Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Achtes Buch. Von den Verhältniszahlen und deren Gebrauch

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Achtes Buch.

Von den Verhältniszahlen und deren Gebrauch.

65.

Bei manchen mathematischen Untersuchungen braucht man nicht die wirkliche Gröſse der Dinge, welche der Rechnung unterworfen werden, sondern nur deren Verhältnis zu kennen, d. h. nur zu wissen, wieviel mal so groſs oder klein die eine Gröſse ist, als die andere. Dieses Gröſsen-Verhältnis kann also dadurch dargestellt werden, indem man statt der Gröſsen solche Zahlen setzt, welche, durcheinander dividiert, denselben Quotienten geben, als die Gröſsen, worauf sie sich beziehen. Hat z. B. eine Person A 200 Thlr., eine andere Person B 600 Thlr. Vermögen, so kann man sagen, die Vermögensumstände der beiden Personen A und B verhalten sich, der Gröſse nach, gerade so zu einander, wie die beiden Zahlen 2 und 6, oder wie man es wohl auszudrücken pflegt, wie $2:6$ (lies: wie 2 zu 6, das Kolon steht hier statt der Präposition zu und nicht als Divisionszeichen). Ebenso kann man auch sagen, indem man die beiden Verhältniszahlen 2 und 6 mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder dividiert, wie $1:3$; wie $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$; wie $100:300$ &c. &c., indem der Erklärung gemäſs, je zwei dieser Verhältniszahlen, durcheinander dividiert, denselben Quotient geben, als die beiden Gröſsen 200 Thlr. und 600 Thlr., worauf sie sich beziehen.

Verhalten sich z. B. die Einwohnerzahlen der vier Städte A, B, C, D, wie die Zahlen 3, 2, 6, 4, oder wie $3:2:6:4$, so verhalten sie sich auch, indem man alle diese Verhältniszahlen beliebige male so klein oder so groſs nimmt (durch 3, 2, 6, 4 dividiert),

$$\begin{array}{rl} & \text{A, B, C, D,} \\ \text{wie:} & 3:2:6:4 \\ \text{oder auch wie:} & 1:\frac{2}{3}:2:\frac{4}{3} \\ \text{wie:} & \frac{3}{2}:1:3:2 \\ \text{wie:} & \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:1:\frac{2}{3} \\ \text{wie:} & \frac{3}{4}:\frac{1}{2}:\frac{3}{2}:1 \end{array}$$

z. B. die Einwohnerzahl von A verhält sich zu der von C, wie $3:6$, oder $1:2$, oder $\frac{3}{2}:3$, $\frac{1}{2}:1$ &c., und die von A verhält sich zu der von D, wie $3:4$; $1:\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$ &c.

66.

Aus den durch Zahlen dargestellten Verhältnissen mehrerer Gröſsen kann man (wozu auch eigentlich die Verhältniszahlen dienen) sogleich entscheiden, wieviel mal so grofs oder so klein die eine Gröfse ist, als die andere, so sieht man z. B. aus der obigen ersten Reihe, dafs B $\frac{2}{3}$mal, C 2mal, D $\frac{4}{3}$mal soviel Einwohner hat, als A; aus der dritten Reihe, dafs A $\frac{3}{2}$mal, C 3mal, D 2mal soviel Einwohner hat, als B &c.

Wenn also die Verhältnisse mehrerer Gröfsen gegeben, und eine von den Gröfsen bekannt ist, so kann man die übrigen leicht berechnen, indem man, der deutlichen Übersicht wegen, die Zahlen, welche die Verhältnisse darstellen, erst so einrichtet, dafs diejenige, auf welche sich die bekannte Gröfse bezieht, zur Einheit wird, und also zuvor alle Verhältniszahlen durch diese dividiert (vgl. § 322).

Würde z. B. gesagt, die Bevölkerung der vier Städte A, B, C, D verhalten sich der Reihe nach, wie 3 : 2 : 6 : 4; A hat 6000 Einwohner, und, nach der Bevölkerung von B, C, D gefragt, so würde man so schliefsen: da sich die Bevölkerungen von

A, B, C, D verhalten
wie: 3, 2, 6, 4, so verhalten sie sich auch (durch 3 dividiert)
wie: 1, $\frac{2}{3}$, 2, $\frac{4}{3}$,
folglich mufs, da A 6000 = 6000 Einw. hat,
B $\frac{2}{3} \cdot 6000 =$ 4000 Einw.,
C $2 \cdot 6000 =$ 12000 Einw.,
D $\frac{4}{3} \cdot 6000 =$ 8000 Einw. haben.

Aufgabe. Das Alter einer Person A verhält sich zu dem einer Person B wie 2:5, A ist 20 Jahre alt, wie alt ist B?

Antwort. $\frac{5}{2}$ .20 = 50 Jahre.

67.

Oftmals drückt man die Verhältniszahlen auch so aus, dafs die kleinste von ihnen 100 wird, wenn man nämlich wissen will, um wieviel Prozent die Gröfsen verschieden sind. Der Preufs. Thlr. verhielt sich zum alten Hamb. Thlr. wie 5 : 6, oder mit $\frac{100}{5}$ multipliziert, wie 100 : 120, d. h. der Hamb. Thlr. war um 20 % besser, als der Preufs., oder dieser um $16\frac{2}{3}$ % schlechter, als jener. Die Brabanter Elle war um 20 % gröfser, als die Schlesische, heifst soviel, als: 100 Brabanter Ellen = 120 Schlesische Ellen, oder die Brabanter Elle verhält sich zur Schlesischen, wie 120 : 100.

68.

Gebrauch der Verhältniszahlen, um darnach eine Gröfse in verhältnismäfsige Teile zu teilen. Es genügt, sich einen Fall dieser Art recht klar gemacht zu haben.

Soll z. B. die Zahl 72 in drei solche Teile geteilt werden, welche sich der Gröfse nach wie 2, 4, 6 verhalten, so *findet man diese Teile, wenn man die zu teilende Gröfse erst durch die Summe der Verhältniszahlen dividiert* und den Quotienten mit jeder Verhältniszahl multipliziert. Denn dividiert man 72 durch $2 + 4 + 6 = 12$, so erhält man den zwölften Teil von 72. Wird nun dieser zwölfte Teil 2mal, 4mal und 6mal genommen, so verhalten sich die Produkte nicht allein wie die gegebenen Zahlen, 2, 4, 6, sondern geben auch addiert, als Probe der richtigen Rechnung, alle zwölf Teile ($\frac{12}{12}$) der ganzen Gröfse wieder. Der eine Teil ist also

$$= 2 \cdot \frac{72}{2+4+6} = 2 \cdot 6 = 12, \text{ d. i. } 2 \text{ Zwölftel von } 72$$

$$\text{der 2te Teil} \quad = 4 \cdot 6 = 24, \text{ d. i. } 4 \text{ „ „ „}$$

$$\text{der 3te Teil} \quad = 6 \cdot 6 = 36, \text{ d. i. } 6 \text{ „ „ „}$$

$$\text{Probe-Summe} = 72, \text{ d. i. } 12 \text{ Zwölftel von } 72.$$

Aufgaben. 1) An eine für 3000 ℳ verkaufte Konkursmasse, von welcher, nachdem die Gerichte, die Advokaten, Curator massae &c. für die den Gläubigern geleisteten Dienste, den ihnen als privilegiati gebührenden Teil vorabgenommen hatten, — noch 300 ℳ übrig blieben, hat samt Zinsen und Kosten zu fordern: A 1800 ℳ, B 150 ℳ, C 150 ℳ, D 900 ℳ; wieviel wird jeder Gläubiger vom Reste erhalten, wenn derselbe nach dem Verhältnis der Forderungen verteilt wird?

Antwort. A 180 ℳ, B 15 ℳ, C 15 ℳ, D 90 ℳ.

2) Vier Kaufleute unternehmen ein Handelsgeschäft, zu welchem A 600 ℳ, B 750 ℳ, C 1200 ℳ und D 1050 ℳ hergiebt. Nach beendigtem Geschäft findet sich ein Gewinn von 1500 ℳ, wieviel wird jeder davon erhalten?

Antwort. A 250 ℳ, B 312½ ℳ, C 500 ℳ und D 437½ ℳ.

Anmerkung. Dafs (wenn weiter keine juridischen Gründe, als Naturrecht und Billigkeit vorhanden sind) unter gleichbeteiligten Gläubigern eine Konkursmasse nach den Verhältnissen der Forderungen; ein Gewinn oder Verlust bei einem Geschäft nach Verhältnis der Einlagen verteilt werden müsse, ist leicht zu begreifen. So mufs z. B. in der vorhergehenden 1sten Aufgabe A wegen der 12mal so grofsen Forderung auch 12mal soviel haben als B; denn man kann sich statt A erst 12 andere Personen, jede mit 150 ℳ Forderung, und diese dann auf eine einzige Person übertragen denken &c.

Bei der zweiten Aufgabe ist jedoch zu bemerken, dafs, wenn die Einlagen nicht gleich lange stehen, wenn etwa nach Verlauf einer Zeit (ohne dafs der Zustand des Geschäfts untersucht wird) Teilnehmer mit ihren Einlagen aus- oder eintreten, sich aber verbindlich machen, auch den bei Beendigung des Geschäfts sich ergebenden Verlust zu tragen, alsdann auch die Zeiten mit in Rechnung gezogen, und nach dem zusammengesetzten Verhältnisse der Einlagen und Zeiten geteilt werden mufs. Die Richtigkeit dieses Schlusses ist folgendermafsen leichter zu begreifen:

Angenommen: drei Personen unternehmen ein Geschäft. A giebt dazu 6 ℳ auf 2 Monate, B 12 ℳ auf 4 M., C 18 ℳ auf 6 M.: das Geschäft soll nach 6 Monaten beendigt sein und der Gewinn von 42 ℳ gehörig verteilt werden. Man urteile so: Ob A 6 ℳ auf 2 Monate, oder $2 . 6 = 12$ ℳ auf 1 M. giebt, das ist vollkommen einerlei, denn man denke sich nur, A habe seine 6 ℳ nach einem Monat zurückgenommen, gleich darauf aber wieder eingesetzt, was dann offenbar ebensoviel ist, als wenn zwei andere Personen, jede mit 6 ℳ auf einen Monat nacheinander oder auch zugleich, und also statt ihrer eine einzige Person A mit 12 ℳ auf einen Monat eingetreten wäre. Ebenso ist es einerlei, ob B 12 ℳ auf 4 M. oder $4 . 12 = 48$ ℳ auf 1 M., ob C 18 ℳ auf 6 M. oder $6 . 18 = 108$ ℳ auf 1 M. giebt &c. Hierdurch ist also die Zeit bei allen auf die Einheit zurückgeführt, und die ausgesprochene Regel, dafs man die Gewinne oder Verluste nach den Produkten aus den Einlagen mit den Zeiten teilen mufs, erklärt. Man hat also:

A	6 ℳ	auf 2 Monate	=	12 ℳ	auf 1 Monat
B	12 „	„ 4 „	=	48 „	„ 1 „
C	18 „	„ 6 „	=	108 „	„ 1 „
Summe der Verhältnis-Zahlen			=	168.	

Folglich erhält vom Gewinne:

$$
\begin{aligned}
A,\ 12 . \tfrac{42}{168} &= 12 . \tfrac{1}{4} = 3 \text{ ℳ} \\
B,\ 48 . \tfrac{1}{4} &= 12 \text{ „} \\
C,\ 108 . \tfrac{1}{4} &= 27 \text{ „} \\
\hline
\text{Probe-Summe } & 42 \text{ ℳ}
\end{aligned}
$$

Aufgabe. Zu einem Handel, in welchem 200 ℳ verloren wurden, hat A 200 ℳ auf 5 Mon., B 500 auf 2 Mon., C 300 auf 4 Mon., D 600 auf 3 Mon. hergegeben; wieviel mufs jeder vom Verlust tragen?

Antwort. A, $1000 . \frac{1}{25} = 40$ ℳ; B, 40 ℳ; C, 48 ℳ; D, 72 ℳ.

69.

Gebrauch der Verhältniszahlen bei Mischungen, wo die Bestandteile ein gegebenes Verhältnis zu einander haben müssen. Aufgaben dieser Art, welche in der praktischen Chemie &c. vorkommen, gehören eigentlich ganz zu denen des vorhergehenden Paragraphen. Ein einziges Beispiel wird zur Erläuterung genügen.

Aufgabe. Das gewöhnliche Schiefspulver ist eine Mischung aus Salpeter, Schwefel und Kohle, welche Bestandteile sich dem Gewichte nach wie 16, 2, 3 verhalten (d. h. auf je 16 Gewichtsteile Salpeter müssen 2 solche Gewichtsteile Schwefel und 3 solche Gewichtsteile Kohle genommen werden); wieviel ist nun von jedem Bestandteil zu 1470 kg Pulver erforderlich?

Auflösung. So oft $16 + 2 + 3 = 21$ in 1470 enthalten ist, so oft mufs jeder Bestandteil genommen werden; folglich ist zu 1470 kg Pulver erforderlich:

$$
\begin{aligned}
70 . 16 &= 1120 \text{ kg Salpeter,} \\
70 . \ 2 &= 140 \text{ kg Schwefel,} \\
70 . \ 3 &= 210 \text{ kg Kohle.} \\
\hline
\text{Probe-Summe } & 1470 \text{ kg Pulver.}
\end{aligned}
$$

Will man wissen, wieviel Prozent eine Mischung von jedem ihrer Bestandteile enthält, d. h. wieviel von jedem Bestandteile in einer Mischung enthalten ist, welche man sich dem Gewichte (oder Mafse) nach in 100 gleiche Teile denkt, so mufs man mit der Summe der Verhältniszahlen in 100 dividieren und mit dem Quotienten jede multiplizieren. Zu 100 Teilen Pulver ist z. B. erforderlich:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{100}{21} . 16 &= 76\tfrac{4}{21} \text{ Teile oder } 76\tfrac{4}{21}\ \% \text{ Salpeter,} \\
\tfrac{100}{21} . \ 2 &= 9\tfrac{11}{21} \text{ Teile Schwefel} = 9\tfrac{11}{21}\ \%, \\
\tfrac{100}{21} . \ 3 &= 14\tfrac{6}{21} \text{ Teile Kohle} = 14\tfrac{6}{21}\ \%. \\
\hline
\text{Summe } & 100 \text{ Teile Pulver.}
\end{aligned}
$$