Sache der reinen Vernunft und des Scharfsinns. Beides kann nicht gelehrt, durch fleiſsige Übung aber entwickelt werden.

Hier, sowie überhaupt bei allen Anwendungen der Mathematik, ist der Mathematiker sich immer selbst überlassen. Selbst muſs er auf die Bündigkeit seiner Schlüsse achten, und das Wahre vom Falschen unterscheiden. Für Anfänger, welche noch nicht an den Gebrauch ihrer eignen Kräfte, an Selbstdenken und Selbsterfinden gewöhnt sind, hat dies anfangs groſse Schwierigkeit; doch muſs man sich nicht gleich abschrecken lassen. Übung und beharrlicher Fleiſs geben im schnellen Auffassen, richtigen Urteilen und Schlieſsen zuletzt eine gewisse Fertigkeit, welche den Gebrauch der eigenen

Kräfte nicht allein erleichtert, sondern auch bald zum Bedürfnis und Vergnügen macht. Übrigens beherzige man ja, daſs es in keiner Wissenschaft auf die Menge von Beispielen und unverdauten Begriffen ankommt. Eine einzige Aufgabe gehörig durchdacht, einen einzigen richtigen Schluſs allein gemacht zu haben, hat weit mehr Nutzen, als tausend, die in derselben Zeit, aber durch Hilfe gemacht worden. Um zuerst auf den Weg zu helfen und zu zeigen, wie man die Sache angreifen muſs, lassen wir hier einige rein algebraische Aufgaben mit beigefügten Auflösungen folgen. Der Anfänger wird wohl thun, sie zweimal durchzugehen, und zwar das zweite Mal ohne die gegebenen Auflösungen zu benutzen. Eigentlich besteht die ganze Mathematik aus Aufgaben. Die sogenannten algebraischen sind aber die leichtesten, weil sie keine Sachkenntnis, sondern bloſs richtiges Urteil und Scharfsinn fordern. Sie sind eigens für Anfänger gemacht und es ist durchaus erforderlich, sich einige Zeit allein darin zu üben. Wer gar keine algebraische Aufgabe lösen kann, wird alles Folgende schwer finden und keine raschen Fortschritte in der Mathematik machen.

109.

1. **Aufgabe.** Es giebt eine gewisse Zahl von der Beschaffenheit, daſs das Zweifache und Dreifache derselben addiert, ganz dasselbe giebt, als wenn man das Siebenfache der Zahl von 36 subtrahiert. Welche Zahl ist es?

Auflösung. Deutet man die zu findende Zahl vorläufig durch x an, mithin das Zweifache derselben durch 2x, das Dreifache durch 3x und das Siebenfache durch 7x, so bedeutet $2x+3x$ die Summe des Zweifachen und Dreifachen, und $36-7x$ die erwähnte Differenz. Nun muſs, laut Bedingung der Aufgabe, die gesuchte Gröſse x in den ersten Ausdruck $2x+3x$ substituiert, dasselbe geben, als wenn sie in den zweiten Ausdruck $36-7x$ substituiert wird, mithin muſs folgende Gleichung stattfinden:

$$2x+3x=36-7x$$

$$\text{hieraus:}\quad 2x+3x+7x=36$$

$$12x=36$$

$$\text{folglich:}\quad x=3$$

Als Probe der richtigen Rechnung muſs die gefundene Zahl 3 in obige Gleichung, statt x substituiert, derselben Genüge leisten.

110.

2. **Aufgabe.** Es giebt eine Zahl, welche mit 10 multipliziert, dasselbe giebt, als wenn man 3 zu ihr addiert, welche ist's?

Auflösung. Die Zahl heiſse x, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$10x=x+3$$

$$10x-x=3$$

$$9x=3$$

$$\text{und}\quad x=\tfrac{1}{3}$$

111.

3. Aufgabe. Drei Personen, A, B, C, sollen 36 ℳ dergestalt unter sich teilen, dafs B zweimal soviel als A, und C dreimal soviel als B erhält. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung. Sei x das, was A erhält, so erhält B 2x und C 6x, und da sie zusammen 36 ℳ erhalten, so mufs folgende Gleichung stattfinden:

$$x + 2x + 6x = 36$$
$$\text{oder: } 9x = 36$$
$$x = 4$$
$$\text{mithin erhält A, } x = 4$$
$$\text{B, } 2x = 8$$
$$\text{C, } 6x = 24$$
$$\text{Summe } 36$$

112.

4. Aufgabe. Vier Personen, A, B, C, D, sollen 100 ℳ so unter sich teilen, dafs die Teile sich wie die Zahlen 3, 5, 8, 4 verhalten. Wieviel bekommt jeder?

Auflösung. Was A erhält, heifse x, so mufs, da sich die Teile wie 3, 5, 8, 4, oder was dasselbe ist, wie 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{4}{3}$ verhalten (§ 65), B $\frac{5}{3}x$, C $\frac{8}{3}x$ und D $\frac{4}{3}x$ erhalten, mithin ist:

$$x + \frac{5x}{3} + \frac{8x}{3} + \frac{4x}{3} = 100$$
$$\text{oder: } \frac{20x}{3} = 100$$
$$20x = 300$$
$$x = 15, \text{ für A}$$
$$\tfrac{5}{3}x = 25, \quad „ \quad \text{B}$$
$$\tfrac{8}{3}x = 40, \quad „ \quad \text{C}$$
$$\tfrac{4}{3}x = 20, \quad „ \quad \text{D}$$

113.

5. Aufgabe. Ein Vermögen von 6000 ℳ soll unter drei Personen, A, B, C, so verteilt werden, dafs B dreimal soviel als A, weniger 200 ℳ; C aber viermal soviel als B, und aufserdem noch 200 ℳ erhält; wie mufs geteilt werden?

Auflösung. A erhalte x, so erhält B $3x - 200$ und C $4(3x - 200) + 200$; folglich laut Bedingung:

$$x + 3x - 200 + 4(3x - 200) + 200 = 6000$$
$$x + 3x + 12x - 800 = 6000$$
$$16x = 6800$$
$$\text{und } x = 425$$

Mithin mufs A 425 ℳ, B 1075 ℳ und C 4500 ℳ erhalten.

114.

6. Aufgabe. Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiter und bat um die Verdoppelung ihres Geldes. Jupiter that es, und sie opferte aus Dankbarkeit 2 Obolen. Mit dem Reste begab sie sich in den Tempel des Apollo, und bat um die Verdoppelung dieses Restes. Auch hier wurde ihre Bitte erhört und sie opferte aus Dankbarkeit 4 Obolen. Als die Griechin nun ihr Geld nachzählen wollte, fand sie, der Verdoppelung ungeachtet, alles weggegeben; wieviel hatte sie anfangs?

Auflösung. Ihr anfängliches Geld sei $= x$, so ist $2x$ das Doppelte und nachdem sie 2 davon geopfert hatte, blieb ihr noch $2x - 2$. Dieser Rest wurde, durch Apollo verdoppelt, zu: $2(2x - 2)$, hiervon 4 geopfert, blieb ihr noch $2(2x - 2) - 4$; und da sie nun alles weggegeben haben soll, so mufs sein:

$$2(2x - 2) - 4 = 0$$
$$4x - 4 - 4 = 0$$
$$4x = 8$$
$$\text{also: } x = 2$$

115.

7. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Teile zu teilen, dafs, wenn man den gröfsten Teil durch 6 und den kleinsten durch 4 dividiert, in beiden Fällen gleiche Quotienten kommen. Welches sind die Teile?

Auflösung. Es scheinen hier zwei Zahlen unbekannt zu sein. Hat man aber die eine, so ergiebt sich die andere von selbst, indem man erstere von 100 abzieht. Bezeichnet man also die eine unbekannte Zahl, z. B. die gröfste, vorläufig mit x, so kann man die andere, ohne dafür ein neues Zeichen nötig zu haben, durch $100 - x$ andeuten. Da nun x durch 6 dividiert, laut Bedingung der Aufgabe, ebensoviel geben soll, als $100 - x$ durch 4 dividiert, so hat man:

$$\frac{x}{6} = \frac{100 - x}{4}$$

multipliziert mit 12 kommt: $2x = 3(100 - x)$ (§ 107.)

$$2x = 300 - 3x$$
$$5x = 300$$
$$x = 60$$

Mithin ist $x = 60$ der eine, und $100 - x = 100 - 60 = 40$ der andere Teil.

116.

8. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Teile zu teilen, dafs, wenn der eine durch 5, der andere durch 3 dividiert und dann die Quotienten addiert werden, die Summe derselben 24 beträgt.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $100 - x$ der andere Teil, so soll, laut Bedingung der Aufgabe sein:

$$\frac{x}{5} + \frac{100 - x}{3} = 24$$

multipliziert mit $3 . 5$ kommt: $3x + 500 - 5x = 360$

$$-2x = -140$$
$$x = 70 \quad (\S\ 98 \text{ u. } 106.)$$

folglich ist 70 der eine und $100 - 70 = 30$ der andere Teil.

117.

9. Aufgabe. Jemand wurde um sein Alter gefragt, und er antwortete, wenn ich so viele Jahre über 100 hinauskäme, als mir jetzt daran fehlen, so würde ich gerade 2mal so alt werden, als ich jetzt bin; wie alt ist er?

Auflösung. Sei x das jetzige Alter, so deutet $100-x$ die Jahre an, die noch an 100 fehlen; hätte er diese Jahre über 100, so würde er $100+(100-x)$ Jahre alt sein, und da nun dies das Doppelte vom gegenwärtigen Alter, nämlich $= 2x$ sein soll, so hat man:

$$2x = 100 + 100 - x$$
$$3x = 200$$
$$x = 66\tfrac{2}{3}$$

118.

10. Aufgabe. Pythagoras wurde gefragt, wieviel Schüler er habe. Er antwortete auf folgende rätselhaft klingende Weise: die Hälfte studiert Philosophie, der dritte Teil Mathematik, die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, samt den drei Schülern, welche ich eben jetzt angenommen (also vorhin nicht mitgerechnet) habe, machen den vierten Teil derjenigen Schüler, welche Philosophie und Mathematik studieren, wieviel Schüler waren anfangs da?

Auflösung. Die Anzahl heiſse x, so studiert $\frac{x}{2}$ Philosophie und $\frac{x}{3}$ Mathematik; subtrahiert man nun $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x \left(=\frac{5x}{6}\right)$, von x, so bleiben noch $x - \frac{5}{6}x = \frac{x}{6}$, welche sich im Stillschweigen üben, und da nun diese samt den 3 hinzugekommenen (nämlich $\frac{x}{6}+3$) den vierten Teil von denen, welche Philosophie und Mathematik studieren, machen sollen, nämlich $\frac{1}{4}$ von $\frac{5x}{6}$, so hat man:

$$\frac{x}{6} + 3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}x$$
$$\frac{x}{6} - \frac{5x}{24} = -3$$

multipliziert mit 24 kommt: $4x - 5x = -72$

$$-x = -72 \text{ und mit } -1 \text{ mult.:}$$
$$x = 72$$

119.

11. Aufgabe. Ein Mauermann kann eine Mauer in 6 Tagen aufführen, ein anderer kann es in drei Tagen. In wieviel Zeit werden beide, zugleich arbeitend, damit fertig?

Auflösung. Der Mauermann, der in 6 Tagen die ganze Mauer aufführt, macht in einem Tage $\frac{1}{6}$ dieser Arbeit, und ebenso der andere in einem Tage $\frac{1}{3}$, also beide zusammen in einem Tage $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{9}{18}$ dieser Arbeit; heiſst also x die Zeit, welche beide zur Vollendung der ganzen Arbeit $(=1)$ gebrauchen, so muſs sein:

$$\frac{9}{18}x = 1$$
$$x = 2$$

120.

12. Aufgabe. Eine Wasserhebemaschine kann ein Land in 30 Tagen entwässern, eine andere kann dies in 40 Tagen, eine dritte braucht nur 20 Tage, wieviel Zeit ist erforderlich, wenn alle drei zugleich arbeiten?

Auflösung. Man setze die Menge des Wassers $=1$; da nun die erste Maschine dies in 30 Tagen hebt, so hebt sie an einem Tage $\frac{1}{30}$ desselben, ebenso die zweite $\frac{1}{40}$, die dritte $\frac{1}{20}$; alle drei heben also in einem Tage $\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}=\frac{18}{120}$ und in x Tagen $\frac{13}{120}.x$, folglich:

$$\frac{13x}{120}=1$$
$$x=\frac{120}{13}=9\tfrac{3}{13}$$

121.

13. Aufgabe. Ein Vater wollte seinen Kindern Äpfel schenken. Um jedem 5 Stück geben zu können, hätte er 2 Stück mehr haben müssen; er gab darauf jedem 4 Stück und behielt noch 3 Stück übrig. Wieviel Kinder und wieviel Äpfel waren da?

Auflösung. Die Aufgabe scheint zwei unbekannte Gröfsen zu enthalten, die eine ist aber schon durch die andere gegeben. Sei nämlich die Anzahl der Kinder $=x$. Soll jedes 5 Äpfel haben, so fehlen 2, mithin stellt der Ausdruck: $5x-2$ die Anzahl der Äpfel dar; bekommt jedes Kind 4 Äpfel, so bleiben 3 übrig, folglich stellt auch der Ausdruck $4x+3$ die Anzahl der Äpfel dar, und man hat also:

$$5x-2=4x+3$$
$$\text{hieraus: } x=5$$

Es waren also 5 Kinder, und $5.5-2=4.5+3=23$ Äpfel da.

122.

14. Aufgabe. In einer Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal soviel Männer als Frauen, später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggegangen waren, blieben noch fünfmal soviel Männer als Frauen zurück. Wieviel Männer und Frauen waren anfangs da?

Auflösung. Man setzte die anfängliche Zahl der Frauen $=x$ und mithin die der Männer $=3x$. Nachdem 8 Männer und 8 Frauen weggegangen waren, blieben noch $x-8$ Frauen und $3x-8$ Männer zurück, und da die Anzahl der Männer jetzt fünfmal so grofs sein soll, so hat man:

$$3x-8=5(x-8)$$
$$\text{woraus: } -2x=-32$$
$$\text{und } x=16$$

Mithin waren anfänglich 16 Frauen und $3.16=48$ Männer da.

123.

15. Aufgabe. Ein Bedienter, welcher zum jährlichen Lohn 135 ℳ und ein Kleid erhielt, forderte nach 7 Monaten seinen Abschied und bekam für diese Zeit aufser dem Kleide noch 67 ℳ. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

Auflösung. Setze den Wert des Kleides in Mark ausgedrückt $=x$, so beträgt der ganze jährliche Lohn $135+x$, mithin der Lohn für 1 Monat $\frac{135+x}{12}$ und für 7 Monate $=\frac{7}{12}(135+x)$, dies mufs soviel betragen als 67 ℳ und x, der Wert des Kleides. Mithin ist:

$$67+x=\tfrac{7}{12}(135+x)$$
$$804+12x=945+7x$$
$$5x=141$$
$$x=28\tfrac{1}{5}$$

NB. Die Glieder in einer Gleichung müssen alle *einnamig* und *gleichnamig* sein.

124.

16. Aufgabe. Ein Meister nimmt einen Gesellen an, und verspricht ihm jeden Tag, den er bei ihm arbeitet, 1 ℳ. Arbeitet er aber nicht, so muſs er dem Meister 60 ₰ für die Kost zahlen. Nach 80 Tagen halten sie Abrechnung und es findet sich, daſs keiner dem andern etwas schuldig ist. Wieviel Tage hat der Geselle gearbeitet?

Auflösung. Seien x die Tage, wo er gearbeitet, und mithin $80-x$ die Tage, wo er nicht gearbeitet hat, alsdann beträgt sein Lohn x ℳ und das Kostgeld $\frac{(80-x)60}{100}$ ℳ, und da nun der Lohn aufgezehrt sein soll, so hat man:

$$x-\frac{(80-x).60}{100}=0$$
$$10x-480+6x=0$$
$$16x=480$$
$$x=30$$

125.

17. Aufgabe. Ein Kaufmann fordert für 12 Meter Tuch 300 ℳ; Käufer dingt aber von diesen 300 ℳ soviel ab, als ihm hernach 2 Meter wirklich kosten; wieviel wurde abgedungen?

Auflösung. Man setze den Abzug $=x$, so kosten die 12 Meter $300-x$, mithin 1 Meter $\frac{300-x}{12}$, also 2 Meter $2.\frac{300-x}{12}=\frac{300-x}{6}$, und da dies dem Abzuge x gleich sein soll, so hat man:

$$x=\frac{300-x}{6}$$
$$6x=300-x$$
$$7x=300$$
$$x=42\tfrac{6}{7}$$

126.

18. Aufgabe. Man sucht eine Zahl von folgender Beschaffenheit: wenn man sie mit 3 multipliziert, vom Produkt 11 subtrahiert und hierauf den Rest wieder mit 4 multipliziert und zum Produkte 6 addiert und die erhaltene Summe nochmals mit 5 multipliziert, so soll 50 kommen.

Auflösung. Um hier die Bedingungen der Aufgabe ganz in Zeichen andeuten zu können, werden zwei Klammern notwendig. Heiſst nämlich x die gesuchte Zahl, so deutet $3x-11$ den zuerst erwähnten Rest und $4(3x-11)+6$ die erwähnte Summe an. Um nun anzudeuten, daſs diese Summe noch mit 5 multipliziert werden soll, brauchen wir noch eine zweite Klammer, welche sich, um Irrtum zu verhüten, von der ersten unterscheiden muſs, daher:

$$5[4(3x-11)+6]=50$$

Um die unbekannte Gröſse von den Klammern zu befreien, kann man erst die innern und dann die äuſsern Klammern auflösen (oder auch umgekehrt). Lösen wir erst die inneren Klammern, so hat man:

$$5[12x-44+6]=50;$$
$$5[12x-38]=50;\ \text{durch 5 dividiert:}$$
$$12x-38=10;$$
$$12x=48;$$
$$x=4.$$

127.

19. Aufgabe. Eine Frau bringt Äpfel zu Markt und verkauft zuerst die Hälfte und einen halben. Von dem Reste verkauft sie wieder die Hälfte und einen halben; von dem jetzt noch bleibenden Reste wiederum die Hälfte und einen halben; worauf sie noch 24 Stück übrig behält. Wieviel hatte sie anfangs?

Auflösung. Sie habe x gehabt, so bleiben hiervon übrig nach dem ersten Handel, die Hälfte weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; von diesem Reste bleibt nach dem zweiten Verkauf wiederum die Hälfte $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$ weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$; hiervon nach dem dritten Verkauf wiederum die Hälfte weniger einen halben, nämlich $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$, und da sie jetzt noch 24 Stück übrig behalten soll, so hat man:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 24$$

Die innern Klammern aufgelöst, kommt:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 24$$

$$\text{oder: } \frac{1}{2}[\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}] - \frac{1}{2} = 24$$

$$\text{ferner: } \frac{x}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 24$$

$$\frac{x}{8} = 24\frac{7}{8}$$

$$x = 199$$

128.

20. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches zu 5% belegt, in 4 Jahren ebensoviel Zinsen bringt, als das Kapital von 635 ℳ zu 4% in 7 Jahren?

Auflösung. So oft 100 ℳ in 635 ℳ enthalten sind, erhält man 4 ℳ Zinsen; der Ausdruck $\frac{635}{100}.4$ stellt also die einjährigen, und der Ausdruck $\frac{635}{100}.4.7$ die siebenjährigen Zinsen des bekannten Kapitals dar. Heifst also das gesuchte Kapital x, so stellt gleicherweise $\frac{x}{100}.5$ die einjährigen, und mithin $\frac{x}{100}.5.4$ die vierjährigen Zinsen des unbekannten Kapitals x dar. Man hat also laut Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{100}.5.4 = \frac{635}{100}.4.7$$

$$x = 889.$$

129.

21. Aufgabe. Zu wieviel Prozent mufs das Kapital von 225 ℳ belegt werden, um in 6 Jahren ebensoviel Zinsen zu bringen, als 300 ℳ zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Jahren?

Auflösung. Heifsen x die gesuchten Prozente, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{225}{100}.x.6 = \frac{300}{100}.\frac{7}{2}.8$$

$$45x = 10.7.4$$

$$9x = 56$$

$$x = 6\frac{2}{9}\,\%.$$

130.

22. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches mit seinen 5jährigen Zinsen zu 4% auf 600 ℳ anwächst?

Auflösung. Heifse x das gesuchte Kapital. So oft 100 in x enthalten ist, erhält man 4%, der Ausdruck $\frac{x}{100}.4.5$ stellt also die 5jährigen Zinsen, und der Ausdruck $x+\frac{x}{100}.4.5$ Kapital samt den 5jährigen Zinsen dar. Man hat also laut Bedingung:

$$x+\frac{x}{100}.4.5=600$$
$$x+\frac{x}{5}=600$$
$$5x+x=3000$$
$$x=500$$

131.

23. Aufgabe. Eine Person, A, hat für eine andere Person, B, 5100 ℳ einkassiert, B wünscht dies Geld frei mit der Post zu erhalten. Wieviel wird B bekommen, wenn A 2% Postgeld bezahlen mufs?

Auflösung. Das, was A auf die Post giebt, heifse x, so beträgt das dafür bezahlte Postgeld $\frac{x}{100}.2$, weil nun A die 5100 ℳ hiermit ausgegeben, nichts davon behalten haben soll, so hat man:

$$x+\frac{x}{100}.2=5100$$
$$51x=5100.50$$
$$x=5000$$

132.

24. Aufgabe. A mufs 4900 ℳ postfrei an B senden, das Postgeld beträgt 2%, kann aber am Orte der Absendung nicht entrichtet werden. Wieviel mufs also A samt dem beigelegten Postgeld auf die Post geben, damit B nach Bezahlung desselben, seine 4900 ℳ übrig behält?

Auflösung. Man nenne x die fragliche Versendung, so mufs B dafür bezahlen $\frac{x}{100}.2$, daher:

$$x-\frac{x}{100}.2=4900$$
$$49x=4900.50$$
$$x=5000$$

133.

25. Aufgabe. Jemand will 30000 ℳ so versichern lassen, dafs die Prämie, welche 20% beträgt, gleich mit versichert ist, wieviel beträgt die Prämie?

Auflösung. Nennt man dieselbe x, so wird im Ganzen $30000+x$ versichert, welches $\frac{30000+x}{100}.20$ kostet. Da nun die zu zahlende Prämie $x=$ den Prozenten für versichertes Kapital und Prämie sein soll, so hat man:

$$x=\frac{30000+x}{100}.20$$
$$4x=30000$$
$$x=7500$$

134.

26. Aufgabe. Einem Kurier, der täglich 5 Meilen macht, wird nach 8 Tagen ein anderer, der täglich 9 Meilen macht, nachgeschickt. In wieviel Tagen wird letzterer den erstern einholen?

Auflösung. Man setze in x Tagen, so macht der zweite einen Weg von 9x Meilen und der erste, welcher 8 Tage voraus hat, einen Weg von 5 (8 + x) Meilen. Auf dem Punkt des Zusammentreffens müssen beide von Haus aus einen gleichen Weg zurückgelegt haben, daher:

$$9x = 5(8 + x)$$
$$9x = 40 + 5x$$
$$x = 10$$

135.

27. Aufgabe. Der Stundenzeiger einer Uhr steht auf VI, der Minutenzeiger auf XII. In wieviel Zeit werden beide Zeiger sich decken?

Auflösung. Man setze die fragliche Zeit in Stunden ausgedrückt = x. Der Minutenzeiger macht in jeder Stunde 60 Striche, also in x Stunden 60x Striche, der Stundenzeiger legt hingegen in jeder Stunde nur 5 Striche zurück, mithin in x Stunden 5x; wo beide Zeiger sich decken, da müssen sie gleichviel Striche von XII abstehen. Da nun der Stundenzeiger auf VI steht und mithin $6 . 5 = 30$ Striche voraus hat, so erhält man die Gleichung:

$$60x = 30 + 5x$$
$$x = \tfrac{6}{11} \text{ Stunden} = 32\tfrac{8}{11} \text{ Minuten.}$$

136.

28. Aufgabe. Jemand, der um die Zeit gefragt wurde, antwortete: Stunden- und Minutenzeiger decken sich eben zwischen X und XI; wie spät war es?

Auflösung. Der Minutenzeiger stand gerade auf XII, als der Stundenzeiger auf X stand und mithin $10 . 5 = 50$ Striche voraus hatte, daher:

$$60x = 50 + 5x$$
$$x = \tfrac{10}{11}$$

Es war also $\frac{10}{11}$ auf XI d. i. $5\frac{5}{11}$ Minuten vor XI.

137.

29. Aufgabe. Ein Hase wird von einem Hunde verfolgt. Der Hase hat 100 Sprünge voraus und macht jedesmal 6, wenn der Hund 5 macht. Dagegen reicht aber der Hund mit 7 Sprüngen ebensoweit, als der Hase mit 9. Wieviel Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

Auflösung. Man setze x, so beträgt der ganze Weg, den der Hase zurückgelegt, 100 + x Hasensprünge. Da der Hase 6 Sprünge macht, während der Hund 5 thut, so macht der Hase jedesmal 1 Sprung, wenn der Hund $\frac{5}{6}$ Sprung macht. Während also der Hase noch x Sprünge macht, macht der Hund nur $\frac{5}{6}$ so viel Sprünge, also $\frac{5x}{6}$, womit er den Weg von 100 + x Hasensprüngen zurücklegen mufs. Um beide Ausdrücke einander gleichsetzen zu können, müssen die $\frac{5x}{6}$ Hundesprünge auf Hasensprünge reduziert werden. Da nun an Gröfse 7 Hundesprünge = 9 Hasensprünge, so ist 1 Hundesprung = $\frac{9}{7}$ Hasensprünge, mithin $\frac{5x}{6}$ Hundesprünge = $\frac{9}{7} . \frac{5}{6} . x$ Hasensprünge, daher:

$$\tfrac{9}{7} . \tfrac{5}{6} . x = 100 + x$$
$$15x = 1400 + 14x$$
$$x = 1400$$

138.

30. Aufgabe. Jemand hat zweierlei Sorten Wein. Von der ersten kostet die Mafs 1 ℳ 50 ₰; von der zweiten 87,5 ₰. Da nun die erste Sorte wegen zu geringer Güte keine Abnehmer findet, so will er aus beiden eine 200 Mafs haltende Mischung machen, von welcher, ohne Schaden zu leiden, die Mafs nur 1 ℳ 12,5 ₰ kostet. Wieviel mufs von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung. Die ganze Mischung soll 200 Mafs halten; nimmt man also von der bessern Sorte x Mafs, so müssen die übrigen Mafse, nämlich 200 — x von der schlechtern genommen werden. Jedes der x Mafse kostet 150 ₰ und jedes der (200 — x) Mafse kostet 87,5, der in der Mischung steckende Wert ist also $150x + 87,5(200 - x)$. Da nun jede Mafs der Mischung für 112,5 ₰ verkauft werden soll, so erhält man für die ganze 200 Mafs haltende Mischung $112,5 . 200$ ₰. Mithin mufs der Wert von x folgender Gleichung Genüge leisten:

$$150x + 87,5 . (200 - x) = 112,5 . 200$$
$$300x + 175 . (200 - x) = 225 . 200$$
$$300x + 35000 - 175x = 45000$$
$$125x = 10000$$
$$x = 80$$

139.

31. Aufgabe. Wieviel Mark 8lötiges Silber mufs zu $6\frac{2}{3}$ Mark 14lötigem gesetzt werden, damit der Gehalt 12lötig wird? (1 Mark = 16 Lot gerechnet).

Auflösung. Sei der Zusatz von 8lötigem Silber x Mark. Jede dieser x Mark enthält 8 Lot und jede der $6\frac{2}{3}$ Mark 14 Lot Silber, die ganze Mischung enthält an Gewicht $6\frac{2}{3} + x$ Mark und an Silber $14 . 6\frac{2}{3} + 8x$ Lot und da nun die Mischung im Durchschnitt 12lötig sein soll, so enthält sie an Silber $12(6\frac{2}{3} + x)$ Lot. Mithin:

$$12(6\tfrac{2}{3} + x) = 14 . 6\tfrac{2}{3} + 8x$$
$$\text{hieraus: } x = 3\tfrac{1}{3}$$

140.

32. Aufgabe. Jemand hat 30 Mark 14lötiges Silber; wieviel Kupfer mufs er zusetzen, damit der Gehalt 10lötig wird?

Auflösung. Man setze x Mark Kupfer, so hat man:

$$10(30 + x) = 14 . 30$$
$$x = 12$$

141.

33. Aufgabe. Ein Stück Blei, welches in freier Luft 23 Kilogramm wiegt, wiegt nur 21 kg, wenn es im Wasser gewogen wird, oder so ausgesprochen: 23 kg Blei verlieren im Wasser 2 kg, und so in diesem Verhältnis, nämlich 2.23 kg Blei verlieren im Wasser 2.2 = 4 kg &c. Ebenso verlieren 37 kg Zinn im Wasser 5 kg. Schmelzt man 23 kg Blei und 37 kg Zinn zusammen, so wiegt die Komposition 60 kg und wird im Wasser 2 + 5 = 7 kg verlieren. Wie läfst sich nach dieser Angabe berechnen, wieviel Zinn in einer Komposition von 217 kg enthalten ist, wenn blofs gesagt wird, dafs die Komposition nur aus Zinn und Blei besteht und im Wasser gewogen 26 kg verliert?

Auflösung. Seien in der 217 kg wiegenden Komposition x Kilogramm Zinn und folglich (217 — x) kg Blei enthalten.

So oft 37 in x enthalten, so oft mufs das in der Komposition enthaltene Zinn 5 kg verlieren, so oft 23 in $217 - x$ enthalten ist, so oft mufs auf das Blei ein Verlust von 2 kg gerechnet werden. Der ganze Verlust mufs also: $\frac{x}{37} \cdot 5 + \frac{217-x}{23} \cdot 2$ sein, und da dieser Verlust $= 26$ gegeben ist, so hat man:

$$\frac{x}{37} . 5 + 2 \frac{(217-x)}{23} = 26$$

$$\text{hieraus: } 115x + 74.217 - 74x = 23.26.37$$

$$41x = 6068$$

$$x = 148$$

Die Komposition enthält also: 148 kg Zinn und 69 kg Blei.

142.

34. Aufgabe. Der König Hiero von Syrakus gab einem Goldschmied 16 Pfund Gold und 4 Pfund Silber, um ihm daraus eine Krone zu machen. Die fertige Krone wog richtig 20 Pfund. Der König aber argwohnte, dafs der Goldschmied einen Teil des Goldes für sich behalten und dieses wieder durch ein gleiches Gewicht an Silber ersetzt habe. Er bat deshalb den Mathematiker Archimedes die Sache zu untersuchen.

Archimedes wog die Krone im Wasser, worin sie $1\frac{1}{4}$ Pfund verlor, aufserdem fand er, dafs 21 Pfund Silber im Wasser 2 Pfund und 20 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund verliert, und konnte hieraus den etwaigen Betrug leicht berechnen. Er fand ihn — wie grofs?

Auflösung. Die Krone enthalte x Pfund Gold, mithin $(20 - x)$ Pfund Silber, so mufs der ganze Verlust im Wasser $= \frac{x}{20} \cdot 1 + \frac{20-x}{21} \cdot 2$ sein, da nun dieser Verlust $= 1\frac{1}{4}$ Pfund bekannt ist, so hat man:

$$\frac{x}{20} + 2 \cdot \frac{(20-x)}{21} = \frac{5}{4}$$

$$\text{hieraus: } x = 14\tfrac{9}{19}$$

Die Krone enthielt statt 16 Pfund nur $14\frac{9}{19}$ Pfund Gold, und statt 4 Pfund Silber: $5\frac{10}{19}$ Pfund Silber.

143.

35. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 18 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater 2mal so alt sein als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die Anzahl Jahre, welche noch verfliefsen oder zu beider Alter hinzukommen müssen, um den fraglichen Zustand zu erhalten, so ist alsdann des Vaters Alter $58 + x$, und des Sohnes Alter $18 + x$, und da dann der Vater 2mal so alt sein soll, so hat man:

$$2(18 + x) = 58 + x$$

$$36 + 2x = 58 + x$$

$$x = 22$$

Der fragliche Zustand tritt also nach 22 Jahren ein, und der Vater ist dann $58 + 22 = 80$, und der Sohn $18 + 22 = 40$.

144.

36. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 10 Jahre alt; wieviel Jahre müssen noch verfliefsen oder zu beider Alter hinzukommen, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater gerade $3\frac{1}{4}$mal so alt ist, als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die fraglichen Jahre, so ist alsdann des Vaters Alter $58 + x$ und des Sohnes Alter $18 + x$, und da dann der Vater $3\frac{1}{2}$mal so alt sein soll, so hat man:

$$3\tfrac{1}{2}(18 + x) = 58 + x$$
$$63 + 3\tfrac{1}{2}x = 58 + x$$
$$2\tfrac{1}{2}x = 58 - 63$$
$$\tfrac{5}{2}x = -5$$
$$x = -2$$

Anmerkung 1. Die Rechnung führt hier auf ein Resultat, welches mit dem Minus-Zeichen, als ein wesentliches Merkmal desselben behaftet ist. Um den Sinn dieses Vorzeichens durch unmittelbare Schlüsse herauszubringen, überlege man folgendes:

Der Gang einer Rechnung bildet immer eine Kette reiner Vernunftschlüsse, die folgerecht durchgeführt, durchaus auf ein solches Resultat führen müssen, das auf die in Untersuchung gezogene Frage vollkommen paſst. Nun kann es aber in der Natur der Sache liegen, in der Stellung der Frage &c., daſs die zu suchende Gröſse nicht in den vorausgesetzten, sondern gerade in den entgegengesetzten Sinn fällt.

Wir suchten, der Bedingung der vorliegenden Aufgabe gemäſs, eine Gröſse, welche statt x substituiert, der Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}(18 + x) = 58 + x$$

Genüge leistet, oder im Sinne der Aufgabe gesprochen: eine Gröſse (x), welche mit 18 und 58 vereint, den fraglichen Zustand der beiden Alter giebt. Die obige Gleichung, kunstgerecht behandelt, muſs nun notwendig für x einen solchen Wert geben, der den Betrag auf beiden Seiten gleich macht, und dieser Wert, welcher er auch sein mag, muſs, zu 18 und 58 gelegt (addiert), den fraglichen Zustand geben, das ist klar. Kann nun aber die Gleichheit der beiden Seiten nicht anders stattfinden, als wenn von 18 und von 58 einerlei Gröſse subtrahiert wird, so muſs auch notwendig der für x gesuchte Wert mit dem Minus-Zeichen behaftet sein; die Rechnung, als eine Zeichensprache, kann den Umstand, daſs statt zu addieren, subtrahiert werden muſs, nicht in Worten, sondern nur in Zeichen andeuten. Da wir nämlich im Sinne der Addition rechnen, so muſs wohl die zu addierende Gröſse als eine inverse gefunden werden, weil eine direkte Gröſse hier nicht möglich ist. Die unbekannte Gröſse x ist nicht allein hinsichtlich ihrer wirklichen Gröſse, sondern auch hinsichtlich des Sinnes (Vorzeichens), in welchem sie genommen werden muſs, unbekannt. Das vorläufig vor x gesetzte +Zeichen bezieht sich nicht auf den bestimmten Wert von x, sondern deutet bloſs die (algebraische) Operation an, die damit vorgenommen werden soll, und steht also abgekürzt, statt des Wortes plus (lege hinzu). Hiernach ergiebt sich nun die Bedeutung des mit dem Minus-Zeichen behafteten Resultats. Die gesuchte Gröſse fällt nämlich nicht, wie vorausgesetzt, direkt in die Zukunft, sondern gerade umgekehrt (invers), zwei Jahre zurück in die Vergangenheit. Für den fraglichen Zustand ist also des Vaters Alter 58 plus $-2 = 56$; des Sohnes Alter: 18 plus $-2 = 16$ Jahre. Solche Fälle haben eigentlich zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Gröſsen geführt und die § 320 aus dem bloſsen Begriff abgeleiteten Regeln kennen gelehrt.

Anmerkung 2. Entgegengesetzte Gröſsen können nur da Sinn haben, wo es wirklich reine Gegensätze giebt, wie Zukunft, Vergangenheit; rechts, links; vorwärts, rückwärts &c. Licht und Schatten sind keine reine Gegensätze, Licht hat keinen Gegensatz; alle wirklichen Dinge, Substanzen (Baum, Tier &c.), haben keine Gegensätze.

145.

37. Aufgabe. Ein Mann ist jetzt 58 Jahre, sein Sohn 18 Jahre; wieviel mufs man zurückrechnen, oder von beider Alter subtrahieren, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater 6mal so alt war, als sein Sohn?

Auflösung. Man setze die zu subtrahierenden Jahre $= x$, so war des Vaters Alter $= 58 - x$ und des Sohnes Alter $18 - x$, und da nun jenes 6mal so grofs sein soll, so hat man:

$$58 - x = 6(18 - x)$$
$$58 - x = 108 - 6x$$
$$5x = 50$$
$$x = 10$$

folglich müssen 10 Jahre subtrahiert werden, und des Vaters Alter ist dann 58 minus $10 = 48$, des Sohnes Alter 18 minus $10 = 8$.

146.

38. Aufgabe. Der Vater sei wieder 58, der Sohn 18 Jahre alt, und gefragt: wieviel mufs von beider Alter subtrahiert werden, um den Zustand zu erhalten, wo des Vaters Alter 3mal so grofs war, als des Sohnes Alter?

Auflösung. Man setze die zu subtrahierenden Jahre $= x$, so ist des Vaters Alter $58 - x$, des Sohnes Alter $= 18 - x$, mithin laut Bedingung:

$$58 - x = 3(18 - x)$$
$$58 - x = 54 - 3x$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Der fragliche Augenblick fällt also nicht, wie vorausgesetzt, direkt in die Vergangenheit, sondern gerade entgegengesetzt (invers) in die Zukunft, und des Vaters Alter ist dann $= 58$ minus $-2 = 60$; und des Sohnes Alter $= 18 - (-2) = 20$ Jahre. (Siehe vorhergehende Anmerkungen und § 320.)

147.

39. Aufgabe. Wie grofs, und in welchem Sinn mufs der Faktor x genommen werden, damit er folgender Gleichung Genüge leistet?

$$25 + 4x = 7 - 2x$$

Auflösung. Man hat gleich

$$6x = -18$$
$$x = -3$$

Substituiert man diesen Wert -3 statt x in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$25 + 4 \,.\, (-3) = 7 - 2 \,.\, (-3)$$
$$\text{d. i. } 25 - 12 = 7 + 6$$

Die Gleichung lehrt, dafs sie nur dann Sinn haben kann, wenn der inverse Faktor, wie § 320 gedeutet wird.

Dreizehntes Buch.

Von den Funktionen und Formeln.

148.

In der mathematischen Sprache kommt oftmals der Ausdruck vor: eine Gröſse sei eine Funktion von einer oder mehreren andern Gröſsen, und dies soll dann soviel heiſsen: daſs erstere Gröſse von letzteren, gleichwie eine Wirkung von ihrer Ursache (Ursachen) abhängt, und folglich mit ihnen in einem gewissen Zusammenhange steht.

So ist z E. die Gröſse der Wurfsweite, welche eine abgeschossene Kanonenkugel erreicht, von mehreren andern Gröſsen abhängig, wie z. B. von der Anfangsgeschwindigkeit, von der Gröſse der Kugel, von dem Gewichte derselben, von der Menge und Güte des Pulvers, von der Länge des Rohrs, von der Gröſse des Richtungswinkels, von dem Widerstande der Luft, von der Anziehungskraft der Erde &c. &c., weil alle diese Gröſsen Einfluſs auf die Wurfsweite haben, mit ihr zusammenhängen und dieselbe bestimmen, und man sagt daher kurz: die Wurfsweite ist eine Funktion von den eben genannten Gröſsen.

149.

Zur gröſseren Erläuterung des vorstehenden Paragraphen diene folgende einfache Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, deren 5ter und 7ter Teil zusammen genommen 24 giebt.

Auflösung. Es ist klar, daſs die gesuchte Zahl (x) durch die Bedingung der Aufgabe und durch die gegebenen Zahlen 5, 7, 24 bestimmt, mit andern Worten eine Funktion von 5, 7, 24 ist, es muſs nämlich sein:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

$$\begin{aligned} \text{hieraus: } 7x + 5x &= 35 \cdot 24 \\ 12x &= 840 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Hier haben wir freilich die fragliche Zahl $x = 70$ gefunden, allein die Art und Weise, das eigentliche Gesetz (Formel, Regel), wie mit den Zahlen 5, 7, 24 gerechnet werden muſs, um die durch sie bestimmte Gröſse zu finden, konnte wegen der Verschmelzung dieser Zahlen ineinander nicht hervortreten. Wollen wir dieses Gesetz aufstellen, um dadurch eine klare Übersicht von dem Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung zu erhalten, nämlich wie die Ursachen sich miteinander verbinden, um die durch sie bestimmte Wirkung hervorzubringen, so müssen wir bei der Reduktion der obigen Gleichung auf x die dabei vorkommenden arithmetischen Operationen nicht wirklich vollziehen, sondern nur andeuten, alsdann stellt sich das fragliche Gesetz, wie die gesuchte Gröſse von den gegebenen abhängt, durch eine Formel dar, welche alle mit letzteren vorzunehmenden Rechnungen vor Augen legt.

Aus der Gleichung

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

folgt nämlich, indem wir, um x von den Nennern zu befreien, mit $5 \cdot 7$ multiplizieren, diese Operation aber bloſs andeuten:

$$7x + 5x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

Jetzt die Koefficienten von x addiert, jedoch nur andeutend, kommt:

$$(7 + 5)\,x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{7 + 5}$$

Dies wäre also die gesuchte Formel oder das Gesetz, aus welchem wir mit einem Blick ersehen, auf welche Weise die gesuchte Gröſse x in unserer Aufgabe, aus den gegebenen Zahlen 5, 7, 24 entsteht. In Worten ausgesprochen, würde es so lauten: man muſs alle drei Zahlen miteinander multiplizieren und das Produkt durch die Summe der beiden ersten dividieren.

150.

Es ist leicht einzusehen, daſs das Gesetz, nach welchem eine Gröſse von anderen abhängt, nicht durch das absolute Quantum der letzteren, sondern bloſs durch die Beziehungen, in welchen sie mit ersterer stehen, bestimmt ist. Würde z. B. gefragt: welche Zahl ist es, deren 3ter und 4ter Teil addiert 21 giebt, so finden hier offenbar unter der gesuchten Gröſse und denen, von welchen sie eine Funktion ist, ganz dieselben Beziehungen und Schlüsse wieder statt, wie in der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphen. Man braucht also auch nur in die dort entwickelte

Formel 21 statt 24 und 3, 4 statt 5 und 7 zu setzen und die angedeuteten Rechnungen zu vollziehen, um die fragliche Zahl (36) zu erhalten.

Man kann also auch, um das Gesetz, nach welchem eine Gröfse von andern anhängt, zu finden (was bei allen mathematischen Untersuchungen immer die Hauptsache ist), die miteinander in Beziehung stehenden Gröfsen einfacher und, um ihre Verschmelzung zu verhindern, vorläufig mit allgemeinen Zeichen andeuten, die Beziehungen (Bedingungen) durch eine Gleichung ausdrücken und diese dann auf diejenige Gröfse reduzieren, für welche man die Formel sucht. (Vergl. § 82.)

Die Schlüsse, welche bei der Auflösung einer so allgemein ausgedrückten Gleichung gemacht werden müssen, sind offenbar ganz dieselben, als wenn statt der Buchstaben bestimmte Zahlen ständen, nur mit dem Unterschiede, dafs wir hier alle vorkommenden arithmetischen Operationen blofs andeuten, die erhaltenen Buchstaben-Ausdrücke aber immer möglichst reduzieren, um alle unnötigen Rechnungen zu entfernen. Die vorhergehende Aufgabe können wir allgemein so ausdrücken:

Eine Zahl zu finden, deren $m$ter und $n$ter Teil addiert, a giebt.

Auflösung. Sei x die fragliche durch m, n, a bestimmte Zahl, so deutet $\frac{x}{m}$ den $m$ten und $\frac{x}{n}$ den $n$ten Teil derselben an, und die Bedingung der Aufgabe ist dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=a$$

Um hier x von den Nennern zu befreien, multiplizieren wir die ganze Gleichung mit mn, so kommt

$$nx+mx=amn$$

Ferner, die Koefficienten von x addiert (den gemeinschaftlichen Faktor x auf der linken Seite herausgesetzt), kommt:

$$(n+m)\,x=mna$$

Jetzt durch den Koefficienten $n+m$ dividiert hat man:

$$x=\frac{mna}{m+n}$$

151.

Aufgabe. Die Zahl 140 in zwei Teile zu teilen, die sich wie 2:5 verhalten.

Auflösung. Die Teile sollen sich wie $2:5$ oder, was dasselbe ist, wie $1:\frac{5}{2}$ verhalten (§ 65); heifst also x der eine Teil, so ist $\frac{5}{2}x$ der andere, folglich:

$$x+\tfrac{5}{2}x=140$$
$$2x+5x=280$$
$$7x=280$$
$$x=40 \quad \text{(der eine Teil)}$$
$$\text{und } \tfrac{5}{2}x=100 \quad \text{(der andere Teil)}$$

Aufgabe. Eine Zahl a in zwei Teile zu teilen, die sich wie $m:n$ verhalten.

Auflösung. Da sich die Teile wie $m:n$ oder, was dasselbe ist, wie $1:\frac{n}{m}$ verhalten, so ist, wenn x der eine Teil, $\frac{n}{m}\,x$ der andere, daher

$$x+\frac{n}{m}\,x=a$$

multipliziert mit m kommt: $mx+nx=ma$

$$(m+n)\,x=ma$$

$$\text{mithin der eine Teil: } x=\frac{ma}{m+n}$$

$$\text{und der andere Teil: } \frac{n}{m}\,x=\frac{n}{m}\cdot\frac{ma}{m+n}=\frac{na}{m+n}$$

Als Probe der richtigen Rechnung müssen beide für x und $\frac{n}{m}x$ gefundenen Ausdrücke, nämlich: $\frac{ma}{m+n}$ und $\frac{na}{m+n}$ zusammen addiert, die Gröfse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, denn:

$$\frac{ma}{m+n}+\frac{na}{m+n}=\frac{a\,(m+n)}{m+n}=a$$

152.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl a in drei solche Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m, n, p verhalten.

Auflösung. Die drei Teile sollen sich wie m, n, p, oder, was dasselbe ist, wie 1, $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, verhalten; heifst also x der erste Teil, so ist $\frac{n}{m}x$ der zweite, $\frac{p}{m}x$ der dritte, und da alle drei zusammen $=a$ sein müssen, so hat man:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$$

Um diese Gleichung auf x zu reduzieren, multipliziere man die ganze Gleichung erst mit m, so kommt:

$$mx + nx + px = ma$$

Die Koefficienten von x addiert, kommt:

$$(m + n + p)\,x = ma$$

also der erste Teil: $x = \dfrac{ma}{m+n+p}$

" zweite " $\dfrac{n}{m}x = \dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{ma}{m+n+p} = \dfrac{na}{m+n+p}$

" dritte " $\dfrac{p}{m}x = \dfrac{p}{m} \cdot \dfrac{ma}{m+n+p} = \dfrac{pa}{m+n+p}$

Soll z. E. 100 in drei solche Teile geteilt werden, die sich wie $2:5:3$ verhalten, so ist hier: $a = 100$, $m = 2$, $n = 5$, $p = 3$; mithin der erste Teil $2 \cdot \dfrac{100}{10} = 20$; der zweite $5 \cdot 10 = 50$; der dritte $3 \cdot 10 = 30$.

153.

Aufgabe. Eine Zahl $a = 100$ in zwei solche Teile zu teilen, daſs, wenn der eine Teil durch $m = 5$, der andere durch $n = 8$ dividiert wird, die Summe der Quotienten $b = 17$ sei:

Auflösung. Sei x der eine, folglich $(a - x)$ der andere Teil, so hat man laut Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$$

Die ganze Gleichung mit mn multipliziert, kommt:

$$nx + ma - mx = mnb$$

Jetzt die bekannten Glieder von den unbekannten gesondert:

$$nx - mx = mnb - ma$$

$$(n - m)x = m(nb - a)$$

$$x = \frac{m(nb - a)}{n - m}$$

Subtrahiert man diesen für den einen Teil x gefundenen Ausdruck $\frac{m(nb-a)}{n-m}$ von a, so erhält man auch die Formel für den andern Teil $a-x$. Es ist nämlich:

$$a-x=a-\frac{m(nb-a)}{n-m}$$

Dieser für $a-x$ gefundene Ausdruck läfst sich aber noch bedeutend abkürzen, wenn man ihn auf einerlei Benennung bringt, nämlich:

$$a-x=\frac{a(n-m)-m(nb-a)}{n-m}$$

Die Klammern aufgelöst:

$$a-x=\frac{an-am-mnb+am}{n-m}$$

$$a-x=\frac{an-mnb}{n-m}$$

$$a-x=\frac{n(a-mb)}{n-m}$$

Um sich zu überzeugen, dafs man keinen Rechnungsfehler begangen habe, müssen die beiden für x und $a-x$ gefundenen Ausdrücke addiert die Gröfse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, weil:

$$\frac{m(nb-a)}{n-m}+\frac{n(a-mb)}{n-m}=\frac{mnb-ma+na-nmb}{n-m}$$

$$=\frac{na-ma}{n-m}=\frac{(n-m)a}{n-m}=a$$

154.

Aufgabe. Es hat jemand in verschiedenen Terminen mehrere Zahlungen zu leisten: eine gewisse Summe s nach m Monaten, eine andere Summe s' nach m' Monaten, eine dritte Summe s'' nach m'' Monaten &c. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe $s+s'+s''+\ldots$ auf einmal zu erhalten. Nach wieviel Monaten mufs diese Zahlung geleistet werden, damit weder der eine noch der andere Teil Schaden leidet? (Gröfsen einerlei Art pflegt man oft durch dieselben Buchstaben zu bezeichnen, und ihre Verschiedenheit durch Striche anzudeuten, wodurch der Überblick offenbar leichter wird, als wenn man lauter verschiedene Buchstaben gebrauchen wollte.)

Auflösung. Um leichter auf den Ansatz zu kommen, nehme man beliebige monatliche Prozente an, und setze den Gewinn, den 100 Thlr. in 1 Monat bringen $=p$, so ist der Nutzen, welchen der Schuldner von der erst nach m Monaten zu bezahlenden Summe s ziehen könnte $=\frac{spm}{100}$; ebenso ist der Nutzen, den die zweite nach m' Monaten zu bezahlende Summe bringt $=\frac{s'pm'}{100}$ &c., so dafs also $\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+\ldots$ den Nutzen aller terminsweise zu bezahlenden Beträge ausdrückt. Die Zeit, wo die ganze Summe $s+s'+s''+\ldots$ auf einmal bezahlt wird, mufs nun so weit hinausgesetzt werden, dafs die ganze Summe erst einen dem obigen gleichen Nutzen bringen kann. Heifst also diese Zeit x, so mufs sein:

$$\frac{(s+s'+s''+\ldots)px}{100}=\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+\ldots$$

Alle Glieder haben hier den Faktor p und den Nenner 100 gemeinschaftlich, läfst man diese als überflüssig weg, indem man die ganze Gleichung; mit $\frac{100}{p}$ multipliziert, dann auf beiden Seiten durch $s+s'+s''+\ldots$ dividiert, so kommt:

$$x=\frac{sm+s'm'+s''m''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots}$$

Man sieht also, dafs die gesuchte Zeit eine von p unabhängige Funktion ist. In Worten lautet diese Formel: Man mufs die zu bezahlenden Beträge mit den in einerlei Einheiten ausgedrückten Zeiten multiplizieren, und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Beträge dividieren.

Beispiel. Es hat jemand folgende vier an einem Tage ausgestellt Wechsel ohne Zinsen zu zahlen: 300 ℳ nach 14 Tagen; 200 ℳ nach 3 Wochen 150 ℳ nach 2 Monaten, und 100 ℳ nach 28 Tagen; alle diese Summen sollen auf einmal bezahlt werden, welchen Termin (x) mufs man setzen?

Antwort. Hier ist:

$$\begin{array}{cccc} s=300 & s'=200 & s''=150 & s'''=100 \\ \underline{m=14} & \underline{m'=21} & \underline{m''=60} & \underline{m'''=28} \\ sm=4200; & s'm'=4200; & s''m''=9000; & s'''m'''=2800 \end{array}$$

$$sm+s'm'+s''m''+s'''m'''=20200$$
$$s+s'+s''+s'''=750$$

$$x=\frac{20200}{750}=27 \text{ Tage (beinahe)}$$

155.

In allen Fällen, wo eine zu suchende Gröfse nur scheinbar Funktion von einer andern ist, wie im vorhergehenden Beispiel x von p, hat letztere Gröfse auch nichts in der Funktion zu schaffen, und mufs nach gehöriger Reduktion immer wieder herausfallen. So ist z. E. der Wert des schlecht reduzierten Ausdrucks:

$$\left(\left[a-\frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\frac{n-m}{n}+mb\right)\frac{x}{3a}$$

nur scheinbar eine Funktion von a, b, m, n. Setzt man z. B. $x=5$, so kann man statt a, b, m, n setzen, was man will, der Ausdruck giebt doch immer nur $1\frac{2}{3}$.*

Ebenso ist der Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$, eine von b unabhängige Funktion.

* Der Ausdruck läfst sich (durch Einrichten der Gröfse in der ersten Klammer) auf den einfachen $\frac{x}{3}$ reduzieren.

156.

Wenn eine Gröfse eine Funktion von mehreren andern Gröfsen ist, so ist auch umgekehrt jede der letzteren eine Funktion von allen übrigen. So ist z. B. der Zinsertrag eines Kapitals eine Funktion von dem angelegten Kapital, von den Prozenten, zu welchen es belegt wird, und von der Zeit, während welcher es steht. Umgekehrt ist aber jede der letzteren Gröfsen, z. B. die Zeit, in welcher ein gewisser Zinsertrag fällig wird, durch die Gröfse dieses Zinsertrags, des Kapitals und der Prozente bestimmt. Kann man nun zwischen mehreren zusammengehörigen, durch allgemeine Zeichen angedeuteten Gröfsen eine Gleichung auffinden, und diese dann auf jede der, durcheinander bestimmten Gröfsen reduzieren, so erhält man ebenso viele Formeln, welche dann eine klare Übersicht geben, wie jede Gröfse von den mit ihr verbundenen abhängt und daraus bestimmt werden kann.

157.

Aufgabe. Wenn die n jährigen Zinsen eines zu p Prozent belegten Kapitals, C, zum Kapital geschlagen, und die Gröfse dieses neuen Kapitals mit C′ bezeichnet wird, so ist jede dieser vier Gröfsen n, p, C, C′ eine Funktion von den drei übrigen. Es werden die Formeln derselben verlangt.

Auflösung. Der Ausdruck: $\frac{Cpn}{100}$ stellt die n jährigen Zinsen und folglich $C + \frac{Cpn}{100}$ Kapital samt den $n$jährigen Zinsen dar, und da diese Gröfse durch C′ bezeichnet werden soll, so hat man sogleich:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100}$$

Um diese Gleichung auch auf C, p und n zu reduzieren, multipliziere man erst auf beiden Seiten mit 100, so kommt:

$$100\,C + Cpn = 100C'$$

die Koeffizienten von C addiert, kommt:

$$(100 + pn)\,C = 100C'$$

jetzt durch den Koeffizienten von C dividiert, kommt:

$$C = \frac{100\,C'}{100 + np}$$

Aus der Gleichung: $100\,C + Cpn = 100C'$

folgt: $Cpn = 100C' - 100\,C$

durch Cn dividiert, kommt:

$$p = \frac{100(C' - C)}{nC}$$

durch Cp dividiert, kommt auch:

$$n = \frac{100(C' - C)}{pC}$$

Die verlangten Formeln sind also:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$C = \frac{100\,C'}{100 + pn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$p = \frac{100(C' - C)}{nC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{100(C' - C)}{pC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Beispiel. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches mit seinen 6jährigen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % vereinigt, ein Kapital von 762 ℳ giebt?

Formel 2 in § 157 giebt mit $n = 6$, $p = 4\frac{1}{2}$, $C' = 762$:

$$C = \frac{100 \,.\, 762}{100 + 6 \,.\, 4\frac{1}{2}} = \frac{76200}{127}$$

$$C = 600 \text{ ℳ}$$

Wie lange mufs das Kapital von 600 ℳ zu 5 % auf Zinsen stehen, um an Kapital und Zinsen 800 ℳ zu erhalten?

Gegeben: $C = 600$, $p = 5$, $C' = 800$, gesucht n. Nach Formel 4 ist:

$$n = \frac{100\,(800 - 600)}{5 \,.\, 600}$$

also: $n = 6\frac{2}{3}$ Jahre.

158.

Aufgabe. Jede der folgenden 8 Gleichungen auf x zu reduzieren:

1. $ax = b + \frac{cx}{m}$;
2. $\frac{ax}{m} + \frac{bx}{n} - \frac{c}{a} = 0$;
3. $\frac{ax}{m} - 1 - \frac{bx}{n} + c = 0$;
4. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + c$;
5. $c = a + \frac{a(a - x)}{a + x}$;
6. $\frac{mx - (c - x)n}{m(2x - c)} = 1$;
7. $\frac{a(dd + x)}{dx} = ac + \frac{a}{d}$;
8. $\frac{c}{a + bx} = \frac{h}{d + ex}$.

Auflösung. Es folgt aus:

1. $x = \frac{bm}{am - c}$;
2. $x = \frac{mnc}{a(an + bm)}$;
3. $x = \frac{mn(1 - c)}{an - bm} = \frac{mn(c - 1)}{bm - an}$;
4. $x = \frac{a + b + 1}{c}$;
5. $x = \frac{a(2a - c)}{c}$;
6. $x = c$;
7. $x = \frac{d}{c}$;
8. $x = \frac{cd - ah}{bh - ce} = \frac{ah - cd}{ce - bh}$.

Vierzehntes Buch.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren unbekannten Gröſsen.

159.

In allen Teilen der angewandten Mathematik und namentlich auch in allen Teilen der Naturwissenschaft, wo man nach Naturgesetzen forscht, kommen oftmals Fälle vor, wo mehrere unbekannte Gröſsen gesucht werden, deren Zusammenhang unter sich und mit den bekannten Gröſsen nicht durch eine, sondern durch mehrere zusammengehörige Gleichungen (Bedingungen) gegeben ist, aus welchen die unbekannten Gröſsen so bestimmt werden müssen, daſs sie allen Gleichungen zugleich Genüge leisten.

Seien z. E. folgende drei zusammengehörige Gleichungen gegeben, mit der Aufgabe, die Werte der darin vorkommenden unbekannten Gröſsen x, y, z so zu bestimmen, dass sie, substituiert, alle drei Bedingungen zugleich erfüllen:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x+5y-4z=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 7x-2y+3z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{array}\right\}$$

Diese drei Gleichungen kann man sich aus einer Aufgabe, z. B. aus folgender entstanden denken: Es werden drei Zahlen von der Beschaffenheit gesucht, daſs erstens: die Summe aller drei $=14$ ist; zweitens: das Zweifache der ersten, plus dem Fünffachen der zweiten, weniger dem Vierfachen der dritten soll $=1$ sein und drittens: das Siebenfache der ersten weniger dem Zweifachen der zweiten, plus dem Dreifachen der dritten soll $=25$ sein.

Diese drei zu erfüllenden Bedingungen sind, wenn die gesuchten Zahlen vorläufig mit x, y, z bezeichnet werden, durch obige drei Gleichungen dargestellt. Zugleich ist aus diesem Beispiel ersichtlich, daſs bei einem solchen System von Gleichungen x (ebenso y u. s. w.) in allen Gleichungen denselben Wert hat.

Um sich zuvor zu überzeugen, daſs die Werte, welche statt x, y, z gesetzt, wohl der einen oder der andern Gleichung Genüge leisten, deshalb aber noch nicht für alle passen, wollen wir einmal $x=5$, $y=3$, $z=6$ annehmen. Die Probe zeigt, daſs diese Werte wohl für die erste und auch für die zweite Gleichung passen, jedoch nicht die dritte Bedingung erfüllen und deshalb nicht die rechten sind.

Die Werte von x, y, z, welche alle Bedingungen erfüllen, durch Versuche finden zu wollen, würde nicht allein einen grofsen Zufall und Zeitverlust voraussetzen, sondern in vielen Fällen selbst unmöglich sein und man kommt deshalb auf den Gedanken: ob sich nicht ein allgemein anwendbares wissenschaftliches Verfahren erfinden läfst, nach welchem man aus mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit ebenso vielen unbekannten Gröfsen, diese immer mit Sicherheit bestimmen kann.

Solche sichere Methoden giebt es allerdings mehrere, von denen wir jedoch nur folgende drei, als die gewöhnlichsten, mitteilen wollen. Der Anfänger aber möge erst selbst versuchen, ob er eine solche Methode angeben kann.

160.

Erste Methode. *Elimination durch Substitution.* Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x + y + z = 14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 5y - 4z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$7x - 2y + 3z = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Wir schliefsen nun so: da jede der drei unbekannten Gröfsen (z. B. x) in allen drei Gleichungen einerlei Wert hat, und dieser aus jeder der drei Gleichungen gefunden werden könnte, wenn die beiden andern (y, z) erst bekannt wären, so können wir eine der (dazu bequemsten) Gleichungen auf die eine unbekannte Gröfse (x) reduzieren und den für x erhaltenen Gröfsen-Ausdruck in die beiden andern Gleichungen anstatt x setzen (substituieren), wodurch x aus diesen beiden Gleichungen herausgeworfen (eliminiert) wird. Hierdurch erhalten wir also aus drei Gleichungen mit drei unbekannten Gröfsen, x, y, z, zwei neue Gleichungen mit nur zwei unbekannten Gröfsen, y, z.

Nach demselben Verfahren, welches man Elimination durch Substitution nennt, kann man aus den beiden neuen von x befreiten (von x eliminierten) Gleichungen, indem man eine von ihnen wieder auf eine zweite unbekannte Gröfse, z. B. auf y, reduziert und den für y erhaltenen Gröfsen-Ausdruck statt y in die andere substituiert, wieder eine neue Gleichung bilden, welche nur noch eine unbekannte Gröfse, z, enthält; diese kann also berechnet werden, und durch Rückwärtssubstituieren findet man auch die beiden andern.

Aus der ersten Gleichung folgt nämlich:

$$x = 14 - y - z \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Setzen wir nun diesen für x erhaltenen Gröfsen-Ausdruck $14 - y - z$ in die beiden andern Gleichungen (2) und (3) statt x, so wird durch diese Stellvertretung daraus x eliminiert, nämlich:

$$2(14-y-z)+5y-4z=1$$
$$7(14-y-z)-2y+3z=25$$

oder, indem man die Klammern auflöst und gleichnamige Glieder zusammenzieht &c., einfacher:

$$\begin{array}{rcl} 3y-6z=-27 & \text{oder} & y-2z=-9\ldots.(4) \\ 9y+4z=73 & & 9y+4z=73\ldots..(5) \end{array}$$

Jetzt eine dieser beiden neuen Gleichungen, z. B. (4) auf y reduziert, kommt:

$$y=2z-9\ldots\ldots\ldots(4')$$

Diesen für y erhaltenen Ausdruck $2z-9$ statt y in (5) substituiert, kommt:

$$9(2z-9)+4z=73\ldots\ldots\ldots(6)$$

Diese sogenannte Endgleichung auf z reduziert, giebt:

$$22z=154$$
$$\text{also: } z=7$$

Substituieren wir nun rückwärts diesen für z gefundenen Wert in (4'), so ist $y=2\cdot7-9$ oder $y=5$. Endlich beide für z und y erhaltenen Werte in (1') substituiert, erhält man auch $x=14-5-7=2$. Es sind also:

$$x=2;\quad y=5;\quad z=7$$

die drei gesuchten Zahlen, welche die aufgestellten Bedingungen erfüllen.

161.

Es ist leicht einzusehen, dafs die eben gezeigte Auflösungsmethode auf jede beliebige Anzahl Gleichungen mit ebenso vielen unbekannten Gröfsen anwendbar ist. Hätte man z. B. sechs Gleichungen mit sechs unbekannten Gröfsen, x, y, z, t, v, w, so könnte man wieder eine derselben auf x reduzieren, den für x erhaltenen Ausdruck in die übrigen fünf Gleichungen substituieren, dann eine dieser fünf neuen von x befreiten Gleichungen wieder auf eine andere unbekannte Gröfse, y, reduzieren, und den für y erhaltenen Ausdruck in die übrigen vier Gleichungen substituieren u. s. f., bis man auf die Endgleichung kommt, welche nur noch eine unbekannte Gröfse enthält, und nachdem diese berechnet, findet man durch Rückwärtssubstituieren auch die übrigen. Auch wird dieses Verfahren nicht erschwert, sondern gerade umgekehrt erleichtert, wenn eine der unbekannten Gröfsen nicht in allen Gleichungen vorkommt. Alsdann wird es am bequemsten sein, diejenigen unbekannten Grössen, welche in den wenigsten Gleichungen enthalten sind, zuerst zu eliminieren. Seien z. E. die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$3x-2v=13\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2y+3v=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$5y-7z=25\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$3y-6z+5v=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Die erste Gleichung auf x reduziert, giebt:

$$x = \frac{13 + 2v}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Wäre nun auch in einer der drei übrigen Gleichungen die unbekannte Gröfse x enthalten, so würde man sie durch die Substitution des für dieselbe erhaltenen Ausdrucks (1') daraus eliminieren; da aber x in den übrigen nicht vorkommt, so fällt auch diese Arbeit weg. Man eliminiere also aus den drei übrigen Gleichungen die Gröfse z, weil diese nur in zwei Gleichungen vorkommt; die dritte Gleichung giebt:

$$z = \frac{5y - 25}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

Diesen für z erhaltenen Ausdruck in die beiden übrigen substituiert (hier also blofs in (4), weil die zweite Gleichung kein z enthält und nur wieder abgeschrieben wird), kommt:

$$3y - 6\frac{(5y - 25)}{7} + 5v = 0$$

oder ein wenig geordnet, den Nenner 7 fortgeschafft und die Klammer aufgelöst:

$$\begin{aligned} 21y - 30y + 150 + 35v &= 0 \\ -9y + 35v &= -150 \ldots\ldots (5) \\ \text{hiezu die zweite Gleichung: } 2y + 3v &= 1 \ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt:

$$y = \frac{1 - 3v}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

diesen für y erhaltenen Ausdruck in (5) substituiert, kommt die Endgleichung:

$$\begin{aligned} -9\left(\frac{1 - 3v}{2}\right) + 35v &= -150 \ldots\ldots\ldots (6) \\ \text{hieraus: } -9 + 27v + 70v &= -300 \\ 97v &= -291 \\ \text{mithin: } v &= -3 \end{aligned}$$

Den Wert von v in (2') substituiert, kommt: $y = \frac{1 - 3(-3)}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$; den von y in (3') und den von v in (1') substituiert, kommt:

$$z = \frac{5.5 - 25}{7} = 0; \quad x = \frac{13 + 2.-3}{3} = 2\tfrac{1}{3}$$

Die gesuchten Werte, welche die vier vorgeschriebenen Bedingungen zugleich erfüllen, sind also:

$$x = 2\tfrac{1}{3}; \quad y = 5; \quad z = 0; \quad v = -3.$$

162.

Zweite Methode. *Elimination durch Reduktion.* Die gegebenen Gleichungen seien wieder:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x+y+z=14 \\ (2) & 2x+5y-4z=1 \\ (3) & 7x-2y+3z=25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=14-y-z \ldots\ldots (1') \\ x=\dfrac{1-5y+4z}{2} \ldots\ldots (2') \\ x=\dfrac{25+2y-3z}{7} \ldots\ldots (3') \end{array}$$

Man reduziere, wie hier nebenstehend angedeutet, jede der gegebenen Gleichungen auf eine und dieselbe unbekannte Gröſse, x. Da nun x in allen Gleichungen denselben Wert hat, so müssen auch alle drei für x erhaltenen Ausdrücke (1′), (2′), (3′) notwendig einander gleich sein. Man kann sie also paarweise einander gleich setzen, den 1′sten dem 2′ten und den 1′sten dem 3′ten (oder auch den 2′ten dem 3′ten). Dadurch hat man also aus den drei gegebenen Gleichungen mit drei unbekannten Gröſsen, zwei neue Gleichungen, (4), (5), abgeleitet, welche nur noch zwei unbekannte enthalten, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} (4)\ 14-y-z=\dfrac{1-5y+4z}{2} \\ (5)\ 14-y-z=\dfrac{25+2y-3z}{7} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-9+2z \ldots (4') \\ y=\dfrac{73-4z}{9} \ldots (5') \end{array}$$

Jede dieser beiden neuen Gleichungen reduziere man wieder (wie nebenstehend angedeutet) auf eine andere unbekannte, y, und bilde aus den beiden für y erhaltenen und gleichwertigen Ausdrücken die Endgleichung, nämlich:

$$(6) \qquad -9+2z=\frac{73-4z}{9}$$

hieraus folgt $z=7$ und durch Rückwärtssubstituieren in (4′) und (1′), $y=5$ und $x=2$.

Hinsichtlich der allgemeinen Brauchbarkeit dieser Methode gelten offenbar dieselben Bemerkungen wie in § 162 und man kann z. B. auch nach dieser Methode die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen bestimmen: 1

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2v=13 \\ 2y+3v=1 \\ 5y-7z=25 \\ 5v+3y-6z=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x=\dfrac{13+2v}{3} \ldots\ldots (1) \\ y=\dfrac{1-3v}{2} \ldots\ldots (2) \\ z=\dfrac{5y-25}{7} \ldots\ldots (3) \\ z=\dfrac{3y+5v}{6} \ldots\ldots (4) \end{array}$$

Die beiden Ausdrücke von z geben:

$$\frac{5y-25}{7}=\frac{3y+5v}{6}; \text{ hieraus } y=\frac{150+35v}{9} \quad \ldots\ldots (5)$$

Die Ausdrücke für y aus (5) und (2) geben:

$$\frac{150+35v}{9}=\frac{1-3v}{2}; \text{ hieraus: } v=-3$$

den Wert von v in (1) und (2) substituiert, kommt $x=2\frac{1}{3}$, $y=5$; aus (3) folgt dann $z=0$.

163.

Dritte Methode. *Elimination durch Addition oder Subtraktion.* Diese Methode ist den beiden andern vorzuziehen, wenn entweder die Koefficienten derselben Unbekannten gleich sind, oder bequem gleich gemacht werden können. Sind die Koefficienten Buchstaben, so ist sie in der Regel vorzuziehen.

Da die Werte der unbekannten Gröfsen nicht verändert werden, wenn man alle Glieder einer Gleichung mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert, so kann man dadurch leicht bewirken, dafs die zu eliminierende Gröfse in zwei Gleichungen denselben Koefficienten bekommt. Ist dies aber der Fall, so braucht man offenbar nur die beiden Gleichungen von einander zu subtrahieren, wenn die gleichgemachten Koefficienten einerlei Vorzeichen haben; und zu einander zu addieren, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben; in dem einen oder andern Fall erhält man aus den beiden Gleichungen eine neue, welche die durch Addition oder Subtraktion eliminierte Gröfse nicht enthält. Ebenso kann man mit je zwei andern Gleichungen, in welchen die zu eliminierende Gröfse vorkommt, verfahren, und so aus n Gleichungen $n-1$ neue bilden, welche eine unbekannte Gröfse weniger haben. Dasselbe Verfahren auf die erhaltenen $n-1$ Gleichungen angewandt, giebt $n-2$ Gleichungen &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$x+y+z=14 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x+5y-4z=1 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$7x-2y+3z=25 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$-3y+6z=27 \quad \ldots\ldots (4)$$
$$9y+4z=73 \quad \ldots\ldots (5)$$
$$22z=154 \quad \ldots\ldots (6)$$

also: $z=7$; $y=5$; $x=2$.

Um aus den drei gegebenen Gleichungen die zwei neuen von x befreiten (4) und (5) zu erhalten, verbinde man durch Subtraktion die erste zuvor mit 2 multiplizierte Gleichung mit der zweiten, und dann wieder die erste zuvor mit 7 multiplizierte Gleichung mit der dritten. Diese leichten Rechnungen, welche wir hier noch andeuten wollen, lassen sich meistens leicht im Kopfe ausführen. Man hat nämlich die erste Gleichung mit 2 multipliziert:

$$\begin{array}{lr} & 2x + 2y + 2z = 28 \ldots\ldots\ldots\ldots (1') \\ \text{subtr.:*} & +2x + 5y - 4z = +1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ & - \quad - \quad + \qquad - \quad \\ \hline \text{kommt:} & -3y + 6z = 27 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

Die erste mit 7 multiplizierte Gleichung giebt:

$$\begin{array}{lr} & 7x + 7y + 7z = 98 \ldots\ldots\ldots\ldots (1'') \\ \text{subtr.:} & 7x - 2y + 3z = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ & - \quad + \quad - \qquad - \quad \\ \hline & 9y + 4z = 73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

Man hätte auch, statt aus der ersten und dritten, aus der zweiten und dritten Gleichung eine neue von x befreite ableiten können, indem man, um x in (2) und (3) gleiche Koefficienten zu geben, die zweite mit 7 und die dritte mit 2 multipliziert.

Um aus den beiden Gleichungen (4) und (5) eine neue von y befreite Gleichung zu erhalten, multipliziere man (damit y in beiden gleiche Koefficienten bekommt) die vierte (in Gedanken) mit 3 und addiere sie dann (weil die Vorzeichen verschieden sind) zur fünften, so fällt y heraus und man erhält die Endgleichung (6).

Man hat (4) mit 3 multipliziert:

$$\begin{array}{lr} & -9y + 18z = 81 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ \text{addiert} & 9y + 4z = 73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ \hline & 22z = 154 \end{array}$$

Aus dieser Endgleichung folgt $z = 7$ und diesen Wert von z in (5) oder (4) substituiert $y = 5$; die Werte von z und y in (1) gesetzt: $x = 2$.

Beispiel. Es seien die Werte von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2v = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2y + 3v = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 5y - 7z = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ 3y - 6z + 5v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}\right\}$$

Die unbekannte Gröfse x kommt nur in einer Gleichung vor und kann daher nicht eliminiert werden. Weil nun y und v in drei,

---

* Beim Subtrahieren mufs man den Subtrahend mit umgekehrtem Vorzeichen dem Minuend hinzufügen. Es ist nämlich (§ 88):

$$2x + 2y + 2z - (2x + 5y - 4z) = -3y + 6z.$$

z aber nur in zwei Gleichungen vorkommt, so ist es offenbar kürzer, erst z zu eliminieren. Man multipliziere also die dritte Gleichung mit 6 und die vierte mit 7, dadurch bekommt z in beiden Gleichungen gleiche Koefficienten ($6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42$) und weil diese einerlei Vorzeichen haben, so subtrahiere man sie von einander, so kommt:

$$9y - 35v = 150 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\text{hierzu: } 2y + 3v = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$97v = -291$$
$$v = -3$$

Den Wert von v in (2) und (1) substituiert &c., kommt:

$$x = 2\tfrac{1}{3};\quad y = 5;\quad z = 0;\quad v = -3.$$

164.

Aufgabe. Die Werte von x, y, z, v aus folgenden zusammengehörigen Gleichungen zu finden:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + v = 16 \ldots\ldots (1) \\ -x + y + 2z + 3v = 33 \ldots\ldots (2) \\ 2x + 5y + 5z - 6v = 0 \;\ldots\ldots (3) \\ 3x + 4y - z - 2v = -4 \ldots\ldots (4) \end{array}\right\}$$

Auflösung. Die Gleichungen (1) und (2) addiert, geben die fünfte; dann die zweite Gleichung mit 2 multipliziert und zur dritten addiert, kommt die sechste; die zweite wieder mit 3 multipliziert und zur vierten addiert, kommt die siebente neue Gleichung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} 2y + 3z + 4v = 49 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ 7y + 9z \qquad = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ 7y + 5z + 7v = 95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{array}\right\}$$

Weil hier v nur in zwei Gleichungen vorkommt, so multipliziere man (5) mit 7 und (7) mit 4 und subtrahiere, so kommt:

$$-14y + z = -37 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

hierzu (siehe die 6. Gleichung): $7y + 9z = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$

Jetzt die untere Gleichung mit 2 multipliziert und dann zu (8) addiert, kommt die Endgleichung:

$$19z = 95$$

also: $z = 5$; aus der 6. Gleichung $y = 3$; aus der 5. Gleichung $v = 7$ und aus der 1. Gleichung $x = 1$.

165.

Wenn eine Gleichung nur eine unbekannte Gröſse enthält, so kann man die dadurch völlig bestimmte Gröſse daraus berechnen. Weil nun, wie im Vorhergehenden gezeigt, aus n Gleichungen mit n unbekannten Gröſsen allemal eine Endgleichung abgeleitet werden kann, welche nur *eine* der unbekannten und mithin *bestimmten* Gröſsen enthält, und dann durch Rückwärtssubstituieren auch jede der übrigen unbekannten Gröſsen durch eine Gleichung bestimmt und bekannt wird, so ist einleuchtend, daſs die Werte von n unbekannten Gröſsen völlig bestimmt sind und immer gefunden werden können, wenn zu ihrer Bestimmung ebenso viele von einander *unabhängige* und sich nicht *widersprechende* Gleichungen gegeben sind. Aus diesem Grunde nennt man auch alle Aufgaben *bestimmte*, wenn sich aus den Bedingungen derselben gerade so viele von einander unabhängige Gleichungen bilden lassen, als sie unbekannte Gröſsen zu finden verlangen.

Anmerkung. Bei Anwendung der gezeigten Eliminationsmethoden muſs man immer *alle* Gleichungen berücksichtigen; denn hätte man z. B., statt wie in eben gelöster Aufgabe zu verfahren, die erste Gleichung mit der zweiten, die erste mit der dritten und dann die zweite wieder mit der dritten verbunden, mithin die vierte Gleichung ganz unberücksichtigt gelassen, so hätte man dadurch allerdings auch drei von x befreite Gleichungen erhalten, die dann aber weiter behandelt, auf eine *identische* Gleichung, d. h. auf eine solche führen müssen, die etwas schon Bekanntes sagt, nämlich: daſs jede Gröſse sich selbst gleich, oder das $0=0$ ist. Dieser Fall, wo man sich gleichsam im Kreise dreht, pflegt indessen bei verwickelten Untersuchungen selbst Geübteren zuzustoſsen.

166.

Wenn sich aber aus den Bedingungen einer Aufgabe *nicht* so viele Gleichungen bilden lassen, als unbekannte Gröſsen verlangt werden, so heiſst die Aufgabe eine *unbestimmte*, und zwar aus dem Grunde, weil man dann den Bedingungen der Aufgabe oder den daraus gebildeten Gleichungen, auf mehr als eine, oftmals unzählig verschiedene Weise Genüge leisten kann. In diesem Fall bleiben nämlich so viele unbekannte Gröſsen unbestimmt, und daher willkürlich anzunehmen, als Gleichungen zu wenig sind.

Würde z. E. die Aufgabe gestellt, zwei, vorläufig mit x und y zu bezeichnende Zahlen zu finden, deren Summe 12 ist, so läſst sich aus der Bedingung dieser Aufgabe nur eine einzige Gleichung bilden, nämlich:

$$x+y=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{woraus: } x=12-y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Man sieht also, dass eine der beiden Gröſsen, z. B. x, nicht eher gefunden werden kann, als bis die andere, y, bekannt ist. Da nun y durch keine Gleichung gegeben ist, so bleibt nichts übrig, als den Wert derselben willkürlich anzunehmen. Nimmt man z. B. $y=1$, so wird $x=11$; für $y=2$ ist $x=10$; $y=3$, $x=9$; $y=-2$, $x=14$; $y=\frac{1}{2}$, $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. und je zwei dieser Werte müssen der Gleichung (1) Genüge leisten.

Sucht man die Werte, welche folgenden zwei Gleichungen Genüge leisten

$$\left.\begin{array}{l} 4x-3y-4z=12 \ldots\ldots (1) \\ 4x+\ y-8v=48 \ldots\ldots (2) \end{array}\right\} \qquad x=\frac{12+3y+4z}{4} \ldots\ldots (1')$$

so kann man (die erste von der zweiten subtrahiert) daraus nur eine einzige Gleichung ableiten, in welcher zwei Gröſsen unbestimmt bleiben und beliebig angenommen werden müssen, nämlich:

$$4y-8v+4z=36$$

$$\text{woraus: } y=9+2v-z$$

Nimmt man z. B. $z=1$, $v=2$; so wird $y=12$ und $x=13$; für $z=1$, $v=1$ wird $y=10$ und $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. Je vier solcher zusammengehörigen Werte leisten den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge.

Die Theorie über die unbestimmten (sogenannten diophantischen) Aufgaben, welche mit der Theorie über Eigenschaften der Zahlen und andern, sehr tiefsinnigen Untersuchungen zusammenhängt, ist von einem sehr groſsen

Umfange und deshalb in eigenen Werken darüber zu studieren. *Gauss*, disquisitiones arithmeticae; *Euler; Fermat; Legendre*, théorie des nombres; Dirichlet etc. Wir müssen uns hier auf die bestimmten Aufgaben beschränken. Hierbei ist jedoch noch zu bemerken, daſs die Gleichungen voneinander unabhängig, d. h. so beschaffen sein müssen, daſs keine derselben durch arithmetische Operationen aus den übrigen abgeleitet werden kann. So sind z. E. die beiden Gleichungen:

$$x + y = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 2y = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

voneinander abhängig, weil die zweite aus der ersten (indem man die erste mit 2 multipliziert) abgeleitet werden kann. Beide Gleichungen (Bedingungen) bilden nur eine. Denn dieselben Werte, welche die Bedingung der ersten erfüllen, müssen notwendig auch, der Abhängigkeit wegen, die in der ersten Bedingung schon enthaltene zweite Bedingung erfüllen. Ebenso sind die drei folgenden Gleichungen voneinander abhängig:

$$2x - 3y = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$5x - 12y - 5z = 47 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$3x + 5z = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Die dritte Gleichung ist schon in den beiden ersten enthalten. Man kann sie daraus ableiten, wenn man die erste mit 4 multipliziert und dann die zweite subtrahiert. Die drei Gleichungen können also nur für zwei gerechnet werden, welche, da sie drei unbekannte Gröſsen enthalten, zu den unbestimmten Aufgaben gehören. — Die Abhängigkeit der Gleichungen liegt manchmal sehr versteckt, indessen entdeckt man sie, wenn auch nicht eher, doch immer am Ende der Rechnung durch die Endgleichung, welche dann mehr unbekannte Gröſsen enthält, als wenn die Gleichungen unabhängig wären.

Ferner ist klar, daſs, wenn eine Aufgabe bestimmt sein soll, die daraus gebildeten Gleichungen nichts Widersprechendes enthalten dürfen. So enthalten z. E. die beiden Gleichungen:

$$2x + 3y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 3y = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

einen Widerspruch, weil eine und dieselbe zweiteilige Gröſse $2x + 3y$ nicht zu gleicher Zeit 5 und auch 17 sein kann.

Schlieſslich bemerken wir noch, daſs es Fälle giebt, wo viel mehr Bedingungs-Gleichungen vorhanden sind, als unbekannte Gröſsen gesucht werden. Diese Fälle gehören aber, wenn auch gleich in praktischer Hinsicht zu einem der wichtigsten und nützlichsten, doch auch zu den schwierigsten Teilen der höheren Mathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate) und können also schon deshalb hier nicht weiter zur Sprache gebracht werden.

167.

Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 12 und deren Differenz 6 ist.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden unbekannten Zahlen mit x und y, so geben die Bedingungen der Aufgabe die beiden folgenden Gleichungen, welche zugleich stattfinden sollen:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y &= 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}\right\}$$

(1) und (2) addiert kommt: $2x = 18$, mithin $x = 9$

(2) von (1) subtr. kommt: $2y = 6$, mithin $y = 3$

Anmerkung. Die Aufgabe, aus der bekannten Summe und Differenz zweier unbekannten Gröfsen die Gröfsen selbst zu finden, kommt oft vor. Man merke sich, dafs die eine Gröfse dann immer gleich ist der halben bekannten Summe *plus* der halben Differenz und die andere = der halben Summe weniger der halben Differenz. Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes läfst sich im allgemeinen Zeichen leicht anschaulich machen. Bezeichnet man nämlich die bekannte Summe der beiden unbekannten Gröfsen x und y allgemein durch s, und die bekannte Differenz derselben allgemein mit d, so hat man:

$$x+y=s \ldots\ldots (1)$$
$$x-y=d \ldots\ldots (2)$$

(1) und (2) addiert, kommt: $2x=s+d$; mithin: $x=\frac{s+d}{2}$

(2) von (1) subtr., kommt: $2y=s-d$; also: $y=\frac{s-d}{2}$

168.

Aufgabe. Jemand hat zwei Haufen Markstücke. Legt er 10 Stück vom zweiten zum ersten, so enthält dieser gerade halb so viel, als noch im zweiten bleiben. Legt er aber 30 Stück vom ersten zum zweiten, so enthält der zweite gerade 6mal so viel, als noch im ersten bleiben. Wieviel sind in jedem?

Auflösung. Der erste enthalte x, der zweite y. Nimmt man 10 Stück vom zweiten zum ersten, so bleiben im zweiten $y-10$, und im ersten sind dann: $x+10$, und da der erste jetzt halb so viel enthalten soll, so hat man: $x+10=\frac{y-10}{2}$. Nimmt man 30 Stück vom ersten zum zweiten, so sind im ersten $x-30$, im zweiten $y+30$, und da nun der zweite 6mal so viel enthalten soll, so hat man $y+30=6(x-30)$. Um auf diese beiden Gleichungen die dritte Eliminationsmethode anzuwenden, mufs man sie erst ein wenig bequemer dazu einrichten, nämlich: die Klammer auflösen, die Nenner fortschaffen und sie dann so stellen, dafs gleichnamige Gröfsen auf einerlei Seite untereinander zu stehen kommen. Die beiden Gleichungen:

$$x+10=\frac{y-10}{2} \ldots\ldots (1)$$
$$y+30=6(x-30) \ldots\ldots (2)$$

stehen nämlich geordnet so:

$$2x-y=-30 \ldots\ldots (1')$$
$$6x-y=210 \ldots\ldots (2')$$

(1') von (2') subtrahiert, kommt:

$$4x=240, \text{ also: } x=60$$

(1') mit 3 multipliziert und dann von (2') subtrahiert, kommt:

$$2y=300, \text{ also: } y=150.$$

169.

Aufgabe. Es giebt einen Bruch, der sich, wenn man vom Zähler und Nenner 1 subtrahiert, in $\frac{1}{5}$, und wenn man zum Zähler und Nenner 4 addiert, in $\frac{2}{5}$ verwandelt; welcher ist's?

Auflösung. Sei x der Zähler und y der Nenner, mithin $\frac{x}{y}$ der unbekannte Bruch, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5} \qquad (1)$$

$$\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5} \qquad (2)$$

Reduziert man beide Gleichungen auf x, indem man zuvor durch Multiplikation die Nenner $y-1$ und $y+4$ fortschafft, so folgt:

$$\left.\begin{array}{ll}(1') & x-1=\frac{y-1}{5} \\ (2) & x+4=\frac{2y+8}{5}\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x=\frac{y-1}{5}+1 \\ x=\frac{2y+8}{5}-4 \end{array}$$

$$\frac{2y+8}{5}-4=\frac{y-1}{5}+1$$

hieraus: $y=16$

folglich: $x=4$

mithin der Bruch $\frac{x}{y}=\frac{4}{16}$

170.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren, A, B, C, gefüllt werden, und zwar in 10 Minuten, wenn nur A und B, in 30 Minuten, wenn B und C, und in 15 Minuten, wenn A und C zugleich geöffnet werden. Wieviel Zeit wird jede einzelne Röhre und wieviel werden alle, zugleich geöffnet, zur Füllung des Behälters nötig haben?

Auflösung. Man setze die Quantität des Wassers im Behälter $=1$ (z. B. 1 Oxhoft, 1 Tonne &c.). Da A und B dies in 10 Minuten geben, so geben sie in einer Minute $\frac{1}{10}$ desselben, ebenso geben B und C zusammen $\frac{1}{20}$ und A und C zusammen $\frac{1}{15}$ in einer Minute. Nennt man nun die Zeiten, welche A, B, C einzeln zur Füllung gebrauchen x, y und z Minuten, so giebt A in einer Minute den x. Teil, also $\frac{1}{x}$, ebenso B $\frac{1}{y}$ und C $\frac{1}{z}$; folglich A und B zusammen in einer Minute $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, B und C zusammen $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ und A und C zusammen $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$. Mithin ist:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \qquad (3)$$

Da hier die unbekannten Gröſsen *alle* als Nenner mit gleichen Zählern vorkommen, so ist es offenbar bequemer, statt die Gleichungen erst von diesen Nennern zu befreien, geradezu die Werte der Brüche $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, für welche man während der Rechnung auch andere einfachere Zeichen, wie etwa x', y', z', substituieren könnte, zu bestimmen, woraus dann durch bloſse Umkehrung der Brüche die Werte von x, y, z folgen. Man hat sogleich:

$$\text{(2) von (1) subtr.:}\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$\text{(3) und (4) addiert:}\quad 2 . \frac{1}{x} = \frac{7}{60}$$

$$\text{woraus:}\quad \frac{1}{x} = \frac{7}{120}$$

den Wert von $\frac{1}{x}$ in (1) und (4) substituiert, kommt:

$$\frac{1}{y} = \frac{5}{120}; \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{120}$$

$$\text{mithin ist:}\quad x = 17\tfrac{1}{7}; \quad y = 24; \quad z = 120.$$

Alle drei Röhren zugleich geöffnet geben also in einer Minute $\frac{7}{120} + \frac{5}{120} + \frac{1}{120} = \frac{13}{120}$, mithin brauchen sie zur Füllung des ganzen Fasses $1 : \frac{13}{120} = 9\frac{3}{13}$ Minuten.

Anmerkung. Noch schneller wäre man zum Ziele gekommen, wenn man die Gleichungen (1), (2) und (3) addiert hätte:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{13}{60}, \text{ durch 2 dividiert:}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{120} \dots (4')$$

Subtrahiert man hiervon Gleichung (1), so ergiebt sich z; subtrahiert man (2) von (4'), so ergiebt sich x u. s. w.

171.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch die beiden Röhren A und B in a Minuten, durch B und C in b Minuten, durch A und C in c Minuten gefüllt werden. Man sucht die Formeln, nach welchen man die Zeiten berechnen kann, welche jede einzelne, und alle Röhren zur Füllung nötig haben?

Auflösung. Seien x, y, z die Zeiten, welche jede einzelne Röhre gebraucht, so hat man:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\text{(2) von (1) subtr., kommt:}\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{(3)} + \text{(4) kommt:}\quad 2 . \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc - ac}{abc}$$

folglich: $\frac{1}{x} = \frac{ab+bc-ac}{2abc}$; $\frac{1}{y} = \frac{ac+bc-ab}{2abc}$; $\frac{1}{z} = \frac{ab+ac-bc}{2abc}$.

Mithin ist:

$$x = \frac{2abc}{ab+bc-ac}; \quad y = \frac{2abc}{ac+bc-ab}; \quad z = \frac{2abc}{ab+ac-bc}.$$

Die Zeit, welche alle drei Röhren zur Füllung gebrauchen, ist also:

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

oder wenn man in diesen Ausdruck die für $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ gefundenen Werte substituiert und gehörig reduziert:

$$= \frac{2abc}{ab+ac+bc}$$

172.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die Werte von x, y durch die Gröſsen a, b, c, m, n ausgedrückt, zu finden:

$$\frac{xy}{ax+by} = m \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{3xy}{cx-by} = n \ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Man reduziere beide Gleichungen auf x, indem man zuvor die Nenner fortschafft. Aus (1) folgt:

$$xy = amx + bmy$$
$$xy - amx = bmy$$
$$(y - am)x = bmy$$

also: $x = \frac{bmy}{y-am} \ldots\ldots\ldots (1')$

Aus (2) folgt:

$$3xy = cnx - bny$$
$$3xy - cnx = -bny$$
$$(3y - cn)x = -bny$$
$$x = \frac{-bny}{3y-cn}$$

Die beiden für x erhaltenen Gröſsen geben:

$$\frac{bmy}{y-am} = \frac{-bny}{3y-cn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Faktor by dividiert, kommt:

$$\frac{m}{y-am} = \frac{-n}{3y-cn}$$

mit dem allgemeinen Nenner $(y-am)(3y-cn)$ multipliziert, kommt:

$$3my - cmn = - ny + amn$$
$$3my + ny = amn + cmn$$
$$(3m + n)\,y = mn\,(a + c)$$
$$y = \frac{mn\,(a + c)}{3m + n}$$

Diesen Wert von y in (1′) substituiert, kommt:

$$x = \frac{bm \cdot \frac{mn\,(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn\,(a+c)}{3m+n} - am} = \frac{\frac{bmmn\,(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn\,(a+c)-(3m+n)am}{3m+n}}$$

$$x = \frac{bmmn\,(a+c)}{mn\,(a+c) - (3m+n)\,am} = \frac{bmn\,(a+c)}{an + cn - 3am - an}$$

Die gesuchten Werte von x und y sind also:

$$x = \frac{bmn\,(a+c)}{cn - 3am}$$
$$y = \frac{mn\,(a+c)}{n + 3m}$$

Anmerkung. Oft lassen sich derartige Gleichungen durch besondere Kunstgriffe weit einfacher lösen. Vorstehende (1) und (2) hätten z. B. zunächst umgekehrt werden können:

$$\frac{ax + by}{xy} = \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{cx - by}{3xy} = \frac{1}{n}.$$

Führt man die Division aus:

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = \frac{1}{m}; \qquad \frac{c}{3y} - \frac{b}{3x} = \frac{1}{n}.$$

Gedacht:

$$a \cdot \frac{1}{y} + b \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{m}; \qquad c \cdot \frac{1}{y} - b \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{n}.$$

Ferner $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ gesetzt:

$$av + bu = \frac{1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\text{und} \quad cv - bu = \frac{3}{n}.$$

Durch die Addition beider Gleichungen ergiebt sich:

$$(a + c)\,v = \frac{1}{m} + \frac{3}{n}; \text{ d. i.}$$

$$(a + c) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{3}{n}; \text{ mit } mny \text{ mult.:}$$

$$mn\,(a + c) = ny + 3my; \text{ folglich}$$

$$y = \frac{mn\,(a + c)}{n + 3m}.$$

Da nun v und y bekannt sind, so ergiebt sich aus der Gleichung A: u d. i. $\frac{1}{x}$ und mithin auch x selbst.

173.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die durch a, b, c, d, m, n bestimmten Werte von x und y zu finden:

$$ax + by = c \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$mx - ny = d \dots\dots\dots\dots (2)$$

Auflösung. Multipliziere (1) mit n und (2) mit b, und addiere dann die beiden Gleichungen, nämlich:

$$anx + bny = cn \dots\dots\dots\dots (1')$$
$$bmx - bny = bd \dots\dots\dots\dots (2')$$
$$(1') + (2'); \quad anx + bmx = cn + bd$$
$$(an + bm)\,x = cn + bd$$
$$\text{mithin:} \quad x = \frac{cn + bd}{an + bm}$$

Ferner, die Gleichung (1) mit m und (2) mit a multipliziert und dann subtrahiert, kommt:

$$bmy + any = cm - ad$$
$$\text{woraus:} \quad y = \frac{cm - ad}{an + bm}.$$

Fünfzehntes Buch.

Vorläufige Begriffe von den Potenzen und Wurzeln. Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

174.

Wenn eine Zahl mehrmals mit sich selbst multipliziert werden soll, so wird dies kurz dadurch angedeutet, daſs man die Zahl nur einmal hinschreibt und oben rechts und etwas kleiner geschrieben diejenige Zahl setzt, welche angiebt, wie oft die unter ihr stehende Grundzahl als Faktor zu setzen ist.

Soll z. E. die Zahl 7 fünfmal als Faktor gesetzt werden, so schreibt man statt $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ kürzer: 7^5. Hiernach bedeutet also 3^3 soviel als $3 \cdot 3 \cdot 3$; $a^4 = aaaa$. Allgemein: a^n daſs a $n$mal als Faktor zu setzen ist.

175.

Jeder solcher Ausdruck wie 7^5, 3^3, a^4, a^n &c., sowie auch jedes aus gleichen Faktoren entwickelte Produkt heiſst, in Beziehung auf die mehrmals als Faktor gesetzte Zahl, eine Potenz derselben. Die Zahl selbst hingegen heiſst die Basis oder Grundzahl der Potenz, und die Zahl, welche angiebt, wie oft die Wurzel als Faktor zu setzen ist, der Exponent der Potenz. In dem Ausdruck 2^3 ist also 2 die Basis, 3 der Exponent und 2^3 oder das wirklich berechnete Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ die Potenz. Man muſs also Exponenten wohl von Koefficienten unterscheiden. So ist z. B.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, \text{ aber } 3 \cdot a = a + a + a.$$

Anmerkung. Das Potenzieren ist also eine vereinfachte Multiplikation gleicher Faktoren, daher die 5. Spezies.

176.

Potenzen von verschiedenen Basen und Exponenten können, entwickelt, einerlei Gröſse geben. Es ist z. B. $2^6 = 8^2 = 4^3 = 64$; $3^4 = 9^2 = 81$. Man benennt daher die Potenzen nach ihrer Basis und dem Grade ihres Exponenten. So ist z. B. 64 die 6te Potenz von 2, die 2te Potenz von 8, die 3te Potenz von 4; ebenso ist 81 die 4te Potenz von 3, oder die 2te Potenz von 9 &c. Allgemein: a^n lies: a zur $n$ten Potenz, oder kurz: a zur $n$ten (oder a hoch n); 7^5 lies: 7 zur fünften (oder 7 hoch 5).

Die 2. Potenz einer Gröſse nennt man gewöhnlich das Quadrat, die 3. Potenz den Kubus derselben. Diese Ausdrücke sind der Geometrie entlehnt. Das Quadrat von a (die 2. Potenz von a) ist aa oder a^2; man liest letzteren Ausdruck: „a Quadrat“. Der Kubus von a (die 3. Potenz von a) ist aaa oder a^3, gelesen: „a zur 3ten“ oder „a Kubus“.

177.

Sucht man umgekehrt die Basis einer Potenz aus der Potenz und ihrem Exponent, so nennt man diese 6. Spezies: Radizieren oder Wurzelausziehen. Wäre z. B. in $7^3 = 343$ (es ist $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$) die Basis 7 aus 343 und 3 zu suchen, so schreibt man $\sqrt[3]{343} = 7$ und nennt 343 die Wurzelbasis, 3 (die Zahl, welche den Grad der Wurzel angiebt) den Wurzelexponent, $\sqrt[3]{343}$ oder die berechnete Zahl 7: Wurzel und liest jenen Ausdruck $\sqrt[3]{343}$: „3te Wurzel aus 343“. Ebenso folgt aus $2^6 = 64$: $\sqrt[6]{64} = 2$, gelesen; „6te Wurzel aus $64 = 2$“.

Das Zeichen $\sqrt{\ }$ ist aus dem r des Wortes *radix* (Wurzel) entstanden. Offenbar sind, wie aus der Entstehung folgt, Potenzieren und Radizieren entgegengesetzte Operationen und können daher auch zur gegenseitigen Probe dienen. So ist $\sqrt[6]{64} = 2$, weil die Wurzel 2 mit dem Wurzelexponent 6 potenziert die Wurzelbasis 64 giebt ($2^6 = 64$). Ebenso ist $\sqrt[4]{81} = 3$ richtig, weil $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

178.

Für die 2. Wurzel schreibt man nicht $\sqrt[2]{\ }$, sondern nur $\sqrt{\ }$, und liest dann dieses Zeichen (statt „2. Wurzel“): „Quadratwurzel“, oft auch nur Wurzel, wenn damit nur die 2. Wurzel gemeint sein kann. Statt $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[2]{25} = 5$, $\sqrt[2]{a}$ schreibt man daher $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{a}$ („Quadratwurzel aus a“).

Die 3. Wurzel wird auch „Kubikwurzel“ genannt. Z. B. $\sqrt[3]{1000} = 10$, gelesen: „Kubikwurzel aus $1000 = 10$“.

179.

Jede Potenz von 1 ist $= 1$. So ist z. B. $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1^4 = 1$; allgemein: $1^n = 1$.

Umgekehrt ist auch jede Wurzel aus $1 = 1$, z. B. $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[4]{1} = 1$. Allgemein: $\sqrt[n]{1} = 1$.

180.

1) Um einen Bruch zu potenzieren, mufs man sowohl Zähler als Nenner, jeden besonders, auf die verlangte Potenz erheben. So ist z. B.:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}; \qquad \text{denn } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}; \qquad \text{denn } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}; \qquad \text{denn } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}; \quad \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}; \qquad \left(1\tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\qquad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

2) Umgekehrt mufs auch die Wurzel aus einem Bruche aus Zähler und Nenner besonders gezogen werden. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \tfrac{2}{3}; \qquad \sqrt[3]{\tfrac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{2}{3};$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2}; \qquad \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}; \qquad \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2};$$

$$\sqrt{\tfrac{81}{16}} = \tfrac{9}{4}; \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

181.

Auf je höhere Potenzen man einen e c h t e n Bruch erhebt, je kleiner werden diese. So ist z. B. $(\tfrac{2}{3})^4 < (\tfrac{2}{3})^2$.

Umgekehrt aber, je höhere Wurzeln man aus einem echten Bruche zieht, je g r ö f s e r werden diese. So ist z. B.:

$$\sqrt[4]{\tfrac{16}{81}} = \tfrac{2}{3}, \quad \sqrt[2]{\tfrac{16}{81}} = \tfrac{4}{9}, \quad \text{also } \sqrt[4]{\tfrac{16}{81}} > \sqrt[2]{\tfrac{16}{81}}.$$

Hingegen ist leicht einzusehen, dafs die Potenzen von Zahlen > 1, immer gröfser, die höheren Wurzeln daraus immer kleiner werden. Ferner: dafs, weil jede Wurzel aus $1 = 1$ ist, jede Wurzel aus einer Zahl > 1 auch > 1 sein mufs; z. B. $\sqrt[100]{2} > 1$; $\sqrt[n]{2} > 1$.

*182.

Wenn man einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegeneinander sind, wie $\frac{4}{9}$ oder $\frac{9}{4}$ auf eine beliebige Potenz erhebt, so ist die Potenz wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ebenfalls Primzahlen gegeneinander sind, und der sich daher nicht weiter abkürzen läfst. (§ 319.)

Wie oft man also auch eine gemischte Zahl, wie $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{5}$, oder die dafür gesetzten Brüche $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{8}{5}$, &c. mit sich selbst multipliziert, nie kann die dadurch entstehende Potenz eine reine, ganze Zahl geben. Man hat z. B.:

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5\tfrac{1}{16}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64} = 11\tfrac{25}{64}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{6561}{256} = 25\tfrac{161}{256}$$

183.

Wenn also eine Wurzel aus einer ganzen Zahl keine reine, ganze Zahl ist, so ist sie auch keine gemischte Zahl und mithin gar nicht vorhanden. So ist z. B. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ und die Quadratwurzeln aus den zwischen 4 und 9 liegenden Zahlen müfsten also, wenn sie möglich wären, zwischen 2 und 3 fallen, mithin gemischte Zahlen sein. Nun kann aber nach vorhergehendem Paragraphen keine gemischte Zahl mit sich selbst multipliziert, eine reine ganze Zahl, wie 5, 6, 7, 8, geben. Folglich ist auch aus diesen Zahlen keine vollkommen genau durch ganze Zahlen (z. B. in Form von echten oder unechten gemeinen Brüchen) abgegrenzte Quadratwurzel möglich. Ferner, da $\sqrt[3]{8} = 2$ und $\sqrt[3]{27} = 3$ ist, so sind auch die Kubikwurzeln aus den zwischen 8 und 27 fallenden Zahlen unmöglich, weil sie sonst > 2 und < 3, folglich gemischte Zahlen sein müfsten, diese aber auf die dritte Potenz erhoben, keine ganze Zahl wiedergeben können.

184.

Alle solche nicht durch abgegrenzte Zahlen darstellbare Wurzeln, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \ldots$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3} \ldots$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3} \ldots$ &c. heifsen daher irrationale oder inkommensurabele Gröfsen, im Gegensatz der wenigen übrigen durch Zahlen darstellbaren Wurzeln, wie

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{49}{4}}$, $\sqrt[3]{8}$ &c., welche man rationale (kommensurabele) Gröſsen nennt. So ist z. B. $\sqrt{\frac{81}{16}}$ eine rationale Gröſse, indem sie mit der Bruch-Einheit $\frac{1}{4}$, welche gerade 9mal darin enthalten ist, völlig genau ausgemessen und mithin das Verhältniſs (ratio) derselben zur Einheit durch ganze Zahlen völlig genau dargestellt werden kann. Weil nämlich $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$, so verhält sich auch 1 zu $\sqrt{\frac{81}{16}}$, wie 1 zu $\frac{9}{4}$.

185.

Obgleich nun die irrationalen Gröſsen, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$ &c. sich mit keinem Teil der Einheit, theoretisch genommen, völlig genau ausmessen lassen, so kann man doch mit Hilfe der Decimalbrüche einen so groſsen Teil davon ausmessen, als für die Praxis nur immer erforderlich ist, oder daſs der an der wahren Wurzel noch fehlende Teil für die Sinne verschwindet. Multipliziert man z. B. die um kein zehn Milliontel verschiedenen Gröſsen, 2,44949 und 2,44948999··· mit sich selbst, so kommt:

$$(2{,}44949)^2 = 6{,}000001\cdots$$
$$(2{,}44948999)^2 = 5{,}9999999\cdots$$

Das erste Quadrat ist um kein Milliontel, das zweite um noch viel weniger, von der Zahl 6 verschieden. Und wenn nun auch, streng genommen, keine Zahl möglich ist, die mit sich selbst multipliziert, genau die Zahl 6 gäbe, so kann man doch in der Praxis die Zahl 2,44949 oder genauer 2,449489··· als die Quadratwurzel aus 6 betrachten. Selten wird man mehr Decimalen, deren man übrigens nach § 192 leicht beliebig viele finden kann, nötig haben. Es ist also näherungsweise

$$\sqrt{6} = 2{,}4495, \text{ oder genauer: } \sqrt{6} = 2{,}4494899\cdots$$

Wie man übrigens mit Hilfe der Logarithmen diese Decimalen findet, und überhaupt jede beliebige Potenz von einer Gröſse bildet, und umgekehrt, jede Wurzel beliebigen Grades ungemein leicht daraus ziehen kann, kann erst im 20. Buche gezeigt werden. Hier müssen wir zuerst das sehr umständliche Verfahren mitteilen, nach welchem man aus einer vorgegebenen Zahl die Quadrat- und Kubikwurzel ziehen kann. Und wenn auch der, der es bis zum 21. Buche bringt, wegen der dort gezeigten, viel bequemern Methode, von diesem Verfahren nur in Ermangelung von Logarithmentafeln Gebrauch machen wird, so ist es doch erforderlich, sich wenigstens mit der Ausziehung der Quadratwurzel bekannt zu machen. Zuvor merke man sich deshalb folgende vier Hilfssätze.

186.

Wenn man eine aus zwei Teilen bestehende Gröſse, wovon der erste allgemein a, der zweite b, und also die zweiteilige Gröſse selbst $a+b$ heifsen mag, ins Quadrat erhebt, so enthält das daraus entstehende Quadrat, wie nebenstehende Multiplikation lehrt, drei Teile, nämlich: das Quadrat des ersten Teils, das doppelte Produkt aus dem ersten und zweiten Teil und das Quadrat des zweiten Teils.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \end{array}$$

Diese kleine Formel, so wie sie hier in Worten und Zeichen ausgesprochen ist, mufs man im Gedächtnis behalten, um danach das Quadrat einer jeden andern zweiteiligen Gröfse, ohne es, wie oben, durch wirkliche Multiplikation zu suchen, gleich aus dem Gedächtnisse niederschreiben zu können; z. B.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2; \qquad (70+6)^2 = 4900 + 840 + 36.$$

187.

Um eine Zahl, welche auf Nullen endigt, auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur die Einheiten enthaltenden Ziffern auf die verlangte Potenz zu bringen und derselben die Anzahl Nullen so viel mal anzuhängen, als der Exponent Einheiten hat. So ist z. B.:

$$800^2 = 640000; \quad 200^3 = 8000000; \quad 1000^2 = 1000000.$$

188.

Das Quadrat einer jeden beliebig vielziffrigen Zahl (Basis) mufs entweder zweimal soviel Ziffern haben, als die Basis, oder zweimal soviel, weniger eine Ziffer. Das Quadrat einer jeden fünfziffrigen Zahl, z. B. von 33592, mufs entweder $2 \cdot 5 = 10$ Ziffern, oder $2 \cdot 5 - 1 = 9$ Ziffern haben, denn es fällt zwischen die Quadrate der beiden kleinsten fünf- und sechsziffrigen Zahlen 10000 und 100000. Nun wird aber das Quadrat der kleinsten fünfziffrigen Zahl (10000^2) mit ein- und zweimal vier Nullen, also mit 9 Ziffern, und das Quadrat von der kleinsten sechsziffrigen Zahl (100000^2) mit ein- und zweimal 5 Nullen, also mit 11 Ziffern, geschrieben.

Die Quadrate aller einziffrigen Zahlen und umgekehrt die rationalen Wurzeln aus allen ein- und zweiziffrigen Zahlen liegen im Einmaleins und können daher als bekannt vorausgesetzt werden.

189.

Wenn eine vollkommene Quadratzahl, rückwärts durchlaufen, in Klassen von je zwei Ziffern geteilt wird (die erste, links stehende Klasse kann aber auch nur eine Ziffer bekommen), so mufs die Quadratwurzel aus dieser Zahl genau so viele Ziffern haben, als

Klassen vorhanden sind, und die erste Ziffer der Wurzel mufs die gröfstmöglichste einziffrige Wurzel aus der ersten Klasse sein. Die Quadratwurzel aus 80945678 z. B. mufs vier Ziffern haben, und die erste mufs 8 sein. Denn diese Zahl giebt eingeteilt vier Klassen und 8 ist die gröfstmöglichste Wurzel aus 80:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 81 & 00 & 00 & 00 = 9000^2 \\ 80 & 94 & 56 & 78 = (8xyz)^2 \quad (\S\ 187) \\ 64 & 00 & 00 & 00 = 8000^2 \end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 80945678 fällt also zwischen 8000 und 9000; indem 8000 zu klein und 9000 zu grofs ist. Um nun aber auch die folgenden zweite, dritte und vierte hier durch x, y, z angedeuteten Ziffern nach bestimmten Regeln finden zu können, müssen wir erst das Gesetz aufsuchen, nach welchem sich das Quadrat von einer gegebenen Basis bildet, und namentlich darauf achten, wie die erste Ziffer und die zweite, die beiden ersten und die dritte, die drei ersten und die vierte &c. dazu beitragen, um dann rückwärts aus den bekannten anfänglichen Ziffern der Basis die folgende unbekannte ableiten zu können.

190.

Erhebt man beliebige zwei-, drei-, vierziffrige Basen, z. B. 76, 764, 7643, ins Quadrat, indem man der gröfsern Anschauung wegen die letzte Ziffer von den übrigen trennt, mithin die Basen als zweiteilige Gröfsen ausdrückt, nämlich:

$$76^2 = (70 + 6)^2; \quad 764^2 = (760 + 4)^2; \quad 7643^2 = (7640 + 3)^2$$

Entwickeln wir die Quadrate nach der Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und stellen dann die drei Teile derselben, wie bei No. 1, 2, 3 geordnet, untereinander, so lehrt die Anschauung: dafs, wenn die Basis zwei Ziffern hat (No. 1), das Quadrat der ersten Ziffer ganz in der ersten Klasse liegt, das doppelte Produkt aus der ersten und zweiten Ziffer sich bis in die erste Ziffer der zweiten Klasse erstreckt und das Quadrat der zweiten Ziffer ganz in der zweiten Klasse liegt. Ferner, dafs (No. 2) das Quadrat der beiden ersten Ziffern der Basis in die beiden ersten Klassen fällt, das doppelte Produkt derselben mit der dritten multipliziert, sich bis in die erste Ziffer der dritten Klasse erstreckt und das Quadrat der dritten Ziffer in der dritten Klasse liegt &c. Kurz: dafs die n ersten Klassen einer Zahl kein gröfseres Quadrat enthalten können, als das von den n ersten Ziffern der Basis, und mithin auch umgekehrt, die gröfstmöglichste Quadratwurzel aus den n ersten Klassen gezogen, die n ersten Ziffern der gesuchten Wurzel sind.

No. 1.		No. 2.		No. 3.	
$(\overset{a}{70} + \overset{b}{6})^2$		$(\overset{a}{760} + \overset{b}{4})^2$		$(\overset{a}{7640} + \overset{b}{3})^2$	
$a^2 = 49$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 5776$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 583696$	$\dot{0}\dot{0}$
$2ab = 8$	$4\dot{0}$	$2ab = 60$	$8\dot{0}$	$2ab = 458$	$4\dot{0}$
$b^2 =$	36	$b^2 =$	16	$b^2 =$	9
$76^2 = 5\dot{7}$	76	$764^2 = 58\|36$	96	$7643^2 = 58\|41\|54$	49

191.

Aus dem vorstehenden Paragraph fließen nun folgende Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\begin{array}{rl} \text{No. 1)} \quad \sqrt{57|76} = & \overset{a\,b}{76}: \\ a^2 = 49 & :: \\ 2a = 14)\; \overline{87} & : \\ 2a \cdot b = 84 & : \\ \overline{36} & \\ b^2 = 36 & \end{array}$$

1) Man teile die Zahl, aus welcher eine Quadratwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke in Klassen von je zwei Ziffern; setze als erste Ziffer (a) der Wurzel, die größtmöglichste (einziffrige) Wurzel aus der ersten Klasse und subtrahiere deren Quadrat. In No. 1 und No. 2 ist die Wurzel aus der 1. Klasse: 7, daher wird $7^2 = 49$ subtrahiert.

$$\begin{array}{rl} \text{No. 2)} \quad \sqrt{58|36|96} = & \overset{\overset{a}{\frown}}{\overset{a\,b\,b}{764}} \\ a^2 = 49 & :::: \\ 2a = 14)\; \overline{93} & ::: \\ 2a \cdot b = 84 & ::: \\ \overline{96} & :: \\ b^2 = 36 & :: \\ 2a = 152)\; \overline{609} & : \\ 2a \cdot b = 608 & : \\ \overline{16} & \\ b^2 = 16 & \end{array}$$

2) Zu dem bleibenden Reste setze die erste Ziffer der folgenden Klasse, dividiere hierin mit dem Doppelten der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel ($2a$), setze den Quotienten (b) als zweite Ziffer derselben und multipliziere mit ihm das Doppelte der ersten und subtrahiere das Produkt ($2ab$).

3) Zu dem Reste setze die zweite Ziffer der zweiten Klasse und subtrahiere das Quadrat der zweiten Ziffer der Wurzel (b^2).

Sind nun noch mehrere Klassen vorhanden, so braucht man nur die vorhergehenden Regeln 2. und 3. zu wiederholen, nämlich:

4) Setze zu dem etwa bleibenden Reste die erste Ziffer der dritten Klasse, dividiere hierin mit dem Doppelten der beiden gefundenen ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den bekannt

gewordenen ersten Teil a derselben ansieht), so ist der Quotient die dritte Ziffer der Wurzel, mit welcher man wie vorhin mit der zweiten verfährt, und so weiter bis zur letzten Klasse.

Um eine folgende Ziffer in der Wurzel zu finden, mufs man immer mit dem Doppelten der vorhergehenden dividieren, hier kann man aber den Quotienten leicht zu grofs annehmen, so dafs dessen Quadrat nicht subtrahiert werden kann. Dieser Irrtum entdeckt sich aber eher, als wenn man den Quotienten zu klein angenommen hat.

Multipliziert man die gefundene Quadrat-Wurzel mit sich selbst, so mufs, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, die Zahl, aus welcher sie gezogen worden, wieder kommen.

Anmerkung. Die vorhergehenden Regeln lassen sich auch ohne Hilfe der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ leicht behalten und ausüben. Die Operation selbst kann aber noch verkürzt werden, so dafs man beinahe nur halb so viele Zahlen zu schreiben braucht, wenn man, statt der ersten Ziffer einer folgenden Klasse, gleich alle beide Ziffern zu dem jedesmaligen Reste setzt, dann bis in die, durch ein Komma bezeichnete erste Ziffer dividiert, den Quotienten gleich mit sich selbst und mit dem Divisor multipliziert und beide Produkte auf einmal subtrahiert &c., wie folgende Beispiele zeigen.

$$\begin{array}{rl} & \qquad\quad a\,b \\ & \sqrt{57|76} = 76; \\ a^2 = & 49 \\ 2a,b = & \overline{14,6 \quad 87,6}\,(87:14=7) \\ 2ab+b^2 = & 87\,6\,(=146\cdot 6) \end{array}$$

kürzer:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{58|36|96} = 764 \\ & 49 \\ 14,6) & \overline{93,6}\,(93:14=6) \\ & 87\,6\,(=146\cdot 6) \\ 152,4) & \overline{6\,09,6}\,(609:152=4) \\ & 6\,09\,6\,(=1524\cdot 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{58|41|54|49} = 7643; \\ & 49 \\ 14,6) & \overline{94,1}\,(94:14=6) \\ & 87\,6\,(=146\cdot 6) \\ 152,4) & \overline{6\,55,4}\,(655:152=4) \\ & 6\,09\,6\,(=1524\cdot 4) \\ 1528,3) & \overline{45\,84,9}\,(4584:1528=3) \\ & 45\,84\,9\,(=15283\cdot 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{4|03|20|64} = 2008 \\ & 4 \\ 400,8) & \overline{32,06,4} \\ & 32\,06\,4 \end{array}$$

$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{400} = 20$$
$$\sqrt{10000} = 100$$

192.

Um die Regel zu finden, nach welcher man eine irrationale Wurzel, z. B. $\sqrt{6}$, bis zu beliebig vielen Decimalen genau bestimmen kann, beachte man erst Folgendes. Es ist $6 = \frac{600}{100} = \frac{60000}{10000}$ &c., also (§ 180):

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{600}{100}} = \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{600}}{10} = \tfrac{24}{10} = 2{,}4$$

Die Wurzel aus 600 ist nämlich in ganzen Zahlen $= 24$, daher bis auf Zehntel genau: $\sqrt{6} = 2{,}4\ldots$	$\sqrt{6\vert 00} = 24$
	4
	4,4) 20,0 (20 : 4 = 4)
	17 6 (= 44 . 4)

Ferner:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{60000}{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{100}$$

Nun ist in ganzen Zahlen: $\sqrt{60000} = 244$, daher bis auf Hundertel genau: $\sqrt{6} = \frac{244}{100} = 2{,}44\ldots$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich, wie man die Wurzel aus einer unvollkommenen Quadratzahl näherungsweise bis auf so viele Decimalstellen als man will, finden kann.

Man ziehe nämlich aus der vorgegebenen Zahl die Wurzel erst in ganzen Einheiten und setze danach das Decimalzeichen, hänge hierauf dem Reste zwei Nullen an und verfahre wie vorhin, indem man die beiden Nullen als die folgende Klasse betrachtet, so findet man die Zehntel; dem jetzt bleibenden Reste abermals zwei Nullen angehängt, findet man auch die Hundertel der Wurzel &c. So findet man z. B. $\sqrt{283} = 16{,}8226\ldots$

$\sqrt{2\vert 83} = 16{,}8226\ldots$	$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
1	1
2,6) 18,3 (18 : 2 = 6, 7 zu viel!)	2,4) 100 (10 : 2 = 4)
15,6 (= 26 · 6)	96 (24 · 4)
32,8) 2 70,0 (270 : 32 = 8)	28,1) 40,0 (40 : 28 = 1)
2 62 4 (= 328 · 8)	28 1 (= 281 · 1)
336,2) 7 60,0 (760 : 336 = 2)	282,4) 11 900
6 72 4 (= 3362 . 2)	11 296
3364,2) 87 60,0 (8760 : 3364 = 2)	2828,2) 60400
67 28 4 (= 33642 · 2)	56564
33644,6) 20 31 60,0	28284,1) 38360,0
20 18 67 6	28284 1
12 92 40,0	10075 90,0
&c.	&c.

193.

Ist aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Quadratwurzel zu ziehen, so zieht man die Wurzel erst aus der ganzen Zahl und hängt den bleibenden Resten, statt wie vorhin zwei Nullen, immer zwei der folgenden Decimalen an. So findet man z. B. $\sqrt{312{,}506} = 17{,}677\ldots$

Ebenso findet man die Wurzel aus einem bloſsen Decimalbruch, z. B. $\sqrt{0{,}00465} = 0{,}068\ldots$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{3|12,|50|60} = 17,677\ldots \\
 & 1 \\
2,7) & 212 \\
 & 189 \\
34,6) & 235,0 \\
 & 207\,6 \\
352,7) & 27\,46,0 \\
 & 24\,68\,9 \\
3534,7) & 2\,77\,10,0 \\
 & 2\,47\,42\,9 \\
 & 29\,67\,10,0 \\
 & \&c.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{0,00|46|50} = 0,06819\ldots \\
 & 36 \\
12,8) & 105,0 \\
 & 102\,4 \\
136,1) & 2\,60,0 \\
 & 1\,36\,1 \\
1362,9) & 1\,23\,90,0 \\
 & 1\,22\,66\,1 \\
 & \&c.
\end{array}$$

Es ist nämlich:

$$\sqrt{0,00465} = \sqrt{\tfrac{4650}{1000000}} = \frac{\sqrt{4650}}{1000} = \frac{68}{1000} = 0,068.$$

194.

Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, ist es am bequemsten, entweder den Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder erst Zähler und Nenner mit dem Nenner zu multiplizieren, damit die Wurzel aus dem Nenner rational wird und man nur eine Wurzel, aus dem Zähler nämlich, zu ziehen braucht. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{0,428571} = 0,654\ldots$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{\tfrac{3\,.\,7}{7\,.\,7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,582\ldots}{7} = 0,654\ldots$$

Ebenso ist:

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{2,3750} = 1,541$$

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{\tfrac{19}{8}} = \sqrt{\tfrac{38}{16}} = \frac{\sqrt{38}}{4} = \frac{6,164\ldots}{4} = 1,541\ldots$$

Zur Übung im numerischen Rechnen ziehe man folgende Wurzeln aus:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{76807696} = 8764 & \sqrt{25\tfrac{5}{7}} = 5,07092.. \\
\sqrt{1129969} = 1063 & \sqrt{\tfrac{3}{5}} = 0,77459.. \\
\sqrt{3} = 1,73205.. & \sqrt{13\tfrac{4}{5}} = 3,71483.. \\
\sqrt{5} = 2,23606.. & \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0,86602.. \\
\sqrt{8} = 2,82842.. & \sqrt{\tfrac{7}{25}} = 0,52915.. \\
\sqrt{10} = 3,16227.. & \sqrt{0,0004} = 0,02 \\
\sqrt{25,0400057} = 5,00399.. &
\end{array}$$

195.

Ausziehung der Kubikwurzel. Mit der Ausziehung der Wurzeln von höheren Graden nach der älteren, eben gezeigten Methode, nehmen die praktischen Schwierigkeiten in ungemein gröfserem Mafse zu. Schon die Ausziehung der Kubikwurzel ist so unerträglich mühsam und zeitraubend, dafs jeder, der nicht das grofse Einmaleins weifs und eine aufserordentliche Sicherheit und Fertigkeit im Rechnen hat, sich gewifs mit der blofsen Theorie begnügen, und dafür mit den beiden folgenden Kapiteln vertraut machen wird. Übrigens hat die Theorie über die Ausziehung der Kubikwurzeln, sowie auch die aller höheren Grade, nicht die geringste Schwierigkeit, indem sie der vorhergehenden über die Ausziehung der Quadratwurzel durchaus ähnlich ist. Man merke sich also zunächst folgende Sätze:

196.

Der Kubus einer jeden Zahl (Basis) mufs entweder 3mal soviel Ziffern haben als die Basis, oder 3mal soviel, weniger eine, oder 3mal soviel, weniger 2 Ziffern. Der Kubus von einer vierziffrigen Zahl, 4356 z. B. hat entweder 12, 11 oder 10 Ziffern, denn er mufs zwischen die Kuben der beiden nächsten einfachen, Rangzahlen 1000 und 10000 fallen, wovon die eine ebensoviel, die andere aber eine Ziffer mehr hat, als die gegebene Basis. Nun hat aber (§ 187) der Kubus von 1000 gerade 10 und der Kubus von 10000 gerade 13 Ziffern.

Der Kubus einer jeden einziffrigen, und umgekehrt, die Kubikwurzel aus jeder vollkommenen ein-, zwei- und dreiziffrigen Kubikzahl ist mit Hilfe der folgenden Tabelle, oder auch leicht im Kopfe zu berechnen, und mithin als bekannt vorauszusetzen.

Wurzelbasis	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Kubikwurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9

197.

Wenn man also eine vollkommene Kubikzahl rückwärts in Klassen von je drei Ziffern teilt (die höchste kann auch nur eine oder zwei enthalten), so mufs die Kubikwurzel daraus gerade so viel Ziffern haben, als Klassen vorhanden sind, und die erste Ziffer mufs die möglichst gröfste (einziffrige) Kubikwurzel aus der ersten Klasse sein. Die Kubikwurzel aus 635478923 z. B. mufs 3 Ziffern haben, und 8 mufs die erste sein; denn die Zahl giebt eingeteilt 3 Klassen und der Kubus von 8, nämlich $8^3 = 512$ ist der möglichst gröfste, welcher sich von der ersten Klasse (635) subtrahieren läfst.

$$\begin{array}{l} 512|000|000 = 800^3 \\ 635|478|923 = (8xy)^3 \quad (\S\ 187) \\ 729|000|000 = 900^3 \end{array}$$

Die Kubikwurzel aus 635478923 mufs also zwischen 800 und 900 liegen. Um nun auch die allgemeinen Regeln zu finden, nach welchen man die folgenden Ziffern x, y bestimmt, müssen wir erst das Gesetz entwickeln, nach welchem bei der Bildung eines Kubus die Ziffern der Wurzeln dazu beitragen.

198.

Erhebt man eine zweiteilige Gröfse, $a+b$, zum Kubus, indem man das Quadrat nochmals mit der Basis multipliziert; so kommt, wie nachstehende Multiplikation zeigt:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \quad\quad \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Diese Formel, welche man im Gedächtnis behalten mufs, um darnach den Kubus einer jeden andern zweiteiligen Gröfse, ohne ihn durch wirkliche Multiplikation entwickeln zu brauchen, gleich niederschreiben zu können, lautet in Worten: der Kubus einer jeden zweiteiligen Gröfse enthält folgende vier Teile: den Kubus des ersten Teils, das dreifache Produkt aus dem Quadrate des ersten Teils mit dem zweiten multipliziert, das dreifache Produkt aus dem ersten Teil mit dem Quadrate des zweiten multipliziert und den Kubus des zweiten Teils. Erheben wir nach dieser Formel beliebig vielziffrige Zahlen zum Kubus, indem wir, um den Einflufs der Ziffern aufeinander leichter zu erkennen, die Zahlen erst in zwei solche Teile zerlegen, dafs die Einer den zweiten Teil bilden, und also die vorhergehenden Ziffern, um ihren Rang zu behalten, auf eine Null endigen, und schreiben dann die vier Teile der entwickelten Kuben wie folgt untereinander:

No. 1.

$$74^3 = (\overset{a}{70} + \overset{b}{4})^3 = \left\{\begin{array}{rr|l} & & \ldots \\ 70^3 = & 343 & 000 = a^3 \\ 3 \cdot 70^2 \cdot 4 = & 58 & 800 = 3a^2b \\ 3 \cdot 70 \cdot 4^2 = & 3 & 360 = 3ab^2 \\ 4^3 = & & 64 = b^3 \\ \hline 74^3 = & 405 & 224 \end{array}\right.$$

No. 2.

$$748^3 = (\overset{a}{740} + \overset{b}{8})^3 = \left\{\begin{array}{rr|r|l} & & & \ldots \\ 740^3 = & 405 & 224 & 000 = a^3 \\ 3 \cdot 740^2 \cdot 8 = & 13 & 142 & 400 = 3a^2b \\ 3 \cdot 740 \cdot 8^2 = & & 142 & 080 = 3ab^2 \\ 8^3 = & & & 512 = b^3 \\ \hline 748^3 = & 418 & 508 & 992 \end{array}\right.$$

so wird man bei No. 1 folgendes Gesetz erkennen: der Kubus der ersten Ziffer liegt ganz in der ersten Klasse, das dreifache Produkt aus dem Quadrate der ersten Ziffer mit der 2ten multipliziert, erstreckt sich nur bis in die erste Ziffer der 2ten Klasse, das dreifache Produkt der ersten Ziffer mit dem Quadrate der 2ten multipliziert, erstreckt sich bis in die 2te Ziffer der 2ten Klasse, und der Kubus der 2ten Ziffer liegt ganz in der 2ten Klasse.

Ferner ist hiernach und nach § 187 leicht allgemein zu schliefsen: dafs, wenn eine Kubikzahl mehr als zwei Klassen hat, die erste Klasse (zwei, drei, vier ersten Klassen &c.) keinen gröfsern Kubus enthalten kann, als den von der ersten (zwei, drei, vier ersten &c.) Ziffer der Wurzel, und dafs das dreifache Produkt aus dem Quadrate der ersten (zwei, drei, vier.. ersten) Ziffer mit der folgenden multipliziert, sich bis in die erste Ziffer der 2ten (3ten, 4ten, 5ten) Klasse erstrecken mufs &c. Umgekehrt kann man also durch unmittelbare Wiederholung einer und derselben, durch die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gegebenen Regel, die Kubikwurzel aus jeder Zahl von noch so vielen Klassen finden.

199.

Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzel. 1) Man teile die gegebene Zahl, aus welcher eine Kubikwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke, in Klassen von je drei Ziffern (die erste kann aber auch zwei oder nur eine enthalten).

2) Setze als erste Ziffer der Kubikwurzel diejenige (einzifferige) Kubikwurzel, welche aus der ersten Klasse in ganzen Einheiten möglich ist, und subtrahiere diesen Kubus.

3) Setze zu dem etwaigen Reste die erste Ziffer der 2ten Klasse, dividiere hierin mit dem dreifachen Quadrate der ersten Ziffer der Wurzel, setze den Quotienten als 2te Ziffer derselben und subtrahiere das mit ihr multiplizierte dreifache Quadrat der ersten Ziffer. (Den erwähnten Quotienten, als die gesuchte folgende Ziffer der Wurzel, kann man leicht zu grofs annehmen, ein Irrtum, der sich aber weit eher entdeckt, als wenn man den Quotienten zu klein annimmt.)

4) Zu dem Reste füge jetzt die 2te Ziffer der 2ten Klasse und subtrahiere hiervon das dreifache Produkt der ersten Ziffer mit dem Quadrate der bekannt gewordenen 2ten Ziffer multipliziert.

5) Zu dem jetzt gebliebenen Reste füge die dritte Ziffer der 2ten Klasse und subtrahiere hiervon den Kubus der bekannt gewordenen 2ten Ziffer.

Sind mehr als zwei Klassen vorhanden, so mufs man die vorhergehenden Regeln 3, 4 und 5 wiederholen, nämlich: zu dem gebliebenen Reste die erste Ziffer der 3ten Klasse setzen, hierin mit dem dreifachen Quadrate der beiden ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den gefundenen ersten Teil (a) derselben ansieht) dividieren, den Quotienten als die dritte Ziffer der Wurzel setzen, und damit wie vorhin bei 3, 4, 5 verfahren.

Man sieht leicht, daſs die Arbeit mit jeder neuen Ziffer der Wurzel immer beschwerlicher wird, indem man jedesmal alle vorhergehenden quadrieren, sowie überhaupt immer gröſser werdende Produkte entwickeln muſs. Beispiele:

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt[3]{405|224} = \overset{a\,b}{74} \\
a^3 = 7^3 = & 343 : : : \\
3a^2 = 3 \cdot 7^2 = 147) & 622 : : \\
3a^2b = 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = & 588 : : \\
 & 342 : \\
3ab^2 = 3 \cdot 7 \cdot 4^2 = & 336 : \\
 & 64 \\
b^3 = 4^3 = & 64
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt[3]{418|508|992} = \overset{\overbrace{a\,b}^{a}\,b}{748} \\
a^3 = & 343 : : : \; : : : \\
3a^2 = 147) & 755 : : \; : : : \\
3a^2b = 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = & 588 : : \; : : : \\
 & 1670 : \; : : : \\
3ab^2 = 3 \cdot 7 \cdot 4^2 = & 336 : \; : : : \\
 & 13348 \; : : : \\
b^3 = 4^3 = & 64 \; : : : \\
3a^2 = 3 \cdot 74^2 = 16428) & 132849 : : \\
3a^2b = 3 \cdot 74^2 \cdot 8 = & 131424 : : \\
 & 14259 : \\
3ab^2 = 3 \cdot 74 \cdot 8^2 = & 14208 : \\
 & 512 \\
b^3 = 8^3 = & 512
\end{array}
$$

Als Probe der richtigen Rechnung muſs die Wurzel, dreimal mit sich selbst multipliziert, die Wurzelbasis wiedergeben.

200.

Nach den vorhergehenden Regeln kann man nun auch die irrationalen Wurzeln bis auf beliebig viele Decimalen finden. Hat man nämlich erst die ganzen Einheiten der Wurzel gefunden, so hänge man der vorgegebenen Zahl beliebig viel Klassen von je drei

Nullen an, und verfahre wie vorhin, so findet man auch die Zehntel, Hundertel &c. (§ 192.)

Soll aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Kubikwurzel gezogen werden, so ziehe man sie erst aus der ganzen Zahl und hänge den Resten, statt wie vorhin jedesmal drei Nullen, drei der folgenden Decimalen an.

Ebenso verfährt man mit einem bloſsen Decimalbruch.

Ist aus einem gemeinen Bruche die Kubikwurzel zu ziehen, so ist es am bequemsten, ihn erst in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder auch die Wurzel aus dem Nenner rational zu machen, indem man Zähler und Nenner zuvor mit dem Quadrate des Nenners multipliziert. So findet man z. E.:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{9|007} = 20,806\,.\,. \\
 & 8 \\ \hline
3a^2 = 12) & 10 \ (10:12 = 0!) \\ \hline
3a^2 = 1200) & 10070 \\
3a^2b = & 9600 \\ \hline
 & 4700 \\
3ab^2 = & 3840 \\ \hline
 & 8600 \\
b^3 = & 512 \\ \hline
3a^2 = 129792) & 80880 \\ \hline
3a^2 = 12979200) & 80880000 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{2} = 1,25\,.\,. \\
 & 1 \\ \hline
3a^2 = 3) & 10 \\
3a^2b = & 6 \\ \hline
 & 40 \\
3ab^2 = & 12 \\ \hline
 & 280 \\
b^3 = & 8 \\ \hline
3a^2 = 432) & 2720 \\
3a^2b = & 2160 \\ \hline
 & 5600 \\
3ab^2 = & 900 \\ \hline
 & 47000 \\
b^3 = & 125 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{2,057|600} = 1,2\,.\,.\,. \\
 & 1 \\ \hline
3a^2 = 3) & 10 \\
3a^2b = & 6 \\ \hline
 & 45 \\
3ab^2 = & 12 \\ \hline
 & 337 \\
 & \&c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{0,007|040} = 0,19\,.\,. \\
 & 1\,: \\ \hline
3a^2 = 3) & 60 \\
3a^2b = & 27\,: \\ \hline
 & 334 \\
3ab^2 = & 243 \\ \hline
 & 910 \\
b^3 = & 729\,: \\ \hline
 & 1810 \\
 & \&c.
\end{array}$$

Zufolge § 194 ist $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{0{,}8}$, oder:

$$\sqrt[3]{\tfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\tfrac{4.5.5}{5.5.5}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{5}$$

Beispiele:

$\sqrt[3]{731432701} = 901$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} = 1{,}44224\,..$

$\sqrt[3]{1367631} = 111.$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}} = 0{,}90855\,..$

$\sqrt[3]{351} = 7{,}054004\,..$ $\qquad$ $\sqrt[3]{6\tfrac{2}{3}} = 1{,}88207\,..$

$\sqrt[3]{100} = 4{,}641588\,..$ $\qquad$ $\sqrt[3]{0{,}032768} = 0{,}32.$

Sechzehntes Buch.

Von den Potenzen und Wurzeln im allgemeinen. Rechnung mit denselben.

201.

Wenn aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so pflegt man dies, der Kürze wegen, auch so anzudeuten: daſs man den Wurzelexponenten, als Nenner, unter den als Zähler betrachteten Potenzexponenten setzt. Um z. E. anzudeuten, daſs aus a^m die $n$te Wurzel gezogen werden soll, schreibt man statt: $\sqrt[n]{a^m}$ oftmals so: $a^{\frac{m}{n}}$, statt $\sqrt[3]{8^2}$ kürzer: $8^{\frac{2}{3}}$ (lies: 8 zweidrittel Potenz). Hiernach $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$. Jede Gröſse, die keinen Exponenten hat, kann man als die erste Potenz derselben betrachten und mit dem Exponenten 1 schreiben: $a = a^1$; daher auch: $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Hiernach ist also auch umgekehrt $x^{\frac{m}{n}}$ soviel als $\sqrt[n]{x^m}$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ &c. Der Gebrauch der (von Cartesius eingeführten) Bruch-Exponenten macht das Wurzelzeichen entbehrlich, wodurch die Übersicht und das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln ungemein erleichtert wird.

202.

Einer Potenz mit gebrochenem Exponenten kann man auch (wohl zu merken) folgende Bedeutung unterlegen: Es soll die Gröſse, an welcher der gebrochene Exponent steht, erst in soviel gleiche Faktoren zerlegt werden, als sein Nenner Einheiten hat, und dann einer dieser gleichen Faktoren so oft gesetzt werden, als sein Zähler Einheiten hat. Es ist nämlich einerlei, ob man, um eine Gröſse mit gebrochenem Exponenten zu berechnen, erst die Wurzel zieht, deren Grad der Nenner angiebt, und diese Wurzel auf die Potenz erhebt, deren Grad der Zähler angiebt, oder ob man die Gröſse erst auf diese Potenz erhebt, und daraus jene Wurzel zieht.

Es ist z. B.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Aber auch: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$

Die Richtigkeit dieses für die Potenz-Rechnung wichtigen Satzes läſst sich durch Hilfe des Folgenden beweisen:

Erhebt man eine Potenz, z. B. a^3, wieder zu einer Potenz, z. B. zur vierten, in Zeichen: $(a^3)^4$, so erhält man eine Potenz von so hohem Grade, als das Produkt aus beiden Exponenten angiebt, denn werden drei gleiche Faktoren aaa oder a^3 wiederum viermal als Faktor gesetzt, so erhält man offenbar ein Produkt von zwölf gleichen Faktoren: $aaa \cdot aaa \cdot aaa \cdot aaa = (a^3)^4 = a^{12}$. Hiernach ist nun auch leicht einzusehen, daſs auch $(a^3)^4 = (a^4)^3$, allgemein $(a^n)^m = (a^m)^n$.

Um nun einzusehen, daſs allgemein:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$$

denke man sich die Gröſse a in n gleiche Faktoren zerlegt, oder $a = w^n$ gesetzt. Substituiert man nun w^n statt a in $(\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{(a^m)}$, so wird:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^n})^m = w^m$$

und ebenso: $\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[n]{(w^n)^m} = \sqrt[n]{(w^m)^n} = w^m$

folglich ist allgemein: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$

203.

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchexponenten oder was dasselbe ist, den Potenz- und Wurzelexponenten mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert, so bleibt deshalb der Wert der Potenz ungeändert. Es ist z. B.:

$$64^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{4}{6}}$$

$$\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[6]{64^4}$$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

* Denn wenn die Gröfse a in $p$mal soviel gleiche Faktoren zerlegt, und einer derselben dafür wieder $p$mal so oft gesetzt wird, so mufs offenbar dasselbe Resultat kommen. Es ist z. B.:

$$(\sqrt[3]{64})^2 = (\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4})^2 = 4^2 = (2 \cdot 2)^2 = 2^4$$

$$(\sqrt[6]{64})^4 = (\sqrt[6]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2})^4 = 2^4$$

Allgemein, indem man wie in § 202 die Gröfse a in np Faktoren zerlegt und w^{np} statt a gesetzt denkt:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^{pn}})^m = (w^p)^m = w^{mp}$$

$$(\sqrt[np]{a})^{mp} = (\sqrt[np]{w^{np}})^{mp} = w^{mp}$$

Vermöge dieses Satzes können mehrere Bruchexponenten auf einerlei Nenner gebracht und dadurch, wie man im folgenden Paragraphen sehen wird, manche Gröfsen-Ausdrücke sehr vereinfacht werden. *)

204.

Um Potenzen von *einerlei* Basis miteinander zu multiplizieren, braucht man nur ihre Exponenten zu addieren; das Produkt ist nämlich wieder eine Potenz von derselben Wurzel, deren Exponent jene Summe sein mufs, weil es allein so viele gleiche Faktoren enthält, als die miteinander multiplizierten Potenzen zusammen; z. B.:

$$a^5 \cdot a^2 = a^{5+2} = a^7; \quad \text{denn } a^5 \cdot a^2 = aaaaa \cdot aa = a^7$$

$$3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^{11}; \quad x^5 x^3 x = x^{5+3+1} = x^9; \quad b^{15} b^{15} = b^{30}$$

---

*) Auch kann man vermittelst dieses Satzes mehrere auszuziehende Wurzeln, ohne ihre wirklichen Gröfsen zu kennen, miteinander vergleichen und z. E. leicht entscheiden, welche von den drei Gröfsen $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{24}$ die gröfste oder kleinste ist. Setzt man nämlich statt der Wurzelzeichen Bruchexponenten, und bringt diese auf einerlei Nenner, so hat man:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\ \sqrt[6]{24} = 24^{\frac{1}{6}} = 24^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{24} \end{cases}$$

Mithin ist von den drei fraglichen Gröfsen $\sqrt{3}$ die gröfste und $\sqrt[6]{24}$ die kleinste.

Ebenso, wenn die Exponenten Brüche sind; z. B.:

$$a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{7}} \cdot = a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}} = a^{\frac{5}{7}};$$

denn die eine Gröſse enthält die 7te Wurzel aus a dreimal, die andere dieselbe Wurzel zweimal, also zusammen 5mal als Faktor:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = a^{\frac{17}{12}}$$

Beispiele:

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad x^{\frac{m}{n}} \, x^{\frac{p}{n}} = x^{\frac{m}{n} + \frac{p}{n}} = x^{\frac{m+p}{n}}$$

$$a^m a^n a^p = a^{m+n+p}; \qquad x^{\frac{n}{2}} \, x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{2n}{2}} = x^n$$

$$x^m x = x^{m+1}; \qquad x^{\frac{m}{n}} \, x = x^{\frac{m}{n}+1} = x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$2a^5 b^3 \cdot 3a^2 b = 2 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b = 6a^7 b^4 \quad (\S\ 89,\ 1.)$$

$$a^4 (a^3 - a^2 + 1) = a^7 - a^6 + a^4 \quad (\S\ 89,\ 2.)$$

$$3x^5 (2x^4 + 4x + 3) = 6x^9 + 12x^6 + 9x^5$$

$$a^3 b^4 (a^3 b + ab^3 + b^4) = a^6 b^5 + a^4 b^7 + a^3 b^8$$

$$(a-1)(a^3 + a^2 + a + 1) = a^4 - 1 \quad (\S\ 89,3.)$$

$$(a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4 \quad (\S\ 91.)$$

205.

Um Potenzen von einerlei Basis durcheinander zu dividieren, braucht man nur (weil eine gleiche Anzahl gemeinschaftlicher Faktoren im Divisor und Dividend sich gegenseitig tilgen) **den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividend zu subtrahieren.** So ist z. B.:

$$\frac{8^7}{8^4} = 8^{7-4} = 8^3; \text{ denn } \frac{8^7}{8^4} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$$

$$\frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{5}{7} - \frac{3}{7}} = a^{\frac{2}{7}}; \quad \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{12}} \quad (\S\ 203.)$$

$$\text{denn: } \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = \frac{(\sqrt[7]{a})^5}{(\sqrt[7]{a})^3} = (\sqrt[7]{a})^{5-3} = (\sqrt[7]{a})^2 = a^{\frac{2}{7}}$$

Selbst wenn der Exponent des Divisor gröſser ist, als der des Dividend, pflegt man dennoch die Subtraktion zu vollziehen, und den Quotienten mit negativem Exponenten stehen zu lassen; z. B.:

$$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}; \qquad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{1}{12}}$$

Ist also ein negativer Exponent durch die Division zweier Potenzen von gleicher Wurzel entstanden, so will dies weiter nichts sagen, als daſs der Divisor mehr Faktoren hatte, als der Dividend, und zwar soviel mehr, als der negative Exponent Einheiten hat. Eine Gröſse mit negativem Exponenten ist daher selbst nicht negativ, sondern immer gleich der Einheit, dividiert durch dieselbe Gröſse mit positivem Exponenten, nämlich:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \qquad x^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}}; \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \tfrac{1}{4}; \qquad 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Da die negativen Exponenten ebenso wie die gebrochenen den allgemeinen Regeln der Potenzrechnung unterworfen sind, so pflegt man manchmal, ohne durch die Division dazu veranlaſst zu sein, der bloſsen Gleichförmigkeit wegen, eine als Nenner stehende Potenz mit umgekehrtem Vorzeichen ihres Exponenten, in den Zähler zu setzen. So kann man z. B. statt: $\frac{a^3 x^4}{y^5}$, auch ohne Bruch so schreiben: $a^3 x^4 y^{-5}$.

Sind Dividend und Divisor gleich groſs, so ist der Quotient immer = 1, z. B.:

$$\frac{a^7}{a^7} = 1; \qquad \frac{x^n}{x^n} = 1;$$

die allgemeine Regel giebt aber in diesem Fall 0 zum Exponenten;

$$\text{z. B.: } \frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0; \qquad \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0.$$

Eine Gröſse mit 0 als Exponent muſs also immer der Einheit gleich gesetzt, und nicht mit 0 verwechselt werden; z. B.:

$$a^0 = 1; \quad x^0 = 1; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1; \quad 1^0 = 1.$$

206.

Daſs übrigens die im vorigen und vorvorigen Paragraphen gegebenen Regeln ganz allgemein, mithin auch auf negative (inverse) Exponenten anwendbar sind, und man sich nur streng an die gegebene Theorie zu halten braucht, ist einzusehen. So ist z. B.:

$$\text{Multipl.}\begin{cases} a^7 \cdot a^{-4} = a^{7-4} = a^3; & \text{weil: } a^7 \cdot a^{-4} = a^7 \cdot \dfrac{1}{a^4} = a^3; \\ a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-3-2} = a^{-5}; & \text{weil: } a^{-3} \cdot a^{-2} = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5}; \end{cases}$$

$$\text{Divis.}\begin{cases} \dfrac{a^7}{a^{-4}} = a^{7-(-4)} = a^{11}; & \text{weil: } \dfrac{a^7}{a^{-4}} = a^7 : \dfrac{1}{a^4} = a^7 \cdot \dfrac{a^4}{1} = a^{11}; \\ \dfrac{a^{-4}}{a^{-7}} = a^{-4-(-7)} = a^3; & \text{weil: } \dfrac{a^{-4}}{a^{-7}} = \dfrac{1}{a^4} : \dfrac{1}{a^7} = \dfrac{1}{a^4} \cdot \dfrac{a^7}{1} = a^3; \end{cases}$$

Allgemein:

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}; \qquad \frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m};$$

$$a^m a^{-1} = a^{m-1}; \qquad \frac{a}{a^n} = a^{1-n};$$

$$\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{-n+m} = a^{m-n}; \qquad \frac{a^n}{a} = a^{n-1};$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a} = a^{\frac{m}{n}-1} = a^{\frac{m-n}{n}}; \qquad \frac{a}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{1-\frac{m}{n}} = a^{\frac{n-m}{n}};$$

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m; \qquad \frac{a^m}{a^{m-n}} = a^{m-m+n} = a^n;$$

$$a^{m-1} \cdot a^{1-m} = a^0 = 1; \qquad 2x^6(3x - 4x^3) = 6x^7 - 8x^9;$$

$$\frac{6a^5}{9a^9} = \frac{2}{3a^4} = \tfrac{2}{3}a^{-4}; \qquad \frac{4a^5b^7c^3}{2ab^4c^3} = 2a^4b^3;$$

$$(2a^3b^5 - 3ab^{-4})(5a^{-2}b^3 + ab^4) = 10ab^8 + 2a^4b^9 - 15a^{-1}b^{-1} - 3a^2.$$

207.

Um eine Potenz nochmals auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur den ursprünglichen Exponenten mit dem neuen zu multiplizieren. Soll z. B. a^4 auf die dritte Potenz erhoben werden, so deutet man dies durch $(a^4)^3$ an, und man hat dann:

$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad \text{denn } (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4};$$

$(a^{-3})^2 = a^{-6}$; denn $(a^{-3})^2 = a^{-3} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$;

$(a^{\frac{3}{8}})^2 = a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$; denn $(a^{\frac{3}{8}})^2 = [(\sqrt[8]{a})^3]^2 = (\sqrt[8]{a})^6 = a^{\frac{6}{8}}$.

Allgemein:

$(a^m)^n = a^{mn}$; $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^n = \frac{a^{mn}}{b^{nn}}$;

$[(a^m)^n]^p = a^{mnp}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$;

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$; $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^2$; *)

208.

Soll umgekehrt aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten zu dividieren, und die Division, wenn sie nicht vollzogen werden kann, bloſs anzudeuten. Beispiele:

$\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3$; $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$;

$\sqrt[3]{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^{\frac{6}{7}}} = a^{\frac{2}{7}}$;

$\sqrt{5^{\frac{3}{8}}} = 5^{\frac{3}{16}}$; $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$;

Allgemein:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[n]{a^{m+1}} = a^{\frac{m+1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$; $\sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}}$

$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$; $\sqrt{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{2}} = a^n$

$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$; $\sqrt{a^{-4}} = a^{-2}$.

---

*) $(a^3)^3 = a^9$; $a^{3^3} = a^{27}$;

$(10^{10})^{10} = 10^{100}$; $10^{10^{10}} = 10^{10000000000}$;

$(\sqrt{2})^2 = 2$; $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = 2$; $\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3} = 3$.

209.

Um eine aus Faktoren bestehende Gröſse auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur jeden Faktor besonders zu potenzieren. So ist z. B.:

$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3$; denn $(2\cdot3)^3 = 2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^3$;

Allgemein: $(abc)^n = a^n\, b^n\, c^n$.

Beispiele:

$(a^3\, b^5)^3 = a^9\, b^{15}$; $\quad (\frac{2}{3}\sqrt{a})^2 = \frac{4}{9}a$;

$(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2$; $\quad (\frac{1}{5}\sqrt[3]{x})^3 = \frac{x}{125}$;

$(\frac{1}{3}\sqrt{a})^2 = \frac{1}{9}a$; $\quad (\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = ab$.

210.

Umgekehrt wird aus einer, aus Faktoren bestehenden oder zuvor in Faktoren zerlegten Gröſse eine Wurzel gezogen, wenn man sie aus jedem Faktor besonders zieht. Wenn das $\sqrt{\ }$ Zeichen vor einer aus Faktoren bestehenden, mithin einteiligen Gröſse steht, so ist die Klammer überflüssig. Statt $\sqrt{(abc)}$ schreibt man kurz: $\sqrt{abc}$; z. B.:

$$\sqrt[3]{a^3\, b^6\, c^9} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[3]{c^9} = ab^2\, c^3;$$

Allgemein: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Eine Gröſse, welche auf die $n$te Potenz erhoben, die Gröſse ab giebt, ist die $n$te Wurzel aus ab. Da nun (§ 209) $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = ab$, so ist auch umgekehrt: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Beispiele:

$$\sqrt{\frac{a^2\, b^4}{c^6\, x^2}} = \frac{ab^2}{c^3\, x}; \qquad \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^6}} = \frac{3a}{2b^2}.$$

211.

1) Läſst sich eine Gröſse unter dem Wurzelzeichen in zwei solche Faktoren zerlegen, daſs aus dem einen die Wurzel rational ist, so kann man aus diesem Faktor die Wurzel wirklich ziehen und vor dem andern das Wurzelzeichen stehen lassen und davor die ausgezogene Wurzel als Koefficient setzen, z. B.:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\cdot\sqrt{5}.$$

Hierdurch können Wurzelgröſsen oftmals bedeutend vereinfacht und zusammengezogen werden.

W u r z e l g r ö ſ s e n heiſsen nämlich alle solche mit dem Wurzelzeichen behafteten Ausdrücke, aus welchen sich die verlangte Wurzel nicht wirklich ziehen, sondern nur andeuten läſst, wozu also eigentlich auch die Potenzen mit gebrochenen Exponenten und die irrationalen Gröſsen zu rechnen sind. Wurzelgröſsen sind z. B.:

$$\sqrt[3]{a}; \ \sqrt{a}; \ a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}; \ \sqrt{45}; \ \sqrt{27} \text{ \&c.} \qquad (\S\, 183.)$$

G l e i c h n a m i g heiſsen Wurzelgröſsen, wenn die Gröſsen unter dem Wurzelzeichen und die Wurzelexponenten dieselben sind, die Koefficienten vor dem Wurzelzeichen mögen so verschieden sein als sie wollen; z. B.: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind gleichnamig; ebenso $3\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$; oder $\sqrt{ab}$, $2\sqrt{ab}$; aber $2\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$ sind ungleichnamig. B e i s p i e l e:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$
$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}; \qquad \sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b};$$
$$\sqrt{a^4 b^5 c^2} = \sqrt{a^4 b^4 c^2 b} = a^2 b^2 c\sqrt{b};$$
$$\sqrt[3]{24 a^7 b} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot a^6 ab} = 2a^2\sqrt[3]{3ab};$$
$$2\sqrt{18 x^2 y^5} = 2\sqrt{9 \cdot 2x^2 \cdot y^4 \cdot y} = 6xy^2\sqrt{2y};$$
$$\sqrt[n]{a^{m+n} b^{2n}} = \sqrt[n]{a^m a^n b^{2n}} = ab^2\sqrt[n]{a^m}.$$

2) Umgekehrt können Faktoren auſser dem Wurzelzeichen unter dasselbe gebracht werden, wenn man sie zuvor auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt; z. B.:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}; \qquad a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b};$$
$$2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}; \qquad a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b};$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}; \qquad x\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x^{n+1}}.$$

212.

Rechnung mit Wurzelgröſsen. Man merke sich, daſs die Einfachheit einer Reduktion nicht von dem Grade der Exponenten, sondern von der kleinsten Anzahl Glieder und Wurzelzeichen abhängt. Denn, werden Potenzen und Wurzelgröſsen wirklich in Zahlen berechnet, so geschieht dies doch immer vermittelst der Logarithmen, und da verursacht die Ausziehung einer Wurzel vom hundertsten Grade nicht mehr Arbeit, als die vom zweiten Grade.

1) *Addition* und *Subtraktion.* Sind die Wurzelgröfsen ungleichnamig, so kann man diese Operationen nur andeuten; sind sie aber gleichnamig, oder lassen sie sich gleichnamig machen, so braucht man blofs die Koefficienten zu addieren oder subtrahieren.

Beispiele:

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{5}+\sqrt{6}; \qquad 2a^{\frac{2}{3}}-5a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{2}{3}}=3a^{\frac{2}{3}};$$

$$2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}=2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}; \qquad a\sqrt{h}-b\sqrt{h}=(a-b)\sqrt{h};$$

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}; \qquad ax^{\frac{m}{n}}-bx^{\frac{m}{n}}=(a-b)x^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}=\sqrt{50}; \quad (\S\, 211, 2)$$

$$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}=2\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{4\cdot 3}=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0;$$

$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}.$$

2) *Multiplikation.* Man gebe den Wurzelgröfsen einerlei Wurzelexponent (§ 203), alsdann braucht man nur ein Wurzelzeichen, unter welches man sämtliche Gröfsen als Faktoren zusammenstellen kann; die etwaigen Faktoren aufser den Wurzelzeichen mufs man besonders miteinander multiplizieren und ihr Produkt vor das eine Wurzelzeichen setzen. Beispiele:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}; \qquad \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{6}}\cdot b^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}; \qquad 2\sqrt{a^3b}\cdot 3\sqrt{ab}=6a^2b;$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=6; \qquad 3\sqrt{a}\cdot 5\sqrt[3]{b}=15\sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$2\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{b}=6\sqrt{ab}; \qquad \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x^{m+1}};$$

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}=a; \qquad 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=15;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2; \qquad \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a+\sqrt{ab};$$

$$a\sqrt{b}\cdot b\sqrt{a}=ab\sqrt{ab}; \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b; \ (\S\, 91.)$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y \ \ (\S\, 186).$$

3) *Division.* Sind die Wurzelexponenten im Dividend und Divisor gleich oder gleich gemacht, so braucht man nur ein Wurzelzeichen. Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}; \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}}; \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=1; \quad (\S\, 180, 2.)$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\tfrac{8}{18}}=\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\tfrac{2}{3}; \qquad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{12}}=1;$$

$$\frac{2\sqrt{27}}{3\sqrt{12}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{27}{12}} = \tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2} = 1;$$

$$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{45}{5}} - \sqrt{\tfrac{20}{5}} = 3 - 2 = 1.$$

213.

Die allgemeine Aufgabe, eine beliebig vielteilige Gröfse auf eine Potenz zu erheben und umgekehrt daraus eine Wurzel zu ziehen, gehört in die Analysis, wo sie mit Hilfe des Newtonschen oder sogenannten binomischen Lehrsatzes sehr leicht gelöst wird. Für die Elemente ist es hinreichend, die Regeln anzugeben, nach welchen man die zweite und dritte Potenz bildet. Für die Bildung der zweiten Potenz ergiebt sich folgendermafsen ein sehr leicht zu erkennendes Gesetz.

Es möge allgemein $a+b+c+d+\ldots$ eine vielteilige Gröfse bedeuten. Entwickeln wir deren Quadrat zuerst durch wirkliche Multiplikation, indem wir die einzelnen Produkte, wie angegeben, untereinander ordnen, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d+e+\ldots \\ a+b+c+d+e+\ldots \end{array}\right\}\text{ Faktoren}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a^2 & +ab & +ac & +ad & +ae+\ldots \\ \hline
ab & +b^2 & +bc & +bd & +be+\ldots \\ \cline{2-5}
ac & +bc & +c^2 & +cd & +ce+\ldots \\ \cline{3-5}
ad & +bd & +cd & +d^2 & +de+\ldots \\ \cline{4-5}
ae & +be & +ce & +de & +e^2+\ldots
\end{array}$$

Aus den je zwei und zwei, als gleich bezeichneten Reihen ergiebt sich nun die anschauliche, leicht zu behaltende Regel, nach welcher man das Quadrat einer vielteiligen Gröfse gleich aus dem Gedächtnis niederschreiben kann, nämlich: d a s Q u a d r a t e i n e r v i e l t e i l i g e n G r ö f s e b e s t e h t a u s d e n Q u a d r a t e n e i n e s j e d e n T e i l s, u n d d e n d o p p e l t e n P r o d u k t e n e i n e s j e d e n T e i l s i n j e d e n n a c h f o l g e n d e n. Haben einige Teile das Minus-Zeichen, so mufs man sich erinnern, dafs eine gerade Anzahl Minus-Zeichen in den zusammentretenden Faktoren, plus, eine ungerade Anzahl aber minus giebt, und die Quadrate stets positiv sind. B e i s p i e l e:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (x+\frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4};$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (x-\frac{p}{2})^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4};$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2; \qquad (x - \tfrac{2}{3}a)^2 = x^2 - \tfrac{4}{3}ax + \tfrac{4}{9}a^2;$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1; \qquad (3ax+b)^2 = 9a^2x^2 + 6abx + b^2;$$

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2; \qquad (x^m + a)^2 = x^{2m} + 2ax^m + a^2;$$

$$(x+\tfrac{1}{2})^2 = x^2 + x + \tfrac{1}{4}; \qquad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y;$$

$$x^2 - (a-x)^2 = x^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = 2ax - a^2;$$

$$b^2 - a^2 - c^2 + 2ac = b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac) = b^2 - (a-c)^2;$$

$$\begin{aligned} b^2 - (a-c)^2 &= [b + (a-c)]\,[b - (a-c)] \\ &= (b + a - c)(b - a + c). \qquad (\S\ 91.) \end{aligned}$$

2) Ebenso könnte man auch zur Bildung des Kubus eine allgemeine Regel aufsuchen. Diese ist jedoch viel zu weitläufig. Muſs der Kubus einer vielteiligen Gröſse entwickelt werden, so bilde man nach dem Vorhergehenden erst das Quadrat und multipliziere dieses nochmals mit der Basis. In den Elementen wird selten und nie mehr als der Kubus einer zweiteiligen Gröſse verlangt und hiefür ist die Formel § 198 angegeben, bei welcher nur noch die oben gemachte Bemerkung über die gerade und ungerade Anzahl Minus-Zeichen zu beachten ist. Beispiele:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a^m - b^n)^3 = a^{3m} - 3a^{2m}b^n + 3a^mb^{2n} - b^{3n}.$$

214.

Die Regeln für die umgekehrte Aufgabe: aus einer vielteiligen Gröſse die Quadrat- und Kubikwurzel zu ziehen, folgen unmittelbar aus den vorhergehenden. Ein Geübterer wird jedoch keine Regeln nötig haben, sondern die Wurzel, wenn sie möglich ist, gleich auf den ersten Blick erkennen. Selten ist es übrigens möglich, die Wurzeln auszuziehen. Im allgemeinen kann man es nur andeuten, indem man das Wurzelzeichen vor die in Klammern geschlossene mehrteilige Gröſse setzt, oder sie mit gebrochenen Exponenten schreibt, mit welchen man dann geradeso wie mit einteiligen Wurzelgröſsen oder Potenzen rechnet.

Um z. B. die Quadratwurzel aus der zweiteiligen Gröſse $a+b$ anzudeuten, schreibt man: $\sqrt{(a+b)}$, oder $\sqrt{a+b}$, oder $(a+b)^{\frac{1}{2}}$. Anfänger pflegen oft $\sqrt{(a+b)}$ mit $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ zu verwechseln.

Den grofsen Unterschied zeigen folgende Zahlen-Beispiele:

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=7; \qquad \sqrt{25}-\sqrt{16}=1;$$
$$\sqrt{(16+9)}=5; \qquad \sqrt{(25-16)}=3;$$
$$16+\sqrt{9}=19; \qquad \sqrt{16+9}=13.$$

Hinsichtlich der Wurzel-Ausziehung merke man noch: da jede Potenz einer einteiligen Gröfse wieder einteilig ist, das Quadrat einer zweiteiligen Gröfse aber drei Teile hat, worunter zwei vollkommene positive Quadrate, und der Kubus einer zweiteiligen Gröfse vier Teile hat, worunter zwei Kuben sind, so folgt, dafs aus keiner zweiteiligen Gröfse eine Quadratwurzel möglich ist, und dafs die Quadratwurzel aus einer dreiteiligen Gröfse, wenn sie überhaupt möglich ist, immer zweiteilig sein mufs. Diese beiden Teile findet man dann leicht aus den beiden Gliedern, welche vollkommene Quadrate sind; denn die Wurzeln aus beiden gezogen und durch das Vorzeichen des dritten Gliedes vereinigt, müssen, ins Quadrat erhoben, dem vorgegebenen vollkommen gleich sein, wo nicht, so ist die Wurzel als irrational zu betrachten. Ein Gleiches gilt von der Kubikwurzel. Beispiele (vergl. § 324):

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=x+y;$$
$$\sqrt{9x^2-6xy+y^2}=\sqrt{(3x-y)^2}=3x-y;$$
$$\sqrt{x^2+px+\tfrac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2};$$
$$\sqrt{(1-2x+x^2)}=\sqrt{(1-x)^2}=1-x;$$
$$\sqrt{x^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{4}{9}}=\sqrt{(x-\tfrac{2}{3})^2}=x-\tfrac{2}{3};$$
$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x^2+4ax+x^2}&=\sqrt{a^2+4ax+x^2}\\ \sqrt{x^2+2xy-y^2}&=\sqrt{x^2+2xy-y^2}\\ \sqrt{a^2+b^2}&=\sqrt{a^2+b^2}\\ \sqrt{a^2-b^2}&=\sqrt{(a+b)(a-b)}\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Wurzelgröfsen}\\ (\S\ 211.)\end{array}$$
$$\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$\sqrt{(x+y)^3}=\sqrt{(x+y)^2(x+y)}=(x+y)\sqrt{x+y};$$
$$\sqrt[3]{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)}=\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y;$$
$$\sqrt[3]{(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)}=\sqrt[3]{(a-x)^3}=a-x;$$
$$\left.\begin{aligned}\sqrt[3]{(a^3+b^3)}&=(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}\\ \sqrt[3]{(a^3-y^3)}&=(a^3-y^3)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\}\ \text{Wurzelgröfsen}$$

Wie die Quadratwurzel aus vielgliedrigen Ausdrücken analog dem in § 191 gelehrten Verfahren gefunden werden kann, zeigt § 324.

215.

Folgende Reduktionen und Form-Veränderungen verdienen noch beachtet zu werden:

1) Wenn der Nenner eines Bruchs eine einteilige Wurzelgröfse ist, so kann man denselben rational machen, indem man Zähler und Nenner mit einer solchen gebrochenen Potenz des Nenners multipliziert, wodurch das Wurzelzeichen im Nenner wegfällt; z. B.:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{72}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^2};$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2};\qquad \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{a}}=\frac{a^1}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2};$$

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{(a+x)(a-x)}}{a-x}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x};$$

2) Ist der Nenner eine zweiteilige Wurzelgröfse, aber nur vom 2ten Grade, so mufs man das Vorzeichen von einem Gliede entgegengesetzt nehmen. (§ 91.) Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y};$$

$$\frac{x}{a+\sqrt{x}}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{a^2-x}$$

3) Wurzelgröfsen kann man immer auf einerlei Nenner bringen; z. B.:

$$\sqrt{ax}-\frac{ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{(a+\sqrt{ax})\sqrt{ax}-ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{a\sqrt{ax}}{a+\sqrt{ax}};$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

4) Verschiedene Reduktionen:

$$\frac{\sqrt{9y^2(a^2-x^2)}}{y\sqrt{a+x}}=\frac{3y\sqrt{(a+x)\cdot(a-x)}}{y\sqrt{a+x}}=3\sqrt{a-x};$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)}}=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$$

$$(a+x)^m(a+x)^n=(a+x)^{m+n};\quad \frac{(a+x)^m}{(a+x)^n}=(a+x)^{m-n}$$

$$([a+x]^m)^n=(a+x)^{mn};\qquad \sqrt[n]{(a+x)^m}=(a+x)^{\frac{m}{n}};$$

$$a^m\left(1+\frac{x^m}{a^m}\right)=a^m+x^m;\qquad a^m-x^m=a^m\left(1-\frac{x^m}{a^m}\right);$$

$$\sqrt[3]{(a^3-x^3)}=a\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)}\qquad \sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)};$$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$; folglich ist auch:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b};\qquad \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b};$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{x^2+2x+1-4}{x^2+4x+4+x+2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+2)^2+x+2}$$

$$=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+2)(x+2+1)}=\frac{x-1}{x+2}.$$

216.

Bei der Berechnung der Potenzen und Wurzeln hat man endlich noch auf die Vorzeichen derselben zu achten. Die Sätze darüber, welche wir absichtlich bis zu Ende dieses Kapitels verschoben haben, sind folgende fünf:

1) Von einer positiven Gröſse ist jede Potenz wieder positiv, $(+a)^n=+a^n$.

2) Von einer negativen Gröſse aber ist jede gerade Potenz positiv, jede ungerade negativ; denn eine gerade Anzahl Faktoren mit dem Minus-Zeichen geben plus, eine ungerade Anzahl aber minus; z. B.:

$$(-3)^2=9,\text{ denn }(-3)^2=-3\cdot-3=9;$$
$$(-3)^3=-3\cdot-3\cdot-3=9\cdot-3=-27;$$
$$(-3)^4=\overbrace{-3\cdot-3}\cdot\overbrace{-3\cdot-3}=9\cdot9=81.$$

Bedeutet n eine beliebige ganze Zahl, so ist $2n$ immer eine gerade und $2n+1$ eine ungerade Zahl und daher allgemein:

$$(-a)^{2n}=+a^{2n};\quad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

Beispiele:

$$(-2)^3=-8;\quad (-2)^4=16;\quad (-\tfrac{1}{3})^2=\tfrac{1}{9};$$

$$(-a)^{10}=+a^{10};\quad (-a)^{11}=-a^{11};\quad (-4)^2=16.$$

Man mufs also $-a^2$ wohl von $(-a)^2=a^2$ unterscheiden, $-a^2$ lies: minus a quadrat; $(-a)^2$ lies: minus a ins quadrat. Ebenso $\frac{1}{2}a^2$ lies: ein halb a quadrat; aber $(\frac{1}{2}a)^2$ lies ein halb a ins quadrat, $=\frac{1}{4}a^2$.

3) Umgekehrt folgt, dafs jede ungerade Wurzel aus einer positiven Gröfse nicht anders als positiv, aus einer negativen Gröfse aber nur negativ sein kann; z. B.: $\sqrt[3]{(+8)}=+2$; $\sqrt[3]{(-8)}=-2$; $\sqrt[3]{-27}=-3$, denn nur $(+2)^3$ giebt wieder $+8$, und nur $(-2)^3$ kann wieder -8 geben &c.

Allgemein:

$$\sqrt[2n+1]{(+a)}=+\sqrt[2n+1]{a};\quad \sqrt[2n+1]{(-a)}=-\sqrt[2n+1]{a}.$$

4) Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl kann hiernach sowohl negativ als positiv sein, indem sowohl von einer negativen als positiven Gröfse jede gerade Potenz positiv ist. Da z. B. $(+3)^2=(-3)^2=9$, so ist umgekehrt $\sqrt{9}=\pm 3$, lies: plus oder minus 3. Ebenso $\sqrt{4}=\pm 2$; $\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$; $\sqrt{16}=\pm 4$; $\sqrt[4]{81}=\pm 3$, denn $(+3)^4=(-3)^4=+81$.

Allgemein:

$$\sqrt[2n]{(+a)}=\pm\sqrt[2n]{a}.$$

Anmerkung. In den vorhergehenden und den meisten nachfolgenden Beispielen ist der Einfachheit wegen nur ein und zwar das obere Vorzeichen gesetzt. In der Praxis darf man aber nie vergessen, vor jede ausgezogene gerade Wurzel, so lange man noch nicht weifs, welches Vorzeichen ihr zukommt, immer das doppelte Vorzeichen zu setzen. Andere vorliegende Umstände müssen dann erst entscheiden, ob das obere oder untere Zeichen, der Natur der Sache gemäfs, vorzugsweise gilt, oder ob es gleichgültig ist, in welchem Sinne eine Wurzel mit doppeltem Vorzeichen genommen wird. Stellt sich z. E. im Laufe der Rechnung das Wurzelzeichen mit geradem Exponenten vor eine aus $-a$ entstandene gleich hohe gerade Potenz, so darf nur, eben weil man es weifs, das untere Zeichen genommen werden, und umgekehrt; z. B.:

$$\sqrt{-a\cdot -a}=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a.$$

*5) Endlich kommt noch der Fall vor, dafs sich das Wurzelzeichen mit geradem Exponenten vor eine negative Zahlt stellt,

z. B.: $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt{-a}$; oder, da jede gerade Wurzel das doppelte Vorzeichen haben muſs, $\pm\sqrt{-4}$; $\pm\sqrt{-a}$ &c. Da nun aber keine Zahl, sie möge $+$ oder $-$ zum Vorzeichen haben, auf eine gerade Potenz erhoben, eine negative Zahl geben kann, so folgt sogleich, daſs aus einer negativen Zahl eine gerade Wurzel nicht wirklich gezogen, sondern nur angedeutet werden kann; z. B.: $\sqrt{-4}=\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-5}=\sqrt[4]{-5}$; $\sqrt[6]{-a}=\sqrt[6]{-a}$; denn es ist keine positive oder negative Zahl denkbar, welche auf die 2te, 4te oder 6te Potenz &c. erhoben, -4, -9, -5 &c. geben könnte. Solche Gröſsen-Ausdrücke, wie $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a^2}$, nennt man imaginaire, (richtiger laterale) Gröſsen. (S. § 325 und 326).

Siebzehntes Buch.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

217.

Erklärung. Wenn in einer von Klammern und Nenner befreiten Gleichung die daraus zu bestimmende unbekannte Gröſse nur in der ersten Potenz vorkommt, so heiſst die Gleichung eine einfache, oder vom ersten Grade; wenn die unbekannte Gröſse aber in einer höheren Potenz darin vorkommt, eine höhere algebraische Gleichung, deren Grad der höchste Exponent der unbekannten Gröſse bestimmt. Ferner heiſst eine höhere Gleichung rein oder verwickelt, je nachdem die unbekannte Gröſse nur in einerlei oder verschiedenen Potenzen darin enthalten ist. So sind z. B.:

$2x = 6$ $3x - 7 = 14 - x$	Gleichungen ersten Grades oder einfache Gleichungen.
$x^2 = 9$ $2x^2 + 16 = \frac{6}{5}x^2$	reine Gleichungen zweiten Grades oder reine quadratische Gleichungen.
$x^2 + 2x = 16$ $8 - \frac{3}{4}x = 6x^2$	verwickelte oder gemischte quadratische Gleichungen, weil in diesen Gleichungen die unbekannte Gröſse auſser in ihrer zweiten auch noch in der ersten Potenz darin vorkommt.
$x^3 = 27$ $x^3 + \frac{136}{31} - 7x^3 = -\frac{2}{3}x^3$	reine Gleichungen vom dritten Grade oder reine kubische Gleichungen.
Allgemein: $x^n = a$ $ax^n + bx^n = c - dx^n$	reine Gleichungen vom $n$ten Grade.
$x^n + ax^{n-1} = x + b$	verwickelte oder gemischte Gleichung vom $n$ten Grade.

Die allgemeine Theorie der höheren Gleichungen gehört in die Analysis. In den Elementen kommen bloſs reine Gleichungen und auſserdem noch die gemischten quadratischen Gleichungen vor.

218.

Die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen hat keine Schwierigkeit, indem man sehr leicht das Quadrat der unbekannten

Gröſse (x^2) von Nenner und Koefficienten befreien und mit dem Vorzeichen $+$ auf eine Seite allein schaffen kann und dann nur auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszuziehen braucht. Hat man nämlich die reine quadratische Gleichung erst auf die allgemeine Form

$$x^2 = q$$

reduziert, wo x die unbekannte und q die bekannten oder gegebenen Gröſsen bedeutet, so folgt, wenn man auf beiden Seiten die Wurzel auszieht:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$$

$$\text{oder:} \quad x = \pm\sqrt{q}. \qquad (\S\ 216,\ 4.)$$

Ein Wert, welcher, statt der gesuchten Gröſse substituiert, der Gleichung Genüge leistet, heiſst Auflösung oder Wurzel der Gleichung (§ 100). Die reine quadratische Gleichung hat also immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln, nämlich $x = +\sqrt{q}$ und $x = -\sqrt{q}$.

1. Aufgabe. Welchen Wert (Werte) hat x in folgender Gleichung:

$$2x^2 - 3 = 69.$$

Auflösung. Man hat gleich: $2x^2 = 72$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = \pm 6.$$

Sowohl $+6$ als -6 leistet, statt x gesetzt, obiger Gleichung Genüge.

2. Aufgabe. Aus folgender Gleichung x zu finden:

$$\frac{x^2}{4} + 7 - \frac{2x^2}{3} = \frac{5x^2}{6} - 153.$$

Auflösung. Alle Glieder, welche x^2 enthalten, diesseits, die bekannten Glieder jenseits gebracht, kommt:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{2x^2}{3} - \frac{5x^2}{6} = -160.$$

Mit dem allgemeinen Nenner 12 multipliziert, kommt:

$$3x^2 - 8x^2 - 10x^2 = -12.160.$$

Die Koefficienten von x^2 in eine Zahl zusammengezogen:

$$-15x^2 = -12.160$$

$$x^2 = \frac{12.160}{15} = 128$$

$$\text{mithin } x = \pm\sqrt{128}$$

also: $x = 11{,}313\ldots$ oder auch: $x = -11{,}313$.

3. Aufgabe. Den Wert von x durch die Gröſsen a, b, c, h, m, n auszudrücken. Den Zusammenhang aller Gröſsen stellt folgende Gleichung dar:

$$\frac{cx^2}{m}+h-\frac{bx^2}{n}=-\frac{ax^2}{n}+\frac{ab}{c}-\frac{cx^2}{m}$$

Auflösung. Das Unbekannte vom Bekannten getrennt, kommt:

$$\frac{ax^2}{n}-\frac{bx^2}{n}+\frac{cx^2}{m}+\frac{cx^2}{m}=\frac{ab}{c}-h.$$

Jetzt die Gleichung mit mn multipliziert &c.:

$$amx^2-bmx^2+2cnx^2=mn\frac{(ab-ch)}{c}$$

$$(am-bm+2cn)x^2=mn.\frac{ab-ch}{c}$$

$$x^2=\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}$$

folglich: $x=\pm\sqrt{\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}}$

4. Aufgabe. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man die um 4 vergröſserte Zahl durch 3 dividiert, dasselbe kommt, als wenn man 3 durch die um 4 verminderte Zahl dividiert.

Auflösung. Heiſst x die fragliche Zahl, so soll laut Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{x+4}{3}=\frac{3}{x-4}$$

multipliziert mit dem allgemeinen Nenner 3 $(x-4)$, kommt:

$$(x+4)(x-4)=9$$
$$x^2-16=9$$
$$x^2=25$$
$$x=\pm 5$$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist:

$$\frac{5+4}{3}=\frac{3}{5-4}=3.$$

Nimmt man das untere Zeichen, so ist:

$$\frac{-5+4}{3}=\frac{3}{-5-4}=-\tfrac{1}{3}.$$

219.

Auf gleiche Weise, wie die reine quadratische, wird auch jede andere reine Gleichung vom beliebigen $n$ten Grade gelöst, indem man erst die $n$te Potenz der unbekannten Gröſse auf eine Seite allein bringt, und dann nur auf beiden Seiten die $n$te Wurzel zieht, welches, wie wir § 234 zeigen werden, mit Hilfe der Logarithmen ungemein leicht bewerkstelligt werden kann. Wenn nun auch, streng genommen, eine reine Gleichung vom $n$ten Grade immer n Wurzeln hat, und mithin n verschiedene Werte, statt der unbestimmten Gröfse substituiert, derselben Genüge leisten müssen,*) so giebt man doch in der Elementar-Arithmetik gewöhnlich nur die reellen Wurzeln an; die übrigen Wurzeln der reinen Gleichungen, welche imaginäre (komplexe) Gröfsen sind, können nur durch höhere Mathematik gefunden werden. So findet man z. B. aus folgender Gleichung:

$$x^3 + \frac{136}{81} - 7x^3 = -\tfrac{1}{3}x^3$$

leicht den reellen Wert von x. Es ist nämlich:

$$x^3 - 7x^3 + \tfrac{1}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$-5\tfrac{2}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$\frac{17x^3}{3} = \frac{136}{81}$$

$$x^3 = \frac{3 \cdot 136}{81 \cdot 17} = \frac{8}{27}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Aus: $x^{30} + 30x^{30} = 10$

folgt: $x^{30} = \dfrac{10}{31}$

$$x = \sqrt[30]{\left(\frac{10}{31}\right)} \text{ \&c.} \qquad (\S\ 284.)$$

220.

Gemischte quadratische Gleichungen. Die Auflösung dieser Art Gleichungen, welche zuerst ein Araber (Mohamed-Ben-Musa) gefunden haben soll, beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man kann und mufs nämlich (indem man alle Glieder, welche das Quadrat der unbekannten Gröfse und ebenso alle Glieder, welche

*) Die Gleichung $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x = 12$ z. B. hat die vier Wurzeln 1, 2, -2, 3. Die Gleichung: $x^3 = 8$ hat drei Wurzeln, nämlich: 2, $-1 + \sqrt{-3}$, $-1 - \sqrt{-3}$. Die Gleichung: $x^4 = 4$ hat vier Wurzeln, nämlich: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{-2}$, $-\sqrt{-2}$.

die erste Potenz derselben enthalten, jedes in ein Glied zusammenzieht) die gemischten quadratischen Gleichungen immer erst so ordnen, daſs sie nur drei Glieder haben, und zwar so, daſs das Quadrat der unbekannten Gröſse, ohne Nenner und Koefficienten und mit dem Vorzeichen +, voransteht, darauf die unbekannte Gröſse in der ersten Potenz mit ihrem Koefficienten folgt, und auf der andern Seite bloſs die bekannten oder gegebenen Gröſsen stehen, durch welche x bestimmt werden soll, so daſs also die Gleichung immer folgende Form erhält:

$$x^2 + px = q$$

wo p und q bekannte Gröſsen bedeuten, die den Umständen nach positiv oder negativ, ganze oder gebrochene Zahlen sein können.

Um z. B. die Gleichung:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}x^2 = 2x^2 + 10 - 3x$$

auf die angegebene Form zu bringen, setzt man zuerst:

$$\frac{3x^2}{4} - 2x^2 + \frac{2x}{3} + 3x = -\tfrac{1}{4}.$$

Die Gleichung mit 12 multipliziert:

$$9x^2 - 24x^2 + 8x + 36x = -\tfrac{1}{4} \cdot 12$$
$$-15x^2 + 44x = -3$$
$$15x^2 - 44x = 3$$
$$x^2 - \frac{44}{15}x = \frac{3}{15}$$

Ebenso läſst sich die Gleichung:

$$\frac{cx}{n} + c - \frac{bx^2}{m} = \frac{hx}{c} - \frac{ax^2}{n} + d$$

leicht ordnen. Es folgt aus ihr:

$$\frac{ax^2}{n} - \frac{bx^2}{m} + \frac{cx}{n} - \frac{hx}{c} = d - c$$
$$macx^2 - nbcx^2 + mc^2x - mnhx = mnc(d - c)$$
$$(mac - nbc)x^2 + m(c^2 - nh)x = mnc(d - c)$$
$$x^2 + \frac{m(c^2 - nh)}{c(ma - nb)} \cdot x = \frac{mnc(d - c)}{c(ma - nb)}$$

221.

Nachdem man nun, um eine gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, dieselbe erst, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, auf die dazu nötige Form:

$$x^2 + px = q \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gebracht hat, betrachte man jetzt die beiden links stehenden Glieder $x^2 + px \; (= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}px)$ als das Bruchstück eines Quadrats und addiere den zur Vollständigkeit fehlenden dritten Teil [welcher nach § 213 offenbar stets das Quadrat vom halben Koefficienten von x, nämlich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ sein mufs] auf beiden Seiten der Gleichung (1), so wird dadurch die gesuchte unbekannte Gröfse x nicht geändert.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q \ldots\ldots (2)$$

Auf der linken Seite steht nun ein vollkommenes Quadrat,*) aus welchem sich die zweiteilige Wurzel $x + \frac{p}{2}$ ziehen läfst. Zieht man also jetzt auf beiden Seiten die Wurzel (welche Operation, so lange p und q nicht in bestimmten Zahlen gegeben, auf der rechten Seite blofs angedeutet werden kann [vergl. § 214]), so erhält man eine Gleichung ersten Grades. Aus (2) folgt nämlich:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \qquad (\text{§ 216, 4. Anmk.})$$

hieraus: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}$

---

*) Dafs durch die erwähnte Zulage auf beiden Seiten, die linke Seite immer ein vollkommenes Quadrat werden mufs, können Anfänger sich auf folgende Weise klar machen: da das entwickelte Quadrat einer zweiteiligen Gröfse, wovon der erste Teil x heifst, aus dem Quadrate des ersten Teils, dem doppelten Produkte des ersten und zweiten Teils, und dem Quadrate des zweiten Teils besteht, z. B. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, so ist klar, dafs der Koefficient von x immer das Doppelte vom zweiten Teil der Wurzel ist. Betrachtet man also die Gröfse: $x^2 + 2ax$ als die beiden ersten bekannten Teile eines vollständig zu machenden Quadrats, so mufs offenbar der hinzukommende Teil das Quadrat vom halben Koefficienten von x, nämlich: $\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$ sein.

Um also $x^2 + 6x = x^2 + 2.3x$ zu einem vollständigen Quadrate zu machen, mufs man $(\frac{6}{2})^2 = 3^2 = 9$ zulegen, alsdann hat man $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Um $x^2 - 6x = x^2 - 2.3x$ zu einem Quadrate zu machen, mufs man $(-\frac{6}{2})^2 = (-3)^2 = 9$ hinzulegen (die Zulage ist nämlich immer positiv, weil sie ein Quadrat ist), dann ist $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Zu $x^2 - px = x^2 - 2.\frac{1}{2}px$ mufs also $(\frac{1}{2}p)^2$ hinzukommen. Zu $x^2 + 3x (= x^2 + 2.\frac{3}{2}x)$ mufs $(\frac{3}{2})^2$; zu $x^2 - x (= x^2 - 2.\frac{1}{2}x)$ mufs $(\frac{1}{2})^2$; zu $x^2 - \frac{ab}{c}.x (= x^2 - 2.\frac{ab}{2c}x)$ mufs $\left(\frac{ab}{2c}\right)^2$ hinzukommen &c.

oder auch, indem man die Gröſse unter dem Wurzelzeichen auf gleiche Benennung bringt und aus dem Nenner die Wurzel zieht:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2+4q}{4}} \text{ oder } x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$$

222.

1. Aufgabe. Welche Werte von x leisten folgender Gleichung Genüge?

$$5x^2 = 30x - 40 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung erst geordnet (§ 220), führt auf:

$$5x^2 - 30x = -40$$
$$x^2 - 6x = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x^2 - 6x + 3^2 = 9 - 8$$
$$\text{oder } x^2 - 6x + 3^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x - 3 = \pm 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$x = 3 \pm 1$$

Die beiden gesuchten Werte von x sind also: $x=3+1=4$ und $x=3-1=2$, welche beide, statt x gesetzt, der gegebenen Gleichung (1) Genüge leisten. Daſs dies notwendig sei, folgt daraus, daſs man eine Kette von Schlüssen auch rückwärts durchlaufen kann, und wieder auf die Voraussetzungen treffen muſs, von welchen man ausging. Quadriert man beide Seiten der Gleichung (4), so folgt die Gleichung (3) &c., man möge dabei das obere oder untere Zeichen von $\pm$ zu Grunde legen.

Es würde ganz auf dasselbe führen und folglich überflüssig sein, wenn man auch die Wurzel aus der linken Seite der Gleichung (3) mit dem doppelten Vorzeichen schreiben wollte. Denn nimmt man von $\pm(x-3) = \pm 1$, das untere Zeichen linker Hand, so folgt aus $-(x-3) = \pm 1$ wiederum $x = 3 \pm 1$.

223.

2. Aufgabe. Die Werte von x aus folgender Gleichung zu finden:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \frac{3x^2}{4} = 2x^2 + 10 - 3x \ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung gehörig geordnet (§ 220), kommt:

$$x^2 - \frac{44}{15}x = \frac{3}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auf beiden Seiten $\left(\frac{22}{15}\right)^2$ addiert:

$$x^2 - \frac{44}{15}x + \left(\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, kommt:

$$x - \frac{22}{15} = \pm\sqrt{\left(\frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Um rechter Hand die Wurzel wirklich auszuziehen, mufs die zweiteilige Gröfse unter dem $\sqrt{}$ Zeichen erst in eine einteilige verwandelt, folglich erst gleichnamig gemacht werden. (§ 214.) Da nun:

$$\frac{22^2}{15^2}+\frac{3}{15}=\frac{22^2}{15^2}+\frac{15.3}{15^2}=\frac{484+45}{15^2}=\frac{529}{15^2}, \text{ so ist:}$$

$$x-\frac{22}{15}=\pm\sqrt{\frac{529}{15^2}}$$

$$x=\frac{22}{15}\pm\frac{\sqrt{529}}{15}$$

$$x=\frac{22\pm\sqrt{529}}{15}$$

$$x=\frac{22\pm 23}{15}$$

Der eine Wert von x ist also: $=\frac{22+23}{15}=3$ und der andere $=\frac{22-23}{15}=-\frac{1}{15}$.

224.

3. Aufgabe. Folgende Gleichung auf x zu reduzieren:

$$acx-bcx=ab-c^2x^2 \ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung geordnet, giebt:

$$c^2x^2+c(a-b)x=ab$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x=\frac{ab}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x+\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4c^2}+\frac{ab}{c^2}.$$

$$x+\frac{a-b}{2c}=\pm\sqrt{\frac{(a-b)^2+4ab}{4c^2}}$$

Löst man die Klammer unter dem Wurzelzeichen, so ist:

$$(a-b)^2+4ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

und folglich: $x=-\frac{a-b}{2c}\pm\frac{a+b}{2c}=\frac{b-a\pm(a+b)}{2c}$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist der eine Wert von $x=\frac{b}{c}$; das untere Zeichen bestimmt den andern Wert von $x=-\frac{a}{c}$ und beiderlei Werte müssen, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leisten.

225.

4. Aufgabe. Ein Vermögen von 16000 ℳ soll unter eine gewisse Anzahl Erben gleichmäfsig verteilt werden. Wären zwei

Erben weniger, so würde jeder 4000 ℳ mehr erhalten; wieviel Erben sind da?

Auflösung. Man setze x Erben, so bekommt jeder $\frac{16000}{x}$. Wären nun zwei Erben weniger, so würde jeder $\frac{16000}{x-2}$ erhalten, und da dies um 4000 gröſser sein soll, so hat man:

$$\frac{16000}{x-2} = \frac{16000}{x} + 4000$$

Die Gleichung durch 4000 dividiert:

$$\frac{4}{x-2} = \frac{4}{x} + 1$$

Mit $x\ (x-2)$ multipliziert:

$$\begin{aligned} 4x &= 4x - 8 + x^2 - 2x \\ x^2 - 2x &= 8 \\ x^2 - 2x + 1 &= 9 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{9} \\ x &= 1 \pm 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Käme es nur darauf an, einen Wert zu finden, welcher der obigen Gleichung Genüge leistet, so hätte man auch $x = 1 - 3 = -2$ nehmen können. Da aber hier nach einer Anzahl Personen gefragt wird, und negative Personen nicht stattfinden können, weil es keine positive giebt, so sieht man den Grund, weshalb hier vorzugsweise das obere Zeichen genommen werden muſste. (Vergl. § 144, Anmerkung 2.)

226.

5. Aufgabe. Eine Dame wurde um ihr Alter befragt und sie antwortete: das 53fache meiner Jahre übertrifft die Zahl 696 um geradesoviel, als das Quadrat meiner Jahre beträgt. Wie alt war die Dame?

Auflösung. Man setzte x Jahre, so muſs laut Bedingung folgende Gleichung stattfinden:

$$53x = 696 + x^2$$

$$x^2 - 53x = -696$$

$$x^2 - 53x + \left(\frac{53}{2}\right)^2 = \frac{53^2}{4} - 696$$

$$x - \frac{53}{2} = \pm\frac{\sqrt{53^2 - 696.4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{53 \pm 5}{2}$$

$$\text{mithin: } x = \frac{53 - 5}{2} = 24$$

Hier mufs aus Höflichkeit das untere Zeichen genommen werden.*)

227.

6. Aufgabe. Eine Linie von $a = 10$ cm Länge in zwei solche Teile zu teilen, dafs sich der kleinere Teil zum gröfsern verhält, wie der gröfsere zur ganzen Länge.

Auflösung. Sei x der kleinste, mithin $a - x$ der gröfste, so mufs, weil $\frac{a-x}{x}$ denselben Quotienten geben soll, wie $\frac{a}{a-x}$, folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{a-x}$$

oder: $\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$

$$(a-x)(a-x) = ax$$
$$a^2 - 2ax + x^2 = ax$$
$$x^2 - 2ax - ax = -a^2$$
$$x^2 - 3ax = -a^2$$
$$x^2 - 3ax + \left(-\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{4} - a^2$$
$$\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$
$$x - \frac{3a}{2} = \frac{\sqrt{5a^2}}{2}$$

folglich: $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$

oder $x = a\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = a\left(\frac{3 \pm 2{,}236\ldots}{2}\right)$

folglich, der Annahme gemäfs, $x = 0{,}382a$.

Mithin ist der kleinste Teil $x = 0{,}382a$, und der gröfste Teil $a - x = a - 0{,}382a = 0{,}618a$, oder, weil hier $a = 10$ gegeben ist, $x = 3{,}82..$cm und $a - x = 6{,}18\ldots$ cm.

Hier mufste offenbar deshalb das untere Zeichen genommen werden, weil das obere Zeichen den gesuchten kleinen Teil x gröfser als die ganze Linie, und mithin den gröfsern Teil $a - x$ negativ gemacht hätte, welches beides ungereimt wäre. Käme es aber blofs darauf an, Werte für x zu finden, welche der Gleichung Genüge leisten, oder würde die Frage so gestellt: die Zahl $a = 10$ in zwei Teile zu teilen, welche die erwähnte Eigenschaft haben, so kann man gleichgültig das obere oder untere Zeichen nehmen. Übrigens sind hier beide Werte von x irrational und deshalb nur näherungsweise anzugeben.

228.

7. Aufgabe. Welche Werte leisten, statt x substituiert, folgender Gleichung Genüge:

$$x^2 = 2x - 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

*) Anfänger pflegen sich darüber zu wundern, dafs die Auflösung hier zwei Antworten giebt und dies für eine Unvollkommenheit der Analysis zu halten. Es ist offenbar gerade eine ihrer Vollkommenheiten (und ein grofser Vorzug vor der Geometrie), dafs ihre Resultate ganz allgemein sind, und dafs sie alle möglichen Fälle und Antworten durch einen einzigen Ausdruck angiebt.

Auflösung. Man hat gleich:

$$x^2-2x=-5$$
$$x^2-2x+1=1-5$$
$$(x-1)^2=-4$$
$$x-1=\pm\sqrt{-4}$$
$$\text{und } x=1\pm\sqrt{-4}\text{*)}$$

229.

8. Aufgabe. Aus folgender Gleichung die durch a, b, c bestimmten Werte von x zu finden:

$$\frac{bc}{a}-ax-c=\frac{bx^2}{a}-\frac{ax^2}{b}-bx$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{ax^2}{b}-\frac{bx^2}{a}-ax+bx=c-\frac{bc}{a}$$

Multipliziert mit ab:

$$a^2x^2-b^2x^2-a^2bx+ab^2x=abc-b^2c$$
$$(a^2-b^2)x^2-ab(a-b)x=bc(a-b)$$
$$x^2-\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}\cdot x=\frac{bc(a-b)}{a^2-b^2}$$
$$x^2-\frac{ab}{a+b}\cdot x=\frac{bc}{a+b} \qquad (\S\ 91.)$$
$$x^2-\frac{ab}{a+b}\cdot x+\left[\frac{ab}{2(a+b)}\right]^2=\frac{a^2b^2}{4(a+b)^2}+\frac{bc}{a+b}$$
$$x-\frac{ab}{2(a+b)}=\frac{\sqrt{a^2b^2+4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$
$$x=\frac{ab\pm\sqrt{a^2b^2+4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$

230.

Kommt in einer Gleichung die unbekannte Grösse mit einem gebrochenen Exponenten oder mit dem Wurzelzeichen behaftet vor, so heisst die Gleichung irrational. Eine irrationale Gleichung lässt sich aber manchmal rational machen, wenn man die Wurzelgrösse

---

*) Substituiert man die für x gefundenen Ausdrücke in (1), so erhält man als Probe der richtigen Rechnung: $(1\pm\sqrt{-4})^2=2(1\pm\sqrt{-4})-5$; denn löst man die Klammern, so kommt:

$$1\pm2\sqrt{(-4)}-4=2\pm2\sqrt{(-4)}-5$$
$$-3\pm2\sqrt{-4}=-3\pm2\sqrt{-4}. \qquad \text{(Siehe § 325.)}$$

erst auf eine Seite allein schafft, und dann beide Seiten auf die dem Wurzelexponenten entgegengesetzte Potenz erhebt. (Wenn man beide Seiten einer Gleichung ins Quadrat (Kubus &c.) erhebt, so wird dadurch die unbekannte Gröſse ebensowenig geändert, als wenn man auf beiden Seiten mit einerlei Zahl multipliziert.) So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$ax = b \pm \sqrt{x}$$

$$ax - b = \pm \sqrt{x}$$

Erhebt man jetzt beide Seiten ins Quadrat, so fällt, weil $(\pm \sqrt{x})^2 = x$, das Wurzelzeichen weg und man erhält dadurch die rationale Gleichung:

$$a^2x^2 - 2abx + b^2 = x$$

$$a^2x^2 - 2abx - x = -b^2$$

$$x^2 - \frac{(1+2ab)}{a^2}x = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$x - \frac{1+2ab}{2a^2} = \pm \sqrt{\left\{\frac{(1+2ab)^2}{4a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right\}}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{(1+2ab)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{1+4ab}}{2a^2}$$

Hat eine Gleichung mehrere irrationale Glieder, so muſs man das vorhergehende Verfahren wiederholen, und sie nach und nach rational machen, so folgt z. B. aus der Gleichung:

$$\sqrt{2x+7} = 2 + \sqrt{5-4x}$$

indem man beide Seiten ins Quadrat erhebt und beachtet, daſs allgemein $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$; und $(a+\sqrt{b})^2 = a^2+b+2a\sqrt{b}$; und $[a\sqrt{b-c}]^2 = a^2(b-c)$;

$$2x+7 = 4+5-4x+4\sqrt{5-4x}$$

$$6x-2 = 4\sqrt{5-4x}$$

wiederum quadriert:

$$36x^2 - 24x + 4 = 80 - 64x$$

$$36x^2 + 40x = 76$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x = \frac{19}{9}$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x + \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{9^2} + \frac{19}{9} = \frac{25+9\cdot 19}{9^2}$$

$$x + \frac{5}{9} = \pm \frac{\sqrt{196}}{9}$$

$$x = \frac{-5 \pm 14}{9}$$

$$x = 1, \text{ und } x = -\frac{19}{9};$$

der eine Wert gilt für das obere, der andere für das untere Vorzeichen der gegebenen Gleichung, welche, weil die Wurzelexponenten gerade sind, so zu lesen ist: $\pm\sqrt{2x+7} = 2 \pm \sqrt{5-4x}$.

231.

Auf gleiche Weise, wie die gemischten quadratischen Gleichungen, können auch alle diejenigen höhern Gleichungen gelöst werden, welche sich auf die Form:

$$x^{2m} + px^m = q$$

bringen lassen, wo nämlich nur zweierlei Potenzen der unbekannten Gröfse vorkommen, und zwar so: dafs der gröfste Exponent gerade 2mal so grofs ist, als der kleinste, indem dann eine solche Gleichung als eine wirklich quadratische dargestellt werden kann.

Setzt man nämlich: $x^m = z$, mithin: $x^{2m} = (x^m)^2 = z^2$, so wird die Gleichung:

$$x^{2m} + px^m = q$$

wenn man einstweilen z statt x^m und z^2 statt x^{2m} substituiert, in folgende quadratische Gleichung verwandelt:

$$z^2 + pz = q$$

$$\text{hieraus: } z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

und wenn man für z dessen Wert x^m wieder zurücksetzt:

$$x^m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

$$\text{mithin: } x = \sqrt[m]{\left\{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right\}}$$

wo auch vor die $m$te Wurzel, wenn sie gerade ist, das doppelte Zeichen $\pm$ gesetzt werden mufs. Beispiele:

232.

Aufgabe. Die Zahl 18 in zwei solche Faktoren zu zerlegen, dafs wenn man jeden Faktor quadriert, die Summe dieser Quadrate $= 45$ ist.

Auflösung. Sei x der eine, mithin $\frac{18}{x}$ der andere Faktor, so hat man:

$$x^2+\frac{18^2}{x^2}=45$$

$$x^4+18^2=45x^2$$

$$x^4-45x^2=-324$$

also, indem man $x^2=z$ und $x^4=z^2$ setzt:

$$z^2-45z=-324$$

$$z^2-45z+\left(\frac{45}{2}\right)^2=\frac{45^2-4.324}{4}$$

$$z-\frac{45}{2}=\frac{\sqrt{729}}{2}$$

$$x^2=\frac{45\pm27}{2}$$

$$z=\pm\sqrt{\left\{\frac{45\pm27}{2}\right\}}$$

Je nachdem man von den beiden doppelten Vorzeichen zwei gleiche oder zwei ungleiche nimmt, erhält man vier verschiedene Werte für x, wovon jedoch, weil die Wurzelgröſse zweiteilig ist, zwei einander gleich sind. Man hat nämlich:

für: $+\,+$; $x=6$ und $\frac{18}{x}=3$

für: $+\,-$; $x=3$ und $\frac{18}{x}=6$

für: $-\,+$; $x=-6$ und $\frac{18}{x}=-3$

für: $-\,-$; $x=-3$ und $\frac{18}{x}=-6$

233.

Aufgabe. Die Zahl 12 in zwei solche Faktoren zu zerlegen, daſs die Differenz der Kuben $=37$ sei.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $\frac{12}{x}$ der andere Faktor, so hat man:

$$x^3-\frac{12^3}{x^3}=37$$

$$x^6-12^3=37x^3$$

$$x^6-37x^3=12^3$$

und wenn man $x^3=z$, und $x^6=x^3.x^3=z^2$ setzt:

$$z^2-37z=1728$$

$$z=\frac{37\pm\sqrt{37^2+4.1728}}{2}$$

$$\text{d. i. } x^3 = \frac{37 \pm \sqrt{8281}}{2}$$

$$\text{mithin } x = \sqrt[3]{\left(\frac{37 \pm 91}{2}\right)}$$

$$\text{also } x = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ oder auch } x = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\text{und } \frac{12}{x} = \frac{12}{4} = 3 \text{ oder auch } \frac{12}{x} = \frac{12}{-3} = -4$$

233 a.

* **Aufgabe.** Man suche x aus folgenden Gleichungen:

(1) $\frac{50}{2x+1} + 3 = \frac{8x-3}{9-4x}$; (2) $b = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$

(3) $\sqrt[2m]{2x^2 + 4ax - b^2} = \sqrt[m]{a+x}$ *) (4) $2x\sqrt[3]{x} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} = 20$ **)

Antwort. Man findet aus:

(1) $x = -2 \pm 4$; (2) $x = \pm \frac{2a\sqrt{b}}{1+b}$

(3) $x = -a \pm \sqrt{2a^2 + b^2}$; (4) $x = \pm 8, = \sqrt{\frac{-125}{8}}$

234.

Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Gröſsen. Sind unter den n Gleichungen mit n unbekannten Gröſsen einige oder auch alle quadratisch, so muſs man jede unbekannte Gröſse durch Elimination der übrigen zu bestimmen suchen. Sind aber mehr als zwei Gleichungen vorhanden, so ist die Auflösung nur in besonders günstigen Fällen möglich.

235.

1. Aufgabe. Es ist gegeben die Summe zweier Zahlen x und y, $= s$, z. B. $= 10$ und ihr Produkt $= p$, z. B. $= 24$; wie lassen sich die beiden Gröſsen x und y durch s und p bestimmen?

Auflösung. Es ist:

$$x + y = s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$xy = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

---

*) Beide Seiten auf die $2m$te Potenz erhoben (§ 207).

**) Man schreibe die vierte Gleichung so: $2x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 20$ und setze $x^{\frac{2}{3}} = z$ &c. (§ 231.)

Die erste Gleichung mit x multipliziert, kommt:

$$x^2+xy=sx \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

hiervon die zweite subtrahiert, kommt:

$$x^2=sx-p$$

hieraus: $x^2-sx=-p$

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (4)$$

substituiert in (1) kommt: $y=\frac{s\mp\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (5)$

(Nimmt man von dem doppelten Zeichen $\pm$ für x das obere, so gilt das untere für y, und so umgekehrt.)

236.

2. Aufgabe. Es ist gegeben: die Summe zweier Gröſsen und die Summe ihrer Quadrate, nämlich:

$$x+y=a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2+y^2=b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Der kürzeste Weg ist hier: vom Quadrate der ersten Gleichung die zweite zu subtrahieren, dann kommt:

$$2xy=a^2-b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Subtrahiert man (3) von (2), so kommt:

$$x^2-2xy+y^2=2b-a^2$$

$$x-y=\sqrt{2b-a^2} \ldots\ldots (4)$$

Aus den Gleichungen (4) und (1) erhält man (§ 167, Anmerk.):

$$x=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

$$y=\frac{a\mp\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

237.

3. Aufgabe. Das Produkt p zweier Gröſsen und die Summe ihrer Quadrate a ist gegeben, nämlich:

$$xy=p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2+y^2=a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Die erste mit 2 multiplizierte Gleichung zur zweiten addiert und davon subtrahiert, erhält man leicht die Summe und Differenz der beiden gesuchten Gröſsen, nämlich:

$$x+y=\sqrt{a+2p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x-y=\sqrt{a-2p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und hieraus nach § 167, Anmerkung:

$$x = \frac{\pm\sqrt{a+2p} \pm \sqrt{a-2p}}{2} \dots\dots\dots (5)$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{a+2p} \mp \sqrt{a-2p}}{2} \dots\dots\dots (6)$$

oder wenn man die Gleichungen (5) und (6) quadriert (§ 186):

$$x^2 = \frac{a+2p+a-2p \pm 2\sqrt{a^2-4p^2}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4p^2}}{2}$$

folglich ist auch: $x = \pm\sqrt{\left\{\frac{a \pm \sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$ und $y = \pm\sqrt{\left\{\frac{a \mp \sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$

238.

4. Aufgabe. Gegeben:

$$3x + 2y = 8 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$4x^2 - 3y^2 = 13 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Auflösung. Den Wert von x aus (1) in (2) substituiert &c., kommt:

$$y = 1,\ x = 2, \text{ oder } y = -\frac{139}{11} \text{ und } x = \frac{122}{11}$$

239.

5. Aufgabe. Gegeben:

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + yz + z^2 = 19 \dots\dots\dots (2)$$

$$x^2 + xz + z^2 = 13 \dots\dots\dots (3)$$

Auflösung. Subtrahiere (2) von (1), und (2) von (3) kommt:

$$x+y+z = \frac{-12}{x-z} \text{ und } x+y+z = \frac{-6}{x-y}$$

Aus beiden Gleichungen folgt $\frac{12}{x-z} = \frac{6}{x-y}$ oder $x = 2y - z$.

Diesen Wert von x in (3) gesetzt, vom Resultat die Gleichung (2) subtrahiert, kommt: $z = \frac{y^2+2}{y}$. Diesen Wert von z in (2) substituiert kommt:

$$y^4 - \frac{13}{3}y^2 = -\frac{4}{3} \text{ woraus: (§ 231)}$$

$$y = \pm 2,\ = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ z = \pm 3,\ = \pm\frac{7}{\sqrt{3}};\ x = \pm 1,\ = \mp\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Achtzehntes Buch.

Von den sogenannten arithmetischen und geometrischen Progressionen oder Zahlen-Reihen.

I. Arithmetische Progressionen.

240.

Eine jede Reihe von Zahlen, bei welcher ein solches Gesetz stattfindet, dafs durchgehends einerlei Differenzen kommen, wenn man ein beliebiges Glied vom nächstfolgenden subtrahiert, heifst eine arithmetische Reihe oder Progression, und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die folgenden Glieder immer grösser oder kleiner werden. Solche arithmetische Progressionen sind z. B.:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$4, 9, 14, 19, 24, 29 \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$8, 5, 2, -1, -4, -7 \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Bei der ersten und zweiten steigenden Progression ist die beständige Differenz 1. Bei der dritten ist sie 5; bei der vierten fallenden Progression -3.

241.

Ist das Anfangs-Glied einer arithmetischen Progression und die beständige Differenz gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu einem beliebigen Gliede entwickeln: man erhält offenbar das zweite Glied, wenn man die Differenz zum ersten addiert, ferner das dritte, indem man die Differenz zu dem erhaltenen zweiten Gliede, oder, was dasselbe ist, die Differenz zweimal zum ersten addiert u. s. f.; z. B. das hundertste Glied, indem man die Differenz entweder einmal zum vorhergehenden neunundneunzigsten Gliede oder 99mal zum ersten addiert.

Soll z. B. 3 das Anfangs-Glied und 4 die Differenz sein, so hat man:

$$\overbrace{3}^{1},\quad \overbrace{3+4}^{2},\quad \overbrace{3+2\cdot 4}^{3},\quad \overbrace{3+3.4}^{4}\ldots\overbrace{3+9\cdot 4}^{\text{10tes Glied}}\ldots$$

$$\text{oder:}\quad 3,\quad 7,\quad 11,\quad 15\ldots\ldots\ldots 39\quad\ldots$$

Soll 15 das erste Glied und —5 die Differenz sein, so hat man:

$$\overbrace{15}^{1},\quad \overbrace{15-5}^{2},\quad \overbrace{15-2\cdot 5}^{3},\quad \overbrace{15-3\cdot 5}^{4}\ldots\overbrace{15-19\cdot 5}^{\text{20stes Glied}}\ldots$$

$$\text{oder:}\quad 15,\quad 10,\quad 5,\quad 0,\quad \ldots -80\quad\ldots$$

242.

Bei einer arithmetischen Reihe mufs man sich folgende fünf Gröfsen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich das Anfangsglied $=a$, die Differenz $=d$, das letzte oder Endglied $=t$ *(terminus)*, die Anzahl der Glieder $=n$ *(numerus)*, und endlich die Summe aller Glieder $=s$. Jede dieser fünf Gröfsen a, d, t, n, s ist eine bestimmte Funktion von irgend drei der übrigen, und kann, wenn letztere in Zahlen gegeben sind, sehr leicht daraus berechnet werden, ohne dafs man zuvor die ganze Reihe zu entwickeln braucht. Die praktisch wichtigsten und oft vorkommenden Fragen sind jedoch nur nach der Gröfse eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

243.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man jedes beliebige Glied einer arithmetischen Reihe berechnen kann, wenn die Stellenzahl n desselben (nämlich das wievielste es sein soll), das Anfangsglied a, und die Differenz d gegeben ist.

Auflösung. Da das 1ste Glied $=a$, so ist (§ 241) das 2te $=a+d$; das dritte $=a+2d$ &c., das $n$te Glied $=a+(n-1)\,d$. Bezeichnet man demnach die Gröfse dieses $n$ten Gliedes mit t, so hat man sogleich:

$$t=a+(n-1)\,d\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

1) Sucht man z. B. das 21ste Glied der arithmetischen Reihe: 5, 8, 11..., so hat man hier: $a=5$; $d=3$; $n=21$.

$$t=5+(21-1)3$$
$$\text{mithin:}\ t=5+20.3=65$$

2) Wie grofs ist das hundertste Glied der arithmetischen Reihe 10, $8\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}\ldots$; da hier $a=10$, $d=-\frac{5}{3}$ und $n=100$, so hat man:

$$t=10+(100-1)(-\tfrac{5}{3})$$
$$t=10-165=-155.$$

244.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man dem ersten und letzten Gliede und der Anzahl der Glieder a, t, n die Summe s einer arithmetischen Reihe berechnen kann.

Auflösung. Betrachtet man die arithmetische Progression aus dem 1sten Gliede durch das schrittweise Zulegen der Differenz gebildet, so daſs diesem Ursprunge gemäſs, jedes folgende Glied die Differenz einmal mehr, als das nächst vorhergehende enthält, so folgt sogleich, daſs je zwei vom Anfange und Ende gleich weit abstehende Glieder addiert, einerlei Summe geben müssen, z. B. das erste und letzte, das zweite und vorletzte &c. Schreibt man z. B. die Reihe 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 zweimal untereinander, und zwar einmal in umgekehrter Ordnung, so daſs sich das letzte Glied unter das erste, das vorletzte unter das zweite stellt &c., und addiert dann je zwei übereinander stehende Glieder, so kommen lauter gleiche Summen, nämlich:

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19
19,	17,	15,	13,	11,	9,	7,	5,	3,	1
20,		20,			20,				20.

Heiſst das 1ste Glied a, das letzte t, und die Differenz d, so ist das zweite Glied $a+d$, das vorletzte $t-d$, das 3te $a+2d$, das vorvorletzte $t-2d$ &c., mithin: $a+t=a+d+t-d=a+2d+t-2d$ &c.

Addiert man also das erste und letzte Glied einer arithmetischen Progression und multipliziert die Summe mit der Anzahl der Glieder, so erhält man die doppelte Summe, folglich durch 2 dividiert, die einfache Summe der ganzen Reihe. Die gesuchte allgemeine Summationsformel ist mithin:

$2s = n(a+z)$

$$s=(a+t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

1) Sucht man z. B. die Summe der ersten tausend Glieder der sogenannten natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 . . . . 1000; so ist hier $a=1$, $t=1000$ und $n=1000$, mithin:

$$s=(1+1000).\frac{1000}{2}=500500$$

2) Sucht man die Summe der folgenden zehn, eine arithmetische Reihe bildenden Zahlen 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, so hat man $a=6$, $t=-12$, $n=10$ und

$$s=(6-12)\frac{10}{2}=-30.$$

245.

Da die bei einer arithmetischen Progression in Betracht kommenden fünf Gröſsen, a, d, n, t, s und deren Zusammenhang in den beiden Gleichungen:

$$t = a + (n-1)d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = (a+t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

enthalten sind, indem die Gröfsen, weil sie sich auf einerlei Reihe beziehen, in der einen Gleichung denselben Wert, wie in der andern haben, mithin beide zugleich stattfinden müssen, so ist klar, dafs, wenn von einer arithmetischen Progression irgend drei der fünf Gröfsen, a, d, n, t, s gegeben sind, die beiden übrigen als unbekannt angesehenen Gröfsen leicht berechnet werden können, indem zu ihrer Bestimmung die beiden Gleichungen (1) und (2) vorhanden sind, woraus man die übrigen Formeln leicht ableiten kann. Sind nämlich die vier Gröfsen, von welchen drei gegeben und eine gesucht sein soll, alle in einer der beiden Grund-Formeln (1), (2) enthalten, so braucht man dieselbe offenbar nur auf die gesuchte unbekannte zu reduzieren. Sind aber die vier Gröfsen in beide Gleichungen zerstreut, so mufs man erst die fünfte Gröfse eliminieren.

246.

1. Aufgabe. Zwischen 4 und 10 sollen acht Zahlen eingeschaltet (interpoliert) werden, so dafs dann alle zehn Zahlen eine arithmetische Progression bilden.

Auflösung. Es ist gegeben: $a=4$, $t=10$, $n=10$ und d gesucht. Alle vier Gröfsen, a, t, n, d sind in der Grundformel $t=a+(n-1)d$ enthalten; reduziert man diese auf die unbekannte Gröfse d, so kommt:

$$d = \frac{t-a}{n-1}$$

$$\text{also } d = \frac{10-4}{10-1} = \frac{2}{3}$$

die fragliche Progression ist mithin:

$$4,\ 4\tfrac{2}{3},\ 5\tfrac{1}{3},\ 6,\ 6\tfrac{2}{3},\ 7\tfrac{1}{3},\ 8,\ 8\tfrac{2}{3},\ 9\tfrac{1}{3},\ 10.$$

247.

2. Aufgabe. Auf einem Dache liegen 21 Reihen Ziegel; in jeder folgenden Reihe einer mehr, im Ganzen 588 Stück; wieviel liegen in der ersten Reihe?

Auflösung. Gegeben $n=21$, $d=1$, $s=588$, und a gesucht. Diese vier Gröfsen, n, d, s, a sind in keiner der beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = (a+t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

allein enthalten, sondern in beiden zerstreut. Man eliminiert also die fünfte Gröfse t (am leichtesten, indem man den Wert von t aus (1) in (2) substituiert), so erhält man eine von t befreite Gleichung, welche die vier Gröfsen n, d, s, a enthält, und die man also nur auf die unbekannte Gröfse a zu reduzieren braucht. Setzt man nämlich in (2) statt t die Gröfse $a+(n-1)d$, so kommt:

$$s=[a+a+(n-1)d]\,\frac{n}{2}$$

$$\text{woraus: } \frac{2s}{n}=2a+(n-1)d$$

$$2a=\frac{2s}{n}-(n-1)d$$

$$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$$

$$\text{daher: } a=\frac{588}{21}-\frac{(21-1)}{2}1=18.$$

248.

3. Aufgabe. Es ist von einer arithmetischen Reihe das erste Glied $a=16$, die Differenz $d=32$, die Summe $s=1600$ gegeben. Wieviel Glieder hat die Reihe?

Auflösung. Die vier Gröfsen a, d, s, n, wovon die letzte aus den ersteren gesucht wird, sind in den beiden Grundformeln:

$$t=a+(n-1)\,d \,\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s=(a+t)\,\frac{n}{2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

enthalten. Eliminieren wir also die fünfte unbekannte und nicht gesuchte Gröfse t, indem wir deren Wert aus (1) in (2) substituieren, so kommt:

$$s=[a+a+(n-1)\,d]\,\frac{n}{2}$$

Diese Gleichung mufs nun auf die gesuchte unbekannte Gröfse n reduziert werden. Man hat (§ 220):

$$2an+n(n-1)\,d=2s$$

$$n^2d+2an-dn=2s$$

$$n^2+\frac{(2a-d)\,n}{d}=\frac{2s}{d}$$

$$n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2+\frac{2s}{d}}$$

$$\text{Folglich } n=\frac{32-2.16}{2.32}\pm\sqrt{\left(\frac{32-2.16}{2.32}\right)^2+\frac{2.1600}{32}}$$

$$n=\sqrt{\frac{2.1600}{32}}=10.$$

249.

4. Aufgabe. Von einer arithmetischen Progression ist das 1ste Glied $=a$, die Differenz $=d$ und die Summe aller Glieder $=s$ gegeben; man sucht die Formel für das Endglied t.

Auflösung. Die beiden unbekannten Gröfsen t, n der fraglichen Progression sind in den beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)\,d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = (a+t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zerstreut enthalten. Wir eliminieren also die nicht verlangte unbekannte Gröfse n, indem wir am bequemsten ihren Wert aus (1) ziehen und in (2) substituieren.

$$n = \frac{t-a}{d} + 1$$

mithin: $s = (a+t) \cdot \dfrac{t-a+d}{2d}$

hieraus: $t = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds + (a - \tfrac{1}{2}d)^2}$

II. Geometrische Progressionen.

250.

Eine Zahlenreihe, bei welcher durchgehends ein solches Gesetz stattfindet, dafs immer gleiche Quotienten kommen, wenn man mit einem beliebigen Gliede in das nächstfolgende dividiert, heifst eine geometrische Progression und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die Glieder immer gröfser oder kleiner werden. Der beständige Quotient heifst hier der Exponent der Reihe. Geometrische Reihen oder Progressionen sind z. B. folgende:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96 \ldots\ldots$$

$$9,\ 3,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27} \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64} \ldots\ldots$$

Bei der 1sten steigenden Progression ist 2 der Exponent, bei der 2ten fallenden Progression $\frac{1}{3}$, bei der 3ten $\frac{1}{2}$ der Exponent.

251.

Ist das Anfangs-Glied und der Exponent einer geometrischen Progression gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu jedem beliebigen Gliede entwickeln. Man erhält offenbar das 2te Glied, indem man das erste mit dem Exponenten multipliziert, ferner das 2te Glied mit dem Exponenten, oder was dasselbe ist, das 1te Glied mit der 2ten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 3te Glied &c., das 99ste Glied mit dem Exponenten oder das 1ste Glied mit der 99sten Potenz vom Exponenten multipliziert, giebt das 100ste Glied &c.

Soll z. B. 2 das erste Glied und 3 der Exponent sein, so kommt die Reihe:

$$\underbrace{2}_{1};\quad \underbrace{2\cdot 3}_{2};\quad \underbrace{2\cdot 3^2}_{3};\quad \underbrace{2\cdot 3^3}_{4};\quad \underbrace{2\cdot 3^4}_{5}\cdots\underbrace{2\cdot 3^9}_{\text{10tes Glied}}\cdots$$

oder: 2, 6, 18, 54, 162 ....

Soll 64 das erste Glied und $\frac{1}{2}$ der Exponent sein, so hat man:

$$\underbrace{64}_{1};\quad \underbrace{64\cdot\tfrac{1}{2}}_{2};\quad \underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^2}_{3};\quad \underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^3}_{4}\cdots\underbrace{64\cdot(\tfrac{1}{2})^9}_{10}\cdots$$

oder: 64, 32, 16 8........... $\frac{1}{8}$.......

252.

Sowie bei der arithmetischen Reihe, mufs man sich auch bei der geometrischen Reihe folgende fünf Gröfsen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich: das Anfangsglied $=a$, den Exponenten $=e$, die Anzahl der Glieder $=n$, das Endglied $=t$, und die Summe aller Glieder $=s$.

Jede dieser fünf Gröfsen ist eine bestimmte Funktion von je drei der übrigen, und kann, sobald diese drei in bestimmten Zahlen gegeben sind, daraus berechnet werden, ohne dafs man die Reihe selbst zu entwickeln braucht. Die wichtigsten Fragen sind jedoch nach der Gröfse eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

253.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Gröfse t eines bestimmten Gliedes berechnen kann, wenn die Stellzahl n desselben, das erste Glied a, und der Exponent e der Progression gegeben sind.

Auflösung. Nach § 251 ist die Reihe:

$$\underbrace{a}_{1},\quad \underbrace{ae}_{2},\quad \underbrace{ae^2}_{3},\quad \underbrace{ae^3}_{4},\quad \underbrace{ae^4}_{5}\cdots\underbrace{ae^{n-1}}_{n\text{tes Glied}}$$

Man hat also: $t = a\cdot e^{n-1}$ ....(1)

In Worten: Um die Gröfse des $n$ten Gliedes einer geometrischen Progression zu finden, mufs man den Exponenten auf die $(n-1)$te Potenz erheben und damit das erste Glied multiplizieren.

Anmerkung. Ist n sehr grofs, so wird die Berechnung von t durch Logarithmen ungemein erleichtert. Überhaupt kommen die Logarithmen bei Aufgaben über geometrische Progressionen sehr zu statten, was jedoch erst im 21. Buche gezeigt werden kann, und bis dahin werden wir nur solche Erläuterungs-Beispiele wählen, welche sich ohne Logarithmen berechnen lassen.

Beispiel. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist $\frac{1}{64}$, der Exponent 2, wie grofs ist das neunte Glied?

Auflösung. Gegeben $a = \frac{1}{64}$, $e = 2$, $n = 9$ und t gesucht.

$$t = a \cdot e^{n-1}$$
$$t = \tfrac{1}{64} \cdot 2^{9-1} = 4.$$

254.

Aufgabe. Die Summationsformel (das summatorische Glied) zu finden, nach welcher man aus dem ersten Gliede a, dem Exponenten e und dem letzten Gliede t die Summe der ganzen Progression berechnen kann.

Auflösung. Die Auflösung beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man bezeichne die Summe der geometrischen Progression: $a + ae + ae^2 \cdot\cdot + t$ mit s, nämlich:

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + \frac{t}{e^2} + \frac{t}{e} + t \,\ldots\ldots\ldots (1)$$

multipliziere diese Gleichung (1) (in welcher das vorletzte Glied offenbar $\frac{t}{e}$ das vorvorletzte $\frac{t}{e^2}$ ist) auf beiden Seiten mit dem Exponenten e, so kommt:

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \cdots + \frac{t}{e} + t + te \,\ldots\ldots (2)$$

subtrahiert man nun die 1ste Gleichung von der 2ten, so erhält man:

$$es - s = te - a$$
$$(e-1)\, s = te - a$$
$$s = \frac{te - a}{e-1} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In Worten: Um die Summe einer geometrischen Progression zu finden, mufs man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplizieren, hiervon das erste Glied subtrahieren und dann durch den um 1 verminderten Exponenten dividieren.

Der für s erhaltene Ausdruck findet häufig Anwendung und ist daher wohl zu merken.

Beispiele. Wie grofs ist die Summe der folgenden geometrischen Progression: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{1024}$. (§ 329.)

Auflösung. Gegeben: $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{1024}$, s gesucht:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$
$$s = \frac{\frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{2047}{2048}}{-\frac{1}{2}}$$
$$s = 1\tfrac{1023}{1024}.$$

255.

Aus den beiden Grundformeln für die geometrische Progression:

$$\left.\begin{array}{l} t = a \cdot e^{n-1} \ldots\ldots\ (\mathrm{I}) \\ s = \dfrac{te - a}{e - 1} \ldots\ldots\ (\mathrm{II}) \end{array}\right\}$$

müssen nun, wenn irgend drei der Gröſsen a, e, n, t, s gegeben sind, die Formeln für die beiden übrigen auf ähnliche Weise, wie im § 245 gezeigt, abgeleitet werden. Einige auf geometrische Reihen führende Aufgaben lassen sich vermittelst Logarithmen lösen, andere führen auf höhere verwickelte Gleichungen, deren Auflösung die höhere Analysis lehrt.

256.

Auch Buchstaben-Ausdrücke, welche geometrische Progressionen bilden, können nach Formel II sehr kurz in eine Summe zusammengezogen werden. So sieht man z. B. gleich, daſs die vielteilige Gröſse:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 + bz^4 + \cdots bz^{n-1}$$

eine geometrische Progression bildet, wo b das erste, bz^{n-1} das letzte Glied und z der Exponent ist. Substituiert man also diese Gröſsen statt a, t und e in die Formel $s = \dfrac{te - a}{e - 1}$, so ist:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 \cdots + bz^{n-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$1 + e + e^2 + e^3 + e^4 \cdots + e^{n-1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots + x^{2n} = \frac{-x^{2n+1} - 1}{-x - 1} = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x}$$

$$y + x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^4}{y^3} + \cdots + \frac{x^n}{y^{n-1}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{(x - y)\, y^{n-1}}$$

Neunzehntes Buch.

Von den Logarithmen.

257.

Erst als man an Logarithmen dachte und vollständige Tafeln für sie berechnete, wurde die praktische Arithmetik zur Vollkommenheit gebracht. Rechnungen, die noch zu Keplers Zeiten ganze Tage und Wochen erforderten, oder die man gar, wegen unübersteiglicher praktischer Schwierigkeiten, zum grofsen Nachteil der Wissenschaft und des bürgerlichen Wohls ganz aufgeben mufste, können jetzt mit Hilfe der Logarithmen in wenig Minuten, selbst von einem Anfänger der Mathematik gemacht werden. Und nicht ganz unpassend sagt daher ein Engländer: die Logarithmen sind in der Arithmetik das, was die Dampfmaschine in der Mechanik ist.

Um nur zuvor einen ungefähren Begriff von dieser äusserst wichtigen und schönen Erfindung zu geben und deren praktischen Nutzen fühlbar zu machen, wollen wir einmal von einer ganz beliebigen Zahl, z. B. von 2, mehrere von 0 an aufeinander folgende Potenzen entwickeln: $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$ &c. und dann, der bessern Übersicht wegen, diese Potenzen samt den dazu gehörigen Exponenten, durch einen Strich getrennt, so nebeneinander stellen, dafs die Potenzen voran und die zugehörigen Exponenten gleich daneben stehen. Die Basis 2 und das Gleichheitszeichen lassen wir der Einfachheit wegen aus, und schreiben also statt $1 = 2^0$, $128 = 2^7$ &c., kürzer: $1|0$; $128|7$ &c.

Potenzensystem.

Potenzen	Exponenten	Potenzen	Exponenten	Potenzen	Exponenten
1	0	512	9	262144	18
2	1	1024	10	524288	19
4	2	2048	11	1048576	20
8	3	4096	12	2097152	21
16	4	8192	13	4194304	22
32	5	16384	14	8388608	23
64	6	32768	15	16777216	24
128	7	65536	16	:	:
256	8	131072	17	:	:

258.

Erinnert man sich nun der vier allgemeinen Regeln der Potenzenrechnung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \ldots\ldots & (1) \\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ (a^n)^m = a^{mn} \ldots\ldots\ldots & (3) \\ \sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}} \ldots\ldots\ldots & (4) \end{array}\right\} (\S\ 204 \text{ bis } 208)$$

so führen diese unmittelbar auf den Nutzen eines solchen Potenzensystems. Die Addition und Subtraktion ausgenommen, können nämlich alle übrigen Operationen an den in der ersten Spalte stehenden Zahlen in die nächst verwandten kürzern Operationen, an den daneben stehenden Exponenten verwandelt werden, nämlich die Multiplikation in eine Addition, die Division in eine Subtraktion, die Potenzierung in eine Multiplikation und endlich die Wurzelausziehung in eine einfache Division. Diese bedeutenden Vorteile können wir schon durch vorstehendes, obgleich noch höchst unvollkommenes, Potenzensystem erläutern. Beispiele:

1) Sind zwei oder mehrere Zahlen, z. B. 128 und 512, miteinander zu multiplizieren, so suche man diese Faktoren in der ersten Spalte, unter der Überschrift Potenzen, auf und addiere nur die daneben stehenden Exponenten; alsdann ist die zur Summe der Exponenten gehörige Zahl das gesuchte Produkt. Man hat nämlich aus der Tafel:

Expon. von 128 = 7
Expon. von 512 = 9
Potenz zum Expon. 16 = 65536

Der Grund hievon ist leicht einzusehen. Alle Zahlen, welche in der ersten Spalte stehen, sind Potenzen von einerlei Basis. Es ist nämlich in unserm Beispiele:

$$128 = 2^7$$
$$512 = 2^9$$

Mithin: $128 \cdot 512 = 2^7 \cdot 2^9 = 2^{16}$ (§ 204), folglich muſs auch die neben dem Exponenten $16 = (2)^{16}$ stehende Zahl $65536 = 128 \cdot 512$ sein.

2) Sind zwei in der ersten Spalte stehende Zahlen durch einander zu dividieren, so subtrahiere man nur den Exponenten des Divisors von dem des Dividend, suche den Rest unter der Überschrift Exponenten auf, so ist die dazu gehörige Zahl der gesuchte Quotient. So findet man z. B.:

$$\frac{2097152}{256} = 8192$$

Es ist nämlich: Expon. von 2097152 = 21
" " 256 = 8

Potenz zum Expon. 13 = 8192

$$\text{denn: } \frac{2097152}{256} = \frac{2^{21}}{2^8} = 2^{21-8} = 2^{13}. \qquad (\S\ 205.)$$

3) Um eine in der ersten Spalte stehende Zahl auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur den daneben stehenden Exponenten mit dem neuen zu multiplizieren, so findet man neben dem Produkte in der zweiten Spalte die gesuchte Potenz in der ersten. So ist z. B. $16^5 = 1048576$. Man hat nämlich:

Expon. 16 = 4
5

Potenz zum Expon. 20 = 1048576

$$\text{denn: } 16 = 2^4\text{; mithin: } 16^5 = (2^4)^5 = 2^{20}. \qquad (\S\ 207.)$$

4) Soll aus einer in der ersten Spalte stehenden Zahl eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den zugehörigen Exponenten durch den Wurzelexponenten zu dividieren und die neben dem Quotienten gefundene Zahl als die verlangte Wurzel herauszuschreiben. So findet man z. B.:

$$\sqrt[7]{2097152} = 8$$

Expon. von 2097152 = 21
Potenz zum Expon. (21 : 7 =) 3 = 8
denn: $2097152 = 2^{21}$,

$$\text{folglich } \sqrt[7]{2097152} = \sqrt[7]{2^{21}} = 2^3. \qquad (\S\ 208.)$$

259.

So praktisch brauchbar aber ein Potenzsystem, wie das vorstehende, in einigen Fällen schon sein möchte, so würde es doch wegen der grofsen Lücken in seiner jetzigen Unvollkommenheit von höchst beschränktem Gebrauche bleiben. Wollte man z. B. mit den zwischen 2 und 4, 4 und 8, 8 und 16 &c. fallenden Zahlen rechnen, so würde das Potenzsystem die erwähnten Rechnungsvorteile nicht gewähren können, weil diese Zahlen und deren Exponenten nicht darin enthalten sind.

Würden aber diese Zahlen noch eingeschaltet und die dazu gehörigen Exponenten berechnet und eingetragen, so würde auch das System gleich eine allgemeine praktische Brauchbarkeit haben und man hätte dann ein sogenanntes *Logarithmen-System.* In der Kunstsprache wird nämlich ein solches vollständiges Potenzen-System *Logarithmen-System* genannt, die Zahlen in der ersten Spalte heifsen schlechthin Zahlen *(Numeri)* und ihre Begleiter, die Exponenten, heifsen hier Logarithmen. Wir haben also für eine und dieselbe Sache zweierlei Benennungen, denn im wesentlichen sind die Kunstwörter: Grundzahl oder *Basis;* Potenzen, *Numeri;* Exponenten, *Logarithmen* gleichbedeutend.

Das Bedürfnis, ein solches Logarithmen-System zu haben, ist schon früh gefühlt und geäufsert worden. Allein keiner wollte sich der Berechnung der den eingeschalteten Zahlen zugehörigen Logarithmen unterziehen, indem, wie § 262 zeigen wird, dieses, nach der Elementar-Arithmetik eine unsäglich mühsame, die Kräfte eines Privatmannes weit übersteigende Arbeit ist. Wir können uns daher Glück wünschen, dafs diese wahre Riesenarbeit unserer nicht mehr harrt, indem wir jetzt mit Logarithmen-Systemen reichlich versorgt sind. Die besten und vollständigsten Logarithmen von 7 Decimalstellen sind die nun in 2. Auflage vorhandenen Bruhns'schen (Preis: 3 ℳ), die besten 5stelligen die von Wittstein und Schlömilch.

Die Logarithmen wurden im Anfange des 17. Jahrhunderts von Byrg, einem Deutschen, und Napier, einem Schottländer, erfunden. Der erste aber, der die Anfertigung vollständiger Logarithmen-Tafeln ernstlich unternahm und mit 8 Gehilfen ein ganzes Jahr darauf verwandte, war Henry Briggs, ein Schottländer.

260.

Es ist offenbar ganz willkürlich, auf welcher Basis ein Logarithmensystem errichtet wird. Ist das System einmal fertig, so braucht man die Basis gar nicht weiter zu kennen. In der kleinen Tafel § 257 wurde die Zahl 2 als Basis angenommen. Man hätte aber statt dessen auch jede andere Zahl nehmen können, und das danach entstandene System würde ganz dieselben Dienste geleistet haben. Aus diesem Grunde, weil nämlich die Wahl der Basis willkürlich ist, hat Briggs, bedeutender Rechnungsvorteile wegen, die Grundzahl 10 unsers Zahlensystems auch als Grundzahl seines Logarithmensystems angenommen.

Dieses System wird allgemein gebraucht, weshalb man es auch das allgemeine, oder nach seinem Begründer, das Briggs'sche, oder auch das künstliche System nennt. Es giebt nämlich noch ein anderes, sogenanntes natürliches System, welches zwar für die Praxis nicht so bequem ist, aber unmittelbar aus der höhern Analysis hervorgeht und in der höhern Mathematik besonders wichtig ist.

In der Voraussetzung, dafs der Anfänger ein Briggs'sches System, z. B. das Bruhns'sche, zur Hand habe, wollen wir nun dasselbe näher erklären. Denn wenn auch den meisten Logarithmen-Tafeln eine vollkommene Theorie und Gebrauchs-Anweisung vorgedruckt ist, so giebt es doch einige Punkte, welche dem Anfänger teils nicht deutlich genug sind, teils nicht genug beachtet werden.

Wer aber Logarithmentafeln mit dem gröſstmöglichsten Nutzen und Sicherheit gebrauchen will, der muſs sich die etwas künstliche Einrichtung derselben, wo ein enger Raum so viel umfaſst, wohl merken, und ein- für allemal gesagt, sich eine tüchtige Fertigkeit im Gebrauch derselben erwerben.

261.

Die gebräuchlichsten Logarithmentafeln enthalten die Logarithmen aller 1- bis 5ziffrigen Zahlen und zwar bis auf 7 Decimalen berechnet, welches für gewöhnliche Praxis vollkommen genügt. Der Anfang sieht so aus:

Numerus	Logarithmen	Numerus	Logarithmen
1	0,0000000	10	1,0000000
		:	
2	0,3010300	99	1,9956352
3	0,4771213	100	2,0000000
		:	
4	0,6020600	999	2,9995655
5	0,6989700	1000	3,0000000
		:	
6	0,7781513	9999	3,9999566
:	:	:	:
:	:	:	:

welches also, nach § 257, andeutet, daſs $1 = 10^0$;

$$2 = 10^{0{,}30103} = 10^{\frac{30103}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{30103}};$$

$$3 = 10^{0{,}4771213} \text{ \&c.}; \quad 10 = 10^1; \quad 100 = 10^2$$

Die Briggs'schen Logarithmen sind nämlich nichts weiter, als die Exponenten derjenigen Potenzen, auf welche die Grundzahl 10 erhoben werden muſs, um die neben den Logarithmen stehenden Zahlen hervorzubringen. Das Gleichheitszeichen und die Basis 10 unter jedem Logarithmus muſs man sich hinzudenken. Hiernach ist also 0 der Logarithmus von 1 (denn keine andere, als die 0te Potenz von der Grundzahl, kann die Einheit geben); von 2 ist 0,3010300, von 10 ist 1 der Logarithmus (denn keine andere, als die 1ste Potenz von der Grundzahl, kann die Grundzahl wiedergeben). Man hat demnach in Zeichen: log. von $1 = 0$, oder kurz:

$$\text{log. } 1 = 0{,}0000000; \qquad \text{log. } 10 = 1{,}0000000;$$
$$\text{〃 } 2 = 0{,}3010300; \qquad \text{〃 } 99 = 1{,}9956352$$

&c.

262.

Die höhere Analysis bietet Mittel dar, nach welchen ein geübter Rechner die Logarithmen stets in sehr kurzer Zeit berechnen kann. Da wir aber diese Vorkenntnisse nicht voraussetzen dürfen, so müssen wir uns begnügen, hier nur das mühsame Elementar-Verfahren geschichtlich zu erwähnen, nach welchem Briggs, zu dessen Zeiten die neuere, vollkommenere Mathematik noch nicht erfunden war, die Logarithmen berechnet haben soll.

Um z. B. den Logarithmus von 5 zu finden, verfuhr man folgendermafsen:

Da 5, als Potenz von 10 betrachtet, zwischen 10^0 und 10^1 fällt, indem $10^0 < 5$ und $10^1 > 5$ ist, so versuche man, ob vielleicht 10 auf die $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$te Potenz erhoben, die Zahl 5 giebt. Man hat nun $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,1622776601 \cdots\cdots$ Folglich ist $10^{\frac{1}{2}} < 5$; der log. 5 liegt daher zwischen den schon engern Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1, indem $10^{\frac{1}{2}} < 5$ und $10^1 > 5$. Auf diese Weise kann man die Grenzen immer enger zusammenziehen, indem man nach und nach die halbe Summe des kleinern und gröfsern Exponenten, zwischen welche der gesuchte fällt, auf die Probe nimmt und mithin nie eine höhere Wurzel als die zweite zu ziehen nötig hat. Erhebt man 10 auf die $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$ Potenz, so kommt (§ 210):

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{10^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{(10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}})} = \sqrt{10 \cdot (3,1622\cdot\cdot)} = 5,6234132\cdot\cdot$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{1}{2}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{also } 10^{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}} = 10^{\frac{5}{8}} = \sqrt{10^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{(10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{2}})} \\ = \sqrt{(5,623\cdot\cdot)(3,1622\cdot\cdot)} = 4,216965034\cdot\cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{5}{8}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10^{\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2}} = 10^{\frac{11}{16}} = \sqrt{(10^{\frac{5}{8}} \cdot 10^{\frac{3}{4}})} \\ = \sqrt{(4,2169\cdot\cdot)(5,623\cdot\cdot)} = 4,869675252\cdot\cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{11}{16}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10^{\frac{\frac{11}{16}+\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{(10^{\frac{11}{16}} \cdot 10^{\frac{3}{4}})} = 5,232991\cdot\cdot \\ \qquad\qquad \text{\&c.} \end{array}$$

Nachdem man dies Verfahren etwa 22mal wiederholt hatte, fand man endlich:

$$10^{\frac{2931693}{4194304}} = 5 \text{ (genauer: } = 5,00000086\cdot\cdot)$$

Mithin ist näherungsweise: log. $5 = \frac{2931693}{4194304}$, oder wenn man, der Einfachheit wegen, und weil dann bequemer damit zu rechnen ist, den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, bis auf 7 Decimalen genau:

$$\log.\ 5 = 0{,}6989700\ldots\ldots$$

Theoretisch genau lassen sich die Logarithmen nicht berechnen, weil sie sogenannte irrationale Zahlen sind, deren Decimalen, gleich denen einer irrationalen Wurzel, bis ins Unendliche fortlaufen.

Ursprünglich sind die Logarithmen auf mehr Decimalen berechnet worden. Diese werden aber, ihrer Unbequemlichkeit wegen, höchst selten und nur bei den allerfeinsten Rechnungen gebraucht. Die Logarithmen mit 7 Decimalen sind für die alltägliche Praxis mehr als hinreichend. Wer sehr viele numerische Rechnungen zu machen hat, kann sich neben den siebenziffrigen Logarithmen auch noch der kleinern fünfziffrigen Logarithmen bedienen. Diese sind bequemer, wenn auch nicht in allen, doch in vielen Fällen ausreichend.

263.

Hätten alle Logarithmen nach dem eben erwähnten mühsamen Verfahren berechnet werden müssen, so würde die Arbeit sicher unterblieben sein, und auf die Hilfe der neueren Analysis gewartet haben. Dies war aber nicht nötig. Man brauchte auf diese Weise höchstens nur die Logarithmen der ersten Primzahlen zu berechnen, woraus dann die übrigen durch eine leichte Addition und Multiplikation gefunden werden. Denn alle Zahlen lassen sich in Primzahlen, als deren Faktoren, auflösen. Kennt man aber die Logarithmen mehrerer Faktoren, so hat man auch, durch unmittelbare Addition derselben, den Logarithmus ihres Produkts. Addiert man z. B. die Logarithmen von 2 und 3, so hat man den log. von 6. Der Grund ist leicht einzusehen, denn setzt man der Kürze wegen log. $2 = a$ log. $3 = b$, so ist $2 = 10^a$ und $3 = 10^b$, mithin: $2 \cdot 3 = 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$.

Anmerkung. Macht man jedoch die Vergleichung mit den Tafeln, indem man z. B. log. 2 und log. 3 wirklich addiert, um zu sehen, ob die Summe mit log. 6 übereinstimmt, so mufs man hierbei, wie überhaupt bei allen logarithmischen Rechnungen, folgende Bemerkungen wohl beachten: Bei der Berechnung der Logarithmen-Tafeln wurden mehr als 7 Decimalen gebraucht. Von diesen Decimalen sind die 7 ersten dergestalt eingetragen, dafs die 7te Decimale um 1 vergröfsert wurde, wenn die darauffolgende 8te Decimale über 5 war. Aus dieser Ursache kann also die Richtigkeit der letzten Decimale nicht verbürgt werden. Diese Abweichung von der Richtigkeit kann daher, wenn auch für gewöhnliche Praxis immer unschädlich, dennoch während der Rechnung beträchtlicher werden und auch noch auf die der letzten Ziffer vorausgehenden Stellen Einflufs haben. Addiert man nämlich viele Logarithmen oder multipliziert sie mit einer grofsen Zahl, so mufs das Resultat, wenn die letzte Decimale zu grofs war, auch zu grofs werden, und wenn die letzte Decimale nicht zu grofs war, wegen Vernachlässigung des Beitrags, den die 8te und 9te Decimale gegeben hätten, zu klein werden. In solchen Fällen können also die letzten Decimalen der Logarithmen von der Wahrheit abweichen. Dividiert man aber diese Logarithmen wieder, so verhält sich die Sache umgekehrt, indem der etwaige Fehler der letzten Ziffer mit dividiert, und folglich wieder kleiner wird.

264.

Weil die 1ste Potenz von 10 die kleinste zweiziffrige, die 2te Potenz die kleinste dreiziffrige, die 3te Potenz die kleinste vierziffrige Zahl giebt &c., so müssen im Briggs'schen System (als notwendige Folge der Grundzahl 10) die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen gröfser als 0 und kleiner als 1, mithin echte Brüche, die Logarithmen aller zwischen 10 und 100 fallenden Zahlen aber >1 und <2, mithin gemischte Zahlen sein. Die ganze Zahl, welche ein Logarithmus enthält, heifst die Kennziffer, und der angehängte Decimalbruch die Mantisse desselben. Es ist ferner klar, dafs im Briggs'schen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, welche keine ganzzahligen Potenzen von 10 sind, gemischte Zahlen sind, und dafs die Kennziffer eines Logarithmus immer eine Einheit weniger zählen mufs, als die zugehörige Zahl Ziffern hat.

Für alle einziffrigen Zahlen ist 0 die Kennziffer der zugehörigen Logarithmen, für alle zweiziffrigen Zahlen 1, für dreiziffrige 2 &c.

Da man also aus der Anzahl Ziffern einer Zahl zugleich auch die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus weifs, so konnten deshalb auch, zur Ersparung des Raums, die Kennziffern der Logarithmen aus den Tafeln wegbleiben, und dies ist der erwähnte Vorteil, weshalb Briggs die Zahl 10 als Grundzahl angenommen hat. Für alle Zahlen von 1000 an, findet man daher blofs die Mantisse der zugehörigen Logarithmen; die Kennziffer mufs der Rechner selber hinzufügen. Hiernach hat man aus den Tafeln (von Bruhns) mit Zusetzung der Kennziffern:

$$\log.\ 4571 = 3{,}6600112;$$
$$\log.\ 4577 = 3{,}6605809$$
&c.

265.

Da die Logarithmen mehrerer Faktoren addiert, den Logarithmus ihres Produkts geben, und ferner die Logarithmen aller einfachen Rangzahlen ganze Zahlen, also blofse Kennziffern sind, deren Mantissen $=0$, nämlich: $\log.\ 10=1$; $\log.\ 100=2$; $\log.\ 1000=3$ &c., so ist klar, dafs wenn man eine Zahl mit 10, 100, 1000 &c. multipliziert, die Mantisse ihres Logarithmus deshalb noch immer dieselbe bleibt und blofs die Kennziffer sich ändert. Kennt man z. E. den Logarithmus von 2, so kennt man auch die Logarithmen von $20=2\cdot 10$, von $200=2\cdot 100$ &c. Aus dem Logarithmus von 47 hat man gleich mit gehöriger Veränderung der Kennziffer auch die Logarithmen von 470, 4700, 47000 &c. Man hat z. B. aus den Tafeln:*)

*) Aufser den nur störenden Kennziffern hätten also auch alle 1-, 2- und 3ziffrigen Zahlen und deren Logarithmen aus den Tafeln wegbleiben können, da man beim Rückwärtsaufschlagen der Zahlen zu gegebenen Logarithmen diese ersten Seiten doch nicht gebrauchen kann. Die Tafeln

log.	$2 = 0,3010300$;	log.	$47 = 1,6720979$
"	$20 = 1,3010300$;	"	$470 = 2,6720979$
"	$200 = 2,3010300$;	"	$4700 = 3,6720979$
"	$2000 = 3,3010300$;	"	$47000 = 4,6720979$
"	$200000 = 5,3010300$;	"	$47000000 = 7,6720979$

&c.

266.

Da nun umgekehrt der Logarithmus eines Quotienten (also auch von einem Bruche, den man als eine angedeutete Division betrachten kann) erhalten wird, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem des Dividend subtrahiert, so folgt sowohl hieraus, als aus § 265, dafs, wenn man eine Zahl durch 10, 100, 1000 &c. dividiert, die Kennziffer des Logarithmus jener Zahl um so viele Einheiten kleiner wird, als die einfache Rangzahl Nullen hat, die Mantisse aber unverändert bleibt. So ist z. B.:

$$\log.\ 4571 = 3,6600112 \text{ und folglich}$$
$$\log.\ \tfrac{4571}{10} = 2,6600112$$
$$\log.\ \tfrac{4571}{100} = 1,6600112$$

denn es ist z. B. $\frac{4571}{100} = \dfrac{10^{3,6600112}}{10^2} = 10^{1,6600112}$

267.

Aus vorstehendem Paragraphen ergiebt sich nun von selber die Regel, wie man zu einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch den zugehörigen Logarithmus findet: Man setze nämlich die, zu der ganzen Zahl gehörige, Kennziffer und schlage dann den Logarithmus auf, als wenn das, die ganze Zahl und Bruch trennende, Decimalzeichen gar nicht da stände. So ist z. B. $\frac{4571}{10} = 457,1$; $\frac{4571}{100} = 45,71$ &c., daher:

$$\log.\ 457,1 = 2,6600112$$
$$\log.\ 45,71 = 1,6600112$$
$$\log.\ 4,571 = 0,6600112$$

---

brauchten erst mit den 5ziffrigen Zahlen anzufangen, denn will man z. E. den Logarithmus von 2, 20 oder 200 haben, so findet man diesen mit Vorsetzung der gehörigen Kennziffer neben 20000. Ebenso findet man die Logarithmen von 17, 170, neben 17000, von 83, 830, neben 83000 &c.

Die ersten Seiten der Logarithmentafeln gewähren aber in den Fällen eine Bequemlichkeit, wenn man zu gleicher Zeit die Logarithmen mehrerer 1- bis 3ziffrigen Zahlen aufschlagen mufs, indem man diese dann ohne vieles Blättern nahe beieinander findet.

268.

Um den zu einer ganzen Zahl mit angehängtem gewöhnlichen Bruche, z. B. den zu $36\frac{3}{4}$ gehörenden Logarithmus zu finden, kann man auf zweierlei Weise verfahren. Entweder man verwandele den gewöhnlichen Bruch erst in einen Decimalbruch und suche dann den Logarithmus nach der vorigen Regel, oder man richte die gemischte Zahl ein, und subtrahiere dann den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers. Da z. B. $36\frac{3}{4} = 36{,}75$ oder auch $36\frac{3}{4} = \frac{147}{4}$, so ist auch:

$$\log.\ 36\tfrac{3}{4} = \log.\ 36{,}75 = \log.\ \tfrac{147}{4}$$

$$\begin{array}{rr} \log.\ 36{,}75 = 1{,}5652573;\ \log.\ 147 = & 2{,}1673173 \\ \cdots\cdots\ 4 = & 0{,}6020600 \\ \hline \log.\ \tfrac{147}{4} = & 1{,}5652573 \end{array}$$

269.

Um die zu echten Brüchen gehörigen Logarithmen und deren Kennziffer aus den Tafeln entnehmen zu können, überlege man erst Folgendes: Es ist $10^0 = 1$, folglich muſs der Exponent der Basis 10 offenbar kleiner als 0 sein, wenn der Wert der Potenz von 10 kleiner als 1, also ein echter Bruch sein soll. So ist z. B. $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$ (s. § 205). Mithin müssen die Logarithmen aller e c h t e n Brüche notwendig negativ sein, und zwar je kleiner der echte Bruch, je gröſser die absolute Zahl des dazu gehörigen negativen Logarithmus. *)

Den zu einem echten Decimalbruch (d. i. ein solcher, der keine Ganzen bei sich hat) gehörenden negativen Logarithmus würde man nach § 266 erhalten, indem man den Decimalbruch mit untergelegtem Nenner schriebe und dann den Logarithmus des Zählers von dem des Nenners subtrahierte. Es wäre z. B.:

$$\begin{array}{rl} \text{weil}\ \ 0{,}0564 = & \frac{564}{10000} \\ \text{und}\ \log.\ 564 = & 2{,}7512791 \\ \log.\ 10000 = & 4{,}0000000 \\ \hline \log.\ 0{,}0564 = & -\ 1{,}2487209 \end{array}$$

$$\text{denn: } \frac{564}{10000} = \frac{10^{2,7512791}}{10^4} = 10^{2,7512791-4} = 10^{-1,2487209}.$$

*) Wäre ein Bruch über alle Vorstellung klein, oder wie man wohl zu sagen pflegt, u n e n d l i c h k l e i n, so müſste sein negativer Logarithmus u n e n d l i c h g r o ſ s sein. Eine Gröſse, die unendlich groſs und nicht mehr durch Zahlen auszudrücken ist, pflegt man durch das Zeichen ∞ und eine unendlich kleine Gröſse, deren Unterschied von 0 nicht mehr anzugeben ist, durch das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ anzudeuten. Dieser Vorstellung zufolge wäre also $10^{-\infty} = \frac{1}{10^\infty} = 0 = \frac{1}{\infty}$. Daher: log. $0 = -\infty$ (inf. neg.).

270.

Wird aber ein negativer Logarithmus nicht als das Endresultat einer Rechnung betrachtet, soll er vielmehr zu andern Logarithmen addiert, davon subtrahiert oder die ihm zugehörige Zahl aufgeschlagen werden, so ist mit einem negativen Logarithmus viel bequemer zu rechnen, wenn man ihn erst in eine solche zweiteilige Gröfse verwandelt, wovon der eine Teil ein positiver echter Decimalbruch (also die Mantisse) und der andere negative Teil eine ganze Zahl ist, die ersterem positiven Teil als negative Kennziffer mit dem Minus-Zeichen angehängt wird. Auf diese Form ist ein negativer Logarithmus leicht zu bringen, indem man ihm nur eine solche Zahl mit dem $+$ und $-$ Zeichen hinzufügt, dafs der negative Logarithmus mit dem ihm hinzugefügten positiven Teil vereint, einen echten positiven Decimalbruch giebt. So wird z. B. aus

$$\log.\ 0{,}0564 = -1{,}2487209$$

indem wir 2 addieren und subtrahieren, wodurch die Gröfse des Logarithmus nicht geändert wird:

$$\log.\ 0{,}0564 = 2 - 1{,}2487209 - 2$$

zieht man nun die beiden ersten Teile der dreiteiligen Gröfse in eine Zahl zusammen, so erhält der negative Logarithmus die bequemere Form, wo er 0 zur positiven Kennziffer mit positiver Mantisse, und angehängt, eine ganze Zahl als negative Kennziffer hat, nämlich:

$$\log.\ 0{,}0564 = 0{,}7512791 - 2$$

271.

Weil der Nenner eines echten Decimalbruchs die Einheit mit gerade so viel angehängten Nullen ist, als der Bruch Decimalstellen enthält: $0{,}564 = \frac{564}{1000}$; $0{,}0564 = \frac{564}{10000}$ &c., so ist leicht einzusehen, dafs die Kennziffer vom Logarithmus des Nenners um ein, zwei, drei $\cdots$ Einheiten gröfser ist, als die Kennziffer vom Logarithmus des Zählers, je nachdem dessen erste bedeutliche Ziffer Zehntel, Hundertel, Tausendtel $\cdots$ angiebt, oder was dasselbe ist, ein, zwei, drei $\cdots$ Nullen vor sich hat.

Hieraus ergiebt sich nun eine leichte Regel, nach welcher man den negativen Logarithmus eines echten Decimalbruchs gleich in der bequemeren Form aus den Tafeln erhalten kann. Man suche nämlich den Logarithmus zu einem echten Decimalbruch gerade so, als wenn das Decimalzeichen gar nicht da stände, setze aber im Logarithmus 0 als positive und zugleich eine negative Kennziffer von so vielen Einheiten, als der ersten geltenden Ziffer des Decimalbruchs Nullen voranstehen (die vor dem Decimalzeichen stehende Null mitgerechnet). Man hat z. B.:

$$\begin{aligned} \text{log.}\quad 0{,}564 &= 0{,}7512791 - 1 \\ \text{..}\quad 0{,}0564 &= 0{,}7512791 - 2 \\ \text{...}\quad 0{,}00564 &= 0{,}7512791 - 3 \end{aligned}$$

also unmittelbar aus lg. 564 = 2,7512791 (oder lg. 5,64 = 0,7512791) abgeleitet.

Der Logarithmus vom Zähler 564 hat nämlich 2 zur Kennziffer, der zu subtrahierende Logarithmus vom Nenner des ersten Bruchs hat 3 zur Kennziffer. Zwei Einheiten werden hiervon getilgt und daſs noch eine Einheit zu subtrahieren bleibt, ist (der bequemen Form wegen) angedeutet.

272.

Um den negativen Logarithmus eines gewöhnlichen echten Bruches zu finden, kann man den gewöhnlichen Bruch erst in einen Decimalbruch verwandeln und dann nach vorhergehender Regel verfahren. So findet man z. B. $\frac{7}{16} = 0{,}4375$, daher:

$$\text{log. } \tfrac{7}{16} = \text{log. } 0{,}4375 = 0{,}6409781 - 1$$

Oftmals ist es aber bequemer, den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers, wie folgendes Beispiel zeigt, zu subtrahieren:

$$\begin{aligned} \text{log.}\quad 7 &= \overset{+1}{0}{,}8450980^{\;-1} \\ \text{...}\quad 16 &= 1{,}2041200 \\ \hline \text{log.}\quad \tfrac{7}{16} &= 0{,}6409780 - 1 \end{aligned} \qquad (\S\ 263,\ \text{Amkg.})$$

Es muſste hier, um log. $\frac{7}{16}$ gleich in der bequemern Tafelform, nämlich mit 0 zur positiven Kennziffer und mit positiver Mantisse zu erhalten, zum Logarithmus des Zählers, um den des Nenners subtrahieren zu können, eine Einheit addiert und subtrahiert werden, was dessen Gröſse nicht ändert.

Ebenso findet man log. $\frac{3}{7}$ und log. $\frac{11}{4771}$; nämlich:

$$\begin{aligned} \text{log.}\quad 3 &= \overset{+1}{0}{,}4771213^{\;-1} \\ \text{...}\quad 7 &= 0{,}8450980 \\ \hline \text{log.}\quad \tfrac{3}{7} &= 0{,}6320233 - 1; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{log.}\quad 11 &= \overset{+3}{1}{,}0413927^{\;-3} \\ \text{...}\quad 4771 &= 3{,}6786094 \\ \hline \text{log.}\quad \tfrac{11}{4771} &= 0{,}3627833 - 3. \end{aligned}$$

Anmerkung. Ohne den Wert eines Logarithmus zu ändern, kann man, wenn es die Umstände erfordern, die positive und negative Kennziffer gleichzeitig um eine beliebige Zahl gröſser oder kleiner machen. So ist z. B.:

$$\text{log. } \tfrac{3}{7} = 0{,}6320233 - 1 = 5{,}6320233 - 6 = 3{,}6320233 - 4 \ \&c.$$

273.

Nachdem nun zuvor gezeigt worden, was beim Aufschlagen der Logarithmen zu ganzen, gebrochenen und gemischten Zahlen hinsichtlich der Kennziffer zu beachten ist, und daſs die Logarithmen zu allen ein- bis vierziffrigen Zahlen unmittelbar in der mit 0 bezeichneten Spalte gefunden werden, wollen wir nun die weitere Einrichtung der 7ziffrigen Logarithmentafeln erläutern und zuerst zeigen, wie man mittelst der neun folgenden Spalten, welche 1, 2, 3···9 zur Überschrift und Unterschrift haben, die Logarithmen aller 5ziffrigen, und dann mittelst der beiden letzten Spalten *P. P.* (Partes proportionales oder Proportionalteile) auch die Logarithmen aller 6- und 7ziffrigen Zahlen findet.

1) Als man die Logarithmen berechnete, ergab sich, dafs im allgemeinen die drei ersten Decimalen der Mantisse aller fünfziffrigen, nur in der letzten Ziffer verschiedenen Zahlen, vollkommen gleich sind. Man fand z. B.:

log.	1267	= 3,102 7766
=	12670	= 4,102 7766
=	12671	= 4,102 8109
=	12672	= 4,102 8452
=	12673	= 4,102 8794
=	12674	= 4,102 9137
=	12675	= 4,102 9480
=	12676	= 4,102 9822
=	12677	= 4,103 $\bar{0}165$
=	12678	= 4,103 $\bar{0}507$
=	12679	= 4,103 $\bar{0}850$

Dieser Bemerkung zufolge wurde folgende bequeme und raumersparende Einrichtung der Tafeln getroffen: Da die Mantissen der Logarithmen von 1267 und 12670 vollkommen gleich sein müssen, (§ 265) so brauchen beide nur ein gemeinschaftliches Fach. Folgt aber auf die vierziffrige Zahl 1267 statt 0 eine andere fünfte Ziffer, so ändern sich deshalb blofs die vier letzten Decimalen der Mantisse; und diese vier Decimalen brauchten daher nur in dieselbe Querzeile, auf welcher die vier ersten Ziffern der fünfziffrigen Zahl stehen, und zwar in die Spalte, welche die fünfte Ziffer zur Überschrift hat, besonders eingetragen zu werden. Auf die Fälle, wo sich aufser den vier letzten Decimalen auch noch die vorhergehende dritte geändert hat, ist durch einen Strich über der viertletzten (siehe oben $\bar{0}$) aufmerksam gemacht.

Haben irgend vier Decimalstellen ein solches Merkzeichen bei sich, so haben es natürlich alle folgenden in derselben Reihe. Hieraus folgt also die Regel:

2) Um den zu einer fünfziffrigen Zahl gehörenden Logarithmus (Mantisse) zu finden, setze man erst die gehörige Kennziffer, suche dann die 4 ersten Ziffern der vorgegebenen Zahl in der ersten Spalte (*N*) und nehme gleich daneben, in der mit 0 bezeichneten Spalte, die drei ersten Decimalen der Mantisse, die vier fol-

genden Decimalen aber in derselben Querzeile aus derjenigen Spalte, welche die fünfte Ziffer der gegebenen Zahl zur Überschrift hat. Ist die viertletzte Decimale mit einem Strich versehen, so mufs man die vorhergehende dritte um eine Einheit gröfser nehmen. Wird die fünfziffrige Zahl einmal oder wiederholt mit 10 multipliziert oder dividiert, so ändert sich blofs die Kennziffer. Beispiele:

log. 22035	= 4,3431131	log. 78,164	= 1,8930068
„ 2,2035	= 0,3431131	„ 781640	= 5,8930068
„ 33829	= 4,5292892	„ 0,049097	= 0,6910550 — 2
„ 338,87	= 2,5300331	„ 1,1011	= 0,0418268

274.

Wenn man die Logarithmen mehrerer aufeinander folgenden 5ziffrigen Zahlen von einander subtrahiert, so findet man, dafs die Differenzen nur in den drei letzten Decimalen erscheinen und für kleine Zwischenräume einander gleich sind; z. B.

		Differenz
log. 23740	= 4,375 4807	
„ 23741	= 4,375 4990	183
„ 23742	= 4,375 5173	183
„ 23743	= 4,375 5356	183
„ 23744	= 4,375 5539	183
„ 23745	= 4,375 5722	183
⋮	⋮	

Man sieht also, dafs für kleine Zwischenräume die Mantissen der 5ziffrigen Zahlen der 5ten Ziffer proportional wachsen.

Wächst z. B. die Zahl 23740 um eine Einheit, so wachsen die 3 letzten Decimalen ihres Logarithmus um die einmalige Differenz 183; wächst die Zahl 23740 um 2, 3, 4 Einheiten, so mufs man die Differenz 183, 2-, 3-, 4mal zu den letzten Decimalen ihres Logarithmus addieren &c.

Da nun diese verhältnismäfsige Zunahme der letzten Decimalen der Mantisse für Zwischenräume stattfindet, welche um mehrere ganze Einheiten von einander entfernt sind, so mufs sie umsomehr auch da stattfinden, wo der Sprung nur durch Bruchteile, wie $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\cdot\cdot$ $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ &c. geht. Wächst z. B. die Zahl 23743 nur um den Bruch $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ $\cdots$ $\frac{1}{100}$ &c., so werden auch die letzten Decimalen der Mantisse ihres Logarithmus nur um $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}\cdots\frac{1}{100}$ der Differenz, nämlich um $\frac{1}{10}\cdot 183$; $\frac{2}{10}\cdot 183$ &c. wachsen. Aus der Mantisse des Logarithmus von 23743 und der Differenz vom nächstfolgenden kann man also auch die Logarithmen von $23743\frac{8}{10} = 23743{,}8$; 23743,85; 23743,859, mithin auch von den um 10-, 100-, 1000mal so grofsen Zahlen $237438 = 10\cdot 23743\frac{8}{10}$; $2374385 = 100\cdot 23743\frac{85}{100}$ finden, indem die Decimalen ihrer Mantissen dieselben sind, und nur die Kennziffern sich ändern. Man hat z. B.:

log. 23743 = 4,3755356.

Addiert man nun zu den letzten Decimalen der Mantisse dieses Logarithmus den 10ten Teil der Differenz 183, 8mal, nämlich:

$$\tfrac{8}{10}\cdot 183 = 8\cdot(18{,}3) = 146{,}4 = 146$$

$$\begin{array}{rl} \text{so kommt:} & \text{log. } 23743{,}8 = 4{,}3755502 \\ \text{mithin (§ 265):} & \text{log. } 237438 \;= 5{,}3755502 \end{array}$$

Addiert man den 100sten Teil der Differenz 183, 85mal, nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl} & \tfrac{85}{100}\cdot 183 = 155{,}55 = 156 \\ \text{so kommt:} & \text{log. } 23743{,}85 = 4{,}3755512 \\ \text{also:} & \text{log. } 2374385 \;= 6{,}3755512 \end{array}\right\}$$

&c.

In den neuern 7ziffrigen Logarithmentafeln wird aber dieses Berechnen der Proportionalteile durch die mit *P. P.* überschriebene Spalte sehr erleichtert, indem die 2te die besagte Differenz 183 und zugleich den Anteil für jede sechste, vorläufig als Zehntel betrachtete Ziffer im voraus berechnet enthält, woraus sich der Zuwachs für die folgende 7te und 8te Ziffer, die man vorläufig als Hundertel und Tausendtel ansehen kann, leicht ableiten läſst.

Um nämlich den Logarithmus einer 6- bis 8ziffrigen Zahl aufzuschlagen, setze man erst die gehörige Kennziffer und suche die Mantisse des Logarithmus vorläufig nur zu den fünf ersten Ziffern der vorgegebenen Zahl; sehe zu, in welchem Fache die Differenz dieser Mantisse von der nächstfolgenden ausgesetzt ist (indem man in Gedanken bloſs die letzte Decimale der erstern von der letzten der zweiten subtrahiert), suche in der ersten Spalte dieses Faches die sechste Ziffer der gegebenen Zahl und nehme den daneben stehenden Anteil von der Differenz; suche ferner die siebente und achte Ziffer wieder in der ersten Spalte und nehme für die siebente Ziffer den zehnten, für die achte aber den hundertsten Teil des daneben stehenden Proportionalteils und addiere alles.

So findet man z. B.:

$$\text{log. } 23743\dot{8}\ddot{5}\dddot{9} = 7{,}3755513.$$

Es ist nämlich:

$$\tfrac{859}{1000}\cdot 183 = (\tfrac{8}{10} + \tfrac{5}{100} + \tfrac{9}{1000})183 = \tfrac{8}{10}\cdot 183 + \tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{5}{10}\cdot 183 + \tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot 183.$$

In der Spalte *P. P.* findet man nun:

$$\begin{array}{l} \tfrac{8}{10}\cdot 183 = 146{,}4 \\ \tfrac{5}{10}\cdot 183 = 91{,}5 \text{ also } \tfrac{1}{10}\cdot 91{,}5 = 9{,}15 \\ \tfrac{9}{10}\cdot 183 = 164{,}7 \text{ also } \tfrac{1}{100}\cdot 164{,}7 = 1{,}647, \end{array}$$

daher:

log. 23743859 = 7,3755356

Zuwachs wegen der sechsten Ziffer (8) ······ 146,4

$\frac{1}{10}$ · 〃 〃 〃 〃 〃 (5) ······ 9,15

$\frac{1}{100}$ · 〃 〃 〃 〃 〃 (9) ······ 1,645

log. 23743859 = 7,3755513

Ebenso: log. 237,43859 = 2,3755513

Ebenso findet man: log. 1275,8073 = 3,1057851

nämlich: log. 1275,8073 = 3,1057826

Zuwachs wegen der sechsten Ziffer (0) ········· 0,0

$\frac{1}{10}$ · 〃 〃 〃 siebenten 〃 (7) ········ 23,8

$\frac{1}{100}$ · 〃 〃 〃 achten 〃 (3) ········ 1,02

log. 1275,8073 = 3,1057851

275.

Um kurz anzudeuten, dafs umgekehrt die, einem Logarithmus zugehörige Zahl (Numerus) aufgeschlagen werden soll, wollen wir vor den Logarithmus das Zeichen *num lg* (gelesen: „*numerus logarithmi*") setzen. Da z. B. log. 2 = 0,3010300, so wäre nach Festsetzung obiger Bezeichnung umgekehrt:

num lg 0,3010300 = 2.

Die Regeln, nach welchen man rückwärts wieder die zugegebenen Logarithmen gehörigen Zahlen findet, ergeben sich aus dem Vorhergehenden. (S. Note § 265.)

1) Man suche allemal die drei ersten Decimalen der gegebenen Mantisse in der mit 0 bezeichneten Spalte, die vier andern Decimalen der Mantisse aber in einer der mit 0, 1, 2 ··· 9 bezeichneten Spalten; entweder in derselben Querzeile, in welcher die drei ersten stehen, oder tiefer, oder auch, aber dann nur eine Zeile höher, in welchem Falle ein Strich über der viertletzten Decimale steht. Findet man nun die vier letzten Decimalen der Mantisse in einer der zehn Spalten ganz genau enthalten, so schreibe man die in ihrer Querzeile in der Spalte N stehende vierziffrige Zahl heraus, füge derselben aber noch als fünfte Ziffer diejenige Zahl hinzu, in deren Spalte die vier letzten Decimalen des Logarithmus genau stehen. Von der herausgeschriebenen fünfziffrigen Zahl schneide man endlich noch (von vorne gezählt) als die Ganzen darstellend, eine Ziffer mehr ab, als die Kennziffer des Logarithmus Einheiten hat, hat aber der Logarithmus eine negative Kennziffer, so mufs man der herausgeschriebenen fünfziffrigen Zahl gerade so

viele Nullen vorsetzen, als die negative Kennziffer Einheiten hat, und dann hinter die erste Null das Decimalzeichen setzen. Zur deutlicheren Einsicht und Einübung dieser Regeln lassen wir hier erst einige Beispiele in abwechselnder Ordnung folgen. Man hat z. B.:

log. 22035 $= 4{,}3431131$; *num lg* $4{,}3431131 = 22035$
log. 666,42 $= 2{,}8237480$; *num lg* $3{,}8237480 = 6664{,}2$
log. 8,7707 $= 0{,}9430343$; *num lg* $6{,}9430343 = 8770700$
log. 0,92904 $= 0{,}9680344 - 1$; *num lg* $0{,}9680344 - 3 = 0{,}0092904$
log. 0,051001 $= 0{,}7075787 - 2$; *num lg* $0{,}0010411 = 1{,}0024$

2) Um endlich zu einem gegebenen Logarithmus, der nicht genau in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl aufzuschlagen, verfahre man nach folgender Regel: Man suche die drei ersten Decimalen der Mantisse in der mit 0 bezeichneten Spalte, und zu den vier letzten Decimalen die vier nächst kleinern in einer der mit $0, 1 \cdots 9$ bezeichneten Spalten und schreibe die hierzu gehörige fünfziffrige Zahl heraus. Subtrahiere die gefundenen vier nächst kleinern Decimalen von den gegebenen vier letzten und suche den Rest in der zweiten Spalte des mit *P. P.* bezeichneten Faches; findet man hier den Rest genau, so ist die links dabei stehende Ziffer die sechste der gesuchten Zahl, findet man den Rest aber nicht genau, so setze man die neben dem nächst kleinern Proportionalteil stehende Ziffer, als die sechste, subtrahiere diesen nächst kleinern Rest von dem gröfsern, multipliziere diesen neuen Rest mit 10 und setze die neben dem, diesem Produkte am nächsten kommenden Proportionalteil stehende Ziffer als die siebente der gesuchten Zahl. Die achte Ziffer läfst sich durch siebenziffrige Logarithmentafeln im allgemeinen nicht mehr bestimmen und mufs deshalb, wenn die Kennziffer es erfordert, durch eine Null ergänzt werden.

So findet man z. E.:

num lg $7{,}3755512 = 23743850$

denn der nächst kleinere log. ist $= 7{,}3755356$
und die dazu gehörige Zahl $= 23743000$

Rest $156{,}0$

der nächst kleinere Proportionalteil $= 146{,}4$ die 6te Ziffer hierzu $= 8$
Rest $156{,}0 - 146{,}4 = 9{,}6$ multipliziert mit 10, $= 96{,}0$
nächster Proportionalteil $= 91{,}5$; also die 7te Ziffer $= 5$
mithin: *num lg* $7{,}3755512 = 23743850$
Ebenso: *num lg* $4{,}3755512 = 23743{,}85$

Diese Regel folgt unmittelbar aus der vorhergehenden. Man schliefse nämlich so: Wäre die Differenz statt 156, 183 gewesen, so würde die zu dem nächst kleinern Logarithmus herausgeschriebene Zahl um eine Einheit gröfser geworden sein; mithin nach der Regel de tri: 183 geben 1, wieviel 156?

Antwort. $\frac{156}{183} = 0{,}\dot{8}\ddot{5}$.

276.

Die Logarithmen der aufeinander folgenden 8ziffrigen Zahlen weichen erst in der 8ten, 9ten und ferneren, aufserhalb der 7ziffrigen Tafeln liegenden Decimale voneinander ab. Man kann also auch nur zu 7ziffrigen Zahlen die Logarithmen genau finden. Gröfsere Zahlen kommen in ernsthafter Praxis höchst selten vor.

Beispiele zur Übung:

1)	log.	370978	$= 5{,}5693482$
2)	*num lg*	3,8911459	$= 7782{,}98$
3)	log.	8689836	$= 6{,}9390116$
4)	*num lg*	6,9720151	$= 9375946$
5)	log.	200,36084	$= 2{,}3018128$
6)	*num lg*	0,0692746	$= 1{,}172937$
7)	log.	0,07787009	$= 0{,}8913707 - 2$
8)	*num lg*	0,0911392 − 3	$= 0{,}0012335$
9)	log.	4,501000895	$= 0{,}6533091$
10)	*num lg*	0,0901392	$= 1{,}230664$

Anmerkung. Wie man mit 3-, 5- und 10ziffrigen Logarithmen-Tafeln verfährt, ergiebt sich aus der vorigen Theorie von selbst. Wer überhaupt die Einrichtung und den Gebrauch der Logarithmen-Tafeln versteht, der lernt auch die Einrichtung jeder andern mathematischen Tafel bald kennen.

Zwanzigstes Buch.

Zusammenstellung der Regeln über den Gebrauch der Logarithmen. Erläuterung durch Beispiele, welche ohne Logarithmen nur mit großer Mühe, teils gar nicht gelöst werden können. Verschiedene Bemerkungen &c.

277.

Ist ein Produkt zu entwickeln, so addiere man die Logarithmen der Faktoren; die Summe ist dann der Logarithmus des gesuchten Produkts, welches man also in den Tafeln aufschlagen kann (§ 258, 1). Auch Buchstaben-Ausdrücke lassen sich nach dieser Regel, in logarithmischen Formen entwickelt, darstellen. Ist z. B.:

$$x = abc$$

wo a, b, c Faktoren und x deren Produkt bedeutet, so ist allgemein:

$$\log. x = \log. a + \log. b + \log. c$$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = 823 \cdot 1305 \cdot \tfrac{3}{7} \cdot (2{,}40067)(0{,}0067925)$$

logarithmische Entwickelung:

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 823 & = 2{,}9153998 \\
\ldots\ 1305 & = 3{,}1156105 \\
\log.\ \tfrac{3}{7} = \ldots\ 0{,}4285714 & = 0{,}632^{02}\left.\begin{smallmatrix}1&3\\1&0\\&4\end{smallmatrix}\right\} - 1 \\
\ldots\ 2{,}40067 & = 0{,}380^{3}\left.\begin{smallmatrix}1&9&8\\1&2&7\end{smallmatrix}\right\} \\
\ldots\ 0{,}0067925 & = 0{,}8320296 - 3 \\
\hline
\log.\ x & = 7{,}8753956 - 4 \\
\text{oder } \log.\ x & = 3{,}8753956 \ (\S\ 272, \text{Anmkg.}) \\
\text{mithin: } x & = 7505{,}776
\end{array}$$

278.

Um zwei Zahlen durcheinander zu dividieren, subtrahiere man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividend; der Rest ist der Logarithmus des gesuchten Quotienten, den man also bloſs aus den Tafeln abzuschreiben braucht. (§ 258, 2.)

Ist z. B.:

$$x = \frac{a}{b}$$

wo a den Dividend, b den Divisor und x den Quotienten bedeutet, so ist, auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, allgemein:

$$\log.\ x = \log.\ a - \log.\ b.$$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{25{,}0035}{7123{,}0409}$$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\begin{aligned} \log.\ \ 25{,}0035 &= \overset{+3}{1}{,}3980008^{-3} \\ \cdots\ 7123{,}0409 &= 3{,}8526653 \\ \hline \log.\ x &= 0{,}5453355 - 3 \\ \text{also: } x &= 0{,}003510229 \end{aligned}$$

Besteht der Dividend oder Divisor oder auch beide aus Faktoren, so kann man die Logarithmen von beiden erst besonders suchen und dann subtrahieren. Wäre z. B.:

$$x = \frac{abc}{de}$$

so ist: $\log.\ x = \log.\ (abc) - \log.\ (de)$
oder: $\log.\ x = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c - (\log.\ d + \log.\ e)$
oder: $\log.\ x = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c - \log.\ d - \log.\ e)$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{0{,}035689 \cdot 6{,}083769}{34{,}595 \cdot 0{,}0050602}$$

Auflösung. Logarithmisch:

Zähler:

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}035689 &= 0{,}5525344 - 2 \\ \ldots\ 6{,}083769 &= 0{,}7841727 \\ \hline & \ 0{,}3367071 - 1 \end{aligned}$$

Nenner:

$$\begin{aligned} \log.\ \ 34{,}595 &= 1{,}5390133 \\ \ldots\ 0{,}0050602 &= 0{,}7041677 - 3 \\ \hline & \ 0{,}2431810 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0{,}3367071 - 1 \\ & 0{,}2431810 - 1 \\ \hline \log.\ x &= 0{,}0935261 \\ x &= 1{,}240298 \end{aligned}$$

279.

* Wenn (wie im vorhergehenden Beispiele) mehrere Logarithmen addiert und von der Summe ein oder mehrere subtrahiert werden müssen, so kann man in dem Fall, wo die zu subtrahierenden Logarithmen genau in den Tafeln enthalten sind, und also nicht erst durch Hilfe der Proportionalteile gesucht zu werden brauchen, die Arbeit manchmal abkürzen, wenn man, statt Logarithmen zu subtrahieren, ihre dekadischen Ergänzungen addiert und dann wieder von der Summe der Kennziffer so viele Zehner wegläfst, als dekadische Ergänzungen addiert sind. Die dekadische Ergänzung (d. E.) eines genau in der Tafel enthaltenen Logarithmus, d. h. das, was ihm an 10 fehlt, erhält man sehr leicht, indem man, mit der Kennziffer angefangen, jede Ziffer des Logarithmus gleich aus der Tafel von 9, und die letzte von 10 (in Gedanken) subtrahiert. Der Grund dieses kleinen, namentlich bei trigonometrischen Rechnungen häufig zu benutzenden Vorteils ist leicht einzusehen. Denn, ob man einen Logarithmus subtrahiert oder mit umgekehrtem Zeichen addiert, nachdem man seine Kennziffer zuvor um 10 vergröfsert und verkleinert hat, das ist einerlei. Wäre z. B. der Logarithmus 2,3056707 zu subtrahieren, oder, was dasselbe ist, —2,3056707 zu addieren, so hat man:

$$\begin{aligned} 2{,}3056707 &= 10 + 2{,}3056707 - 10 \\ &= 10 - 7{,}6943293 \\ \text{mithin} - 2{,}3056707 &= 7{,}6943293 - 10. \end{aligned}$$

Ob man also —2,3056707 oder die dekadische Ergänzung 7,6943293—10 addiert, das ist einerlei.

Anstatt aber die dekadischen Ergänzungen zu benutzen (No. 1), kann man auch eben so gut die zu subtrahierenden Logarithmen mit umgekehrtem Vorzeichen unter die zu addierenden schreiben, und bei einiger Übung beiderlei Operationen zugleich verrichten (No. 2). Anfänger möchten aber besser thun, stets wie im § 278 zu verfahren.

$$x = \frac{0{,}035689 \cdot 6{,}083769}{34{,}595 \cdot 0{,}0050602}$$

No. 1.

	log. 0,035689	$= 0{,}5525344 - 2$
	log. 6,083769	$= 0{,}7841727$
d. E.	log. 34,595	$= 8{,}4609867 - 10$
„ „	log. 0,0050602	$= 9{,}2958323 + 3 - 10$
	log. x	$= 0{,}0935261$

No. 2.

log. 0,036789	$= 0{,}5525344 - 2$
log. 6,083769	$= 0{,}7841727$
—log. 34,595	$= -1{,}5390133$
—log. 0,0050602	$= -0{,}7041677 + 3$
log. x	$= 0{,}0935261$

$$x = 1{,}240298.$$

280.

Um eine Zahl auf eine Potenz zu erheben, mufs man den Logarithmus der Zahl mit dem Potenz-Exponenten multiplizieren, so erhält man den Logarithmus der Potenz. Man hat zum Beispiel (§ 258, 3):

$$\begin{aligned} \log. a^4 &= \log. aaaa = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a \\ \text{also: } \log. a^4 &= 4 \log. a \\ \text{allgemein: } \log. a^n &= n \log. a \\ \text{ebenso: } \log. a^x &= x \log. a \end{aligned}$$

Man suche x aus folgenden Gleichungen:

1) $x = (1{,}3504)^{22}$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\begin{array}{r} \text{log. } 1{,}3504 = 0{,}1304624 \\ 22 \\ \hline 2609248 \\ 2609248 \\ \hline \text{log. } x = 2{,}8701728 \\ \text{also } x = 741{,}6052 \end{array}$$

$$2)\ x = \left(\tfrac{200}{331}\right)^{10}$$

$$\begin{array}{r} \text{log. } 200 = 2{,}3010300 \\ \text{. . . } 331 = 2{,}5198280\ (\S\ 272) \\ \hline 0{,}7812020 - 1 \\ 10 \\ \hline 7{,}8120200 - 10 \\ \hline \text{log. } x = 0{,}8120200 - 3 \\ \text{mithin } x = 0{,}006486643 \end{array}$$

281.

Um aus einer Zahl eine Wurzel zu ziehen, braucht man nur den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten zu dividieren; der Quotient ist dann der Logarithmus der gesuchten Wurzel. Es ist nämlich (§ 258, 4):

$$\text{log. } \sqrt[5]{a} = \text{log. } a^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5} \text{ log. } a;$$

$$\text{allgemein: log. } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{ log. } a.$$

Beispiele:

$$1)\ x = \sqrt[7]{2}$$

$$\begin{array}{r} \text{log. } 2 = 0{,}3010300 \\ 7) \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ \text{log. } x = 0{,}0430043 \\ \text{also } x = 1{,}104089 \end{array}$$

Hat man aus einem e c h t e n Bruche eine Wurzel zu ziehen, also dessen negativen Logarithmus durch eine Zahl zu dividieren, so mufs man (damit der negative Logarithmus die zum Aufsuchen des ihm zugehörigen Decimalbruchs bequeme Form behält, § 270) zur positiven und negativen Kennziffer erst so viele Einheiten addieren, dafs sich die negative Kennziffer durch den Wurzelexponenten ohne Rest teilen läfst. So findet man z. E.:

$$x = \sqrt[5]{0{,}0375}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\ &= 3{,}5740313 - 5 \\ &\quad 5) \overline{\phantom{0{,}5740313 - 2}} \\ \log.\ x &= 0{,}7148063 - 1 \\ \text{also } x &= 0{,}5185687 \end{aligned}$$

282.

Kommen in einer logarithmisch zu entwickelnden Gröſse Faktoren oder Divisoren vor, welche Potenzen sind, so muſs man natürlich von allen Wurzeln der verschiedenen Potenzen die Logarithmen besonders nehmen und mit ihren Exponenten multiplizieren, wie es folgende Beispiele andeuten:

$$1)\quad x = aaabb = a^3 b^2$$

$$\log.\ x = \log.\ a + \log.\ a + \log.\ a + \log.\ b + \log.\ b$$

$$\text{kürzer: } \log.\ x = 3 \log.\ a + 2 \log.\ b$$

$$2)\quad x = a^m b^n c^n$$

$$\log.\ x = m \log.\ a + n \log.\ b + n \log.\ c$$

$$3)\quad x = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[m]{b^n} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{m}}$$

$$\log.\ x = \frac{m}{n} \log.\ a + \frac{n}{m} \log.\ b$$

283.

Unmittelbar kann man nur dann ein Produkt mit Logarithmen berechnen, wenn die Faktoren einteilige Gröſsen sind. Vielteilige Faktoren muſs man als einteilige betrachten, oder wenn die einzelnen Teile Zahlen sind, sie zuvor in einteilige Gröſsen zusammenziehen, und daher jeden Teil, der eine Potenz oder Wurzelgröſse ist, erst besonders mit Logarithmen berechnen. Sei z. B.:

$$1)\quad x = a^m (a + b)^n$$

$$\text{so ist: } \log.\ x = m \log.\ a + n \log.\ (a + b)$$

$$2)\quad x = \frac{(a + b^m)^n (a + b)}{(a - 1)^n}$$

$$\log.\ x = n \log.(a + b^m) + \log.(a + b) - n \log.(a - 1)$$

$$3)\ x = \sqrt[15]{\left(\tfrac{15}{32} - \sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}}\right)}$$

$$\log.\ 3 = \overset{+3}{0},4771213\ {}^{-3}$$

$$\cdots 1144 = 3,0584260$$

$$\overset{+2}{0},4186953 - \overset{-2}{3}\Big\} \quad (\S\ 281)$$

$$5)\ \overline{0,4837391 - 1}$$

$$\sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}} = 0,3046064 \text{ subtrahiert von}$$

$$\tfrac{15}{32} = 0,46875 \cdot\cdot$$

$$\overline{0,1641436} = \tfrac{15}{32} - \sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}}$$

$$\log.\ \left(\tfrac{15}{32} - \sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}}\right) = \overset{+14}{0},2152240 - \overset{-14}{1}$$

$$15)\ \overline{\log.\ x = 0,9476816 - 1;}$$

$$\text{also } x = 0,886506$$

284.

Da wir mittelst Logarithmen jede Wurzel von beliebigem Grade ausziehen können, so ist es jetzt auch leicht, alle reine höhere Gleichungen zu lösen. Würde z. E. aus folgender reinen Gleichung vom 11ten Grade x gesucht (§ 219):

$$\tfrac{2}{3}x^{11} + 0,501 = 2x^{11} + 6,05$$

$$\text{so ist: } \tfrac{2}{3}x^{11} - 2x^{11} = -0,501 + 6,05$$

$$-\tfrac{4}{3}x^{11} = 5,549$$

$$x^{11} = -4,16175$$

$$x = \sqrt[11]{-4,16175} \qquad (\S\ 216,\ 3)$$

$$\log.\ 4,16175 = 0,6192760\ (n)$$

$$11)\ \overline{\log.\ x = 0,0562978 (n)}$$

$$x = -1,138407.$$

Anmerkung. Durch das dem Logarithmus angehängte (n) deutet man an, dafs die zu ihm gehörige Zahl mit dem Minus-Zeichen (negativ) genommen werden mufs. Da die Logarithmen von ganzen Zahlen positiv, von echten Brüchen negativ sind, so ist klar, dafs man in den Tafeln zu negativen Zahlen keine Logarithmen finden kann. Um also mittelst der Logarithmen negative Zahlen miteinander zu multiplizieren, dividieren, potenzieren &c., mufs man diese Zahlen während der Rechnung mit Logarithmen als positiv nehmen und dann vor das Resultat wieder das gehörige Vorzeichen setzen.

285.

Mit Hilfe der Logarithmen ist es nun oftmals auch leicht, die in einer Gleichung enthaltene unbekannte Gröfse selbst dann zu finden, wenn sie auch als Exponent vorkommt. Würde z. E. gefragt, auf welche Potenz die Zahl 2 erhoben werden mufs, um die Zahl 64 hervorzubringen, so ist, wenn man den unbekannten Exponenten vorläufig mit x bezeichnet:

$$2^x = 64$$

Auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, kommt (§ 280):

$$x \log. 2 = \log. 64$$

Auf beiden Seiten durch den Koefficienten von x dividiert, kommt:

$$x = \frac{\log. 64}{\log. 2} = \frac{1{,}8061800}{0{,}3010300}$$

$$\text{also } x = 6.$$

Anmerkung. Man mufs $\frac{\log. 64}{\log. 2}$ nicht verwechseln mit $\log. \frac{64}{2} = \log. 64 - \log. 2.$ Im letztern Fall hat man zwei Logarithmen voneinander zu subtrahieren, im erstern aber wirklich durcheinander zu dividieren. Hier kann man aber auch, wenn es bequemer ist, die Logarithmen als gewöhnliche Zahlen betrachten und den logarithmischen Quotienten wieder durch Logarithmen berechnen, indem man nach § 278 Logarithmen von Logarithmen nehmend, den des Divisors von dem des Dividend subtrahiert und zu dem neuen Logarithmus die Zahl aufschlägt.

2) Allgemein wenn:

$$a^x = b$$

$$\text{so ist } x \log. a = \log. b$$

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}$$

3) $a^{mx} b^{n - \frac{x}{2}} = c^{k-x} . d.$

$$mx \log. a + (n - \tfrac{x}{2}) \log. a = (k - x) \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a + n \log. b - \tfrac{x}{2} \log. b = k \log. c - x \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a - \tfrac{x}{2} \log. b + x \log. c = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x (m \log. a + \log. c - \tfrac{1}{2} \log. b) = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x = \frac{k \log. c + \log. d - n \log. b}{m \log. a + \log. c - \frac{1}{2} \log. b}$$

286.

* **1. Aufgabe.** Man suche x aus der Gleichung:

$$a \cdot c^{mx} - b \cdot c^{\frac{mx}{2}} = d.$$

Auflösung. Setzt man einstweilen $c^{\frac{mx}{2}} = z$, folglich $c^{mx} = z^2$, so ist:

$$az^2 - bz = d$$

und hieraus (§ 231):

$$z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$$

$$c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$$

$$\frac{xm}{2} \log. c = \log. \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \right)$$

$$x = \frac{2}{m \log. c} \cdot \log. \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \right)$$

* **2. Aufgabe.** Man suche x aus der Gleichung:

$$a^x + \frac{1}{a^x} - b = 0$$

Auflösung. Man findet leicht (mit a^x multipliziert und $a^x = z$ gesetzt, § 231):

$$x = \frac{\log. [\frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4})].}{\log. a}$$

287.

3. Aufgabe. Zwischen 2 und 8 sollen vier Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, dafs dann alle sechs Glieder eine geometrische Progression bilden.

Auflösung. Gegeben $a = 2$; $t = 8$; $n = 6$ und e gesucht. Aus $t = a e^{n-1}$ (§ 253) folgt:

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$\log. e = \frac{\log. t - \log. a}{n-1} = \frac{\log. 8 - \log. 2}{6-1}$$

$$e = 1{,}319508.$$

Die Reihe ist also:

$$2,\ 2 \cdot (1{,}319 \cdots),\ 2 \cdot (1{,}319 \cdots)^2,\ 2 \cdot (1{,}319 \cdots)^3,\ 2 \cdot (1{,}319 \cdots)^4,\ 8.$$

288.

4. Aufgabe. Sissa, der Erfinder des Schachspiels, wurde von dem indischen König Scheran aufgefordert, sich für seine Erfindung eine königliche Belohnung zu wählen. Sissa erbat sich darauf die Summe der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn das erste Feld des Schachbretts mit 1 Korn, das zweite mit 2, das dritte mit 4 und so, nach dieser Progression, alle 64 Felder durch, besetzt werden; nämlich: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdots + 2^{63}$. Wie grofs ist die ganze Summe?

Auflösung. Gegeben $a = 1$, $e = 2$, $t = 2^{63}$ und s gesucht (§ 254).

$$s = \frac{te - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{2^{63}.2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Nahe genug $s = 2^{64}$, folglich $lgs = 64 lg 2$.

$s = 18446750000000000000$.

Die Summe beträgt also über 18 Trill. Genauer ist sie 18446744073709551615. Die letzten Ziffern können mittelst Logarithmen nicht gefunden werden, da diese über alle Vorstellung grofse Zahl die Grenzen der Tafeln überschreitet. 18 Trillionen Körner könnte die ganze Erde, wenn auch alles feste Land besät würde, selbst bei den ergiebigsten Ernten, nicht in 70 Jahren aufbringen.

289.

5. Aufgabe. Ein Weinfafs hält a z. B. 100 Liter Wein, hiervon werden b z. B. 1 Liter abgezapft und ebensoviel Wasser wieder zugegossen. Nachdem sich Wasser und Wein vollkommen gemischt haben, werden von der Mischung abermals b Liter abgezapft und der Mangel wieder durch b Liter Wasser ergänzt. Wenn nun dieses n z. B. 20mal geschieht, wieviel Wein ist dann noch in der Mischung enthalten?

Auflösung. Um hier leichter auf den Ansatz zu kommen, überlege man die Sache so: Wird von 100 Liter Wein 1 Liter, d. h. der 100te Teil, abgezapft, und durch Wasser ergänzt, so bleiben noch 99 Liter Wein im Fasse. Wird von der wiederum 100 Liter haltenden Mischung 1 Liter, d. i. der 100te Teil, abgezapft, so mufs doch von jedem Liter der Mischung der 100te Teil, mithin $\frac{1}{100}.99$ Liter Wein und $\frac{1}{100}$ Liter Wasser abfliefsen, denn soviel mal mehr Wein als Wasser im Fasse ist, soviel mal mehr mufs auch von ersterem abfliefsen. Nach dem zweiten Abzapfen bleibt also noch $99 - \frac{1}{100}.99$ Wein (und $1 - \frac{1}{100}.1$ Wasser) zurück. Nach abermaliger Ergänzung und Abzapfung fliefst von jeder Sorte wieder der 100te Teil ab. Mithin bleibt nach der dritten Abzapfung noch $(99 - \frac{1}{100}99) - \frac{1}{100}(99 - \frac{1}{100}99)$ reiner Wein &c. Allgemein: wird von a Liter Wein b Liter, d. i. $\frac{b}{a}$ mal so viel abgezapft, so bleiben noch $a - \frac{b}{a}.a = a - b$ Liter Wein zurück. Nach der Füllung wieder b Liter von der Mischung, also $\frac{b}{a}(a-b)$ Liter Wein abgezapft, bleiben noch $(a-b) - \frac{b}{a}(a-b) = \frac{a(a-b) - b(a-b)}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$ Liter Wein zurück, nach der dritten Abzapfung bleibt noch $\frac{(a-b)^2}{a} - \frac{b}{a}\frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$, nach der vierten Abzapfung $\frac{(a-b)^4}{a^3}$ &c. Heifst also x der Rest des Weines, welcher nach der $n$ten Abzapfung noch im Fasse oder in der Mischung ist, so hat man allgemein:

$$x = \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$$

$$\log. x = n \log. (a-b) - (n-1) \log. a.$$

Ist z. B. $a = 100$; $b = 1$; $n = 20$

so hat man $\log. x = 20 \log. 99 - 19 \log. 100$

$x = 81,79072.$

Einundzwanzigstes Buch.

Zinseszinsen-Rechnung.

290.

Wenn die Zinsen eines Kapitals, so wie sie fällig sind, gleich wieder als neues Kapital anderweitig auf Zinsen gegeben, oder was dasselbe ist, gleich zum Kapital geschlagen, und also im folgenden Zeitraum mit verzinset werden, so sagt man, das Kapital stehe auf Zinseszinsen.

Daſs ein solches Zinseszinsen tragendes Kapital sehr schnell anwachsen muſs, und mit der Zeit jede beliebige Gröſse erreichen kann, ist vorauszusehen. Giebt man z. E. nur 100 ℳ zu 5% ein Jahr auf Zinsen, so hat man nach Verlauf dieses Jahrs an Kapital und Zinsen $100 + \frac{100}{100} \cdot 5 = 105$ ℳ zu fordern, und kann also, wenn man beides aufs neue zu denselben Prozenten stehen läſst, einen Wechsel auf 105 ℳ, ebenso nach Verlauf des 2ten Jahrs einen Wechsel auf $105 + \frac{105}{100} \cdot 5 = 110\frac{1}{4}$ ℳ, am Ende des 3ten Jahrs auf $110\frac{1}{4} + \frac{110^1/_4}{100} \cdot 5 = 115\frac{61}{80}$ ℳ ausgestellt, verlangen &c.

Fälle dieser Art kommen im gemeinen Leben täglich vor, namentlich im Finanz-, merkantilischen und ökonomischen Fache; bei allen Versorgungs-Anstalten, Tontinen, Witwen-, Waisen-, Leibrenten-, Central-, Lebensversicherungs- und Dienstboten-Kassen, Leihbanken und allen andern öffentlichen Fonds, deren vernünftige Einrichtung und gewissenhafte Verwaltung die Kenntnisse der Zinseszinsen-Rechnung, als deren Grundlage, voraussetzt.

291.

Aufgabe. Bezeichnet man ein Zinseszinsen tragendes Kapital allgemein durch a, die jährlichen Prozente durch p, die Zeit, während welcher es steht (in Jahren ausgedrückt), durch n, und den erreichten Anwachs (Accumulation), nämlich Grundkapital und Zinseszinsen, durch A, so ist offenbar jede der vier Gröſsen A, a, p, n eine bestimmte Funktion von den drei übrigen. Um nun einen klaren Begriff von dem Zusammenhang dieser vier Gröſsen zu erhalten, sollen die Gleichungen für dieselben gefunden werden.

Auflösung. Man suche zuerst die Funktion für A, woraus sich dann die andern durch Reduktion leicht ableiten lassen.

Nach Verlauf des ersten Jahrs wird das Grundkapital a zu: $a+\frac{a}{100}\cdot p=a(1+\frac{p}{100})$, d. h. man erhält den Anwachs des Kapitals a am Ende des ersten Jahrs, wenn man es mit der Gröfse $1+\frac{p}{100}$ multipliziert. Mit Anfang des 2ten Jahrs wird nun das neue Kapital $a(1+\frac{p}{100})$ belegt, mithin ist dessen Anwachs am Ende des zweiten Jahrs, indem man den vorhergehenden Schlufs wiederholt und nochmals mit $1+\frac{p}{100}$ multipliziert, $=a(1+\frac{p}{100})^2$, denn das mit Anfang des 2ten Jahres schon auf $a\ (1+\frac{p}{100})$ angewachsene Grundkapital wird, mit den Zinsen, am Ende des 2ten Jahrs zu:

$$a(1+\tfrac{p}{100})+\frac{a(1+\frac{p}{100})}{100}\cdot p=a(1+\tfrac{p}{100})[1+\tfrac{p}{100}]=a\,(1+\tfrac{p}{100})^2$$

am Ende des dritten Jahrs $=a(1+\frac{p}{100})^3$; allgemein am Ende des $n$ten Jahrs $=a\,(1+\frac{p}{100})^n$. Mithin ist:

$$A=a\,(1+\tfrac{p}{100})^n$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$1+\tfrac{p}{100}=z$$

so ist $A=a\cdot z^n$ ....(I)

Für $p=5\%$ ist $z=1{,}05$; für $p=4\%$ ist $z=1{,}04$; für $p=3\frac{1}{2}\%$ ist $z=1{,}035$ &c.

Nimmt man auf beiden Seiten der obigen Gleichung die Logarithmen, so findet man folgende vier Formeln:

$$\log. A=\log. a+n\log. z \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\log. a=\log. A-n\log. z \quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\log. z=\frac{\log. A-\log. a}{n} \quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$n=\frac{\log. A-\log. a}{\log. z} \quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

292.

1. **Aufgabe.** Wie grofs wird das Kapital von 6000 ℳ, wenn es 16 Jahre zu 5% Zinseszinsen steht?

Auflösung. Gegeben $a=6000$; $n=16$; $z=1{,}05$ und A gesucht. Mithin nach Formel (1):

$$A = a \cdot z^n$$

$$\begin{array}{rr} \log. \; z = & 0{,}0211893 \\ & 16 \\ \hline & 1271358 \\ & 211893 \\ \hline & 0{,}3390288 \\ \log. \; a = & 3{,}7781513 \\ \hline\hline \log. \; A = & 4{,}1171801 \\ A = & 13097 \quad \text{(nahe)} \end{array}$$

Anmerkung. Subtrahiert man das Grundkapital von dem Anwachs A, so erhält man den Betrag der aufgelaufenen Zinseszinsen.

293.

2. Aufgabe. Wie grofs mufs das Kapital sein, welches zu 4 % Zinseszinsen belegt, in 10 Jahren auf 300 ℳ anwächst?

Auflösung. Gegeben $z = 1{,}04$; $n = 10$; $A = 300$ und a gesucht. Aus der Formel $A = az^n$ folgt:

$$a = \frac{A}{z^n}$$

$$\begin{array}{rr} \log. \; a = & \log. A - n \log. z \\ \log. \; z = & 0{,}0170333 \\ & 10 \\ \hline & 0{,}1703330 \\ \log. \; A = & 2{,}4771213 \\ \hline\hline \log. \; a = & 2{,}3067883 \\ a = & 202{,}669 \cdot\cdot \end{array}$$

Anmerkung. Der hier gefundene Wert von $a = 202{,}669$ ℳ heifst der auf 10 Jahre mit 4 % diskontierte Wert von 300 ℳ.

294.

3. Aufgabe. Ein Kapital von 900 ℳ ist mit seinen Zinseszinsen in 12 Jahren auf 1100 ℳ angewachsen. Zu wie viel Prozent war es belegt?

Auflösung. Es ist hier gegeben: $A = 1100$; $a = 900$; $n = 12$ und p gesucht. Man suche erst $z = 1 + \frac{p}{100}$, woraus dann p leicht zu finden. Aus der Grundformel $A = az^n$ folgt:

$$z^n = \frac{A}{a}$$

$$z = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$\log. \; z = \frac{\log. A - \log. a}{n}$$

$$\begin{array}{rr} \log. A = & 3{,}0413927 \\ \ldots \; a = & 2{,}9542425 \\ \hline & 0{,}0871502 \\ 12) \hline\hline \log. \; z = & 0{,}0072625 \\ z = & 1{,}01686 = 1{,}017 \text{ (nahe)} \\ 1 + \frac{p}{100} = & 1{,}017 \\ p = & 1\tfrac{7}{10} \; \% \end{array}$$

295.

4. Aufgabe. Wie lange muſs das Kapital von 600 ℳ zu 5 % Zinseszinsen stehen, um auf 800 ℳ zu kommen?

Auflösung. Gegeben $a=600$; $z=1{,}05$; $A=800$ und n gesucht. Aus der Grundformel $A=az^n$ folgt:

$$n=\frac{\log. A-\log. a}{\log. z}$$

$$\begin{aligned}\log. A &= 2{,}9030900\\ \ldots\ a &= 2{,}7781513\\ &\overline{0{,}1249387}\\ \log. z &= 0{,}0211893\\ n &= 5{,}89\cdots \text{ Jahre.}\end{aligned}$$

296.

1. **Aufgabe.** Ein zu 2000 cbm abgeschätztes Forstrevier verbessert sich jährlich um den 50sten Teil, d. i. 2 cbm auf je 100, also um 2%; wie groſs wird es bei stetem Zuwachs nach 20 Jahren sein?

Antwort. 2971,9 cbm.

2. Aufgabe. Nach der Sündflut sollen nur 3 Paar Menschen gelebt haben, deren Fortpflanzung vermöge ihres hohen Alters in 200 Jahren eine Million Köpfe zählte. Wie viel Prozent oder den wievielsten Teil betrug die jährliche Zunahme?

Antwort. $6\frac{1}{6}$% oder den 16ten Teil beinahe.

3. Aufgabe. Wie groſs ist der gegenwärtige Wert eines erst nach 15 Jahren fälligen Kapitals von 1000 ℳ, oder, was dasselbe ist: Jemand ist genötigt, eine, erst nach 15 Jahren anzutretende Erbschaft, an Wert 1000 ℳ, gleich zu verkaufen; wieviel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, 5% gerechnet?

Antwort. Man muſs den Wert von 1000 ℳ auf 15 Jahre diskontieren, d. h. ein Kapital a suchen, welches nach 15 Jahren mit 5% Zinseszinsen auf 1000 ℳ anwächst. Man findet (nach Formel 2) $a=481{,}017$ ℳ.

4. Aufgabe. Ein Wucherer leihet jemandem 500 ℳ und läſst sich darüber einen nach $2\frac{1}{2}$ Jahren ohne Zinsen zahlbaren Wechsel auf 700 ℳ ausstellen. Wie viel Prozent hat dieser jährlich genommen?

Antwort. Über 14%.

5. Aufgabe. Wieviel hätte ein zu Christi Geburt zu 5% belegter Pfennig bis 1884 eintragen können?

Antwort. $\log. A=\log. 1+1884 \log. 1{,}05=1884\ (0{,}0211893\ldots\ldots)$. Die zu dem $\log. A=39{,}9206\ldots.$ gehörige Zahl müſste mit 40 Ziffern geschrieben werden. Sie beträgt mehr als 8329 Sextillionen, welche Anzahl Pfennige in reines Gold umgesetzt und geschmolzen, eine Kugel geben würde, die 941 Millionen mal so groſs als die Erde wäre.

6. Aufgabe. Wie groſs wird ein zu 5% belegtes Kapital von 6000 ℳ in 10 Jahren, mit halbjährlicher Zinszahlung, d. h. $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$% halbjährlich gerechnet?

Antwort. Weil hier ausdrücklich halbjährliche Zinszahlung bedungen ist, so muſs man ein halbes Jahr als Zeit-Einheit betrachten und mithin 20 Jahre statt 10, und $2\frac{1}{2}$% statt 5% rechnen, alsdann findet man: 9831,7 ℳ.

* Wenn jemand ein Kapital, z. B. 100 ℳ, zu 6% jährlich zu zahlenden Zinsen verleiht, das Kapital aber schon nach einem Vierteljahre wieder kündigt, so kann er nach Recht und Billigkeit offenbar nicht $\frac{6}{4} = 1{,}5$ ℳ vierteljährliche Zinsen und also auch nicht an Kapital samt vierteljährlichen Zinsen 100 (1,015) = 101,5 ℳ fordern. Weil nämlich die Zinsen und also auch die Zinseszinsen jährlich oder alle vier Vierteljahre zu zahlen bedungen sind, so mufs man hier offenbar das Vierteljahr als Zeit-Einheit betrachten, und daher solche vierteljährliche Prozente annehmen, welche in 4 Vierteljahren das Kapital 100 ℳ mit den vierteljährlichen Zinseszinsen auf die bedungenen 106 ℳ bringen. Nennt man also die vierteljährlichen Zinsen x, so mufs sein: $100 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 106.$ Hieraus folgt: $1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{1{,}06} = 1{,}01467$, und die vierteljährlichen Prozente $x = 1{,}467$.

Wer also jährlich 6% zu zahlen schuldig ist, braucht für ein Vierteljahr nicht 1,5, sondern nur 1,467% zu entrichten.

Diese Untersuchung bestätigt zugleich die völlige Allgemeinheit der § 291 gefundenen Formel: $A = az^n$; sie gilt nämlich auch für die Fälle, wo n eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.

Beispiel. Jemand giebt $a = 20000$ fl. auf Zinseszinsen zu 5% jährlich; wieviel kann er nach $12^1/_2$ Jahren zurückfordern?

Antwort. Es ist:

$$\log. A = \log. 20000 + 12\tfrac{1}{2} \log. 1{,}05$$
$$A = 36804{,}1 \text{ fl.}$$

Hätte man aber den Anwachs erst für 12 ganze Jahre zu 5% und dann den ferneren Anwachs in dem folgenden halben Jahre statt zu $100(\sqrt{1{,}05} - 1)$, zu $\frac{5}{2}$% berechnen wollen, so würde der Fehler hier freilich nur 11 fl., für ein gröfseres Kapital aber mehr betragen haben.

298.

Aufgabe. In wieviel Jahren kann ein Kapital, a, zu dem Zinsfufse z belegt, $m$mal, z. B. 2, 3, 4mal so grofs werden?

Auflösung. Man setze n Jahre, so wird das Kapital a zu az^n, da nun dieses $= ma$ sein soll, so hat man:

$$az^n = ma$$

oder auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Faktor a dividiert:

$$z^n = m$$

$$n = \frac{\log. m}{\log. z}$$

Man sieht also, daſs die gesuchte Zeit n, in welcher das Kapital a auf das $m$fache wachsen soll, eine bloſse Funktion von dem Prozent und also von der Gröſse des Kapitals a völlig unabhängig ist. In derselben Zeit, in welcher sich ein Kapital von 100 ℳ verdoppelt, muſs sich auch jedes andere zu demselben Prozent belegte Kapital verdoppeln.

Beispiele. 1) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, wenn es zu 5%, und in wieviel, wenn es zu 4% belegt ist?

Antwort. Hier ist $m = 2$ und $z = 1{,}05$

$$n = \frac{\log.\ 2}{\log.\ 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}2\cdot\cdot$$

Zu 5% belegt, fällt also die Verdoppelung zwischen 14 und 15, mithin das Vierfache zwischen 28 und 29 Jahre &c. Zu 4% belegt, fällt die Verdoppelung zwischen 17 und 18 Jahre &c. Zu 3% nach 23,4.. Jahren.

2) Die Bevölkerung eines Staates hat sich in den letzten 39 Jahren verdoppelt. Wieviel Prozent beträgt die jährliche Zunahme?

Antwort. Gegeben $m = 2$; $n = 39$ und z gesucht. Aus der Gleichung: $z^n = m$ folgt:

$$n \log.\ z = \log.\ m$$

$$\log.\ z = \frac{\log.\ m}{n} = \frac{0{,}3010300}{39} = 0{,}0077187$$

$$z = 1{,}0179$$

$$\text{mithin: } p = 1{,}79.$$

Also beinahe $1\frac{4}{5}$%, d. i. reichlich der 55ste Teil.

299.

Aufgabe. Ein Kapital, a, wird auſser den Zinseszinsen noch jährlich um eine bestimmte Summe, b, vergröſsert, die am Ende eines jeden Jahrs, das letzte mitgerechnet, zugelegt wird. Es soll eine Funktion für den hiernach in n Jahren entstehenden Anwachs A, nach dem Zinsfuſs z gerechnet, gefunden werden.

Auflösung. Das Kapital a wird am Ende des $n$ten Jahrs zu az^n; die erste Zulage steht ein Jahr weniger, also $n - 1$ Jahr auf Zinseszinsen und ihr Anwachs ist folglich $= b \cdot z^{n-1}$; die zweite Zulage steht nur $n - 2$ Jahre auf Zinseszinsen und wird also $= b \cdot z^{n-2}$; die dritte Zulage wird $= b \cdot z^{n-3}$; die vorletzte Zulage trägt nur ein Jahr Zinsen; die letzte Zulage trägt gar keine Zinsen. Bezeichnen wir also die Summe sämtlicher angewachsener Kapitale mit A, so ist am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A = az^n + bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} \cdots\cdots + bz + b.$$

Dieser Ausdruck läſst sich aber noch bedeutend zusammenziehen. Die Glieder, welche auf das erste (az^n) folgen, bilden offenbar eine geometrische Progression, bei welcher, rückwärts gelesen, b das erste Glied, z der Exponent, bz^{n-1} das letzte Glied und mithin die

Summe aller $= \frac{bz^{n-1}.z - b}{z-1} = \frac{bz^n - b}{z-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z-1}$ ist. (§ 256.)

Setzen wir also statt der Progression ihre Summe, so erhält man die folgende, weit einfachere Formel, und die daraus abgeleiteten:

$$A = az^n + \frac{b(z^n - 1)}{z-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$a = \frac{A}{z^n} - \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{(A - az^n)(z-1)}{z^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log.[A(z-1)+b] - \log.[a(z-1)+b]^{*})}{\log.\ z} \ldots\ldots (4)$$

Anmerkung. Auf z läſst sich die Gleichung nicht reduzieren, weil diese Reduktion auf eine verwickelte höhere Gleichung führt. (§ 217.)

300.

Ist die jährliche Zulage dem anfänglichen Grundkapital gleich, so läſst sich die obige Formel (1), indem wir darin $b = a$ setzen und beide Glieder auf einerlei Benennung bringen, noch mehr zusammenziehen. Es ist dann:

$$A = \frac{a(z^{n+1} - 1)}{z-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = \frac{A(z-1)}{z^{n+1} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$n+1 = \frac{\log.A[(z-1)+a] - \log.a}{\log.\ z} \ldots (3)$$

301.

Wird aber, statt der jährlichen Zulage b, am Ende eines jeden der n Jahre eine gleiche Summe b weggenommen, und die Gröſse

*) Es folgt nämlich aus (1): $A(z-1) = a(z-1).z^n + bz^n - b$ und hieraus:

$$A(z-1) + b = [a(z-1)+b].z^n$$

$$z^n = \frac{A(z-1)+b}{a(z-1)+b} \quad \&c.$$

des am Ende des $n$ten Jahres vorhandenen Kapitals durch A bezeichnet, so hat man am Ende des:

1sten Jahrs: $az - b$,
2ten Jahrs: $(az - b)z - b = az^2 - bz - b$
3ten Jahrs: $az^3 - bz^2 - bz - b$
10ten Jahrs: $az^{10} - bz^9 - bz^8 - \cdots - bz - b$

Allgemein, am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A = az^n - (bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} + \cdots + bz + b)$$

Oder kürzer, indem man die in Klammern stehende Progression summiert:

$$A = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = \frac{A}{z^n} + \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{(az^n - A)(z - 1)}{z^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log.[A(z - 1) - b] - \log.[a(z - 1) - b]}{\log.\ z} \quad \ldots\ldots (4)$$

Ist der jährliche Abzug b kleiner als die jährlichen einfachen Zinsen des Grundkapitals, so mufs der Anwachs A offenbar immer gröfser werden. Ist aber der jährliche Abzug gröfser als die jährlichen Zinsen, so mufs der Anwachs A immer kleiner, also endlich einmal 0, und von da an, wenn der Abtrag noch fortdauert, entgegengesetzt werden, und mithin das gegenseitige Verhältnis des Gläubigers und Schuldners umkehren.

302.

Soll durch den jährlichen Abtrag b das Grundkapital a samt den Zinseszinsen in n Jahren gerade getilgt werden, so mufs in Formel (1) des vorhergehenden Paragraphen, $A = 0$, nämlich die beiden Glieder der rechten Seite einander gleich sein, daher:

$$\frac{b(z^n - 1)}{z - 1} = az^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nach dieser Gleichung kann man, wenn von den vier Gröfsen a, b, n, z drei gegeben sind, die vierte finden (§ 299, Anm.). Es ist nämlich:

$$a = \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{a(z - 1)z^n}{z^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log.\ b - \log.[b - a(z - 1)]}{\log.\ z} \quad \ldots (4)$$

303.

1. Aufgabe. Wie grofs wird ein zu 5 % Zinseszinsen auf 25 Jahre belegtes Kapital von 5000 ℳ, wenn noch am Ende eines jeden der 25 Jahre 200 ℳ zugelegt werden?

Antwort. 26477 ℳ. Man hat nämlich (§ 299):

$$A = az^n + \frac{b(z^n - 1)\,^{*)}}{z - 1}$$

$$\begin{array}{r}
\log.\ z = 0{,}0211893 \\
25 \\
\hline
1059465 \\
423786 \\
\hline
\log.\ z^{25} = 0{,}5297325 \\
\hline
z^{25} = 3{,}386355 \\
\hline
(z^{25} - 1) = 2{,}386355\,^{*)} \\
\log.\,(z^{25} - 1) = 0{,}3777350 \\
\log.\ b = 2{,}3010300 \\
\hline
2{,}6787650 \\
\log.\,(z - 1) = 0{,}6989700 - 2 \\
\hline
3{,}9797950 \\
\hline
b\,\dfrac{(z^n - 1)}{z - 1} = 9545{,}42
\end{array}$$

Gegeben:

$a = 5000;\quad z = 1{,}05,$
$b = 200;\quad n = 25.$

$$\begin{array}{r}
\log.\ z^{25} = 0{,}5297325 \\
\log.\ a = 3{,}6989700 \\
\hline
4{,}2287025 \\
\hline
az^{25} = 16931{,}77 \\
\hline
\\
az^{25} = 16931{,}77 \\
b\,\dfrac{(z^{25} - 1)}{z - 1} = 9545{,}42 \\
\hline\hline
A = 26477{,}19
\end{array}$$

304.

2. Aufgabe. Es werden 5500 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen angelegt, wie grofs bleibt der Rest nach 30 Jahren, wenn mit Ende eines jeden Jahrs 300 ℳ weggenommen werden?

Antwort. 2297 ℳ. Man hat nämlich:

$$A = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$\begin{array}{r}
\log.\ z = 0{,}0191163 \\
30 \\
\hline
\log.\ z^{30} = 0{,}5734890 \\
z^{30} = 3{,}74532 \\
\hline
z^{30} - 1 = 2{,}74532 \\
\hline
\log.\,(z^{30} - 1) = 0{,}4385930 \\
\cdots b = 2{,}4771213 \\
\hline
2{,}9157143 \\
\log.\,(z - 1) = 0{,}6532125 - 2 \\
\hline
4{,}2625018 \\
\hline
b\,\dfrac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = 18302{,}13
\end{array}$$

Gegeben:

$a = 5500;\quad z = 1{,}045$
$b = 300;\quad n = 30.$

$$\begin{array}{r}
\log.\ z^{30} = 0{,}5734890 \\
\log.\ a = 3{,}7403627 \\
\hline
4{,}3138517 \\
\hline
az^{30} = 20599{,}26 \\
b\,\dfrac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = 18302{,}13 \\
\hline\hline
A = 2297{,}13
\end{array}$$

---

*) Die zweiteiligen Gröfsen $(z-1)$ und (z^n-1) müssen, ehe man ihre Logarithmen nehmen kann, erst in einteilige zusammengezogen werden. (§ 283.)

305.

3. Aufgabe. Wie grofs mufs der jährliche Abtrag b sein, damit von dem auf 10 Jahre zu $2\frac{1}{2}$ % belegten Kapital von 6000 ℳ noch 1000 ℳ übrig bleiben?

Antwort. $596\frac{3}{10}$ ℳ. Es ist nämlich (§ 304):

$$b = (az^n - \mathrm{A})\frac{(z-1)}{z^n - 1}$$

Gegeben:

$$\mathrm{A} = 1000; \quad z = 1{,}025;$$
$$a = 6000; \quad n = 10.$$

$$\begin{aligned} 10 \log. z &= 0{,}1072390 \\ \log. a &= 3{,}7781513 \\ \hline & 3{,}8853903 \\ \hline az^{10} &= 7680{,}514 \\ \mathrm{A} &= 1000 \\ \hline az^{10} - \mathrm{A} &= 6680{,}514 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{10} &= 1{,}2800859 \\ z^{10} - 1 &= 0{,}2800859 \\ \hline \log. (az^{10} - \mathrm{A}) &= 3{,}8248100 \\ \cdots\cdots (z-1) &= 0{,}3979400 - 2 \\ \hline & 2{,}2227500 \\ \log. (z^{10} - 1) &= 0{,}4472913 - 1 \\ \hline \log. b &= 2{,}7754587 \\ b &= 596{,}291 \end{aligned}$$

306.

4. Aufgabe. Auf ein zu 5% Zinseszinsen stehendes Kapital von 30000 ℳ werden jährlich 3500 ℳ abgetragen; in wieviel Jahren wird dadurch das Kapital getilgt sein?

Antwort. $11\frac{1}{2}$ Jahr (beinahe).

Man hat nämlich (§ 302):

$$n = \frac{\log. b - \log. [b - a(z-1)]}{\log. z}$$

Gegeben:

$$a = 30000; \quad b = 3500; \quad z = 1{,}05.$$

$$\begin{aligned} z - 1 &= 0{,}05 \\ a &= 30000 \\ \hline a(z-1) &= 1500 \\ b &= 3500 \\ \hline b - a(z-1) &= 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. b &= 3{,}5440680 \\ \log. [b - a(z-1)] &= 3{,}3010300 \\ \hline & 0{,}2430380 \\ \log. z &= 0{,}0211893 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}2430380}{0{,}0211893} = 11{,}47$$

307.

5. Aufgabe. Jemand hat 25 Jahre hindurch ein jährliches Einkommen von 200 ℳ (z. B. Niefsbrauch, Rente, Aktie &c.) zu beziehen. Da er aber ein Geschäft anfangen will, so entschliefst er sich, seine 25jährige Rente zu verkaufen. Wieviel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, wenn die Zinsen $3\frac{3}{4}$ % betragen?

Antwort. 3208,64 ℳ.

Auflösung. Hier wird ein Kapital a gesucht, welches samt seinen Zinseszinsen in 25 Jahren durch den jährlichen Abtrag von 200 ℳ getilgt ist. Diesen gegenwärtigen Wert der 25jährigen Rente findet man also nach der Formel 2, § 302.

$$a = \frac{b\,(z^n - 1)}{z^n\,(z-1)}; \qquad b = 200; \qquad z = 1{,}0375; \qquad n = 25.$$

$\log. z = 0{,}0159881$; $\log.(z^{25}-1) = 0{,}1790247$; $\log. z^{25} = 0{,}3997025$

$$\begin{array}{rrr}
\log. z = 0{,}0159881 & \log.(z^{25}-1) = 0{,}1790247 & \log. z^{25} = 0{,}3997025 \\
25 & \cdots b = 2{,}3010300 & \cdot\cdot(z-1) = 0{,}5740313-2 \\
\hline
799405 & 2{,}4800547 & 0{,}9737338-2 \\
319762 & 2{,}4800547 & \\
\hline
0{,}3997025 & 0{,}9737338-2 & \\
z^{25} = 2{,}510166 & \log. a = 3{,}5063209 & \\
z^{25}-1 = 1{,}510166 & a = 3208{,}64\cdots & \\
z-1 = 0{,}0375 & &
\end{array}$$

308.

6. Aufgabe. Um eine Witwenpension von jährlich $b = 200$ ℳ zu kaufen, zahlt jemand an die Witwen-Kasse jährlich $a = 50$ ℳ. Wenn nun aber der Mann erst nach $n = 20$ und die Frau schon $m = 8$ Jahren später stirbt, wieviel hat dann die Witwen-Kasse gewonnen oder verloren, wenn beiderseits nach dem Zinsfuſse $z = 1{,}04$ gerechnet wird?

Auflösung. Werden die Zahlungen beiderseits mit Anfang eines jeden Jahrs geleistet, und der Schluſs der Rechnung erst nach dem verflossenen $n+m$ten Jahr gemacht, so steht die erste Einlage $n+m$ Jahre und ist also an Wert $= az^{n+m}$; die 2te Einlage steht ein Jahr weniger und ist also wert $= az^{n+m-1}$ &c. Die letzte Einlage steht nur $m+1$ Jahr und ist also az^{m+1} wert. Ebenso ist der Wert der ersten Pension b nach m Jahren $= bz^m$, der letzten $= bz$. Mithin ist:

$$A = az^{n+m} + az^{n+m-1} + az^{n+m-2} \ldots + az^{m+1} - (bz^m + bz^{m-1} + \ldots + bz)$$

Beide Progressionen summiert, kömmt:

$$A = \frac{az^{n+m} \cdot z - az^{m+1}}{z-1} - \frac{bz^m \cdot z - bz}{z-1}$$

$$A = \frac{az^{m+1}(z^n - 1) - bz(z^m - 1)}{z-1}$$

Den ersten Teil des Zählers hätte man auch kürzer so finden können: Die n Einlagen betragen, weil sie mit Anfang eines jeden Jahrs bezahlt werden, am Ende des $n$ten Jahrs $= \frac{az(z^n - 1)}{z-1}$; dieses Kapital steht nun aber noch m Jahre und wird $= \frac{az^{m+1}(z^n - 1)}{z-1}$. Die obige Formel kann auch so geschrieben werden:

$$A = [az^m(z^n - 1) - b(z^m - 1)]\,\frac{z}{z-1}$$

Für den oben angegebenen Fall, wo $a = 50$; $b = 200$; $n = 20$; $m = 8$; $z = 1{,}04$, hätte also die Witwen-Kasse einen Vorteil von $A = 202$ ℳ.

Ebenso findet man leicht die Formeln für die Fälle, wo die Zahlungen halbjährlich oder am Ende des Jahrs geleistet, oder wo die Einlagen mit

Anfang, die Pension aber mit Ende des Jahrs entrichtet werden &c. Auch andere in dieser Art vorkommende juristische, politische, staatswissenschaftliche und dergleichen Fragen wird man nach dem Vorhergehenden beantworten können, und wir beschliefsen daher dieses Kapitel mit ein paar schwerern Aufgaben für Geübtere.

309.

* **Aufgabe.** Wie grofs ist der bare Wert a einer $n$jährigen Rente, welche durch eine geometrische Progression läuft, deren erstes Glied b und deren Exponent e ist; wo also am Ende des ersten Jahrs die Rente b, am Ende des zweiten Jahrs die Rente be, am Ende des dritten Jahrs die Rente be^2&c., am Ende des $n$ten Jahrs be^{n-1} gehoben wird, und die Rente mithin von Jahr zu Jahr in dem Verhältnis $1:e$ wachsen oder abnehmen mufs, je nachdem $e \gtrless 1$ ist.

Auflösung. Es ist am Ende des $n$ten Jahrs der Wert der:

$$\begin{array}{rl} \text{1sten Rente} & = bz^{n-1} \\ \text{2ten Rente} & = be.z^{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ n-\text{1ten Rente} & = be^{n-2}.z \\ n\text{ten Rente} & = be^{n-1} \end{array}$$

Der für alle Renten mit Anfang des ersten Jahrs gezahlte bare Wert a wird nach n Jahren zu az^n. Mithin mufs sein:

$$az^n = b.z^{n-1} + be.z^{n-2} + be^2.z^{n-3} + \ldots + be^{n-2}.z + be^{n-1}.$$

Die zweite Seite dieser Gleichung bildet eine geometrische Progression, wo bz^{n-1} das erste, be^{n-1} das letzte Glied, $\frac{e}{z}$ der Exponent, und deren Summe mithin (§ 256) $= \dfrac{be^{n-1}\frac{e}{z} - bz^{n-1}}{\frac{e}{z} - 1} = \dfrac{be^n - bz^n}{e-z}$ ist.

Man hat also kürzer:

$$az^n = \frac{be^n - bz^n}{e-z}$$

$$\text{und } a = \frac{b.(e^n - z^n)}{z^n(e-z)} = \frac{b\left\{\left(\frac{e}{z}\right)^n - 1\right\}}{e-z}$$

310.

* **Aufgabe.** Wie grofs ist der bare Wert der durch n Jahre nach der arithmetischen Progression b, $2b$, $3b$, $4b$, $\cdot\cdot\, nb$ fortlaufenden Rente, wo also am Ende des ersten Jahrs b, und in jedem folgenden Jahr b mehr, als im nächst vorhergehenden, gehoben wird?

Auflösung. Heiſst a der gegenwärtige Wert, so ist:

$$az^n = bz^{n-1} + 2b.z^{n-2} + 3b.z^{n-3} + \ldots + (n-1)bz + nb.$$

Diese, aus einer arithmetischen und geometrischen Progression zusammengesetzte Reihe läſst sich in ebenso viele geometrische Progressionen zerlegen, als Glieder vorhanden sind und dann summieren, wenn man zuvor jedes Glied in so viele Teile zerlegt, als der davorstehende numerische Koefficient Einheiten hat. Es ist nämlich:

$$2bz^{n-2} = bz^{n-2} + bz^{n-2}; \quad 3bz^{n-3} = bz^{n-3} + bz^{n-3} + bz^{n-3} \text{ \&c.}$$

Mithin:

$$az^n = \left\{ \begin{array}{rl} bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (1) \\ + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (2) \\ + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (3) \\ + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (4) \\ + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (5) \\ + \ldots + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots\ldots (6) \\ + \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ + bz^2 + bz + b & \ldots\ldots (n-2) \\ + bz + b & \ldots\ldots (n-1) \\ + b & \ldots\ldots (n) \end{array} \right.$$

Jede Querreihe bildet eine geometrische Progression, deren Exponent z ist, und es ist die Summe der Reihe:

$$(1), = \frac{bz^{n-1}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z-1}$$

$$(2), = \frac{bz^{n-2}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-1} - 1)}{z-1}$$

$$(3), = \frac{bz^{n-3}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-2} - 1)}{z-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n-2), = bz^2 + bz + b = \frac{bz^2.z - b}{z-1} = \frac{b(z^3 - 1)}{z-1}$$

$$(n-1), = bz + b = \frac{bz.z - b}{z-1} = \frac{b(z^2 - 1)}{z-1} \quad (\S\ 143,\ 2.)$$

$$(n), = b = \frac{b.z - b}{z-1} = \frac{b.(z-1)}{z-1}$$

Setzt man also in obige Gleichung statt der n Reihen ihre Summen, so ist:

$$az^n = \frac{b}{z-1}(z^n - 1) + \frac{b}{z-1}(z^{n-1} - 1) + \ldots\ldots + \frac{b}{z-1}(z^2 - 1) + \frac{b}{z-1}(z-1)$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n - 1 + z^{n-1} - 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 - 1 + z - 1\right\}$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n + z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 + z - (1+1+\ldots+1)\right\}$$

Diese Summe der in Klammern stehenden Reihe $1+1+1+\ldots$ ist $=n$, weil n Glieder (Einheiten) vorhanden sind, die Summe der andern geometrischen Reihe ist $= \frac{z^n . z - z}{z-1} = \frac{z(z^n-1)}{z-1}$.

Substituiert man diese Summen, so kommt:

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{\frac{z}{z-1}(z^n-1) - n\right\}$$

Mithin ist:

$$a = \frac{b}{z^n(z-1)}\left\{\frac{(z^n-1)z}{z-1} - n\right\}$$

Anhang.

Anmerkungen und Ergänzungen.

311.

Zu § 1. Man mutmafst, dafs zu unserm, allgemein üblichen Verfahren, mit zehn Wörtern alle Zahlen zu benennen, die zehn Finger Veranlassung gegeben haben. Mit Gewifsheit kann man aber dieses nicht behaupten, da es ursprünglich ganz willkürlich war, und man die Zahlen auch ebensogut mit mehr oder weniger Grundwörtern hätte benennen können. So hätte man z. E. anfangs nur bis vier zu zählen brauchen, und dann, statt für die auf vier folgende Zahl ein neues Wort zu ersinnen, eins und vier, oder kürzer einsvier sagen können, dann zweivier, dreivier, viervier oder zweimal vier; ferner eins und zweimal vier &c. Die Wörter eins und zweimalvier, zwei und zweimalvier &c. hätte man dann auch wie § 1, durch Auslassung der Silbe „mal“ und Veränderung der Silbe vier in kürzere verwandeln können. — Nach Aristoteles' Berichten hat es ein thrakisches Volk gegeben, welches auf diese Weise zählte. Noch jetzt soll ein zehnfingeriges Volk, die Jalofs, in der Nachbarschaft des Senegals wohnen, welches zur Benennung der Zahlen nur fünf Grundwörter gebraucht, und so zählt:

ben,	*niard,*	*niet,*	*guyanet,*	*guiron,*	*guiron ben,*	*guiron niard,*
(ein)	(zwei)	(drei)	(vier)	(fünf)	(fünf und eins)	(fünf und zwei)

Mehreres hierüber, sowie über die Zahlzeichen der Römer, Griechen, Hebräer und anderer Völker sehe man in Montucla, histoire des Mathématiques. Tom I, pag. 45 et 375 und Klügel's Mathem. Wörterbuch 5. Teil, pag. 1166 u. f.

312.

Zu § 6. 1) Dafs man statt 10 auch jede andere beliebige Menge Einheiten als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen kann, und dann nach demselben einfachen Gesetz zur Darstellung aller Zahlen nicht mehr Ziffern braucht, als die gewählte Grundzahl Einheiten hat, ist klar. Hätte man z. E. die Übereinkunft getroffen, vier zur Grundzahl eines Zahlensystems zu machen, mithin diese Grundzahl vier als Einheit ersten Ranges und also vier solche Einheiten ersten Ranges, d. i. sechzehn als eine neue Einheit zweiten Ranges anzusehen u. s. f., so hätte man auch nur die vier Ziffern 1, 2, 3, 0 nötig gehabt, um damit, in dem hiernach entstehenden Zahlensystem, die sogenannte *Tetradik*, alle möglichen Zahlen zu bezeichnen. In diesem System ist also jede Einheit einer links stehenden Ziffer viermal so grofs, als die Einheit der nächst rechts stehenden Ziffer; weil nämlich je vier Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höhern Ranges machen, so mufs man vier als Einheit ersten Ranges durch 10 bezeichnen, fünf durch 11; sechs, 12; sieben, 13; acht, als zwei Einheiten ersten Ranges, durch 20; neun, 21; elf, 23; zwölf, 30; fünfzehn, 33; sechzehn, als vier Einheiten ersten Ranges oder eine Einheit zweiten Ranges durch 100; siebzehn 101 u. s. f.

Ebenso hätte man auch zwei als Grundzahl nehmen und nach dem einfachen Gesetz, dafs je zwei Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höheren Ranges machen sollen, blofs mit den beiden Ziffern 1 und 0 alle Zahlen bezeichnen können, nämlich: eins, 1; zwei als Einheit ersten Ranges durch 10; drei, 11; vier, als zwei Einheiten ersten oder eine Einheit zweiten Ranges, durch 100; fünf 101; sechs 110; sieben 111; acht, als zwei Einheiten zweiten oder eine Einheit dritten Ranges, durch 1000; neun, 1001; zehn, 1010 u. s. f. Dieses System, die sogenannte *Dyadik*, sollen vor Zeiten die Chinesen gebraucht, statt des Stellzeichens 0 aber einen Querstrich (—) gesetzt haben. Aufser einem praktischen Nutzen dieses Systems zur Entdeckung merkwürdiger Eigenschaften der Zahlen und deren Teilbarkeit, wollte Leibnitz noch darin ein treues Bild der Schöpfung finden und suchte durch Erklärung desselben und durch Vermittelung des Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, die Chinesen zum Übertritt zur christlichen Religion zu bewegen.

Gleicherweise hätte man auch die Zahl zwölf zur Grundzahl machen und für die beiden Zahlen zehn und elf noch zwei einfache Zeichen, wie etwa α und β, einführen können. Hiernach würde man also schreiben: neun, 9; zehn α; elf β; zwölf (als Einheit ersten Ranges) 10; dreizehn 11; dreiundzwanzig 1 β; vierundzwanzig 20 u. s. f. Es ist noch gar nicht lange, als man ernstlich darauf dachte, dieses System, die *Duodekadik*, statt der *Dekadik*, einzuführen, und zwar zuerst aus dem theoretischen Grunde, weil es zwölf Apostel gegeben hat; später aber aus dem praktischen Grunde, weil die Zahl 12 mehr Faktoren als die Zahl zehn hat, welches beim Rechnen bedeutende Vorteile gewähren sollte. Sei es nun, dafs die Mathematiker diesen praktischen Nutzen, oder die Wichtigkeit jenes frommen Grundes nicht begreifen können, sie haben beides nicht beherzigt und nichts zur Ausführung jener Verbesserung beigetragen. Man sieht also, dafs unendlich viele Zahlensysteme möglich sind, und es in der That zu verwundern, dafs nicht die alten Griechen und namentlich Archimedes, der geistreichste Mathematiker unter ihnen, auf die wichtige Erfindung eines solchen Zahlensystems gekommen ist. Der Vergleichung wegen wollen wir hier einige Systeme nebeneinander stellen:

Dyadik	*Triadik*	*Tetradik*	*Pentadik*	*Hexadik*	*Heptadik*	*Octadik*	*Enneadik*	*Dekadik*	*Enneadekadik*	*Duodekadik*	&c.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	.
11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	.
100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	.
101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	.
110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	.
111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	.
1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	.
1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	.
1010	101	22	20	14	13	12	11	10	α	α	.
1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	β	. .
1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10	.

2) Die Frage, welches von allen Zahlensystemen wohl das beste sei, lassen wir dahin gestellt sein. Jedes ist praktisch brauchbar. Uns mufs

aber schon aus dem haltbaren Grunde die Dekadik das beste sein, weil es in der zivilisierten Welt überall gebraucht wird, und wir darnach zu schreiben einmal gewohnt sind. Übrigens macht es auch nur die Ungewohntheit, wenn man nicht in allen Systemen gleich fertig schreiben und rechnen kann. — Soviel ist indessen klar, je gröfser die Grundzahl eines Zahlensystems, je gröfser das dazu erforderliche Einmaleins, je schwerer, aber je schneller ist auch danach zu rechnen und umgekehrt. Die Chinesen in ihrer Kindheit brauchten zu ihrer Dyadik gar kein Einmaleins.

3) Nichts ist leichter, als eine Zahl, welche in einem beliebigen System geschrieben ist, in ein anderes zu übersetzen. Soll z. E. die tetradisch gebildete Zahl 210232, dekadisch geschrieben werden, so braucht man nur jede Ziffer mit dem Wert ihrer Einheit, d. h. so oft mit 4 zu multiplizieren, als ihr Rang es angiebt. Die erste rechts stehende Ziffer ist vom 0ten Range und stellt also blofse Einheiten dar, die zweite Ziffer ist aber vom ersten Range, wo also jede Einheit 4 Einheiten in der Dekadik gilt, die dritte Ziffer ist vom zweiten Range und jede Einheit gilt hier also $4.4 = 16$. Mithin ist die tetradisch geschriebene Zahl 210232 dekadisch ausgedrückt $= 2350$.

$$\underbrace{\scriptstyle 1024}_{2}\ \underbrace{\scriptstyle 256}_{1}\ \underbrace{\scriptstyle 64}_{0}\ \underbrace{\scriptstyle 16}_{2}\ \underbrace{\scriptstyle 4}_{3}\ \underbrace{\scriptstyle 1}_{2} = \left\{\begin{array}{r} 2 = \quad 2 \\ 3.4 = \quad 12 \\ 2.16 = \quad 32 \\ 0.64 = \quad 0 \\ 1.256 = \ 256 \\ 2.1024 = \underline{2048} \\ 2350 \end{array}\right.$$

Ebenso findet man:

Dyadik	*Dekadik*
101011	= 43

$$\underbrace{\scriptstyle 32}_{1}\ \underbrace{\scriptstyle 16}_{0}\ \underbrace{\scriptstyle 8}_{1}\ \underbrace{\scriptstyle 4}_{0}\ \underbrace{\scriptstyle 2}_{1}\ \underbrace{\scriptstyle 1}_{1} = \left\{\begin{array}{r} 1 = \ 1 \\ 1.2 = \ 2 \\ 0.4 = \ 0 \\ 1.8 = \ 8 \\ 0.16 = \ 0 \\ 1.32 = \underline{32} \\ 43 \end{array}\right.$$

4) Soll umgekehrt eine dekadisch gebildete Zahl, z. B. 2350, in die Tetradik übertragen werden, so mufs man die vorgegebene Zahl wiederholt durch die Grundzahl 4 dividieren; der erste Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom ersten Range, und der erste Rest die Anzahl Einheiten vom 0ten Range; der zweite Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom zweiten und der zweite Rest die vom ersten Range &c.; z. B.:

(1)

2350	$\overset{4}{587}$	$\overset{4}{146}$	$\overset{4}{36}$	$\overset{4}{9}$	$\overset{4}{2}$
2	3	2	0	1	2

(2)

43	$\overset{2}{21}$	10	5	2	1
1	1	0	1	0	1

Also: 2350 in der Dekadik $= 210232$ in der Tetradik
43 „ „ „ $= 101011$ „ „ Dyadik.

5) Der Mechanismus der vier Spezies ist in allen Systemen gleich. Bei der Addition in der Tetradik z. B. braucht man nur für je vier Einheiten einer Reihe eine Einheit in die nächst folgende zu übertragen &c., wie folgende Beispiele zeigen:

	Dyadik.	*Tetradik.*	*Duodekadik.*
Addition:	10101001	301202	$167\beta89\alpha$
	1111001	133112	$\beta292\alpha1$
Summe:	100100010	1100320	$25\alpha8\beta7\beta$

Subtraktion:	100100010	1100320	$25\alpha 8\beta 7\beta$
	1111001	301202	$\beta 292\alpha 1$
Rest:	10101001	133112	$167\beta 89\alpha$
Multiplikation:	10111	2302	$9\beta 0\alpha$
	1011	213	$4\beta 3$
	10111	20112	25926
	10111	2302	91192
	101110	11210	33834
	11111101	1230132	$40\beta 9\alpha 46$
	Dyadik.		*Tetradik.*

Division: Quotient:

10111	11111101	1011		2302	1230132	213
	10111				11210	
	100010				10313	
	10111				2302	
	10111				20112	
	10111				20112	

6) Wenn eine Zahl nur mit zweierlei Ziffern geschrieben wird, so ist leicht zu erkennen, durch welche, mit denselben beiden Ziffern geschriebene, Zahlen sie teilbar ist. So sieht man z. B. gleich, dafs die Zahl 95959595 durch 95 und 9595 teilbar ist. Weil nun in der Dyadik alle Zahlen (auch die bei der Subtraktion darin entstehenden Reste) mit denselben beiden Ziffern 1 und 0 geschrieben werden, so begreift man, weshalb **Leibnitz** dieses System zur Entdeckung der Teilbarkeit der Zahlen geeigneter fand. Man sieht z. B., dafs die Zahl 100100100100 durch 100, 1001, 10, 11 &c. teilbar sein mufs. Wird also eine Zahl in die Dyadik übersetzt, so sind ihre Faktoren leichter zu erkennen. So ist z. E. die Zahl 31393 dyadisch geschrieben = 111101101000001 und ein geübter Blick sieht nun sogleich, dafs sie durch 111, = 7; 1101, = 13; 10001, = 17; 10011, = 19 teilbar ist. (S. **Lamberts** mathem. Schriften.)

313.

Zu § 10. Der in § 10 angeführte Satz: dafs man die beiden Faktoren eines Produkts miteinander verwechseln darf, läfst sich folgendermafsen beweisen: Ob man den Faktor b selbst oder jede darin enthaltene Einheit a mal setzt, das ist einerlei. Ebenso ist es einerlei, ob man die **Einheit** a mal, oder a **einmal** nimmt, $a.1 = 1.a = a$. Setzt man nun jede in b enthaltene Einheit a mal, so hat man offenbar a selbst, b mal gesetzt. Es ist nämlich, wenn man b in Einheiten auflöst: $a.b = a(1+1+1+1+\ldots) = a+a+a+a+\ldots = b.a$.

Beispiel: $4.5 = 4.(1+1+1+1+1) = (4+4+4+4+4) = 5.4$

Dieser Satz ist ganz allgemein und läfst sich auf beliebig viele Faktoren ausdehnen, indem man nach dem Schlufs von n auf $n+1$ von zwei Faktoren auf drei, von drei auf vier schliefst &c. Es ist z. B. $a.bc = a.cb = bc.a = cb.a$, wo nach dem vorhergehenden Satz blofs zwei Faktoren, erstlich b und c, dann bc und a verwechselt sind. Nun ist aber auch $ab.c = a.bc$; denn ob man c erst b mal und dann diese b gleichen Summanden wieder a mal, oder ob man c gleich ab mal setzt, das ist einerlei, indem man in beiden Fällen ab gleiche Summanden (c) erhält. Ebenso ist $bc.a = b.ca$, mithin $abc = acb = cab = cba = bac = bca$ &c.

314.

Zu § 24. 1) Die Zahlen 2 und 5 sind in 10, mithin $2.2 = 4$ und $5.5 = 25$ in $10.10 = 100$; $2.2.2 = 8$ und $5.5.5 = 125$ in 1000 ohne Rest enthalten.

Um nun zu beweisen, dafs eine Zahl, z. B. 276, durch 2 teilbar sein mufs, weil ihre letzte Ziffer es ist, denke man sich diese letzte Ziffer davon getrennt und die Zahl als eine zweiteilige geschrieben, nämlich $276 = 270 + 6 = 27.10 + 6$. Weil nun der letzte Teil 6 vermöge Voraussetzung und der erste Teil 27.10 wegen des Faktors 10 durch 2 teilbar ist, so mufs es auch die Summe $27.10 + 6 = 276$ sein (§ 21); weil $\frac{276}{2} = \frac{270+6}{2} = \frac{27.10}{2} + \frac{6}{2} = 27.5 + 3$. Ebenso ist der Beweis für 5; und für $2.2 = 4$; $2.2.2 = 8$ &c., wenn man die beiden letzten, drei letzten Ziffern &c. trennt. Weil z. E. die beiden letzten Ziffern der Zahl 1484 durch 4 teilbar sind, so ist es auch die ganze Zahl; denn

$$\frac{1484}{4} = \frac{1400+84}{4} = \frac{14.100}{4} + \frac{84}{4}; \qquad \frac{675}{5} = \frac{670+5}{5} = \frac{67.10}{5} + \frac{5}{5}$$

2) Eine jede Zahl läfst sich immer so zerlegen, dafs jede Ziffer mit einem Faktor von so vielen 9 multipliziert ist, als noch Ziffern folgen, und dafs der eine Teil die Quersumme aller Ziffern ist; z. B.:

$$\begin{aligned} 6453 &= 6.999 + 4.99 + 5.9 + (6+4+5+3) \\ &= 6.999 + 4.99 + 5.9 + 18 \end{aligned}$$

Es ist nämlich:

$$6453 = 6000 + 400 + 50 + 3 = 6.1000 + 4.100 + 5.10 + 3$$

ferner, da: $1000 = 999 + 1$; $100 = 99 + 1$ &c.

$$\begin{array}{rclcl} 6000 &=& 6(999+1) &=& 6.999+6 \qquad (\S\ 19) \\ 400 &=& 4(99+1) &=& 4.99+4 \\ 50 &=& 5(9+1) &=& 5.9+5 \\ 3 &=& 3 &=& 3 \\ \hline 6453 &=& \multicolumn{3}{l}{6.999+4.99+5.9+18} \end{array}$$

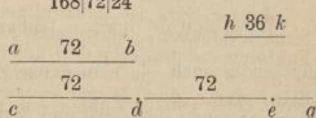
Ist also die Quersumme der Zahl 6453 durch 3 oder 9 teilbar, so sind es auch die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung und folglich auch die Zahl, als deren Summe:

$$\frac{6453}{9} = \frac{6.999 + 4.99 + 5.9 + (6+4+5+3)}{9}$$

315.

Zu § 29. Nach der § 29 gegebenen Regel findet man 24 als den gröfsten gemeinschaftlichen Faktor von 72 und 168.

168|72|24



Dafs nun die nach dieser Regel gefundene Zahl 24 wirklich ein gemeinschaftlicher Faktor und zwar der möglichst gröfste ist, ist am leichtesten einzusehen, wenn man die beiden Zahlen 72 und 168 durch Linien dargestellt denkt. Läfst man nämlich eine beliebig lange Linie die Einheit bedeuten, so stellt eine 72mal so lange Linie ab die Zahl 72 und ebenso cg die Zahl 168 dar. Ist nun (nachdem ab auf cg zweimal abgesetzt worden), der erste Rest $eg = 24$, irgend wievielmal ohne Rest in ab enthalten, so mifst er auch cd, de und eg (sich selbst) und folglich auch $cg = 168$. Ein gröfseres Mafs, wie etwa $hk = 36$, welches in ab folglich auch in cd und de enthalten wäre, kann nicht in der kleinern Linie eg und folglich auch nicht ohne Rest in $cg = 168$ enthalten sein.

Im vorstehenden Beispiel ging die Division schon beim zweiten Male auf, die Schlüsse bleiben aber offenbar dieselben, wenn sie weiter fortgesetzt werden müssen.

316.

Zu §§ 28, 52, 182.

Lehrsatz. Wenn p eine Primzahl und a und b zwei ganz beliebige Zahlen bedeuten, welche jedoch einzeln nicht durch p (ohne Rest) teilbar sind, so kann auch ihr Produkt $a.b$ nicht durch p teilbar sein.

1. **Beweis.** Wenn eine Zahl, a, durch eine Primzahl, p, ohne Rest teilbar ist, so mufs die Zahl a, in ihre einfachen Faktoren zerlegt, notwendig den einfachen Faktor p enthalten.

Wenn also zwei (oder auch mehrere) Zahlen, a, b, einzeln genommen durch eine Primzahl, p, nicht teilbar sind, so kann es auch ihr Produkt $a.b$ nicht sein. Denn da in diesem Falle weder a noch b, in einfache Faktoren zerlegt, den Primfaktor p enthält, so kann auch die Multiplikation ihrer Primfaktoren unmöglich den Primfaktor p in ihr Produkt hineinbringen, weil aus der Multiplikation mehrer Primzahlen immer eine zusammengesetzte Zahl entsteht. Hieraus folgt ferner (weil eine zusammengesetzte Zahl, a, gleich dem Produkt aus allen ihren Primzahlen ist), dafs eine Zahl, a, nicht auf verschiedene Weise in Primzahlen zerlegt werden kann.

2. **Beweis.** Sind beide Faktoren a und b gröfser als p, so dividiere man erst einen von ihnen, b durch p, bezeichne den ganzen Quotienten mit m und den Rest, der notwendig kleiner als p ist, mit r. Es sei nämlich

$$\frac{b}{p}=m+\frac{r}{p} \text{ oder: } b=mp+r$$

und folglich (auf beiden Seiten mit $\frac{a}{p}$ multipliziert):

$$\frac{ab}{p}=ma+\frac{ar}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Könnte nun $a.b$, durch p teilbar, mithin $\frac{ab}{p}$ eine ganze Zahl sein, so müfste, weil ma eine ganze Zahl ist, notwendig auch $\frac{ar}{p}$ eine ganze Zahl, mithin ar durch p teilbar sein. Um die Unmöglichkeit zu zeigen, dividiere jetzt p durch r, setze den ganzen Quotienten $=m'$ und den Rest$=r'$. Es sei nämlich:

$$p=m'r+r'$$

folglich (mit $\frac{a}{p}$ multipliziert):

$$a=m'\frac{ar}{p}+\frac{ar'}{p}$$

Wäre nun ar durch p teilbar, mithin $\frac{m'ar}{p}$ eine ganze Zahl, so müfste notwendig auch $\frac{ar'}{p}$ eine ganze Zahl sein, weil der Betrag der rechten Seite gleich einer ganzen Zahl a sein mufs.

Dafs aber auch ar' nicht durch p teilbar sein kann, wird ebenso wie von ar bewiesen, indem man p durch r' dividiert, den Quotienten mit m'' und den Rest mit r'' bezeichnet &c. Man sieht also, dafs durch Wiederholung dieses Schlusses der jedesmal bleibende Rest $r, r', r'', r''' \ldots$ von welchen keiner in p (weil p eine Primzahl) enthalten ist, immer kleiner und zuletzt $=1$ werden mufs. Wäre also ab durch p teilbar, so müfste auch $ar, ar', ar'' \ldots\ldots a.1$, mithin a selbst durch p teilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Ist keiner der drei Faktoren a, b, c durch die Primzahl p teilbar, so ist es auch ihr Produkt abc nicht. Denn nach dem Vorhergehenden ist es $a.b$ nicht und wenn man $ab = A$ setzt, auch $A.c = abc$ nicht &c. Dieser für die Arithmetik wichtige Lehrsatz giebt den Schlüssel zu vielen andern.

317.

Zu § 32. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist, aufser 5 und 2, keine Primzahl, wie 3, 7 &c., also auch kein Vielfaches derselben, wie 2.3, 4.7 &c., kurz keine Zahl, die sich nicht in lauter Faktoren 2 und 5 auflösen läfst, in 10, also auch nicht in 10.10 oder 100, 1000 &c. ohne Rest enthalten. Daraus folgt also, dafs kein Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegeneinander sind, genau durch einen Decimalbruch dargestellt werden kann, wenn sein Nenner sich nicht in lauter Faktoren, wie 2 und 5, auflösen läfst. Dafs dann aber die Decimalen immer in derselben Folge (periodisch) wiederkehren müssen, ist leicht zu begreifen. Verwandelt man z. E. den Bruch $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch, indem man mit 7 in 1000... dividiert, so ist klar, dafs, da keiner von den aufeinander folgenden Resten 7 sein kann, eine von den 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Rest kommen mufs, höchstens können also nur sechs verschiedene Reste stattfinden, dann mufs notwendig einer derselben zum zweitenmale und somit auch dieselben Decimalen wiederkehren. Was aber von $\frac{1}{7}$ gilt, gilt auch von jedem Vielfachen desselben $\frac{2}{7} = 2.\frac{1}{7}$ &c. So ist z. B.:

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857142\ldots\ldots$$
$$\tfrac{3}{7} = 3.\tfrac{1}{7} = 3(0{,}14285714\ldots) = 0{,}42857142\ldots$$

Man sieht sogleich, dafs wegen der höchstmöglichen Anzahl Reste die Perioden der Decimalbrüche mindestens eine Ziffer weniger haben müssen, als der Nenner des sie erzeugenden Bruches Einheiten hat. Um aber aus einem gegebenen Nenner im voraus die Anzahl der periodischen Decimalen bestimmen zu können, mufs man sich mit § 166 angeführten merkwürdigen und lehrreichen Werke vertraut machen. So giebt z. B. jeder Bruch von der Form $\frac{1}{10^n - 1}$, n periodische Decimalen, nämlich:

$$\frac{1}{10^1 - 1} = \tfrac{1}{9} = 0{,}111\ldots, \quad \frac{1}{10^2 - 1} = \frac{1}{100 - 1} = \tfrac{1}{99} = 0{,}0101\ldots \&c.$$

318.

Ist ein periodischer Decimalbruch gegeben, so kann man leicht den gewöhnlichen Bruch finden, aus welchem jener entstanden ist. Man setze nämlich den periodischen Bruch $= s$ und multipliziere diese Gleichung mit einer solchen Rangzahl, dafs die Perioden übereinander zu stehen kommen, und subtrahiere alsdann die erste Gleichung von der zweiten, so werden die übereinander stehenden gleichen Perioden getilgt und man erhält eine endliche Gröfse. So findet man z. B.:

$$0{,}1515\ldots = \tfrac{5}{33}; \qquad\qquad 0{,}321321\ldots = \tfrac{107}{333};$$

$$\begin{array}{rl} s = & 0{,}1515\ldots \\ 100s = & 15{,}1515\ldots\ldots \\ \hline 99s = & 15 \\ s = & \frac{15}{99} = \frac{5}{33}; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} s = & 0{,}321321\ldots \\ 1000s = & 321{,}321321\ldots \\ \hline 999s = & 321 \\ s = & \frac{321}{999} = \frac{107}{333}. \end{array}$$

Fängt die Periode nicht gleich hinter dem Decimalzeichen an, so mufs man letzteres erst so weit vorrücken; z. B.:

$$\begin{array}{rl} s = & 0{,}25300300\ldots \\ \hline 100s = & 25{,}300300\ldots \\ 100000\,s = & 25300{,}300300\ldots \\ \hline 99900s = & 25275 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} s = & 2{,}64242\ldots \\ \hline 10s = & 26{,}4242\ldots \\ 1000s = & 2642{,}4242\ldots \\ \hline 990s = & 2616 \end{array}$$

$$s = \tfrac{25275}{99900} = \tfrac{337}{1332}; \qquad s = \tfrac{2616}{990} = \tfrac{436}{165}$$

319.

Zu § 182. Keine Potenz eines auf seine kürzeste Form gebrachten Bruches, wie z. B. $\frac{9}{4}$, kann eine reine ganze Zahl geben; denn löst man den Nenner in einfache Faktoren auf, $\frac{9}{4} = \dfrac{9}{2.2}$, so sieht man, daſs, wenn nicht der Zähler 9, also auch nach § 316 keine Potenz desselben, wie 9.9, 9.9.9 &c., durch die Primzahl 2 ohne Rest teilbar ist, auch durch kein Vielfaches von 2, wie 2.2=4 &c., teilbar sein kann.

Ist also die $n$te Wurzel aus einer ganzen Zahl N nicht in ganzen Zahlen möglich, so kann sie, dem strengen Begriffe nach, auch durch keinen Bruch genau dargestellt werden. Denn wäre ein solcher Bruch $\dfrac{a}{b}$ denkbar, so müſste ja $\sqrt[n]{N} = \dfrac{a}{b}$ und mithin $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = N$ sein, d. h. es müſste der Bruch $\dfrac{a}{b}$, $n$mal mit sich selbst multipliziert, eine reine ganze Zahl N geben, was nach § 316 unmöglich ist. Die Decimalen der irrationalen Wurzel müssen folglich ohne Aufhören und wegen § 318 ohne Perioden ins Unendliche fortlaufen.

320.

Theorie des Positiven und Negativen.

Zum zehnten Buche. (§§ 74—79.)

Wir müssen hier zuvor bemerken, daſs die Theorie der Gleichungen zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Gröſsen geführt hat, und daſs die Regeln, wie man mit denselben rechnen muſs, ebenfalls durch Anwendung der Gleichungen auf wirkliche Fälle gefunden sind. Erst später wurde zur Bestätigung und richtigern Erklärung diese, schon durch die Gleichungen kennen gelernte Theorie des sogenannten Positiven und Negativen, auch unabhängig von den Gleichungen, aus dem bloſsen Begriffe des Gegensatzes abgeleitet. Der Natur der Sache nach muſs aber diese so abgeleitete Theorie höchst abstrakt werden und erkünstelt s c h e i n e n. Vollkommene Klarheit kann sie erst nach und nach durch verschiedene praktische Erläuterungen erlangen, und daſs daher dieser Paragraph von einem Anfänger schon vollkommen verstanden werden sollte, ist unmöglich, aber auch (zur Aufmunterung gesagt) gar nicht notwendig. Denn die Richtigkeit der hier aus dem bloſsen Begriffe des Gegensatzes abgeleiteten Regeln folgt ganz von selbst und auf die anschaulichste Weise aus dem, was über Gleichungen gesagt ist, und man braucht daher diesen Paragraph nur vergleichungsweise zu lesen.

1. Addition. Fassen wir den Begriff der Addition in gröſserer Allgemeinheit als die Vereinigung mehrerer zusammengehöriger Teile zu einem Ganzen, bei dessen Bildung man auf die Einstimmigkeit und den Widerstreit seiner Teile Rücksicht nehmen muſs, so ist klar, daſs, wenn alle Teile einstimmig sind, die Summe in demselben Sinne, wie die einzelnen Teile, genommen werden und also dasselbe Vorzeichen haben muſs. Sind aber die einzelnen Teile entgegengesetzt, so muſs man die Summe der positiven, und ebenso die der negativen Teile besonders suchen, dann die kleinere Summe durch einen ebenso grofsen Teil der gröfsern tilgen und das Übrigbleibende im Sinne der gröfsern Summe, also mit dem ihm wesentlich zukommenden Vorzeichen nehmen. Dafs man eine solche übrig gebliebene Gröfse, obgleich sie im engern Sinne ein wirklicher Rest ist, dennoch als den wirklichen Betrag aller Teile, kurzweg Summe, oder, bestimmter gesprochen algebraische Summe, sowie das Vereinigen der Teile, obgleich dabei ein wirkliches Subtrahieren stattfindet, addieren oder algebraisch addieren nennt, und, dem allgemeinen Begriff zufolge, nennen mufs, kann keine Dunkelheit verursachen. Man merke sich noch, dafs der Satz: das Ganze ist gröfser als jeder seiner Teile, nur für einstimmige Gröfsen gilt.

2. *Subtraktion.* Durch mancherlei Umstände, und namentlich durch die Stellung einer Aufgabe, sowie durch das Umformen der Gleichungen &c. veranlafst, können Fälle vorkommen, wo man entgegengesetzte Gröfsen von einander subtrahieren mufs, oder wo der Subtrahend gröfser ist, als der mit ihm einstimmige Minuend und wo also die Subtraktion im engern Sinne, als eine wirkliche Wegnahme des Subtrahend vom Minuend, völlig unmöglich wäre, indem man unmittelbar nur eine kleinere Gröfse von einer einstimmigen gröfsern subtrahieren kann. Um aber dennoch den Gang der Rechnung nicht aufzuhalten und alle vorkommende Fälle, der Forderung gemäfs, folgerecht zu behandeln, richtig zu deuten, und die nach dem engeren Begriff der Subtraktion etwa stattfindenden Ungereimtheiten zu heben, brauchen wir diesen Begriff nur im allgemeinern Sinn zu nehmen, nämlich subtrahieren heifst: diejenige Gröfse finden, um welche der Subtrahend vom Minuend verschieden ist, d. h. die Gröfse, welche mit dem Subtrahend vereinigt, den Minuend giebt. Diese Gröfse ist dann der gesuchte wirkliche Unterschied (algebraische Differenz), und man erhält sie offenbar, wenn man das Vorzeichen des Subtrahend umkehrt und ihn dann zum Minuend (algebraisch) addiert. Diese leicht zu behaltende Regel ist ganz allgemein, wie folgende Beispiele, welche alle verschiedene Fälle darstellen, zeigen:

Minuend	+8	−8	−8	+8	+2	−2	−2	+2
Subtrah.	+2	−2	+2	−2	+8	−8	+8	−8
	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)
Differenz:	+6	−6	−10	+10	−6	+6	−10	+10

Dafs die gefundenen Differenzen (eben weil sie aus zwei Teilen, dem Minuend und dem Umgekehrten, dem Subtrahend zusammengesetzt sind), zu den Subtrahenden addiert, die Minuenden notwendig wiedergeben müssen, ist klar. Es ist also ganz einerlei, ob man eine Gröfse subtrahiert oder mit umgekehrtem Zeichen addiert. Durch Hilfe der Gleichungen kann man die Richtigkeit dieser Regel auch folgendermafsen anschaulich machen: Man denke sich nämlich den Subtrahend einmal so wie er ist, und einmal mit umgekehrtem Zeichen zum Minuend gelegt, so ist dadurch nur die Form, aber nicht die Gröfse des Minuend geändert, und wenn man alsdann von dem so umgeformten Minuend den Teil wegläfst (subtrahiert), welcher dem Subtrahend gleich ist, so mufs der wahre Unterschied bleiben. Es ist z. E. (vergl. § 128):

Minuend	$+8=$	$+8-2+2$
Subtrah.	$-2=$	-2
	(+)	
Differenz:	$10=$	$+8+2$

Nimmt man nämlich auf der rechten Seite -2 (zwei negative Einheiten) weg, so mufs man auf der linken Seite $+2$ zulegen, weil sonst die Gleichheit gestört sein würde. Ebenso ist:

$$-8=-8+2-2 \qquad\qquad -2=-2-8+8$$
$$\text{subtr.}\ +2=\quad +2 \qquad\qquad \text{subtr.}\ -8=\quad -8$$
$$\underline{(-)\qquad\qquad} \qquad\qquad \underline{(+)\qquad\qquad}$$
$$-10=-8-2 \qquad\qquad +6=-2+8$$

3. Multiplikation. Die Regel über den Einfluſs der Vorzeichen bei der Multiplikation entgegengesetzter Gröſsen läſst sich leicht aus dem Begriff des Gegensatzes ableiten. Haben beide Faktoren einerlei Vorzeichen, so ist das Produkt allemal positiv, negativ aber, wenn die Faktoren verschiedene Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche Zeichen geben minus.

Eigentlich braucht hier bloſs der Fall erörtert zu werden, wo der Multiplikator eine entgegengesetzte (negative) Gröſse ist. Der Multiplikator ohne Vorzeichen gedacht, sagt bloſs wie oft, sein Vorzeichen aber, in welchem Sinn der Multiplikand gesetzt werden soll. Nimmt man eine positive Gröſse entgegengesetzt, so wird sie negativ, z. B. $+8$ einmal entgegengesetzt genommen, giebt -8; $+8$ zweimal entgegengesetzt genommen, giebt -16 &c., daher $-1.+8=-8$; $-2.8=-16$ &c. Nimmt man eine schon an sich entgegengesetzte Gröſse wieder im entgegengesetzten Sinne, also das Entgegengesetzte entgegengesetzt, so wird sie wieder positiv, z. B. -8 einmal entgegengesetzt genommen, giebt $+8$, zweimal entgegengesetzt genommen $+16$ &c., nämlich $-1.-8=+8$; $-2.-8=16$ &c. Nimmt man aber eine entgegengesetzte Gröſse einmal wie sie ist, also nicht entgegengesetzt, so erhält man die Gröſse selbst; zweimal genommen, das Doppelte &c., nämlich $1.-8$ oder $+1.-8=-8$; $2.-8$ oder $+2.-8=-16$. Ebenso ist $2.+8$ oder $+2.+8=+16$ &c. In den beiden letzten Fällen braucht man dem Vorzeichen $(+)$ des Multiplikators eigentlich keine besondere Bedeutung unterzulegen, indem er hier ohne Vorzeichen, d. h. ohne andere Beziehung, als bloſse Multiplikationszahl gebraucht werden kann.

Beispiele:

Multiplikand	$+9$	-9	$+9$	-9
Multiplikator	$+3$	$+3$	-3	-3
Prod.	27	-27	-27	$+27$

Anmerkung. Man kann alle Fälle, welche bei der Multiplikation vorkommen können, wo nämlich die Faktoren ganze, gebrochene, positive und negative Zahlen sind, in folgendem allgemeinen Begriff zusammenfassen: multiplizieren heiſst, mit einer Gröſse, dem Multiplikand, ebenso verfahren, wie man mit der Einheit verfuhr, als man den Multiplikator daraus bildete.*) In $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}$ wurde zur Bildung des Multiplikators $\frac{3}{4}$, der vierte Teil der Einheit 3mal genommen, folglich muſs auch der vierte Teil von $\frac{5}{7}$, nämlich $\frac{5}{28}$, 3mal genommen werden; daher $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}=3.\frac{5}{28}=\frac{15}{28}$. In -3.8 wurde die Einheit zur Bildung des Multiplikators dreimal entgegengesetzt gesetzt, folglich muſs auch 8 dreimal entgegengesetzt genommen werden, daher $-3.8=-8-8-8=-24$. Ebenso ist $-3.-8=+8+8+8=24$; $3.-4=-4-4-4=-12$ &c.

4. Division. Die Regel für die Division entgegengesetzter Gröſsen folgt von selbst aus der für die Multiplikation, auch lautet sie ebenso: haben Dividend und Divisor gleiche Zeichen, so ist der Quotient positiv, negativ aber, wenn Dividend und Divisor ungleiche Vorzeichen haben. Mit andern Worten: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche geben minus. Der Quotient muſs nämlich so beschaffen sein, daſs er, mit dem Divisor multipliziert, den Dividend wiedergiebt. So ist z. B.:

---

*) Diese Erklärung findet sich in Thibaut's Arithmetik und in Cauchy's Cours d'Analyse. Sie paſst aber nicht auf irrationale und imaginäre Gröſsen.

$$\frac{+8}{+2} = +4; \text{ weil } +4 \,.\, +2 = +8$$

$$\frac{+8}{-2} = -4; \text{ weil } -4 \,.\, -2 = +8$$

$$\frac{-8}{+2} = -4; \text{ weil } -4 \,.\, +2 = -8$$

$$\frac{-8}{-2} = +4; \text{ weil } +4 \,.\, -2 = -8$$

321.

Zu § 92. Aus der Multiplikation zweier vielteiligen Gröfsen ergiebt sich ganz von selbst noch ein anderes Verfahren, nach welchem man die Division zweier vielteiligen Gröfsen oftmals leichter bewirken kann, als durch die § 92 gezeigte Faktorenzerlegung. Multipliziert man z. B. $5ac - \frac{2}{3}bc$ mit $7ax + \frac{4}{5}bx$, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} 5ac - \frac{2}{3}bc \\ 7ax + \frac{4}{5}bx \end{array}\right\} \text{Faktoren}$$

$$\begin{array}{l} 35a^2cx - \frac{14}{3}abcx \\ \qquad\qquad + 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx \\ \hline 35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx \end{array}$$

so ist klar, dafs das erhaltene Produkt durch jeden der beiden Faktoren teilbar sein mufs.

Wäre nun umgekehrt die Aufgabe gegeben: die Gröfse: $35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx$ (deren Ursprung wir jetzt nicht wissen wollen), durch $5ac - \frac{2}{3}bc$ zu dividieren, so ist einleuchtend, dafs (weil der Dividend mehr Glieder, als der Divisor enthält) der etwa mögliche Quotient notwendig vielteilig sein, und dafs eins seiner Teile so beschaffen sein mufs, dafs er, mit dem ganzen Divisor multipliziert, ein Produkt giebt, von welchem wenigstens ein Glied einem Gliede des Dividend gleich ist. Hierdurch ist also die Regel, nach welcher man verfahren mufs, um den etwa möglichen Quotienten zu finden, gegeben: Man dividiere nämlich mit einem Teil des Divisors, z. B. mit dem 1sten ($5ac$) in einen dazu passenden Teil des Dividend, z. B. in den 1sten ($35a^2cx$), setze den Quotienten $\left(\frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax\right)$ als den einen Teil des gesuchten Quotienten, multipliziere mit ihm den ganzen Divisor und subtrahiere das Produkt vom Dividend. Dasselbe Verfahren auf das übrig gebliebene Stück des Dividend angewandt, giebt den 2ten Teil des Quotienten &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{l|l|l} 5ac - \frac{2}{3}bc & 35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx & = 7ax + \frac{4}{5}bx \\ & 35a^2cx - \frac{14}{3}abcx & \\ \hline & \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx & \\ & \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx & \end{array}$$

Es ist nämlich, indem man das erste Mal mit $5ac$ in $35a^2cx$ dividiert, der Quotient $= \frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax$. Im ersten Gliede des Restes ist $5ac$ offenbar $\frac{4abcx}{5ac} = \frac{4}{5}bx$mal enthalten.

Anmerkung 1. Hätte man, statt in das 1ste Glied, in das 2te oder 3te Glied des Dividend mit $5ac$ dividieren wollen, so würde der entstandene

Quotient mit einem Bruche behaftet gewesen, mithin nicht so einfach ausgefallen sein. Hieraus folgt nun, dafs die Ordnung der Glieder des Dividend nicht gleichgiltig ist. Man mufs nämlich sowohl Dividend als Divisor immer erst so ordnen, dafs die Glieder in beiden entweder nach steigenden oder fallenden Potenzen einer und derselben Buchstabengröfse fortschreiten. Die Notwendigkeit dieser Ordnung folgt aus der Multiplikation zweier so geordneten Faktoren.

Im vorstehenden Beispiele waren Dividend und Divisor nach den fallenden Potenzen von a geordnet, nämlich: a^2, a^1, a^0 im Dividend und a^1, a^0 im Divisor, oder auch nach steigenden Potenzen von b, nämlich: b^0, b^1, b^2. Zur Übung vollziehe man folgende angedeutete Divisionen:

$$\frac{a^2-b^2-ac+bc}{a-b}=a+b-c$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^2-x-6}=x^2-1$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x+1}=x^3-2x^2-5x+6$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x+a}=x+\frac{b}{x+a}$$

2. Zufolge §§ 254, 256 ist die Summe der geometrischen Reihe:

$$a^{n-1}+a^{n-2}.x+a^{n-3}.x^2+a^{n-4}.x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}$$

in welcher a^{n-1} das erste, x^{n-1} das letzte Glied und $\frac{x}{a}$ der Exponent ist, $=\frac{x^n-a^n}{x-a}$. Dies führt unmittelbar auf den Satz: dafs ein jeder Gröfsenausdruck von der Form x^n-a^n allemal durch die Gröfse $x-a$ ohne Rest teilbar sein mufs, was auch n für eine ganze Zahl sein möge. Man hat z. B. nach der eben gezeigten Divisionsregel:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

3. Die Gröfse a^n-b^n ist auch durch $a+b$ ohne Rest teilbar, wenn n eine gerade Zahl ist, sonst nicht. Die Gröfse a^n+b^n ist auch durch $a+b$ teilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist, sonst nicht.

322.

Von den Proportionen &c. Wenn zwei Gröfsen a und b dasselbe Verhältnis zueinander haben, wie zwei andere Gröfsen c und d, mithin a durch b und c durch d dividiert, einerlei Quotienten geben, so kann man aus diesen beiden gleichen Verhältnissen, welche man als zwei gleichgeltende Brüche betrachten kann, folgende Gleichung bilden:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei gleichen Verhältnissen heifst in der alten Kunstsprache eine Proportion und pflegt man dieselbe, statt wie oben, auch so zu schreiben:*)

$$a:b = c:d$$

Man liest: a verhält sich zu b, wie c zu d, d. h. a ist ebenso oft in b enthalten, als c in d. Die Gröfse a heifst hier das 1ste, b das 2te, c das 3te und d das 4te Glied; ferner a und d die beiden äufsern, b und c die beiden mittlern oder innern Glieder der Proportion. Es verhält sich z. B. 2 ebenso zu 4, wie 3 zu 6 und die vier Zahlen 2, 4; 3, 6 geben daher folgende Proportion, $2:4 = 3:6$ oder $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, wie in $a:b = b:d$, so heifst die Proportion eine stetige und die Gröfse b heifst dann die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den beiden äufsern Gliedern a und d. Es verhält sich z. B. 3 ebenso zu 6, wie 6 zu 12, und diese Zahlen 3, 6; 6, 12 bilden daher die stetige Proportion $3:6 = 6:12$, wo also 6 die mittlere Proportionale zwischen 3 und 12 ist.

Sind die vier Glieder einer Proportion unbenannte oder gleichbenannte Zahlen, so können aus derselben mehrere Folgerungen gezogen werden, worüber man sich, weil dieselben (namentlich in der Geometrie) Anwendung finden, folgende Sätze merken möge:

In jeder Proportion ist das Produkt der beiden mittlern Glieder gleich dem Produkt der beiden äufsern Glieder. In Zeichen:

$$\text{wenn } a:b = c:d: \qquad 3:6 = 2:4;$$

$$\text{so ist auch } ad = bc, \qquad 3.4 = 6.2.$$

Beweis. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt, auf beiden Seiten mit bd multipliziert: $ad = bc$.

Ist also ein Glied in einer Proportion unbekannt, so kann man dasselbe leicht berechnen. Fragt man z. B., wie grofs x sein mufs, damit folgende Proportion $3:5 = 9:x$ stattfindet, so hat man, vermöge des eben erklärten Satzes, dafs das Produkt der äufsern Glieder dem Produkt der mittlern gleich sein mufs: $3x = 5.9$, mithin $x = \frac{5.9}{3} = 15$. Wäre:

$$3:x = 9:15; \quad \text{so ist} \quad 9x = 45 \text{ und } x = 5;$$

$$x:5 = 9:15; \quad \text{so ist} \quad 15x = 45 \text{ und } x = 3;$$

$$a:x = b:c; \quad \text{so ist} \quad bx = ac \text{ und } x = \frac{ac}{b}.$$

Hiernach findet man auch die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Gröfsen, wenn man aus dem Produkt derselben die Quadratwurzel zieht.

---

*) Unser sel. Lehrer *Thibaut* erklärte mit Recht die ganze Lehre von den Proportionen und namentlich diese undeutliche Schreibart $a:b = c:d$ für eine schädliche. Wir haben sie deshalb auch in den Anhang verwiesen. Viele Mathematiker schreiben schon lange die Proportion in der vorstehenden deutlicheren Form einer Gleichung, nämlich: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Sucht man z. E. zu 3 und 12; 5 und 2; a und b die mittleren Proportionalen, so hat man:

$$3:x=x:12;\ \text{woraus}\ x^2=36,\ \text{mithin}\ x=\pm 6$$
$$5:x=x:2;\quad \text{"}\quad x^2=10,\quad \text{"}\quad x=\sqrt{10}=\pm 3{,}162\ldots$$
$$a:x=x:b;\quad \text{"}\quad x^2=ab,\quad \text{"}\quad x=\sqrt{ab}.$$

Die Aufgabe, eine Gröſse a nach stetiger Proportion zu teilen, verlangt: a in zwei solche Teile zu zerlegen, daſs sich der kleinere Teil zum gröſsern verhält, wie der gröſsere zur ganzen Gröſse. (Siehe § 227.)

2) In jeder Proportion kann man die Glieder der Verhältnisse umkehren. Ist nämlich:

$$a:b=c:d;\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\qquad 15:3=20:4;$$

so ist auch $$b:a=d:c;\qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c};\qquad 3:15=4:20.$$

3) In jeder Proportion verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten. Ist nämlich:

$$a:b=c:d;\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\qquad 3:6=9:18;$$

so ist auch: $$a:c=b:d;\qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\qquad 3:9=6:18.$$

4) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede. In Zeichen, wenn:

$$a:b=c:d;\qquad 8:2=12:3;$$

so ist $$a\pm b:a=c\pm d:c;\qquad 10:2=15:3;$$
$$a\pm b:b=c\pm d:d;\qquad 6:2=9:3.$$

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1\qquad \text{oder}\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$

ferner: $$\frac{b}{a}\pm 1=\frac{d}{c}\pm 1\qquad \text{oder}\ \frac{b\pm a}{a}=\frac{d\pm c}{c};$$

$$\text{oder}\ \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}.$$

323.

Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten ebenso, wie jedes erste Glied zum zweiten. In Zeichen, wenn

$$A:a=B:b=C:c=D:d=E:e\ \&c.$$

so ist auch $$A+B+C+D+E\ldots:a+b+c+d+e\ldots=A:a=B:b\ \&c.$$

Beweis. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Exponenten der gleichen Verhältnisse durch e, d. i. die Zahl, welche angiebt, wieviel mal so grofs oder so klein jedes vorhergehende Glied als das folgende ist, so hat man aus der nachstehenden ersten Reihe Gleichungen die zweite und daraus durch Addition die dritte, nämlich:

$$\frac{A}{a} = e; \qquad A = ae;$$

$$\frac{B}{b} = e; \qquad B = be;$$

$$\frac{C}{c} = e; \qquad C = ce;$$

$$\frac{D}{d} = e; \qquad D = de;$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = ae + be + ce + de \ldots$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = (a + b + c + d + \ldots)e$$

$$\frac{A + B + C + D + \ldots}{a + b + c + d + \ldots} = e = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} \text{ \&c.}$$

Wenn also mehrere Brüche einander gleich sind, so ist auch jeder dem Bruche gleich, dessen Zähler und Nenner aus der Summe jener Zähler und Nenner gebildet ist. Es ist z. B.:

$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{14}{21} = \tfrac{6}{9} = \frac{2 + 8 + 4 + 14 + 6}{3 + 12 + 6 + 21 + 9} = \tfrac{34}{51}.$$

324.

Zu § 214. Hätte man aus einem vielteiligen Gröfsenausdruck eine Quadratwurzel zu ziehen, so müfste man, wie sich aus der Bildung eines Quadrats ergiebt, ganz nach derselben Regel verfahren, nach welcher man die Quadratwurzel aus einer Zahl zieht, d. h. nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ (§ 191). Dasselbe gilt von der Kubikwurzel. So findet man z. B.:

$$\sqrt{(4x^4 - 12ax^3 + 29a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4)} = \pm(\overbrace{\underbrace{2x^2}_{a} - \underbrace{3ax}_{b}}^{a} + \underbrace{5a^2}_{b})$$

$$a^2 = \underline{4x^4}$$

$$\underbrace{4x^2}_{2a}, - \underbrace{3ax}_{b}) - 12ax^3 + 29a^2x^2$$

$$2ab + b^2 = \underline{- 12ax^3 + 9a^2x^2}$$

$$\underbrace{4x^2 - 6ax}_{2a},\ \underbrace{5a^2}_{b})\ 20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4$$

$$2ab + b^2 = \underline{20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4}$$

325.

Zu § 216. Alle Gröfsenausdrücke, wie $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a}$; $\sqrt[4]{-a}$, wo sich nämlich das Wurzelzeichen mit g e r a d e m E x p o n e n t e n vor eine n e g a t i v e

Zahl stellt, und die selbst schon in den Elementen vorkommen, aber namentlich erst in der höhern Mathematik gröfsere Wichtigkeit erhalten, indem sie dort Rechnungen, die ohne ihren Gebrauch sehr mühsam und verwickelt werden müssten, ungemein vereinfachen, nennen einige Mathematiker unmögliche Gröfsen, andere, welche diese Benennung unpassend finden, indem nur keine wirkliche Wurzelausziehung in bestimmten Zahlen möglich ist, die Gröfsen selbst aber vorhanden und mithin möglich sind, nennen sie eingebildete (imaginäre) Gröfsen, im Gegensatz der übrigen sogenannten reellen Gröfsen, d. h. solche, die in bestimmten Zahlen ganz genau oder doch näherungsweise ausgedrückt werden können, wie z. B.:

$$\sqrt{9},\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-7}\ \&c.$$

Die Benennung unmögliche Gröfsen ist allerdings unpassend, indem die Gröfsen selbst nicht unmöglich sind, wie etwa ein dreieckiger Kreis, ein rundes Dreieck, ein hölzernes Eisen. Die Benennung imaginäre Gröfsen ist aber um nichts besser. Denn eingebildet heifst doch, was nur in Gedanken und nicht in der Wirklichkeit stattfindet, z. B. ein Luftschlofs. Da nun aber die Praxis auf mehr besagte Gröfsen führt, sie also nicht blofs in Gedanken, sondern wirklich vorkommen, so ist auch dieser letztgerügte Ausdruck unpassend. Die Ausflucht, das Wort imaginär nicht auf die fraglichen Gröfsen selbst, sondern nur auf die Wurzel-Ausziehung in bestimmten Zahlen zu beziehen, wird auch niemand gelten lassen, der nicht die Fähigkeit hat, sich einen viereckigen Kreis und dergleichen einbilden zu können, denn mit eben der Fähigkeit müfste doch die Wurzel in Zahlen imaginiert werden.

Soll diese neue Art Gröfse einen eigentümlichen Namen haben, so ist die von *Gauss* gewählte Benennung: laterale Gröfse, sehr passend, indem diese Sinn und Bedeutung hat.*)

Für die Elemente aber genügt es vollkommen, diese lateralen Gröfsen für blofse Rechnungsresultate (symbolische Gröfsenausdrücke) zu nehmen. Denn ohne dafs sie einen eigentümlichen Namen haben, kann man doch mit ihnen ebenso gut und ganz nach denselben Regeln, wie mit den sogenannten reellen Gröfsen rechnen. Die Rechnung mit lateralen Gröfsen wird erleichtert, wenn man die negative Gröfse unter dem Wurzelzeichen zuvor in zwei Faktoren zerlegt, wovon der eine Faktor die Gröfse selbst, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, und der andere Faktor -1 ist, und alsdann die Wurzel aus jedem Faktor besonders andeutet. (§ 211.)

So ist z. B. $-4=4(-1)$; daher:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2\sqrt{-1};\qquad \sqrt{-9}=\sqrt{9(-1)}=3\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1};\qquad \sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Jede laterale Gröfse kann also immer als ein Produkt aus zwei Faktoren, wovon der eine eine reelle Gröfse und der andere $\sqrt{-1}$ ist, dargestellt werden, und man braucht sich daher nur zu merken, wie mit der einfachen Gröfse $\sqrt{-1}$, welche man als eine besondere Art Einheit betrachten kann, gerechnet wird, um mit jedem Vielfachen derselben, so wie mit allen Gröfsenausdrücken, welche aus reellen und lateralen Gröfsen zusammengesetzt sind, rechnen zu können.

Die laterale Gröfse $\sqrt{-1}$ pflegt Gauss der Kürze wegen mit i zu bezeichnen, und also $\pm\sqrt{-1}=\pm i$ zu setzen.

Man merke sich zuvor die geraden und ungeraden Potenzen von $\sqrt{-1}$, wonach sich alles Andere von selbst ergiebt. Man hat:

*) Mehr darüber sehe man in der Analysis im Anhang.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1; \quad (\S\,216, \text{Anmerk.})$$

oder $(\sqrt{-1})^2 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = (-1)^1 = -1;$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = (-1)\sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1;$$

oder $(\sqrt{-1})^4 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^4 = (-1)^2 = 1;$

$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = 1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Man sieht also, daſs von $\sqrt{-1}$ die erste Potenz $= \sqrt{-1}$; die 2te, $= -1$; die 3te, $= -\sqrt{-1}$; die 4te, $= 1$; von wo an sich dieselben Resultate wiederholen. Bedeutet also n eine beliebige ganze Zahl, 0 und 1 nicht ausgenommen, so ist allgemein:

$$(\sqrt{-1})^{4n} = 1; \qquad i^{4n} = 1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+2} = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{-1}; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}; \qquad i^{4n+3} = -i.$$

326.

Beispiele:

1) $\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} - \sqrt{-c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{-1};$$

$$a\sqrt{-4} - \sqrt{-a^2} = 2a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}.$$

2) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{ab}; \quad (\S\ 216.)$

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} = -\sqrt{36} = -6. \quad (\S\ 216, \text{ Anmerk.})$$

a) Jeder aus reellen und lateralen Gröſsen zusammengesetzte Ausdruck heiſst eine **komplexe Gröſse**. Eine solche ist z. B. $2 + 3\sqrt{-1}$. Bezeichnet man den reellen Teil allgemein durch a und den Faktor von $\sqrt{-1}$ durch b, so kann jede komplexe Gröſse immer auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ oder $a + bi$ gebracht werden. Beispiele:

3) $4+6\sqrt{-1}+\sqrt{-16}+2=6+10\sqrt{-1};$

$3+3\sqrt{-9}-3-2\sqrt{-4}=0+5\sqrt{-1}=5\sqrt{-1};$

$a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=2a.$

4) $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2;$ (§ 91.)

$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1};$ (§ 186.)

$(a-b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2-2ab\sqrt{-1};$

$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2.$

b) In der Analysis wird gezeigt, dafs man sowohl aus der positiven als negativen Einheit und mithin aus jeder Gröfse so viele verschiedene Wurzeln desselben Grades ziehen kann, als man will; so giebt es z. B. drei verschiedene Gröfsen, welche auf die 3te Potenz erhoben 8 geben; vier verschiedene Gröfsen, deren 4te Potenz 1 geben &c., welches hier jedoch nur beiläufig bemerkt sein soll. Man hat nämlich:

$$(+2)^3=8$$

$$(-1+\sqrt{-3})^3=(-1)^3+3(-1)^2\sqrt{-3}+3(-1)(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3$$

$$=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}=8; \quad \text{(§ 213, 2.)}$$

$$(-1-\sqrt{-3})^3=-1-3\sqrt{-3}+3\sqrt{-3}+9=8;$$

daher $\sqrt[3]{8}=2; =-1+\sqrt{-3}; =-1-\sqrt{-3};$

$1^4=1;\ (-1)^4=1;\ (\sqrt{-1})^4=1;\ (-\sqrt{-1})^4=1;$

daher $\sqrt[4]{1}=1; \quad =-1; \quad =\sqrt{-1}; \quad =-\sqrt{-1};$

5) $\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1; \qquad \dfrac{6\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=3; \qquad \dfrac{-\sqrt{-1}}{+\sqrt{-1}}=-1;$

$\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=1\tfrac{1}{2}; \qquad \dfrac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\dfrac{a}{b};$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1};$$

$$\frac{a}{a+\sqrt{-b}}=\frac{a(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}=\frac{a^2-a\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}{a^2+b};$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}{(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}=\frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

327.

Wenn man eine zweiteilige Zahlengröfse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ins Quadrat erhebt, so ist einleuchtend, dafs man (im allgemeinen) wieder eine zweiteilige Zahlengröfse von der Form $A + \sqrt{B}$ erhalten mufs, nämlich einen rationalen und einen irrationalen Teil. Es ist z. B.:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 5 + \sqrt{24}$$
$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 8 - 2\sqrt{15} = 8 - \sqrt{60}$$

Mithin mufs auch umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Zahlengröfse von der Form $A \pm \sqrt{B}$, sich allemal durch eine Gröfse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ darstellen lassen, wovon den Umständen nach, eins der beiden Teile auch rational sein kann. Die Regel, nach welcher man diese Wurzel findet, ergiebt sich leicht. Man setze nämlich:

$$\sqrt{(5 + \sqrt{24})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

so folgt: $5 + \sqrt{24} = x + y + 2\sqrt{xy}$

Jetzt bestimme man x und y so, dafs die rationalen und irrationalen Teile auf beiden Seiten der letzten Gleichung einander gleich werden. Man setze nämlich:

(1) $x + y = 5$ hieraus: $x^2 + 2xy + y^2 = 25$

(2) $2\sqrt{xy} = \sqrt{24}$ $\qquad 4xy = 24$

durch Addition: $x^2 - 2xy + y^2 = 1$

folglich: (3) $x - y = \pm 1$

Aus (1) und (3) folgt: $x = 3$ und $y = 2$; mithin

$$\sqrt{(5 + \sqrt{24})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Um $\sqrt{(\pm a \pm \sqrt{-b})}$ z. B. $\sqrt{(-3 + \sqrt{-16})}$ zu finden, setze man:

$$\sqrt{(-3 + \sqrt{-16})} = \sqrt{x} + \sqrt{-y}$$

hieraus: $-3 + \sqrt{-16} = x - y + 2\sqrt{-xy}$

(1) $x - y = -3$ $\qquad x^2 - 2xy + y^2 = 9$

(2) $2\sqrt{-xy} = \sqrt{-16}$ $\qquad 4xy = 16$

$x^2 + 2xy + y^2 = 25$

(3) $x + y = \pm 5$

Aus (1) und (3) folgt: $x = 1$; $y = 4$; mithin:

$$\sqrt{(-3 + \sqrt{-16})} = 1 + 2\sqrt{-1}.$$

328.

Algebraische Ausdrücke in Bruchform können in besondern Fällen, wenn man statt der allgemeinen Gröfsenzeichen ihre Zahlenwerte substituiert, den Ausdruck $\frac{0}{0}$ geben, den man nicht mit 0 verwechseln oder als bedeutungslos übersehen darf.

Um zuvor zu zeigen, daſs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ wirklich entstehen kann, und dann im allgemeinen für jede besondere Substitution, welche ihn erzeugt, auch besondere Bedeutung hat, multipliziere man einmal Zähler und Nenner des algebraischen Ausdrucks $\frac{b(a+b)}{a}$ mit $a-b$, wodurch der Wert desselben nicht geändert ist.

$$\frac{b(a+b)}{a} = \frac{b(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$$

oder: $$\frac{b(a+b)}{a} = \frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$$

Beide, nur an Form verschiedene, Ausdrücke müssen einerlei Resultat geben, wenn darin statt der Buchstaben beliebige Zahlen substituiert werden. Setzen wir z. B. $a=4$, $b=2$, so ist $\frac{b(a+b)}{a}=3$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=3$. Setzt man aber $a=4$; $b=4$, so ist: $\frac{b(a+b)}{a}=8$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=\frac{4.0}{4.0}=\frac{0}{0}$. Nimmt man $a=5$, $b=5$, so giebt der erste Ausdruck 10, der andere wieder $\frac{0}{0}$ &c.

Man sieht also nicht allein, daſs für gewisse Zustände von a und b (hier nämlich immer, wenn $a=b$) der Bruch $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ den an sich unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ giebt, sondern auch, daſs der Wert desselben von a und b abhängt. Für $a=5$, $b=5$, ist z. B. $\frac{0}{0}=10$; für $a=3$, $b=3$ aber ist $\frac{0}{0}=6$ &c.

Für den vorliegenden Fall könnte man freilich die Ursache, welche den Ausdruck $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ zu $\frac{0}{0}$ macht, fortschaffen, indem man diesen Ausdruck durch Division mit dem Nenner in den Zähler auf $\frac{b(a+b)}{a}$ reduziert. Eine solche Reduktion ist aber nicht immer möglich, und dann muſs man die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ durch unmittelbare Schlüsse suchen, oder denselben auf andere Weise umgehen.

In der höhern Mathematik kommt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ sehr oft vor, dort giebt es aber auch Mittel, die Bedeutung desselben nach gewissen Regeln zu finden. Für die Elemente genügt es vollkommen, darauf aufmerksam gemacht zu haben, daſs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ bald diese, bald jene Bedeutung haben kann.

Die Summationsformel für geometrische Progressionen ist:

$$s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$$

Für den Fall, wo der Exponent $e=1$ (und folglich die Reihe selbst $a+a+a+\ldots\ldots$ wäre, deren Summe offenbar $=na$ ist), giebt die Substitution in obige Formel:

$$s = \frac{a(1^n-1)}{1-1} = \frac{0}{0} = na$$

Der Ausdruck $\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}$ führt auf $\frac{0}{0}$, wenn man $a=1$ setzt; daſs aber für $a=1$, $\frac{0}{0}=\frac{1}{12}$ sein muſs, ist leicht einzusehen, wenn man Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks mit $\sqrt{(8+a)}+3$ multipliziert, nämlich:

$$\frac{[\sqrt{(8+a)}-3][\sqrt{(8+a)}+3]}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3)]} = \frac{a-1}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

Mithin ist:

$$\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

329.

Es liegt in der Natur mancher mathematischer Untersuchungen, daſs sie unwillkürlich auf die Vorstellung des Unendlichen führen; denn wenn auch der Geist, am Körper gefesselt, seine Grenzen hat, nicht darüber hinaus kann, und also jene Vorstellung auch nicht auf einen Augenblick deutlich zu fassen vermag, so läſst sich doch dadurch die ungebundene Phantasie nicht aufhalten, einen Sprung voraus zu machen, und den Geist auch mit übersinnlichen Vorstellungen zu versorgen. Kein Mensch kann sich z. E. die Zeit, oder den alles umfassenden Raum anders als unendlich (ohne Ende) denken.

Obgleich nun alle mathematischen Untersuchungen, mit welchen die Vorstellung des Unendlichen wesentlich verbunden ist, in die Analysis des Unendlichen gehören, so giebt es doch unter ihnen einige Fälle, welche sich auf elementare Weise behandeln lassen, und da diese Fälle gerade bei Anwendung derjenigen Teile der Mathematik (Mechanik und Geometrie) stattfinden, welche, weil sie täglich vorkommen, in die Elemente aufgenommen sind, und sich doch nicht jeder, der die Mathematik anwenden muſs, in den höhern Teilen derselben gleich zurechtfinden kann, so mögen dieserhalb, so wie um demjenigen, der die Wissenschaft lieb gewonnen hat und nach erhaltener Weihe in ihr eigentliches Heiligtum und ihren wahren Geist einzudringen wünscht, einen Wink zu geben, einige, wenn auch gleich nicht hierher gehörige Betrachtungen, noch zu gute gehalten werden. Mit dem Bekenntnis aber, daſs die gegebenen Erläuterungsbeispiele und Vergleichungen ein wenig hinken, wollen wir den Leser im voraus um Nachsicht und Nachhilfe bitten. Was einmal rein geistiger Art ist, kann nur vom Geiste, nicht mit den Händen gefaſst werden. Bei übersinnlichen Sachen geht alle Beschreibung betteln, fällt nur zu leicht in logische Kreise und Ungereimtheiten, macht das zu Erklärende eher dunkeler, als klar. Nicht auf das muſs man sehen, was ausgedrückt ist, sondern auf das, was man hat ausdrücken wollen. Dies für den Schüler, der da handgreifliche Erklärungen und Beispiele verlangt, wo die Natur der Sache sie nicht gestattet.

Betrachten wir einmal folgende geometrische Progression:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots\cdots\frac{1}{2^n}$$

so ist klar, daſs mit dem Fortschreiten dieser Reihe ihre Glieder immer kleiner und kleiner werden, und man daher n so groſs annehmen kann, daſs $\frac{1}{2^n}$ kleiner ist, als jede namhafte oder angebbare Gröſse.

Summiert man nach § 254 einige der ersten Glieder dieser Reihe, so zeigt sich, daſs es beinahe einerlei ist, ob man Millionen oder Billionen Glieder summiert. In beiden Fällen kommt die Summe der Einheit sehr nahe. Wieviel Glieder man aber auch zusammenrechnen wollte, nie kann die Summe die Einheit erreichen, noch viel weniger darüber hinaus kommen.

Diese, dem Anfänger befremdende, Behauptung läſst sich folgendermaſsen leicht darthun. Nimmt man ein beliebig weit hinaus gesetztes $n$tes

Glied der Reihe, nämlich $\frac{1}{2^n}$, als das letzte, so beträgt die Summe bis zu diesem Gliede nach der allgemeinen Summationsformel: $s = \frac{te - a}{e - 1}$, worin für gegenwärtigen Fall, $a = \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2^n}$ zu setzen ist (§ 254):

$$s = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

oder, indem man Zähler und Nenner mit 2 multipliziert:

$$s = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Man sieht also, dafs s nie gröfser als 1 sein, aber auch der Einheit so nahe gebracht werden kann, dafs der Unterschied kleiner wird, als jede angebbare Gröfse, denn je gröfser n, je kleiner der zu subtrahierende Teil $\frac{1}{2^n}$.

Nun fragen wir aber: wie weit mufs man die Progression $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ fortlaufen lassen, oder wie grofs mufs man sich n denken, damit $\frac{1}{2^n}$ und jener Unterschied im voraus so klein wird, dafs hernach keine kleinere Gröfse mehr angegeben werden kann?

Antwort. Wie klein man sich auch eine Gröfse denken mag, so kann man doch, weil eine wirkliche Gröfse angebbar sein mufs, immer noch eine kleinere denken. Um also $\frac{1}{2^n}$ im voraus so klein zu machen, dafs dessen Kleinheit durch keine abermalige Annahme wieder überboten werden kann, bleibt nichts anderes übrig, als den Sprung ins Unendliche zu machen: dies ist aber dann ein wirkliches Non-plus-ultra, denn gäbe es hier ein Jenseits, so gäbe es kein Unendliches und umgekehrt. Man wird also gezwungen, dafs n unendlich grofs (∞), also $\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty}$ anzunehmen, und mithin die Reihe selbst ohne Ende zu denken; denn eins folgt notwendig aus dem andern. So lange nämlich die Glieder einer Reihe noch immer kleiner gedacht werden können, ist in der That die Reihe selbst (nämlich die Zahl ihrer Glieder) auch noch nicht wirklich unendlich gedacht. Der Gedanke eines unendlich Grofsen ist in jedem Fall eine angestrengte Handlung des Geistes, die niemals zum Schlusse kommt, mithin kein bestimmter, sondern endloser, nicht geschlossener Gedanke; dies drückt schon das Wort unendlich selbst aus. Dennoch ist klar, dafs, wenn man die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ (d. h. die Zahl ihrer Glieder) auf einen Augenblick wirklich unendlich grofs denken könnte (oder gedacht annimmt), mit dieser Vorstellung dann notwendig die Vorstellung verbunden wäre, dafs ihr letztes Glied wirklich unendlich klein und der Gedanke, dafs es noch eine wirkliche (angebbare) Gröfse habe, dann nicht mehr möglich ist. Denkt man sich also n unendlich grofs, so mufs die Reihe selbst ins Unendliche fortlaufen, und ihre, immer um die Hälfte abnehmenden Glieder zuletzt wirklich unteilbar werden. Gegen diese letzte Behauptung pflegt sich aber die gewöhnliche Fassungskraft lange zu sträuben.

Dieser Anstoss fällt aber weg, wenn man sich das ∞ nicht als eine Zahl, d. i. als eine **bestimmte** Menge Einheiten, sondern als eine **Unzahl** denkt, die nicht mehr vergröfsert werden kann. Hält man diese Vorstellung fest, dafs das Unendliche nicht zu überschreiten, mithin nicht zu vergröfsern ist, so wird man auch zugeben, dass die Glieder der unendlich gedachten Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, nicht etwa näherungsweise, sondern in aller Strenge genommen, auf 0 auslaufen **müssen**. Denn die Glieder werden im Unendlichen kleiner als jede angebbare Gröfse. Eine Gröfse aber, die ihrer Kleinheit wegen nicht mehr angegeben, also auch nicht mehr geteilt werden kann, ist keine wirkliche Gröfse. Dafs man aber des Anhalts wegen, und um nur den Faden der Untersuchungen anknüpfen zu können, den im Unendlichen erreichten Zustand einer solchen immer kleiner werdenden Gröfse sich noch als etwas Wirkliches einbildet, und, um nur die Rechnung dadurch einzuleiten, mit $\frac{1}{\infty}$ bezeichnet, dieselbe im Vortrage eine **unendlich kleine Gröfse** nennt (verschwindende, unteilbare Gröfse, Differential, Fluxion &c., d. h. Anfang oder Bestreben einer nicht angebbaren Sache, die eine Gröfse sein oder werden will, die es aber nicht ist) und dann des Begriffs und der Form wegen $\frac{1}{\infty}$ (dx) von der absoluten Null unterscheidet, wird man später als notwendig erkennen. Wir können indessen diese Sache hier nicht weiter erläutern. Sie gehört, wie schon zu Anfang dieses Paragraphen erwähnt, in die Infinitesimalrechnung. Hierauf müssen wir also denjenigen verweisen, der Wifsbegierde und Sinn für das Höhere fühlt. Ein paar Erläuterungs-Beispiele mögen hier aber noch Platz finden, indem sie auf eine anschauliche Weise zeigen, dafs die Glieder einer stets abnehmenden geometrischen Reihe nicht allein näherungsweise, sondern zuletzt **wirklich** unteilbar werden, und daher jene unendlich kleine Gröfse $\frac{1}{\infty}$ nur ein Gedankending ist, dessen Gröfse, weil, nicht mehr mefsbar, gleich Null gesetzt werden mufs.

1) Man denke sich die Lebensdauer eines Menschen als Einheit. Von dieser Zeit wird doch erst die Hälfte, $\frac{1}{2}$, verlebt, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte, oder $\frac{1}{4}$ vom Ganzen u. s. f. ins Unendliche, nämlich: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{2^\infty}$. Wer nun aber a sagt, mufs auch b sagen. Giebt man zu, dafs ein Mensch wirklich sterben, mithin seine Lebenszeit ganz verleben kann, so mufs man auch zugeben, dafs das letzte Glied seiner Lebensprogression (Grenze) eine wirklich **unteilbare** Gröfse (ein Hauch, ein Augenblick) ist. Denn wäre dies nicht, so würde ja, weil die Zeit eine stetige (fliefsende) Gröfse ist, wovon kein Teil übersprungen oder ausgelassen werden kann, noch ein Rest zum Nachsitzen bleiben.

Alle wirklichen Gröfsen stimmen darin miteinander überein, dafs jede aus mehreren gleichartigen Teilen besteht, mithin teilbar sein mufs, weil man sie sonst nicht mit einer gleichartigen und wirklichen Gröfse, als bestimmten und angebbaren Mafsstab ausmessen, oder in Zahlen auflösen und mithin auch keinen bestimmten Begriff von deren **Quantum** haben könnte.

Da nun aber der letzte **Augenblick** der oben angenommenen Zeiteinheit nicht mehr in bestimmte Teile aufgelöst werden kann, so begreift man auch, dafs eine solche unteilbare oder unendlich kleine Gröfse $\frac{1}{\infty}$, wenn sie auch noch in der Vorstellung existieren, und nicht mit 0 verwechselt werden soll, doch nicht mit endlichen oder wirklichen Gröfsen verglichen werden kann; dafs ein solches Gedankending etwas unpassend noch Gröfse genannt wird, wird der entschuldigen, welcher für diese übersinnliche Vorstellung keinen bessern Ausdruck weifs.*)

*) Eine angebbare Zeit mufs Dauer, also Anfang und Ende haben. Ein **Augenblick** aber (die Augenblicklichkeit) hat keine angebbare Dauer;

Hiernach ist also klar, daſs die häufig vorkommende Redensart: eine Gröſse kann kleiner werden als jede angebbare Gröſse, ganz dasselbe sagt, als: jene Gröſse muſs im Unendlichen wirklich unteilbar werden.

Je mehr Glieder von der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$ summiert werden, je kleiner wird der Unterschied, um welchen die Summe von 1 abweicht. Da nun dieser Unterschied mit der Zahl der Glieder immer kleiner wird, und also im Unendlichen kleiner, als jede angebbare Gröſse werden muſs, so ist klar, daſs 1 nicht bloſs die Grenze giebt, welche jene Summe nicht zu überschreiten vermag, sondern in aller Strenge wirklich die Summe der ganzen unendlichen Reihe ist, denn weil dann in $s = 1 - \frac{1}{2^{\infty}}$ das Glied $\frac{1}{2^{\infty}}$ unteilbar und $=$ Null zu achten ist, so hat man $s = 1$. Man sieht also, daſs eine Sache in einem Sinne unendlich und in einem andern wieder endlich sein kann. Die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ in infinitum ist unendlich in bezug auf die Zahl ihrer Glieder, aber der Betrag derselben dennoch eine endliche Gröſse, $= 1$.

Merkwürdig ist bei dieser Reihe noch, daſs jedes Glied derselben so groſs ist, als die Summe aller folgenden:

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \cdots\cdots \frac{1}{\infty}$$

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \cdots\cdots \frac{1}{\infty}$$

Anfänger glauben nun aber darin eine Ungereimtheit zu finden, daſs, weil jedes vorhergehende Glied zweimal so groſs ist, als das nächst folgende: auch das letzte Glied, welches doch 0 sein soll, zweimal genommen dem vorletzten gleich sein müsse und so herauf bis zu Anfang, wo alle Glieder zu 0 würden. Wer aber dermaſsen philosophiert, ist mit sich selbst im Widerspruch, indem er glaubt, das Unendliche beim Ende und eine absolute Null gefaſst zu haben. Weil die Reihe kein Ende hat, so kann auch von einem letzten Gliede nicht die Rede sein. Es verhält sich vergleichungsweise, wie mit einem Kreise, der kein wirkliches Ende hat. Soll er's haben, so muſs man es erst hineinlegen. Ebenso mit der Reihe, sie hat kein wirkliches Ende; man muſs es für den Augenblick annehmen, daher $\frac{1}{\infty}$ (weil nicht angebbar) $= 0$ setzen und dann bedenken, daſs die Reihe schon mit den vorletzten Gliedern expiriert.

Auch alle übrigen fallenden, unendlichen, geometrischen Reihen können summiert werden. Man hat z. B.:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{80} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{4}{15}$$

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \cdots\cdots \frac{1}{\infty} = \tfrac{2}{3}$$

2) Nach der § 318 gegebenen Regel findet man den Wert des ins Unendliche fortlaufenden periodischen Decimal-Bruchs $0{,}3636\ldots = \frac{4}{11}$, nämlich:

Anfang und Ende sind gleichzeitig, und deshalb die Augenblicklichkeit unteilbar. Obwohl nun, wegen dieser Unteilbarkeit, dem Augenblick auch keine Gröſse (Quantum, d. h. ein bestimmtes Verhältnis zu einem endlichen Maſsstabe) zuerkannt werden kann, so ist doch gewiſs, daſs in unserm Bewuſstsein etwas haftet, was von dem absoluten Nichts (Null) verschieden ist. Kein Mensch kann sich eine Dauer als den Verfluſs von lauter Nichtsen, wohl aber als den Verfluſs von lauter unteilbaren und unzähligen Augenblicken denken.

$$s = 0{,}363636\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$100s = 36{,}363636\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$99s = 36$$
$$s = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}$$

Obgleich durch das Resultat von der Richtigkeit dieser Regel vollkommen überzeugt, so pflegen doch gute Köpfe, welche allenthalben auf den Grund gehen und Ursache und Wirkung kennen wollen, die scheinbar gegründete Einwendung zu machen, dafs die Reihe der Decimalstellen in der 2ten Gleichung, wegen Vorrückung des Decimalzeichens, um zwei Glieder kürzer geworden sei, als die erste, und mithin die Differenz beider Reihen Decimalen, streng genommen, nicht 0 sein könne, weil, wenn auch erstere ins Unendliche gehe, letztere doch noch zwei Glieder davon entfernt sei.

Dies ist aber wieder ein Fehlschlufs, der von den Fesseln des Geistes herrührt, welcher der Phantasie nicht folgen kann und immer wieder in seine Schranken zurückfällt. Wie könnte wohl der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen durch zwei Schritte geschehen? Die vermeintlichen beiden Glieder, um welche die eine Reihe tiefer ins Unendliche gehen soll, sind 0. Das Unendliche kann durch keine endliche Gröfse vergröfsert oder verkleinert werden. Beide Reihen Decimalen gehen ins Unendliche (ohne Aufhören) fort, und daher gleich weit. $(\infty \pm a = \infty.)$

Man kann aber auch hier die Sache wieder anschaulich machen und die zweite Gleichung aus der ersten entstehen lassen, indem man der ersten Reihe Decimalen zwei Glieder vorsetzt, oder 36 Ganze dazu addiert, indem wirklich:

$$s = \tfrac{4}{11} = 0{,}3636\ldots\ldots$$
$$\text{und } 100s = 36\tfrac{4}{11} = 36{,}3636\ldots\ldots$$
$$\text{mithin: } 99s = 36 = 36{,}0000\ldots\ldots$$

3) Um das eben Gesagte noch von einer andern Seite zu beleuchten, wollen wir die Perioden des Bruchs 0,3636.... wie eine geometrische Reihe summieren. Man kann nämlich die Perioden als Glieder einer solchen Reihe betrachten, wo dann $\frac{36}{100}$ das erste Glied, $\frac{1}{100}$ der Exponent, und die Anzahl der Glieder $= \infty$ ist, und daher ein letztes Glied $\frac{1}{\infty} = 0$ annehmen. Es ist:

$$s = 0{,}3636\ldots = \tfrac{36}{100} + \tfrac{36}{10000} + \tfrac{36}{1000000} + \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$$

$$\text{mithin: } s = \frac{\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{100} - \frac{36}{100}}{\frac{1}{100} - 1} = \frac{0 - \frac{36}{100}}{-\frac{99}{100}} = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}.$$

330.

Unter dem Titel „mathematische Sophismen“ hat Herr Viola eine kleine Sammlung von Trugschlüssen, jedoch ohne Aufdeckung derselben, herausgegeben (Wien 1850). Dazu aufgefordert, wollen wir hier ein paar der verfänglichsten derselben nachweisen.

Zuerst beweist Herr Viola folgendermafsen, dafs 4 gröfser, als 12 ist:

$$\begin{array}{rr}
\text{Es ist offenbar:} & +7 > +5 \\
\text{addiert:} & -8 = -8 \\ \hline
 & -1 > -3 \\
\text{multipliziert:} & -4 = -4 \\ \hline
 & 4 > 12
\end{array}$$

Unter den Grundsätzen, welche Viola, als unumstöfslich, vorausschickt und worauf er seine Schlüsse baut, wie z. B. Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches &c. &c., kommt auch der Satz vor: „Gleiches zu Ungleichem addiert, giebt Ungleiches und zwar dort das Gröfsere, wo der gröfsere Summand genommen wurde."

Dieser letztere Satz ist aber nicht allgemein, sondern nur für den speziellen Fall gültig, wo die, aus der gegebenen Ungleichheit, durch Addition oder Subtraktion gezogene neue Ungleichheit ganz dieselben Vorzeichen hat, Beispiel (1).

1	2	3
$+7>+5$	$+7>+5$	$+8>+5$
$-4=-4$	$-8=-8$	$-6=-6$
$+3>+1$	$-1<-3$	$+\ldots\ldots-$

Kehren die Vorzeichen sich um, so mufs allemal auch das Ungleichheitszeichen umgedreht werden, Beispiel (2). Kommen beiderseits des Resultats entgegengesetzte Vorzeichen, Beispiel (3), so ist gar keine Gröfsenvergleichung möglich und das Ungleichheitszeichen hat dann keinen Sinn mehr, weil man, in betreff des Gröfser oder Kleiner, nur ganz gleichartige Gröfsen miteinander vergleichen und z. B. nicht sagen kann, dafs 3 Minuten mehr ist, als 2 Thaler, oder dafs $+3$ mehr ist, als -2.

Die Vorzeichen $+$, $-$ sind hier gleichsam Eigenschaftswörter (§ 144, Anmrkg. 2). Eine Zahl absolut (beziehungslos) gedacht, hat gar kein Vorzeichen.

Die alte falsche Vorstellung, dafs negative Gröfsen kleiner als positive, ja gar kleiner als Nichts seien, entsprang aus der Vergleichung von Vermögen mit Schulden, indem man sagte: wenn eine Person A Schulden hat, so hat sie weniger als Nichts. Schulden mögen der Person A noch verwünschbarer, als Nichts sein; Wünsche aber kann die Mathematik nicht berücksichtigen. Eine Gröfse, kleiner als Null, ist unmöglich.

331.

Folgendermafsen wird nun bewiesen, dafs alle Zahlen einander gleich sind. Es sei $a>b$ und $a-b=c$, dann ist:

$$(a-b)(a-b)=(a-b)\,c$$
$$a^2-2ab+b^2=ac-bc\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-ac+ab-b^2=-ac+ab-b^2$$
$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc\ldots\ldots(2)$$
$$a(a-b-c)=b(a-b-c)\ldots\ldots(3)$$
$$a=b$$

Aus der Voraussetzung $a-b=c$ folgt: $ab-b^2=bc$. Es ist also auf beiden Seiten der Gleichung (1) die gleiche entgegengesetzte Gröfse $-ac+bc$ addiert und die Gleichung (2) eigentlich: $0=0$. Da jedoch auf diese Weise, beiderseits der gemeinschaftliche Faktor $a-b-c$ hinein praktiziert worden, der, wie aus $a-b=c$ folgt: $=0$ ist, so ist die Gleichung (3) $a.0=b.0=0$. Wenn aber in einem Produkt ein Faktor Null ist, so ist das ganze Produkt $=0$, die übrigen Faktoren mögen sein, was sie wollen, weil man eine Null nicht multiplizieren, überhaupt keine arithmetische Operation damit vornehmen kann.

332.

Auf folgende Weise wird bewiesen, dafs fünf gleich vier ist. Es sei $x=5$ und $z=4$, so ist:

$$x+z=9 \text{ und}$$
$$(x+z)(x-z)=9(x-z)$$
$$x^2-z^2=9x-9z$$
$$z^2-9x=z^2-9x$$
$$\overline{}$$
$$x^2-9x=z^2-9z$$
$$x^2-9x+\tfrac{81}{4}=z^2-9z+\tfrac{81}{4}$$
$$(x-\tfrac{9}{2})^2=(z-\tfrac{9}{2})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x-\tfrac{9}{2}=z-\tfrac{9}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x=z$$

Die Gleichung (2) ist falsch. Setzt man in (1) statt x und z ihre, keineswegs gesuchten, sondern im voraus bestimmten Werte, so sieht man, dafs die Wurzel linker Hand positiv $=\frac{1}{2}$, rechter Hand aber negativ $=-\frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung (2) ist also richtig geschrieben: $x-\frac{9}{2}=-(z-\frac{9}{2})$, woraus wieder $x+z=9$ (§ 216, Anmrkg.). Der Grundsatz: Gleiches gleich behandelt, giebt Gleiches, ist richtig. Umgekehrt kann man aber nicht sagen: dafs Gröfsen, die gleich behandelt, Gleiches geben, auch immer gleich seien. Aus $(+a)^2=(-a)^2$ folgt nicht, dafs $+a$ gleich $-a$ ist.

333.

Schliefslich wollen wir noch die Behauptung widerlegen, dafs es Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse giebt, die gar keine Wurzeln haben. Es sei, heifst es:

$$1+\sqrt{x-1}=+\sqrt{x-4} \text{ folglich (§ 230)}$$
$$x=5$$

Dieser Wert von x leistet der gestellten Forderung nicht Genüge. Woran liegt das? Antwort: weil hier etwas ganz Unmögliches gefordert wird und weil man aus falschen Voraussetzungen, wie z. B. $8=5$ keine Wahrheiten folgern kann. Denn bevor man anfing zu rechnen, konnte man schon sehen, dafs die aufgestellte Voraussetzung (Gleichung) falsch ist. Erstlich kann offenbar x keine positive Zahl, gröfser als 4, sein, weil dann schon $\sqrt{x-1} > \sqrt{x-4}$ ist. Zweitens kann x auch nicht kleiner als 4, oder kleiner als 1, oder negativ sein, weil eine laterale Gröfse nicht einer komplexen oder einer reellen Gröfse gleich sein kann. Aus demselben Grunde kann x auch keine laterale und auch keine komplexe Gröfse sein. Aber, frägt man, woher kommt es denn, dafs die Rechnung doch den Wert von $x=5$ giebt? Wir haben schon bemerkt, dafs Gröfsen, die gleich behandelt, auf Gleiches führen, nicht immer gleich sind. Nimmt man von dem doppelten Vorzeichen der Wurzel das untere (§ 216, Anmrkg.), so wird aus der Ungleichheit eine mögliche Gleichheit, nämlich:

$$1-\sqrt{x-1}=-\sqrt{x-4}$$

die ganz so behandelt $x=5$ giebt. Es ist bei arithmetischen Operationen immer zu beachten, dafs die mathematischen Zeichen nicht dazu dienen sollen, um daraus, in gedankenlosem Spiele, Wahrheiten abzuleiten, sondern wie die Buchstaben nutzen, um das als möglich und wahr Erkannte dem Papier anzuvertrauen.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Im Verlage von **Friedr. Brandstetter** in **Leipzig** ist ferner erschienen:

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. **Siebente, verbesserte Auflage.** gr. 8. (204 S.) 3,60 M.

———, **Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung** zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 53 Figuren im Text. **Sechste, verbesserte Auflage.** gr. 8. (360 S.) 8 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie.** Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 193 Figuren im Text. **Fünfundzwanzigste, verbesserte Auflage.** gr. 8. (178 S.) 3 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der Trigonometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 58 Figuren im Text. **Dreizehnte Auflage.** gr. 8. (105 S.) 2,40 M.

———, **Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. **Elfte Aufl.** gr. 8. (210 S.) 4 M.

———, **Einleitung in die Mechanik.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 162 Figuren im Text. **Vierte Auflage.** gr. 8. (309 S.) 6,80 M.

Ferner:

Schurig, Rich., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche an niederen und höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. I. Teil. **Spezielle Zahlenlehre** (Ziffernrechnen). Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer. gr. 8. (286 S.) 3,60.

Kein gewöhnliches Lehrbuch der Arithmetik in der althergebrachten Form und den üblichen Unterrichtsmethoden sich anschliessend, sondern ein **ganz eigenartiges Werk**, zu welchem der Grundgedanke der durch langjährige Erfahrungen und Untersuchungen gewonnenen Überzeugung entsprungen ist, dass die Lehren der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, noch immer einer wahrhaft logischen Begründung, einer planmässigen Anordnung und einer für das stetige gesicherte Fortschreiten des Lernenden geeigneten Darstellung ermangeln. Es steht daher mit Sicherheit zu erwarten, dass die von dem Herrn Verfasser dieses Buchs eingeführte methodische Vereinfachung des arithmetischen Lehrgebäudes und dessen Zurückführung auf möglichst wenige, in strenger Folge logisch fortentwickelte Sätze sich in kurzem Bahn brechen und eine allgemeine Einführung in den mathematischen Lehrkursus finden werden.

Der **II. Teil** (bereits unter der Presse) enthält: die **Allgemeine Zahlenlehre** (das Buchstabenrechnen) und der **III. Teil**, mit welchem das Werk abschliesst, wird die **Algebra nebst ihrer Anwendung auf die Analysis** enthalten.

Löbe, Dr. M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. Für Gymnasien, Realschulen u. höhere Bürgerschulen. **Zweite Aufl.** 3 Hefte.

Heft I: Grundrechnungen mit ganzen, unbenannten und gleichbenannten Zahlen. — Grundrechnung mit ungleichbenannten Zahlen. $5^1/_4$ Bog. geh. 75 Pf.

Heft II: Rechnungen mit Decimalzahlen. — Rechnungen mit gemeinen Brüchen. $5^1/_2$ Bog. geh. 80 Pf.

Heft III: Prozentrechnung. — Verteilungs- und Mischungsrechnung. — Verhältnisse und Proportionen. $4^3/_4$ Bog. geh. 75 Pf.

———, **Auflösungen** zu den „Aufgaben aus der Arithmetik". Heft 1—3. $3^1/_4$ Bog. geh. 1 M.