Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Siebentes Buch. Von den geraden, umgekehrten und zusammengesetzten Verhältnissen (Regel de tri.)

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Siebentes Buch.

Von den geraden, umgekehrten und zusammengesetzten Verhältnissen. (Regel de tri.)

62.

Gerades Verhältnis. Wenn zwei Gröſsen so von einander abhängen, daſs, wenn die eine sich ändert und einigemal so groſs oder so klein als ursprünglich wird, auch die andere ebensoviel mal so groſs oder so klein genommen werden muſs, so sagt man: beide Gröſsen stehen im geraden Verhältnis zu einander. So steht z. B. die Menge einer Ware mit ihrem Wert in geradem Verhältnis, denn für 2-, 3mal soviel Ware muſs man auch einen 2-, 3mal so groſsen Preis geben, für $\frac{1}{3}$ der Ware auch nur $\frac{1}{3}$ des Preises &c.

Aufgaben dieser Art, bei welchen nämlich die Änderung einer Gröſse gegeben ist, und die Änderung der andern abhängigen Gröſse gesucht wird, kommen im gemeinen Leben gerade am häufigsten vor. Schluſs und Ansatz ist aber bei allen derselbe, und wer nur eine dieser leichtesten Aufgaben gehörig verstanden hat, kann auch alle übrigen lösen.

Beispiel. Wenn 5 Meter Tuch 54 Mark kosten, wie teuer kommen dann im gleichen Verhältnis 100 Meter?

Erste Auflösung. Für je 5 Meter müssen 54 Mark bezahlt werden, so oft also die als Maſsstab gegebene Gröſse, 5 Meter, in der sogenannten Fragezahl (d. h. die, nach deren Wert gefragt wird) enthalten ist, so oft muſs man 54 Mark setzen, daher ist der gesuchte Wert

$$= \frac{100\,\text{Meter}}{5\,\text{Meter}} \cdot 54\,\mathcal{M} = \frac{100}{5} \cdot 54\,\mathcal{M} = 20 . 54\,\mathcal{M} = 1080\,\mathcal{M}\ (\S\ 61, 2).$$

Zweite Auflösung. Man kann auch die als Maſsstab gegebene Gröſse erst auf die wirkliche Einheit reduzieren und so schlieſsen: da 5 Meter 54 Mark kosten, so kostet 1 Meter, nämlich der 5te Teil, $\frac{54}{5}$ Mark, und mithin ist der Preis für 100 Meter:

$$= 100 \cdot \frac{54}{5}\,\mathcal{M} = 1080\,\mathcal{M}\ (\S\ 60).$$

Beide Schluſsformen lassen sich auch in die leicht zu behaltende Regel, den sogenannten Dreisatz, oder Regel de tri, bringen. Man sage nämlich:

5 Meter geben 54 Mark, wieviel 100 Meter?

und multipliziere die beiden hinteren Glieder miteinander und dividiere das Produkt durch das erste Glied, indem man hierbei die beiden ein- und gleichnamigen äuſseren Glieder als unbenannte Zahlen betrachtet. Deutet man diese Operationen vorläufig nur an, so kann man, der leichtern Rechnung wegen, die etwaigen Faktoren, welche Dividend und Divisor gemeinschaftlich haben, erst gegeneinander aufheben.

Daſs die beiden äuſseren Glieder, im Fall sie mehrnamig sind, erst auf einnamige reduziert werden müssen, entweder auf die niedrigste Einheit oder (was in der Regel kürzere Rechnung giebt) auf die höchste Einheit, indem man niedere als Bruchteile der höhern ausdrückt, folgt schon aus § 61, 2. Wenn übrigens zwei Gröſsen im geraden Verhältnis zueinander stehen, so müssen immer die beiden gleichlautenden Steigerungen: je mehr — je mehr, oder je weniger — je weniger stattfinden, wodurch dieses gerade Verhältnis leicht von dem im folgenden Paragraph zu erwähnenden umgekehrten Verhältnis zu unterscheiden ist.

Aufgaben. 1) 100 ℳ bringen in einem Jahre 5 ℳ Zinsen, wieviel Zinsen bringt hiernach ein Kapital von 625 ℳ in einem Jahre?

Antwort. $\frac{625}{100} . 5 = 31\frac{1}{4}$ ℳ (je mehr Kapital, je mehr Zinsen, so oft 100 in 625 enthalten ist, so oft 5 ℳ; oder 100 geben 5, wieviel 625?)

2) Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 1065 ℳ 25 ₰, welches ein Jahr zu 5 Prozent steht (Prozent, für hundert)?

Antwort. 53 ℳ $26\frac{1}{4}$ ₰.

3) 14560 ℳ bringen in einem Jahre 364 ℳ Zinsen, zu wieviel Prozent (%) ist es belegt, d. h. wieviel Zinsen geben 100 ℳ?

Antwort. $\frac{100}{14560} . 364 = 2\frac{1}{2}$ %.

Bei der Zinsenrechnung wird immer eine gewisse Zeit als Einheit angenommen, z. B. 1 Jahr, $\frac{1}{2}$ Jahr, 1 Monat &c. Wird nun ein Kapital früher oder später bezahlt, so müssen die nach der festgesetzten Zeit-Einheit fälligen Zinsen noch soviel mal so groſs oder so klein genommen werden, als die verflossene Zeit so groſs oder so klein ist, als die festgesetzte Zeit-Einheit. Beispiele:

4) Wieviel Zinsen trägt ein Kapital von 600 ℳ in 3 Jahren, wenn es zu 4% jährlich belegt ist?

Antwort. $\frac{600}{100} . 4 . 3 = 72$ ℳ.

5) Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 34,50 ℳ in 6 Jahren 3 Monaten zu $2\frac{1}{3}$ %?

Antwort. $\frac{34{,}50}{100} . 2\frac{1}{3} . 6\frac{1}{4} = \frac{69}{2 . 100} . \frac{7}{3} . \frac{25}{4} = \frac{23 . 7}{2 . 4 . 4} = \frac{161}{32} = 5\frac{1}{32}$ ℳ.

6) Wieviel betragen die 14tägigen Zinsen von 73,75 ℳ zu 5% jährlich?

Antwort. $\frac{73{,}75}{100} \cdot 5 \cdot \frac{14}{365}$ ℳ $= 14{,}144$ ₰.

Wenn ein ohne Zinsen zahlbares Kapital, Wechsel &c., vor dem Verfalltage entrichtet wird, so muſs dem Inhaber für den entbehrten Nutzen ein gewisser nach einer festgesetzten Zeit-Einheit prozentweise bestimmter Abzug gestattet werden. Beispiel:

7) Ein erst nach 4 Wochen zahlbarer Wechsel von 600 ℳ wird sogleich mit 8 % (jährlichem) Abzug (Diskont, Escompte, Rabatt) bezahlt, wieviel beträgt der Abzug?

Antwort. $\frac{600}{100} . 8 . \frac{4}{52} = \frac{6 . 8}{13} = 3\frac{9}{13}$ ℳ.

63.

U m g e k e h r t e s V e r h ä l t n i s. Wenn zwei Gröſsen so voneinander abhängen, daſs, wenn die eine einigemal so groſs oder so klein wird, die andere gerade u m g e k e h r t soviel mal so klein oder so groſs genommen werden muſs, so sagt man: beide Gröſsen stehen im u m g e k e h r t e n V e r h ä l t n i s s e zu einander. In diesem Fall müssen immer die e n t g e g e n g e s e t z t e n Steigerungen stattfinden: j e m e h r — j e w e n i g e r, oder j e w e n i g e r — j e m e h r, wodurch dies umgekehrte Verhältnis leicht zu erkennen ist.

Wenn z. E. 4 Arbeiter 6 Tage zu einer gewissen Arbeit brauchen, so werden 2mal soviel oder 8 Arbeiter nicht auch 2mal soviel Zeit, sondern gerade umgekehrt nur $\frac{1}{2}$mal soviel Zeit dazu brauchen &c.; denn je mehr Arbeiter, je weniger Zeit, d. h. die Zahl der Arbeiter steht mit der Zeit, welche zur Arbeit erforderlich ist, i m u m g e k e h r t e n V e r h ä l t n i s. Ebenso: wenn 4 Arbeiter in 6 Tagen eine gewisse Arbeit verfertigen können, und nun gefragt wird: wieviel Arbeiter angestellt werden müssen, um dieselbe Arbeit in zwei Tagen zu vollenden, so muſs man offenbar schlieſsen, soviel mal die Zeit so klein ist, soviel mal soviel Arbeiter müssen angestellt werden. Man muſs nämlich bei allen Aufgaben dieser Art die Fragezahl durch die als Maſsstab gegebene Gröſse dividieren, und mit diesem Quotienten die dritte abzuändernde Gröſse dividieren, oder, was dasselbe ist, mit dem u m g e k e h r t e n Quotienten multiplizieren, so daſs also die Fragezahl hier immer als Divisor gebraucht wird. Nach der Regel de tri angesetzt, muſs man die beiden ersten Glieder miteinander multiplizieren und durch das dritte Glied dividieren, mithin die beim geraden Verhältnis gegebene Regel umkehren, weshalb sie auch hier „umgekehrte Regel de tri" genannt wird.

Aufgaben. 1) Sechs Arbeiter fertigen eine Arbeit in 3 Tagen, wieviel Arbeiter müssen angestellt werden, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Antwort. $\frac{3}{2} . 6 = 9$ Arbeiter.

Oder: 3 Tage erfordern 6 Arbeiter, wieviel 2 Tage?

$$\begin{array}{l} \underline{3 . 6} \\ \underline{18 : 2} \\ 9 \text{ Arbeiter.} \end{array}$$

2) 6 Mann brauchen zu einer Arbeit 7 Stunden, wieviel Stunden brauchen hierzu 8 Arbeiter?

Antwort. $\frac{6}{8} . 7 = 5\frac{1}{4}$ Stunden. (Je mehr Arbeiter, je weniger Zeit.)

3) Von einem $\frac{11}{4}$ breiten Tuche braucht man $3\frac{1}{2}$ Meter zu einem Kleide, wieviel Meter braucht man von einem Tuche, welches $\frac{9}{4}$ breit ist?

Antwort. Soviel mal weniger breit, soviel mal mehr Tuch, daher:

$$\frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} \cdot 3\tfrac{1}{2} = \frac{11}{9} \cdot \frac{7}{2} = 4{,}28 \text{ Meter.}$$

4) In einer Festung befinden sich 600 Mann, welche auf 4 Monate so mit Brot versorgt sind, dafs jeder täglich 1 kg erhalten kann, wieviel kg Brot aber wird jeder erhalten können, wenn zu den 600 Mann noch 400 Mann hinzukommen?

Antwort. $\frac{600}{1000} \cdot 1 \text{ kg} = \frac{3}{5}$ kg.

64.

Zusammengesetzte Verhältnisse. Eine Gröfse kann von mehreren andern so abhängen, dafs sie mit jeder derselben, einzeln genommen, im geraden oder umgekehrten, und mit allen zugleich im zusammengesetzten Verhältnis steht.

Wenn z. E. 6 Mauerleute in 7 Tagen eine Mauer aufführen, welche 4 Stein dick, 90 cm hoch und 120 m lang ist, und nun gefragt wird, wieviel Zeit 12 Mauerleute nach diesem als bekannt gegebenen Fall nötig haben, um eine Mauer aufzuführen, welche 2 Stein dick, 2,70 m hoch und 60 m lang ist, so kann man diese leichte Aufgabe, sowie alle andern Aufgaben dieser Art, auf folgende Weise behandeln.

Man stelle, der leichtern Übersicht wegen, den bekannten Fall erst so unter den unbekannten, dafs gleichnamige Gröfsen übereinander stehen, nämlich:

12 Mauerl.,	wieviel Zeit?	2 St. dick,	270cm hoch,	60m lang	(unbek. Fall),
6 〃	7 Tage,	4 〃 〃	90 〃 〃	120 〃 〃	(bek. Fall).

Hier steht nun die gesuchte Zeit in der obersten Reihe mit der Anzahl der Mauerleute im umgekehrten, mit jeder der übrigen Gröfsen aber im geraden Verhältnis, denn je mehr Mauerleute, je weniger Zeit; je weniger dick, je weniger Zeit; je höher, je mehr Zeit &c.

Man untersuche nun erst, wieviel mal so grofs oder so klein die Zeit genommen werden mufs, wenn blofs ein Umstand, z. B. die Anzahl der Arbeiter verschieden, die übrigen aber, wie Dicke, Höhe &c. vorläufig noch in beiden Fällen gleich wären. Wegen der vergröfserten Anzahl Arbeiter braucht man, die übrigen Umstände gleich gesetzt, nur $\frac{6}{12}$mal soviel Zeit; jetzt ziehe man noch einen andern ungleichen Umstand, z. B. die Dicke, in Rechnung. Wegen verringerter Dicke allein ist nur $\frac{2}{4}$mal, also wegen beider ungleichen Umstände nur $\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{4}$mal soviel Zeit nötig. Wegen vergröfserter Höhe ist aber $\frac{9}{3}$mal soviel Zeit erforderlich; die vorhin wegen gröfserer Anzahl Arbeiter und geringerer Dicke nur $\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{4}$mal zu nehmende Zeit mufs also wieder $\frac{9}{3}$mal so grofs, also $\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{9}{3}$mal genommen werden, weil aber endlich auch die Mauer nicht so lang sein soll, so ist aus dieser Ursache die ebengefundene Zeit nur $\frac{20}{40}$mal erforderlich. Die gesuchte Zeit ist demnach

$$= \frac{6}{12} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{20}{40} \cdot 7 \text{ Tage} = 2\tfrac{5}{8} \text{ Tage.}$$

Die ganze Rechnung kommt also immer auf eine bloſse Multiplikation mehrerer Brüche (Verhältnisse) miteinander zurück. Man muſs nämlich die einzelnen Verhältnisse miteinander multiplizieren und mit dem daraus gebildeten Produkte, welches ein zusammengesetztes Verhältnis genannt wird, die Gröſse multiplizieren, deren Veränderung man sucht.

Aufgaben. 1) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden gearbeitet, einen Graben von 40 Meter Länge machen können, wie lang muſs hiernach ein Graben werden, welchen (unter übrigens gleichen Umständen, d. h. bei gleicher Breite und Tiefe &c.) 4 Mann in 18 Tagen, täglich 10 Stunden, verfertigen?

Antwort. $66\frac{2}{3}$ Meter = 66,67 m

$$\begin{array}{lllll} 4\text{ M.} & 18\text{ T.} & 10\text{ St.} & \text{wie lang?} & \\ 6 \text{ „} & 8 \text{ „} & 9 \text{ „} & 40\text{ Meter} & \text{(alle Verhältnisse sind gerade)} \\ \hline \frac{4}{6} \cdot & \frac{18}{8} \cdot & \frac{10}{9} \cdot & 40\text{ Meter} = 66\frac{2}{3}\text{ Meter.} & \end{array}$$

2) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden arbeitend, einen Wall von 40 Meter Länge aufführen, wieviel Tage brauchen dann 4 Mann, die täglich 10 Stunden arbeiten, um einen Wall von $66\frac{2}{3}$ Meter Länge aufzuführen?

Antwort. 18 Tage.

$$\begin{array}{lllll} 4\text{ M.} & \text{Tage?} & 10\text{ St.} & 200\text{ Meter} \\ 6 \text{ „} & 8 \text{ „} & 9 \text{ „} & 120 \text{ „} \\ \hline \frac{6}{4} \cdot & 8 \cdot & \frac{9}{10} \cdot & \frac{200}{120} = 18\text{ Tage} \end{array}$$

(je weniger Mannschaft, je mehr Zeit; je mehr Stunden täglich, je weniger Zeit; je länger, je mehr Zeit.)

3) 1500 Mann können sich hinsichtlich des Proviants 30 Tage in einer Festung halten, wenn jedem Manne täglich 1 kg Brot gereicht wird. Nun kommen aber noch 500 Mann dazu, und die ganze Mannschaft soll sich auf 24 Tage halten, wieviel Brot kann jetzt jeder täglich empfangen?

Antwort. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot 1 \text{ kg} = \frac{15}{16}$ kg.

4) Wenn 40 Weber in 7 Wochen, wöchentlich 6 Tage und täglich 12 Stunden arbeitend, 200 Stück Leinwand, jedes Stück 48 Meter lang und 100 Centimeter breit, verfertigen, wieviel Stück Leinwand werden, in gleichem Verhältnis, 60 Weber in 8 Wochen, wöchentlich 5 Tage und täglich 8 Stunden, verfertigen, wenn jedes Stück 36 Meter lang und 70 Centimeter breit sein soll?

Antwort. $\frac{60}{40} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{48}{36} \cdot \frac{100}{70} \cdot 200 = 362\frac{358}{441}$ Stück.