Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Zehntes Buch. Rechnung mit allgemeinen Größenzeichen

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Zweiter Teil.

Allgemeine Arithmetik.

(Buchstabenrechnung und Algebra).

Zehntes Buch.

Rechnung mit allgemeinen Gröſsenzeichen.

(Sogenannte Buchstabenrechnung.)

74.

Das Rechnen mit allgemeinen Zahlen (Buchstaben) setzt zunächst die Bekanntschaft mit den entgegengesetzten Gröſsen (§ 74 bis 79) voraus, mit denen wir uns daher vor allen Dingen zu beschäftigen haben.

Wenn mehrere Gröſsen addiert, und von der Summe mehrere andere Gröſsen subtrahiert werden sollen, so kann man diese zu machenden Rechnungen kurz dadurch andeuten, daſs man sämtliche Gröſsen nacheinander hinschreibt, vor jede der zu addierenden Gröſsen aber das + Zeichen, und vor jede zu subtrahierende Gröſse das — Zeichen setzt.

Sollen z. E. die Zahlen 9 und 12 addiert, und von ihrer Summe die Zahlen 5, 3 und 2 subtrahiert werden, so kann man diese Forderung so andeuten:

$$+9+12-5-3-2$$

und dieser aus mehreren Teilen bestehende Gröſsenausdruck ist also nicht so zu verstehen, als ob 2 von 3 oder 3 von 5 subtrahiert werden soll, sondern daſs die Summe aller mit dem —Zeichen behafteten Teile von der Summe der Teile, welche das + Zeichen führen, subtrahiert werden soll.

Dies wohl bemerkt, kann auch eine andere beliebige Folge der Teile eines mehrteiligen Gröſsenausdrucks auf den Betrag desselben (insofern man ihn wirklich berechnen wollte) keinen

Einfluſs haben. Man schreibt indessen eine vielteilige Gröſse gewöhnlich so, daſs ein Teil mit dem + Zeichen voransteht, indem man dann dieses voranstehende + Zeichen (als sich von selbst verstehend), der Einfachheit wegen, weglässt. Nur wenn ein Teil mit dem — Zeichen voransteht, darf dies Zeichen nicht fehlen. Vorstehenden Gröſsenausdruck kann man also, ohne seinen wirklichen Betrag (= 11) dadurch zu verändern, auch so schreiben:

$$\begin{array}{r} 9+12-5-3-2 \\ 12+9-3-2-5 \\ 9-5+12-2-3 \\ -5+9-3+12-2 \end{array}$$

75.

In jedem vielteiligen Gröſsenausdruck nennt man die Teile von verschiedenen Vorzeichen entgegengesetzte Gröſsen, und zwar die, welche mit dem + Zeichen behaftet sind, kurzweg *positive (direkte)* und die, welche das — Zeichen führen, *negative (inverse)* Gröſsen. Ebenso heiſsen die Zeichen + und — entgegengesetzte Vorzeichen, und eins das umgekehrte des andern. Jedes Vorzeichen gehört immer zu dem Teil, vor dem es steht.

76.

Addition entgegengesetzter Gröſsen. Will man den Betrag einer vielteiligen Gröſse (die Summe von positiven und negativen Zahlen) berechnen, so sind folgende Fälle zu berücksichtigen:

1) Alle Teile haben einerlei Vorzeichen (sind alle positiv oder alle negativ), alsdann addiere man sie unmittelbar, und gebe der Summe dasselbe Vorzeichen. So ist z. B.:

$$\begin{array}{r} 6+4+3=13 \\ -6-4-3=-13. \end{array}$$

2) Die Teile haben verschiedene Vorzeichen, alsdann suche man die Summe der positiven und ebenso die Summe der negativen, jede besonders, und tilge die kleinere Summe durch einen ebenso groſsen Teil der gröſseren, d. h. man ziehe die kleinere Summe von der gröſseren ab, und lasse dem Rest dasjenige Vorzeichen, welches die gröſsere Summe hat.

Einen solchen Rest (der den Umständen nach positiv oder negativ sein kann) nennt man den Betrag, oder auch wohl algebraische Summe der vielteiligen Gröſse.

Wären die Summen der positiven und negativen Teile an Gröſse gleich, so ist in diesem Fall der Betrag der vielteiligen Gröſse = 0, denn das zwei zusammengehörige gleiche, aber entgegengesetzte Gröſsen sich tilgen, ist klar. So ist z. B.:

$$+5-5=0$$
$$-6+6=0$$
$$+8-5=3$$
$$-8+5=-3$$
$$9-5+12-2-3=11$$
$$8-10-6+3=-5.$$

77.

Subtraktion entgegengesetzter Größsen. Soll $4-10+7$ von 9 subtrahiert werden, so schreibt man $9-(4-10+7)$. Um eine solche Subtraktion zu berechnen, löst man die Parenthese auf und bildet aus der Subtraktionsaufgabe eine Additionsaufgabe, indem man die in der Parenthese befindlichen positiven Zahlen in negative, die negativen in positive verwandelt. In vorstehender Aufgabe ist also 4, d. i. $+4$, in -4, -10 in $+10$, $+7$ in -7 zu verwandeln, um dieselbe in die Additionsaufgabe $9-4+10-7=19-11=8$ zu verwandeln. Die Subtraktion mufs nämlich richtig sein, wenn der Rest zum Subtrahend addiert, den Minuend giebt, folglich mufs z. B. $9-(+4-10)=9-4+10$ richtig sein, weil Rest $9-4+10$ und Subtrahend $+4-10$ addiert: $9-4+10+4-10=9$ giebt und diese Zahl dem Minuend wirklich gleich ist. Soll $-7+2$ um $-13+25-6$ vermindert werden, so erhält man $-7+2-(-13+25-6)=-7+2+13-25+6=21-32=-11$.

78.

Multiplikation entgegengesetzter Gröfsen. Es ist $+7\cdot+3$ offenbar $=7\cdot3=21=+21$;

$-7\cdot+3$, d. i. -7, 3mal genommen $=-7-7-7=-21$;

daher auch $+3\cdot-7=-21$;

$-7\cdot-3$? Da $+7\cdot-3=-21$, so mufs $-7\cdot-3$ das entgegengesetzte Produkt, also $+21$ geben.

Hieraus folgt die Regel: Gleiche Zeichen geben + (plus), ungleiche: — (minus).

Beispiele. $-5\cdot-2=+10$;
$9\cdot-1=+9\cdot-1=-9$;
$-2\cdot5=-2\cdot+5=-10$;
$3\cdot4=+3\cdot+4=+12=12$;
$-6\cdot-5\cdot-4=+30\cdot-4=-120$.

79.

Division entgegengesetzter Gröfsen. Auch hier gilt die in der Multiplikation gegebene Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche: —; denn z. B. $\frac{-12}{-4} = +3$, weil $+3 \cdot -4 = -12$ ist (siehe § 11).

Beispiele. $\frac{3}{-2} = \frac{+3}{-2} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$;

$$\frac{-8}{6} = \frac{-8}{+6} = -\frac{8}{6} = -1\frac{1}{3};$$

$$\frac{+2}{+10} = +\frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{5 \cdot -7}{-2} = \frac{-35}{-2} = +17\tfrac{1}{2}.$$

Anmerkung. Wer sich eingehender über die Rechnung mit positiven und negativen Gröſsen unterrichten will, mag hier zunächst § 320 (s. Anhang) nachlesen.

80.

Einleitung in die Buchstabenrechnung. Manche verwickelte Rechnungen lassen sich oftmals bedeutend vereinfachen, wenn man die vorzunehmenden Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation &c. nicht gleich vollzieht, sondern vermittelst der Zeichen +, — &c. vorher erst andeutet, weil man dann alle zu vollziehenden Rechnungen auf einmal vor Augen hat, die stattfindenden Abkürzungen und Zusammenziehungen, die Vorteile, welche gemeinschaftliche Faktoren gewähren &c., sowie auch die Fälle, wo sich widerstreitende Gröſsen gegenseitig tilgen und mithin als überflüssig ausgelassen werden können u. m. dergl. leichter gewahren und benutzen kann. Ein paar Beispiele werden dies erläutern:

Erstes Beispiel. Welche Gröſse kommt heraus, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Brüche: $\frac{4576}{8777}$ und $\frac{213}{7691}$ addiert?

Auflösung. Deuten wir die zu machende Rechnung vorläufig nur an, so bedeutet $\frac{4576}{8777} + \frac{213}{7691}$ die Summe und mithin $\frac{1}{2}(\frac{4576}{8777} + \frac{213}{7691})$ die halbe Summe und ebenso $\frac{1}{2}(\frac{4576}{8777} - \frac{213}{7691})$ die halbe Differenz der beiden Brüche. Beide zusammengelegt, geben den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4576}{8777} + \tfrac{213}{7691}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4576}{8777} - \tfrac{213}{7691}\right)$$

welcher alle zu machenden Rechnungen vor Augen legt. Statt sie nun aber gleich zu vollziehen, überlege man erst, ob sich der Ausdruck (etwa durch Auflösung der Klammern &c.) nicht noch etwas zusammenziehen und auf einen leichter zu berechnenden Ausdruck zurückführen (reduzieren) läſst.

Die Klammern aufgelöst, läſst sich obiger Ausdruck auch so schreiben (§ 19):

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4576}{8777} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{213}{7691} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4576}{8777} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{213}{7691}.$$

Hier sieht man nun gleich, daſs die vorliegende vierteilige Gröſse zwei gleiche einstimmige und zwei gleiche widerstreitende Teile enthält. Letztere beiden, nämlich der 2te und 4te Teil, tilgen sich gegenseitig und können daher, als auf das Resultat keinen Einfluſs habend, ganz ausgelassen werden. Erstere beiden Teile, nämlich der 1ste und 3te, lassen sich leicht in ein Glied zusammenziehen; denn eine und dieselbe Gröſse ein halb mal und noch ein halb mal nehmen, ist soviel als die ganze Gröſse einmal nehmen. Mithin reduziert sich der obige Ausdruck auf ein einziges Glied $\tfrac{4576}{8777}$, welches das gesuchte, ohne Rechnung, durch eine bloſse Reduktion erhaltene Resultat ist.

Ein anderer sehr naheliegender Gedanke, uns bei Reduktionen, wie die vorhergehende, noch gröſsere Vorteile zu verschaffen, ist folgender: da wir beim Reduzieren der Gröſsenausdrücke auf einfachere, die Teile der Gröſsen ganz unverändert lassen, sie gleichsam nur hin- und herschieben, kleine Zusammenfassungen und Auslassungen vornehmen, gleiche Faktoren gegeneinander aufheben &c., so können wir hinsichtlich der klareren Übersicht, des schnellern und bequemern Schreibens, dadurch offenbar einen bedeutenden Vorteil erlangen, wenn man statt der Gröſsen, an welchen Rechnungen vollzogen werden sollen, vorläufig und bis zu Ende der Reduktion einfachere, leichter zu schreibende und zu unterscheidende Zeichen als Stellvertreter setzt. Mit diesen Stellvertretern kann man dann, vermittelst der Zeichen $+$, $-$ &c., die zu machenden Rechnungen ebenfalls andeuten und die etwa möglichen Reduktionen vollziehen und dann am Ende der Reduktion, statt der gebrauchten einfachen Zeichen, die Werte, welche sie vertreten haben, wieder zurücksetzen.

Was für einfache Zeichen man dieserhalb gebrauchen will, ist offenbar ganz willkürlich. Da wir jedoch, vermöge der Gewohnheit, die Buchstaben schnell nennen, schreiben und unterscheiden können, so sind sie auch zu Stellvertretern der Gröſsen am bequemsten.

Zur Erläuterung wollen wir wieder das vorhergehende Beispiel nehmen, wo die halbe Summe und halbe Differenz der beiden Gröſsen $\tfrac{4576}{8777}$ und $\tfrac{213}{7691}$ zusammengelegt werden soll, und der Kürze wegen für die erste Gröſse einen beliebigen Buchstaben, z. B. a, und für die andere Gröſse einen andern, z. B. b, setzen, alsdann deutet $a + b$ die Summe, mithin $\tfrac{1}{2}(a + b)$ oder $\dfrac{a+b}{2}$ die halbe Summe und ebenso $\tfrac{1}{2}(a - b)$ oder $\dfrac{a-b}{2}$ die halbe Differenz der beiden, einstweilen durch a und b vertretenen Gröſsen an, und der Ausdruck:

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$$

stellt, wie vorhin, alle Rechnungen dar, welche die Aufgabe zu machen verlangt. Statt nun aber diese angedeutetermaſsen gleich zu vollziehen, indem man für die Buchstaben ihre Werte wieder zurücksetzt, versuche man erst den Ausdruck auf einen einfachern zu reduzieren. Offenbar kann man ihn auch so schreiben (§ 20):

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

Hier wird nun $+\frac{b}{2}$ durch $-\frac{b}{2}$ getilgt, $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ ist soviel als a. Mithin reduziert sich der ganze Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$ auf die einteilige Gröſse a, wofür der Wert $\frac{4576}{8777}$, als das gesuchte Resultat, zurückgesetzt werden muſs.

81.

Zweites Beispiel. Ein Fuſsgänger ist mit stets gleich bleibender Geschwindigkeit von einem Orte, O, nach einem andern Orte, W, gegangen. Er ging vormittags 8 Uhr 4 Minuten 59 Sekunden von O ab, und kam nachmittags 3 Uhr 57 Minuten 48 Sekunden in W an. Man frägt nach dem Stande der Uhr, als er gerade die Mitte seines Weges erreichte.

Auflösung. Die Hälfte der auf den ganzen Weg verwandten Zeit zur Vormittagszeit addiert, giebt den fraglichen Stand der Uhr. Um aber erst die auf den ganzen Weg verwandte Zeit zu erhalten, müssen wir, weil die Uhr nur bis 12 in einem fortzählt, erst die Vormittagszeit von 12 subtrahieren, um die bis 12 verflossene Zeit zu erhalten, und diese dann zur Nachmittagszeit addieren, von der Summe die Hälfte nehmen und zur Vormittagszeit hinzulegen, wie es folgende Rechnung zeigt:

$$\text{O}\text{———————}:\text{———————}\text{W}$$
$$8^h\ 4'\ 59'' \qquad\qquad 3^h\ 57'\ 48'';$$

$$\begin{array}{rcrrr}
 & & 12^h & 0' & 0'' \\
\text{Vormittagszeit} & = & 8^h & 4' & 59'' \\ \hline
\text{die bis } 12^h \text{ verflossene Zeit} & = & 3^h & 55' & 1'' \\
\text{Nachmittagszeit} & = & 3^h & 57' & 48'' \\ \hline
\text{Auf den ganzen Weg verflossene Zeit} & = & 7^h & 52' & 49'' \\ \hline
\text{Auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit} & = & 3^h & 56' & 24\frac{1}{2}'' \\
\text{Hierzu die Vormittagszeit} & = & 8^h & 4' & 59'' \\ \hline
\text{Stand der Uhr} & = & 12^h & 1' & 23\frac{1}{2}''
\end{array}$$

Folglich hatte der Fufsgänger 1 Minute $23\frac{1}{2}$ Sekunden nach 12 Uhr die Mitte seines Weges erreicht.

Dasselbe Resultat kann man aber folgendermafsen viel kürzer erhalten.

Deuten wir die oben gleich vollzogenen Rechnungen vorläufig nur an, indem wir zugleich, des leichtern Schreibens wegen, für die Gröfse der gegebenen Vormittagszeit einstweilen das einfache Zeichen a und für die Nachmittagszeit das Zeichen b substituieren, so können wir durch $12 - a$ die bis 12 Uhr, durch $12 - a + b$ die auf den ganzen Weg und mithin durch $\frac{12 - a + b}{2}$ die auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit kurz andeuten. Wird hierzu wieder die Vormittagszeit gerechnet, so erhalten wir für den fraglichen Stand der Uhr den Ausdruck:

$$\frac{12 - a + b}{2} + a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dieser Ausdruck läfst sich noch etwas vereinfachen, wenn wir ihn auf einerlei Nenner bringen. Statt der ohne Nenner stehenden Gröfse a, kann man auch $\frac{2a}{2}$ setzen, und mithin den obigen Ausdruck so schreiben:

$$\frac{12 - a + b}{2} + \frac{2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\frac{12 - a + b + 2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

In dem Zähler dieses Ausdrucks befinden sich jetzt zwei entgegengesetzte Gröfsen, nämlich $-a$ und $+2a$. Nun ist aber $-a + 2a = -a + a + a = a$. Setzen wir also a, statt $-a + 2a$, so läfst sich der obige Ausdruck noch einfacher so schreiben:

$$\frac{12 + a + b}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Alle vier verschiedenen Ausdrücke müssen offenbar einerlei Resultat geben, wenn man statt der Buchstabengröfsen die numerischen Werte derselben substituiert. Der letzte Ausdruck, der sich nicht weiter reduzieren läfst, ist aber für die numerische Rechnung am bequemsten. Nach seiner Vorschrift braucht man nur, um die fragliche Zeit zu erhalten, die gegebenen Vormittags- und Nachmittags-Zeiten zu 12 zu addieren, und von der Summe die Hälfte zu nehmen. Für die vorliegende Aufgabe ist nämlich:

$$\begin{array}{rl} 12 = & 12^{st.}\ \ 0'\ \ 0'' \\ a = & \ \ 8 \text{ „ }\ \ 4'\ 59'' \\ b = & \ \ 3 \text{ „ }\ 57'\ 48'' \\ \hline & 24^{st.}\ \ 2'\ 47'' \\ 2 \,| & 12^{st.}\ \ 1'\ 23\tfrac{1}{2}'' \end{array}$$

Nach dieser Vorbereitung wird der folgende Paragraph dem Anfänger hoffentlich verständlicher werden, ihm doch wenigstens einen ungefähren Begriff von dem eigentlichen Sinn und Zweck der sogenannten Buchstabenrechnung geben, und dadurch das Fremdartige und Dunkle, welches dieser Teil der Mathematik für Anfänger hat, entfernen.

82.

Begriff der Buchstabenrechnung. 1) Wenn eine Gröfse aus andern berechnet werden soll, so ist offenbar die Hauptsache, dafs man erst überlege, wie gerechnet werden mufs, das Rechnen selbst ist das wenigste. Um nun die Aufmerksamkeit nicht durch Nebensachen zu stören, wie durch addieren, multiplizieren &c., was bis zuletzt aufgeschoben werden kann, suche man den Gang, den die Rechnung nimmt, möglichst kurz darzustellen, indem man alle vorzunehmenden Operationen vorläufig blofs andeutet, und des bequemern Schreibens wegen, für die Hauptgröfsen einstweilen einfache Zeichen (Buchstaben) als Stellvertreter setzt. Dies ist offenbar das beste Mittel, bei verwickelten Untersuchungen den Lauf der Gedanken zu verfolgen und eine Kette von Schlüssen schnell zu bezeichnen.

2) Die Art und Weise, wie eine Aufgabe gelöst wird, beruht auf Vernunftschlüssen, die für alle Aufgaben derselben Art immer dieselben sind und nicht von der Gröfse der Data abhängen. So gilt z. E. der vorhin gefundene Buchstaben-Ausdruck: $\frac{12+a+b}{2}$ nach welchem wir die dort gesuchte Zeit berechneten, auch zugleich für jeden andern Fall derselben Art, wo also nicht die Aufgabe, sondern nur die Data verändert sind, und daher ist durch $\frac{12+a+b}{2}$ die allgemeine Regel (Formel) bezeichnet, nach welcher wir aus den hier allgemein durch a und b angedeuteten Vormittags- und Nachmittags-Zeiten, sobald sie nur in bestimmten Zahlen gegeben werden, die fragliche Zeit immer leicht finden können. Würde z. B. gesagt, der Fufsgänger sei um 9 Uhr von O abgegangen und um 3 Uhr in W angekommen und nach der Zeit gefragt, als er die Mitte des Weges erreichte, so braucht man in den Ausdruck $\frac{12+a+b}{2}$ nur 9 statt a, und 3 statt b, zu setzen. Man sieht also, dafs die Buchstaben keine bestimmte Werte haben, sondern bald dies, bald jenes bedeuten können.

3) Endlich dienen auch die Buchstaben, als Gröſsenzeichen, zur Abkürzung des Vortrags, sowohl des schriftlichen als mündlichen; deshalb werden auch, um nicht durch Zahlen und die sieben Species Raum und Zeit unnötig auszufüllen, in der Theorie die Untersuchungen gleich allgemein durchgeführt, die Gröſsen durch Buchstaben bezeichnet, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloſs angedeutet und dann die etwa möglichen, gleich näher zu erläuternden Reduktionen vollzogen. Wer eine allgemein gestellte Aufgabe lösen kann, der kann es auch in jedem besondern Fall, (wo die Data in bestimmten Zahlen gegeben werden) und umgekehrt, denn die Schlüsse sind ja in beiden Fällen dieselben. Die allgemeine Auflösung unterscheidet sich von der besondern bloſs dadurch, daſs sie, weil die Gröſse der Data unbestimmt gelassen ist, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloſs andeuten kann, die erhaltenen Ausdrücke jedoch, nach den Regeln der Buchstabenrechnung, gleich auf die bequemste Form reduziert. Die allgemeine Auflösung ist aber immer belehrender, indem sie allgemeine Begriffe giebt, Ursache und Wirkung vor Augen legt, welche in der speziellen Auflösung nicht so deutlich hervortreten können, weil durch die Vereinigung der Zahlen die Anschauung der Art und Weise, wie dieselben eigentlich wirken und sich miteinander verbinden, verloren geht.

83.

Geht man von einer richtigen Vorstellung aus, so muſs man dies Kapitel über die Buchstabenrechnung als das allerleichteste in der ganzen Mathematik finden, wenn auch die Reduktionen selbst ein wenig Aufmerksamkeit und mechanische Fertigkeit verlangen. Man bemerke nur noch, daſs das sogenannte Buchstabenrechnen kein wirkliches (numerisches) Rechnen, sondern nur ein andeutendes Rechnen, ein wissenschaftliches Zusammenstellen, Zergliedern, Zusammenziehen (Reduzieren) der durch Buchstaben vertretenen Gröſsen ist. Die Buchstabenrechnung stellt zu dem Ende verschiedene Gröſsen-Ausdrücke auf und lehrt das Verfahren, wie man dieselben auf kürzere reduzieren kann, oder auch ihre Form so zu verändern, daſs dadurch Reduktionen möglich werden. Die üblichen Gebräuche bei der Buchstabenrechnung und die sich übrigens von selbst ergebenden leichten Regeln sind in folgenden Paragraphen enthalten.

84.

Weil es dem Auge gefälliger ist, so pflegt man hinsichtlich der Aufeinanderfolge mehrerer Buchstaben manchmal die alphabetische Ordnung zu beobachten. Soll z. B. die Addition der durch c, a, b vertretenen Gröſsen angedeutet werden, so schreibt man statt $c + a + b$ lieber $a + b + c$.

85.

Um die Multiplikation mehrerer Buchstaben-Gröfsen anzudeuten, setzt man die Faktoren unmittelbar nebeneinander und zwar ohne Multiplikationszeichen, welches hier entbehrlich ist. Sollen z. B. die Gröfsen b, a, x miteinander multipliziert werden, schreibt man statt $a \cdot b \cdot x$ kurz abx. Ebenso 3 mit a und mit y multipliziert $= 3ay$.

Ist eine Buchstaben-Gröfse mit einer Zahl zu multiplizieren, so setzt man den numerischen Faktor, hier Koefficient genannt, immer voran. Soll z. B. a mit 3 multipliziert werden, so schreibt man $3a$, und 3 ist hier der Koefficient von a. In $\frac{2}{3}ax$ ist $\frac{2}{3}$ der Koefficient von ax. In $\frac{4ab}{5}$ (d. i. $\frac{4}{5} \cdot ab$) ist $\frac{4}{5}$ der Koefficient von ab.

Den Koefficienten 1 schreibt man nicht, weil $1 \cdot 8 = 8$ ist; man schreibt daher statt $1 \cdot a$; $1 \cdot abc$ kurz a, abc. In $\frac{a}{5\,b}$ ist mithin der Koefficient $\frac{1}{5}$, denn $\frac{1 \cdot a}{5 \cdot b} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{b}$.

86.

Buchstaben-Ausdrücke heifsen gleichartig, wenn sie aus denselben Buchstaben und auf dieselbe Weise gebildet sind, wobei aber die Koefficienten verschieden sein können. So sind z. B. $2ab$, $-\frac{2}{3}ab$, $12ab$ gleichartig. Ebenso $3aax$, $25aax$ &c.; die Ausdrücke ab, $a+b$, $3abc$, $2abb$ hingegen sind ungleichartig.

87.

Addition. Es ist $7+7+7=3 \cdot 7$, daher auch $a+a+a=3a$. Da nun $3a+2a=a+a+a+a+a=5a$, so ergiebt sich hieraus die Regel: Man schreibt die zu addierenden Gröfsen mit ihrem Vorzeichen in beliebiger Folge nacheinander hin, indem man die etwa gleichartigen Teile durch (algebr.) Addition ihrer Koefficienten in eine Summe zusammenzieht. Folglich $7x - 10x = -3x$, denn es ist $7 - 10 = -3$; $abc + 6abc = 1 \cdot abc + 6abc = 7abc$; $\frac{2}{3}ax + \frac{3}{4}ax = \frac{17}{12}ax$; $2ab + 3ax + ab = 3ab + 3ax$; $a - 5a = -4a$.

Ebenso verfährt man, wenn die in eine Summe zu bringenden Buchstabengröfsen vielteilige sind, indem man sie nacheinander hinsetzt und dann die gleichartigen Teile, welche man, der leichtern Übersicht wegen, auch erst untereinander stellen kann, in eins zusammenzieht. Sollen z. E. die Gröfsen $8ax - 3bc$; $2aax - 3$; $-5ax + 7$; $6bc - 4ax$ addiert werden, so hat man:

$$8ax - 3bc + 2aax - 3 - 5ax + 7 + 6bc - 4ax = 2aax - ax + 3bc + 4$$

oder untereinander geordnet:

$$\begin{array}{rl}
 & 8ax - 3bc \\
 & \qquad\qquad\quad + 2aax - 3 \\
 & -5ax \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. + 7 \\
 & -4ax + 6bc \\
\hline
\text{Summe:} & -\ ax + 3bc + 2aax + 4
\end{array}$$

Um sich noch in anderer Weise von der Richtigkeit einer Reduktion durch Beispiele zu überzeugen, mögen Anfänger, sowohl in die gegebenen, als durch Reduktion daraus abgeleiteten Ausdrücke, statt der Buchstaben ganz beliebige Zahlen setzen, und zusehen, ob beide einerlei Resultat geben (§ 328).

88.

Subtraktion. Man addiere, wie es im 77. Satze gelehrt worden ist, den Subtrahend mit umgekehrtem Vorzeichen algebraisch zum Minuend, und ziehe die etwa gleichartigen Teile in eins zusammen (§ 77). Soll z. B. $2a$ von $6a$ subtrahiert werden, so hat man $6a - 2a = 4a$. Ebenso ist $2ax$ von $6ax$ subtrahiert: $6ax - 2ax = 4ax$; b von a subtrahiert, giebt $a - b$. Will man bloſs andeuten, daſs eine vielteilige Gröſse von einer andern, einteiligen oder vielteiligen Gröſse subtrahiert werden soll, so muſs man den vielteiligen Subtrahend in Klammern schlieſsen, und mithin beim Auflösen der Klammer alle in derselben stehenden Vorzeichen umkehren; z. B. $y - a$ von x subtrahiert giebt:

$$x - (y - a) = x - y + a.$$

$2ab + 6bc - 4x$ von $2ab - 3bc$ giebt angedeutet:

$$2ab - 3bc - (2ab + 6bc - 4x).$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man die Klammern auflöst:

$$= 2ab - 3bc - 2ab - 6bc + 4x = 4x - 9bc.$$

Ebenso ist:

$$a + b - (a - b) = a + b - a + b = 2b$$

Sind Minuend und Subtrahend vielteilig, so kann man sie auch erst geordnet untereinander stellen und die Aufgabe dann in eine Additionsaufgabe verwandeln, indem man die Zeichen des Subtrahend (der zweiten Zeile) in die entgegengesetzten verwandelt, denn nach § 77 heiſst $+4$ und -10 subtrahieren soviel als -4 und $+10$ addieren.

$$\begin{array}{rl}
\text{Von:} & 2ab - 3bc \\
\text{subtr.:} & 2ab + 6bc - 4x; \\
 & (-)\quad (-)\quad (+) \\
\hline
\text{Differenz:} & -9bc + 4x;
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\text{von:} & 2ax - 6bz + 7 \\
\text{subtr.:} & 6ax - 3by - 3 \\
 & (-)\quad (+)\quad (+) \\
\hline
 & -4ax - 6bz + 3by + 10.
\end{array}$$

Addiert man den Rest zum Subtrahend, so muſs, als Probe der richtigen Rechnung, der Minuend wieder kommen.

89.

Multiplikation. Erster Fall. Sind die Faktoren einteilige Gröſsen, so stelle man sie, alphabetisch geordnet, nebeneinander, und multipliziere nur die etwaigen numerischen Faktoren (Koeffizienten) miteinander (§ 320), z. B. $2a$ mit $3b$ multipliziert, giebt $2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot ab = 6ab$. Ebenso ist:

$$3ab \,.\, 5ac = 15aabc; \qquad 17ax \cdot 3b = 51abx;$$
$$\tfrac{2}{3}ab \cdot \tfrac{3}{4}x = \tfrac{1}{2}abx; \qquad 3abx \cdot 3bx = 9abbxx;$$
$$\tfrac{1}{3}a \cdot \tfrac{3}{4}bc = \frac{abc}{4}; \qquad 5a \cdot \tfrac{1}{6}b \cdot \tfrac{4}{5}c = \frac{2abc}{3};$$
$$\tfrac{2}{3}ax \cdot \tfrac{3}{5}b \cdot \tfrac{5}{6} = \frac{abx}{3}; \qquad \tfrac{2}{7}am \cdot \tfrac{7}{8}n = \frac{amn}{4};$$

Zweiter Fall. Ist der eine Faktor einteilig, der andere vielteilig, so muſs man, um die Multiplikation bloſs anzudeuten, den vielteiligen Faktor in Klammern schlieſsen. Zuweilen ist es aber (Behuf einer Reduktion) erforderlich, die Klammern aufzulösen, und dann muſs man (nach § 19 und § 78) mit dem einteiligen Faktor jeden Teil des vielteiligen multiplizieren. Soll z. B. die Gröſse $a + b - c$ mit a multipliziert werden, so ist $a(a + b - c) = aa + ab - ac$. Ebenso ist:

$$2a(b - 3c) = 2ab - 6ac$$
$$3ab(7ab - 3ax + 1) = 21aabb - 9aabx + 3ab$$
$$(9ax - \tfrac{5}{7}by) \cdot 7b = 63abx - 5bby;$$
$$4 + 5(x + 6) = 4 + 5x + 5 \cdot 6 = 34 + 5x;$$
$$x(y - 1) = xy - x; \quad (a + 1)b = ab + b;$$
$$2ac - ab + a(b - c + x) = 2ac - ab + ab - ac + ax = ac + ax$$

Hat hierbei der einteilige Faktor ein Minuszeichen, so sind gleichfalls die Regeln des § 78 anzuwenden. Z. B.:

$$a + 7 - 3(a - 2b + 4) = ?$$

Hier ist zu multiplizieren: -3 mit $+\ a = -3a$,
-3 mit $-2b = +6b$.
-3 mit $+4\ = -12$,

folglich erhält man $a + 7 - 3a + 6b - 12 = 6b - 2a - 5$.

Dritter Fall. Sind beide Faktoren vielteilig, so multipliziere man mit jedem Teil des einen (am bequemsten des kürzesten) Faktors jeden Teil des andern, und ziehe im entstehenden Produkte die etwa gleichnamigen Teile in eins zusammen. Man kann, der leichtern Übersicht wegen, die Faktoren auch erst unter einander stellen und wie No. 1, 2, 3 zeigt, verfahren.

Es ist übrigens gleichgültig, mit welchem Teil des Multiplikators man zuerst multipliziert. Soll z. B. die Gröſse $a + b - c$ mit $a - b$ multipliziert werden, so ist, indem man die Gröſse $a + b - c$ oder jeden Teil derselben a mal und dann $-b$ mal nimmt

$$(a - b)(a + b - c) = aa + ab - ac - ab - bb + bc = aa - ac - bb + bc.$$

$$\begin{array}{r}
\text{(1)} \\
a+b-c \\
a-b \\
\hline
aa+ab-ac \\
-ab-bb+bc \\
\hline
aa-bb-ac+bc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{(2)} \\
a+b \\
a-b \\
\hline
aa+ab \\
-ab-bb \\
\hline
aa-bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{(3)} \\
a-b \\
a+b \\
\hline
aa-ab \\
+ab-bb \\
\hline
aa-bb
\end{array}$$

Ebenso findet man:

$$(a+b)(a+b)=aa+ab+ab+bb=aa+2ab+bb$$
$$(a-b)(a-b)=aa-ab-ab+bb=aa-2ab+bb$$
$$(x+1)(y-1)=xy-x+y-1$$
$$(3ax-4by)(5bx+1)=15abxx+3ax-20\,bbxy-4by$$
$$(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{5}{4}y)(3x-\tfrac{6}{7}y-\tfrac{3}{2})=2xx-\tfrac{121}{28}xy-x+\tfrac{15}{14}yy+\tfrac{15}{8}y.$$

90.

Faktorenzerlegung. Ebenso oft als die vorhergehenden Aufgaben, eine vielteilige Gröſse mit einer andern zu multiplizieren, kommt der umgekehrte Fall vor: eine vielteilige Gröſse in Faktoren zu zerlegen, und da gerade hierin der Hauptschlüssel zu den Reduktionen liegt, so müssen Anfänger sich darin einige Fertigkeit erwerben. Allgemeine Regeln lassen sich aber hierzu nicht geben. Ein wenig Umsicht und Übung ist erforderlich. Folgende Beispiele werden indessen zeigen, wie man dabei zu verfahren hat.

Multipliziert man die Gröſse $3a-4c+2$ mit $3ab$, so erhält man $9aab-12abc+6ab$. Käme nun umgekehrt in einer Rechnung der Gröſsen-Ausdruck $9aab-12abc+6ab$ vor, so würde ein nur wenig geübter Blick gleich wahrnehmen, daſs alle Teile dieser Gröſse erstlich den numerischen Faktor 3 gemeinschaftlich haben, weil alle Teile durch 3 ohne Rest teilbar sind, auſserdem aber noch den literalen Faktor ab, weil auch dieser in allen Gliedern vorkommt. Man kann also diesen Ausdruck als ein unentwickeltes Produkt darstellen, oder in Faktoren zerlegen, wenn man den, allen Teilen gemeinschaftlichen, Faktor $3ab$ heraushebt und vor die in Klammer geschlossene Summe der eigentümlichen Faktoren $3a-4c+2$ setzt. Es ist nämlich auf die einfachste Form reduziert:

$$9aab-12abc+6ab=3ab(3a-4c+2)$$

Ebenso kann der Ausdruck $xx+xy$ in Faktoren zerlegt werden, wenn man den, beiden Teilen gemeinschaftlichen Faktor x heraussetzt; es ist nämlich $xx+xy=x(x+y)$. Anfänger pflegen gewöhnlich bei folgenden Fällen, wo der eine eigentümliche Faktor 1 ist, Schwierigkeiten zu machen: $yx+y=y\cdot x+y\cdot 1=y(x+1)$; $x-xx=x(1-x)$; $x+mx+nx=(1+m+n)x$. Von der Richtigkeit einer Faktorenzerfällung kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Faktoren wieder miteinander multipliziert. Beispiele:

$$3ab+3ax=3a(b+x); \quad 2Rn-4R=2R(n-2);$$

$$y - yz = y(1 - z); \qquad \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{h}{2}(a+b) = h \cdot \frac{a+b}{2}$$

Ist das 1. Glied mit einem Minuszeichen versehen, so denke man sich zuvor nach dem Minuszeichen eine Klammer. Z. B.:

$$a - bc - bd + be = a - (bc + bd - be) = a - b(c + d - e).$$

Daſs hier die Zeichen in der Klammer entgegengesetzt werden, erklärt sich leicht aus der Multiplikation des Ausdrucks $-b(c+d-e)$.

$$5ax - 3by + 6bz = 5ax - 3b(y - 2z) = 5ax + 3b(2z - y).$$

Durch die Zerlegung in Faktoren läſst sich ein Gröſsenausdruck oftmals sehr zusammenziehen und vereinfachen. So haben in dem folgenden Ausdruck die beiden ersten Glieder den Faktor ac, die beiden folgenden Glieder den Faktor bc gemeinschaftlich &c., hebt man diese heraus, so ist:

$$\begin{aligned} abc - acc - bbc + bcc + abd - acd - bbd + bcd \\ = ac(b-c) - bc(b-c) + ad(b-c) - bd(b-c) \end{aligned}$$

Hier haben alle Teile den zweiteiligen Faktor $b - c$ gemeinschaftlich, setzt man diesen wieder heraus, so ist der vorstehende Ausdruck

$$\begin{aligned} &= (b-c)[ac - bc + ad - bd] \\ &= (b-c)[c(a-b) + d(a-b)] \\ &= (b-c)[(a-b)(c+d)] \\ &= (a-b)(b-c(c+d) \end{aligned}$$

91.

Wenn man eine Gröſse mit sich selbst multipliziert, so nennt man (aus geometrischen Gründen) das entstehende Produkt das Quadrat dieser Gröſse; so ist z. B. $8 \cdot 8$ oder 64 das Quadrat von 8; von 5 ist das Quadrat 25; die Quadrate von 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, &c. sind 1, 4, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{25}$; das Quadrat von a ist aa (lies: a-quadrat). Das Quadrat von $\frac{a}{2}$ ist $\frac{aa}{4}$ (lies: „ein viertel a-quadrat“ oder „a-quadrat durch 4“). Dies beachtet, merke man sich folgende zwei wichtige Sätze:

1) Die Summe zweier Gröſsen $(a+b)$ mit der Differenz derselben $(a-b)$ multipliziert, giebt die Differenz ihrer Quadrate. Man hat nämlich durch wirkliche Multiplikation

$$(a+b)(a-b) = aa + ab - ab - bb = aa - bb.$$

Nach diesem Satze können wir also das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Gröſsen gleich aus dem Gedächtnis niederschreiben. Beispiele:

$$(a+x)(a-x) = aa - xx; \qquad (a+1)(a-1) = aa - 1$$

$$(1+x)(1-x) = 1 - xx; \qquad (2a + \tfrac{1}{2}b)(2a - \tfrac{1}{2}b) = 4aa - \frac{bb}{4}$$

2) Wenn also umgekehrt die Differenz der Quadrate zweier Größen vorkommt, wie $aa - bb$; $bb - yy$ &c., so kann man diese jedesmal in zwei Faktoren (Summe und Differenz) auflösen. So ist z. E.

$$xx - zz = (x + z)(x - z); \qquad zz - 1 = (z + 1)(z - 1)$$
$$xx - aa = (x + a)(x - a); \qquad 1 - xx = (1 + x)(1 - x)$$
$$4aa - \frac{bb}{9} = \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(2a - \frac{b}{3}\right)$$
$$57 \cdot 57 - 43 \cdot 43 = (57 + 43)(57 - 43) = 100 \cdot 14$$

92.

Division. Die Division kann im allgemeinen nur angedeutet werden, wodurch man Größen-Ausdrücke in Bruchform erhält. Ist z. B. a durch b zu dividieren, so schreibt man: $\frac{a}{b}$ (gelesen: „a durch b"), ebenso $2ax$ durch $3by$ dividiert: $\frac{2ax}{3by}$; $a + b$ durch $a - b$ dividiert: $\frac{a+b}{a-b}$

1) Haben aber Dividend und Divisor Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegeneinander ausstreichen, weil der Quotient von der Größe derselben unabhängig ist. So ist z. E. (§§ 22, 23, 38):

$$\frac{ac}{c} = a; \frac{2abc}{3bc} = \frac{2a}{3}; \frac{2abx}{3aabx} = \frac{2}{3a}; \frac{6abb}{4bc} = \frac{3ab}{2c};$$
$$\frac{xy}{6y} = \frac{x}{6}; \quad \frac{a}{a} = 1; \quad \frac{b}{b} = 1; \quad \frac{a+b}{a+b} = 1; \quad \frac{a+c-d}{a+c-d} = 1;$$
$$\frac{(d+b)(a-b)}{a-b} = d + b; \quad \frac{ab(a+b)}{2b(a+b)} = \frac{a}{2}; \quad \frac{m(a+b)}{m(a+c)} = \frac{a+b}{a+c}$$

2) Ist der Dividend eine vielteilige, der Divisor eine einteilige Größe, so kann man mit dem Divisor in jeden Teil des Dividend dividieren (§ 20). Es ist z. E.:

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$
$$\frac{8abb - 10ax}{2ab} = \frac{8abb}{2ab} - \frac{10ax}{2ab} = 4b - \frac{5x}{b}$$

3) Sind beide, Dividend und Divisor, vielteilige Größen, so kann die Division in zweierlei Weise ausgeführt werden:

a) durch Faktorenzerlegung für den Fall, daß sich die Faktoren heben. Der Ausdruck wird alsdann wesentlich vereinfacht. Z. B.:

$$\frac{ab-ax}{bb-bx}=\frac{a(b-x)}{b(b-x)}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{ax+xx}{3bx-xx}=\frac{x(a+x)}{x(3b-x)}=\frac{a+x}{3b-x}$$

$$\frac{y-yy}{3by-3byy}=\frac{y(1-y)}{3by(1-y)}=\frac{1}{3b}$$

$$\frac{ac-bcx-cz}{9bcz-cz}=\frac{c(a-bx-z)}{cz(9b-1)}=\frac{a-bx-z}{z(9b-1)}$$

$$\frac{6aa-3ab}{12ac-6bc}=\frac{3a(2a-b)}{6c(2a-b)}=\frac{a}{2c}$$

$$\frac{4ax-3bx-xx}{8ayz-6byz-2xyz}=\frac{x(4a-3b-x)}{2yz(4a-3b-x)}=\frac{x}{2yz}$$

$$*\ \frac{ay+ty-av-tv}{az+tz-2au-2tu}=\frac{y(a+t)-v(a+t)}{z(a+t)-2u(a+t)}=\frac{(y-v)(a+t)}{(z-2u)(a+t)}=\frac{y-v}{z-2u}$$

$$\frac{(a+b)(a+b)}{aa-bb}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}\ (\S\ 91,\ 2)$$

$$\frac{xx+x}{1-xx}=\frac{x(x+1)}{(1+x)(1-x)}=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{mz-m}{m-my}=\frac{m(z-1)}{m(1-y)}=\frac{z-1}{1-y}=\frac{(-1)(z-1)}{(-1)(1-y)}=\frac{1-z}{y-1}$$

b) Durch die sogenannte Partialdivision (siehe § 321).

Brüche. Hat man mit Gröſsen-Ausdrücken in Bruchform zu rechnen (siehe die nachstehenden §§ 93 und 94), so werden sie ganz nach den Regeln und Grundsätzen der allgemeinen Bruchrechnung behandelt.

93.

1. *Addition* und *Subtraktion.* Haben die Brüche einerlei Nenner, so braucht man nur ihre Zähler algebraisch zu addieren oder subtrahieren und der Summe oder Differenz den gemeinschaftlichen Nenner wieder unterzuschreiben. So ist z. B. (§ 42):

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c};\qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c};$$

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x};\qquad \frac{a}{a-z}-\frac{z}{a-z}=\frac{a-z}{a-z}=1;$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a;$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b-(a-b)}{2}=b;$$

$$\frac{ac-by}{ac}+\frac{cx}{ac}+\frac{by}{ac}=\frac{ac+cx}{ac}=\frac{c(a+x)}{ac}=\frac{a+x}{a}$$

$$\frac{a}{aa-yy}+\frac{y}{aa-yy}=\frac{a+y}{(a+y)(a-y)}=\frac{1}{a-y}\text{(§ 91, 2)}$$

Haben die Brüche nicht einerlei Nenner, so pflegt man sie, der Gleichförmigkeit wegen, oftmals auf einerlei Nenner zu bringen, obgleich dadurch die Ausdrücke nicht immer vereinfacht werden.

Um z. B. die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Nenner zu bringen, multipliziere man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit d, des andern mit b. Es ist nämlich: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Beispiele:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}\text{ ; (§ 34)}$$

$$\frac{12-a+b}{2}+a=\frac{12-a+b+2a}{2}=\frac{12+a+b}{2}$$

$$\frac{8a+6b}{4}-\frac{6a-2b}{3}=\frac{3(8a+6b)-4(6a-2b)}{12}=\frac{13b}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}=\frac{acd+b(a+b)}{bcd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}+\frac{aa-bb-ab}{bcd}=\frac{acd+ab+bb+aa-bb-ab}{bcd}=\frac{a(cd+a)}{bcd}$$

$$a-\frac{az}{z+1}=\frac{a(z+1)}{z+1}-\frac{az}{z+1}=\frac{a}{z+1}$$

$$a-\frac{am}{m+n}=\frac{am+an-am}{m+n}=\frac{an}{m+n}$$

94.

2. *Multiplikation* und *Division*. Um zwei Brüche mit einander zu multiplizieren, multipliziere man wie gewöhnlich, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Soll ein Bruch durch einen andern dividiert werden, so braucht man nur mit dem umgekehrten Divisor zu multiplizieren. (§§ 44, 47.) Beispiele:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{a}{b}=1 \qquad c:\frac{a}{b}=\frac{bc}{a}$$

$$8mn\cdot\frac{3xy}{4my}=6nx \qquad \frac{1}{x}\cdot\frac{6x}{z}\cdot\frac{z}{3x}=\frac{2}{x}$$

$$\frac{5am}{bc}:\frac{15mxx}{6ac}=\frac{5am}{bc}\cdot\frac{6ac}{15mxx}=\frac{2aa}{bxx}$$

$$\frac{2ax}{3}:\frac{2ax}{3bc}=\frac{2ax}{3}\cdot\frac{3bc}{2ax}=bc$$

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{ma}{m+n+p}=\frac{na}{m+n+p}$$

$$\frac{a+x}{a-x}:\frac{ax+xx}{ax-xx}=\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{x(a-x)}{x(a+x)}=1.$$

95.

Folgende Buchstaben-Ausdrücke wird ein Geübterer allein zu reduzieren wissen:

1) $a+2b-5+a$; 2) $a-(+b)$; 3) $a-(-b)$; 4) $-a\cdot-b$;

5) $-a\cdot-1$; 6) $a\cdot\frac{b}{2}\cdot 4$; 7) $3a\cdot 4b\cdot\frac{2}{3}c$; 8) $\frac{3}{4}ax\cdot\frac{2}{3}by$;

9) $\frac{4}{9}tz\cdot 3x\cdot\frac{3}{2}$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{-a}{b}$; 12) $\frac{a}{-b}$;

13) $\frac{-a}{-b}$; 14) $\frac{x}{x}$; 15) $\frac{-x}{x}$; 16) $\frac{2a}{2b}$;

17) $\frac{2x}{x}$; 18) $\frac{x}{2x}$; 19) $\frac{3axyy}{9axy}$; 20) $\frac{6abb}{4bc}$;

21) $\frac{a+y}{a+y}$; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{\frac{2}{3}abb}{\frac{3}{4}aab}$; 24) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$;

25) $ax+6ax-8ax+5bx$; 26) $\frac{1}{3}ay-\frac{2}{3}ay+ay$;

27) $2ax-5by-16-(ax-16+5by)$; 28) $(a+b)(a+b)$;

29) $\frac{2}{3}atx-\frac{2}{3}bzz-(-3atx+\frac{3}{5}bzz)$; 30) $(ax+by)(ax-by)$;

31) $(a+b+c)(a+b-c)$; 32) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$;

33) $6aab-12abc+3ab$; 34) $x+mx+nx+px$;

35) $\frac{m}{2nx}\cdot\frac{n}{3m}$; 36) $\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{a-x}{a+x}$; 37) $\frac{aa-bb}{a-b}$;

38) $\frac{aa-bb}{a+b}$; 39) $\frac{ay+yx}{3abx+3bxx}$; 40) $\frac{2ay-5by}{4axy-10bxy}$;

41) $\frac{a+x}{3}+\frac{a+x}{3}$; 42) $\frac{a}{b}:\frac{1}{c}$; 43) $\frac{a}{x}:\frac{2x}{y}$;

44) $7ax:\frac{14ax}{5by}$; 45) $\frac{a-x}{a+x}:\frac{aa-xx}{ax+xx}$;

46) $\frac{a(b-c)}{2}-\frac{b(a-c)}{2}$; 47) $\frac{100a+ap}{100}:\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

48) $\frac{az+bc}{az}-\frac{bc+xz}{az}$; 49) $\frac{16a-5b}{4b}-\frac{12a-2b}{3b}$;

50) $\frac{2x}{2y-c}\cdot\left(\frac{y+c}{3}-\frac{c}{2}\right)$; 51) $\frac{x}{a-\frac{ac}{x+c}}$;

52) $\frac{1-\frac{aa}{xx}}{\frac{1}{x}-\frac{a}{xx}}$; 53) $\frac{a+\frac{x-a}{1+ax}}{1-\frac{a(x-a)}{1+ax}}$;

* 54) $\left(\left[a-\frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\cdot\frac{n-m}{n}+mb\right):\frac{a}{x}$

* 55) $\left(\left[\frac{1+\frac{aa-xx}{aa+xx}}{1-\frac{aa-xx}{aa+xx}}+1\right]\cdot\frac{1}{1+\frac{aa}{xx}}+\frac{aa-xx}{a-x}\right)\frac{a}{1+a+x}$.

* 56) $\left(\frac{\left[\frac{(a-1)(ax-bx)}{x-a}+c\right](a-x)}{a(b+c-a)}+\frac{(a-x)}{a}\right)\cdot\frac{aa+ax}{2(aa-xx)}$

Man findet: 1) $2(a+b)-5$; 2) $a-b$; 3) $a+b$;
4) ab; 5) a; 6) $2ab$; 7) $8abc$;
8) $\frac{abxy}{2}$; 9) $2txz$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $-\frac{a}{b}$;
12) $-\frac{a}{b}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) -1;
16) $\frac{a}{b}$; 17) 2; 18) $\frac{1}{2}$; 19) $\frac{y}{3}$;
20) $\frac{3ab}{2c}$; 21) 1; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{8b}{9a}$;

24) $\frac{a+b}{x}$; 25) $5bx - ax = (5b - a)x$; 26) $\frac{2}{3}ay$;

27) $ax - 10by$; 28) $aa + 2ab + bb$;

29) $\frac{11atx}{3} - \frac{19bzz}{15}$; 30) $aaxx - bbyy$;

31) $aa + 2ab + bb - cc$; 32) $\frac{xx}{4} - \frac{yy}{9}$;

33) $3ab(2a - 4c + 1)$; 34) $(1 + m + n + p)x$;

35) $\frac{1}{6x}$; 36) 1; 37) $a + b$;

38) $a - b$; 39) $\frac{y}{3bx}$; 40) $\frac{1}{2x}$;

41) $\frac{2}{3}(a + x)$; 42) $\frac{ac}{b}$; 43) $\frac{ay}{2xx}$;

44) $\frac{5by}{2}$; 45) $\frac{x}{a+x}$; 46) $\frac{c(b-a)}{2}$; 47) a;

48) $\frac{a-x}{a}$; 49) $-\frac{7}{12}$; 50) $\frac{x}{3}$; 51) $\frac{x+c}{a}$;

52) $a + x$; 53) x; 54) x; 55) a; 56) 1.