Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Viertes Buch. Von den gewöhnlichen (gemeinen) Brüchen

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Viertes Buch.

Von den gewöhnlichen (gemeinen) Brüchen.

31.

Um von der Gröfse einer Sache eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, mufs diese Gröfse mit einer gleichartigen, welche als Einheit dient, verglichen und ausgemessen werden (Vorbegr. I). Nun kann es sich aber häufig treffen, dafs die Einheit in der auszumessenden Gröfse nicht genaue Male enthalten ist, oder dafs, nachdem sie einigemal darin abgesetzt worden, noch ein Stück zu messen übrig bleibt, welches kleiner ist, als die Einheit. In diesem Fall bleibt dann kein anderes Mittel, als das übrig gebliebene Stück mit einer andern und zwar kleinern Einheit auszumessen. Diese zweite Einheit wird man aber nicht willkürlich annehmen, sondern, der einfachern Vorstellung wegen, von der erstern ableiten. Hat man nämlich eine deutliche Vorstellung von der Gröfse der zuerst angelegten Einheit, so hat man zugleich auch eine deutliche Vorstellung von einem jeden bestimmten Teil derselben. Läfst sich nun irgend ein bestimmter Teil der Einheit (z. B. der 3te, 8te, 100ste &c.) angeben, welcher genaue Male in dem überschüssigen Teil der auszumessenden Gröfse enthalten ist, so kann man diesen als die zweite Einheit nehmen. Weifs man dann, wie oft die gröfsere Einheit in der Gröfse und ebenso, wie oft die kleinere Einheit in dem überschüssigen Teil enthalten ist, so geben die Vorstellungen dieser beiden verschiedenen Einheiten und der daraus gebildeten Zahlen eine deutliche Vorstellung von der fraglichen Gröfse.

Von den beiden verschiedenen Einheiten kann man die erste schicklicherweise die ganze Einheit und die andere, als ein von dieser ganzen Einheit abgebrochener Teil, die Bruch-Einheit, und sonach die aus der ersten Einheit gebildete Zahl die ganze Zahl, und die aus der Bruch-Einheit gebildete Zahl die

Bruch-Zahl oder Bruch, und beiderlei Zahlen zusammen eine gemischte Zahl nennen. (Ein Bruch ist also insofern eine ganze Zahl, als er, wie diese, eine bestimmte Menge von Einheiten enthält, denn nur auf die Einheit bezieht sich das Wort Bruch.)

32.

Um diese verschiedenen Zahlen kurz und deutlich mit Ziffern bezeichnen zu können, hat man folgendes festgesetzt: Die ganze Einheit und die ganze Zahl wird wie gewöhnlich bezeichnet, die Bruch-Einheit aber dadurch, daſs man unter das Zeichen für die ganze Einheit einen wagerechten Strich zieht ($\frac{1}{}$), und unter diesen Strich diejenige Zahl setzt, welche angiebt, der wievielste Teil der gröſseren Einheit zur Bruch-Einheit genommen ist, der Bruch selbst dadurch, daſs man die Zahl, welche die Wiederholung der Bruch-Einheit angiebt oder zählt, über den Strich, statt des Einheitszeichens, setzt. Wäre z. E. der 8te Teil eines Meters in einer damit angemessenen Länge 5mal enthalten, so würde $\frac{1}{8}$ Meter die Bruch-Einheit und $\frac{5}{8}$ Meter die Bruchzahl darstellen.

Die Zahl, welche über dem Striche steht und die Anzahl der Bruch-Einheiten angiebt (zählt), heiſst der Zähler, die unter dem Striche stehende Zahl, welcher man beim Aussprechen die Endung tel anhängt, heiſst der Nenner des Bruchs. Beide Benennungen sind nicht unpassend. So ist z. E. im Bruche $\frac{5}{8}$ (lies: fünf Achtel) 5 der Zähler, 8 der Nenner und $\frac{1}{8}$ die Einheit; in $\frac{15}{34}$ ist $\frac{1}{34}$ die Einheit, 34 der Nenner und 15 der Zähler.

Eine gemischte Zahl wird dargestellt, indem man die Bruchzahl unmittelbar neben die ganze setzt, z. B. $7\frac{5}{8}$ (lies: sieben fünf Achtel) d. h. 7 ganze Einheiten und 5mal den 8ten Teil der ganzen Einheit (gleichbedeutend mit $7 + \frac{5}{8}$).

33.

Die Bezeichnung eines Bruchs (welche ursprünglich anders war) stimmt mit der Andeutung einer Division überein. Auch kann man immer eine angedeutete Division als einen Bruch und umgekehrt einen Bruch als eine angedeutete Division betrachten. Es ist z. B. gleichgültig, ob man sagt: $\frac{3}{4}$ kg heiſse so viel, als: dreimal den vierten Teil von einem Kilogramm oder einmal den vierten Teil von drei Kilogramm. Dies wird deutlicher, wenn man die benannte Einheit, 1 Kilogramm, in kleinere auflöst; so ist z. B. 1 kg = 1000 g, mithin 3 kg = 3 · 1000 gr = 3000 g. Ob man nun den 4ten Teil von 1000 g 3mal, oder den 4ten

Teil von 3000 g 1mal nimmt, das ist gleichgültig; $3 \cdot \frac{1000}{4} = \frac{3 \, . \, 1000}{4} = 750$. (§ 23.) Ebenso ist es einerlei, ob man sagt, $\frac{8}{4}$ heifse: 8 dividiert durch 4, oder acht Viertel &c.; denn jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{100}{100}$ &c., ist offenbar der Einheit gleich und daher sind auch 8 Viertel so viel als 2mal $\frac{4}{4}$, d. i. zwei Ganze.

34.

Man kann daher auch jede ganze Zahl in Bruchform mit beliebigem Nenner darstellen, wenn man die ganze Zahl erst mit dem Nenner multipliziert und dem Produkte den Nenner wieder unterschreibt. Soll z. E. die Zahl 7 als Bruch mit dem Nenner 4 oder 5 dargestellt werden, so ist $7 = \frac{4.7}{4} = \frac{28}{4}$; $7 = \frac{7.5}{5} = \frac{35}{5}$ &c. Ebenso kann man jede gemischte Zahl als eine einzige Bruchzahl darstellen, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruchs multipliziert, zum Produkte den Zähler addiert, und der Summe den Nenner wieder unterschreibt. Dies nennt man eine gemischte Zahl einrichten. So ist z. B. $7\frac{5}{8} = \frac{8.7+5}{8} = \frac{61}{8}$; $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $200\frac{11}{13} = \frac{2611}{13}$ &c. Übrigens werden alle Brüche, deren Zähler gröfser ist, als der Nenner, wie $\frac{61}{8}$, $\frac{8}{3}$ &c., unechte, und die, deren Zähler kleiner ist, als der Nenner, wie $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ &c., echte Brüche genannt.

35.

Die Fälle, wo man bei der Ausmessung und Vergleichung der Gröfsen auf Brüche kommt, sind folgende zwei:

1) wenn die auszumessende Gröfse eine stetige (kontinuierliche) ist, und die Einheit nicht genau darin pafst. Da dieser Fall aber alle Augenblicke vorkommt, so ist schon im Voraus dafür gesorgt, dafs die meisten Einheiten, welche im gewöhnlichen Leben gebraucht werden, in die erforderlichen Unterabteilungen geteilt sind. So hat man z. E. von der Gewichts-Einheit, Kilogramm genannt, auch zugleich den 10ten, 100sten, 1000sten &c. Teil; von der Längen-Einheit Meter, den 10ten, 100sten Teil &c. Einige dieser kleineren Bruch-Einheiten haben besondere Namen erhalten. Umgekehrt können die kleineren Einheiten, ohne ihre besondere Namen nötig zu haben, wieder als Bruchteile einer gröfseren Einheit dargestellt werden, wenn man nur weifs, wieviel kleinere Einheiten auf die gröfsere gehen.

2) Bei der Vergleichung, Ausmessung und Teilung der unstetigen Gröfsen durch Division kommt man ebenfalls auf Brüche.

Da man bei der Division allemal untersucht, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, so kann oder mufs man den Divisor immer als eine aus mehreren gleichen Teilen zusammengesetzte Einheit betrachten, und dann folgende drei Fälle unterscheiden: erstens, fragt man: wieviel mal so grofs eine Gröfse ist, als eine andere gleichartige, so ist der Quotient allemal eine unbenannte Zahl, die blofs von dem Verhältnis der beiden verglichenen Gröfsen, nicht aber von deren wirklichen Gröfse oder Benennung abhängt. Fragt man z. E.: wieviel mal so grofs 20 ist, als 4, 20 *Rp.* so grofs als 4 *Rp.*; 80 m so grofs, als 16 m &c., so ist die Antwort bei allen: 5mal. Ist der Divisor nicht genaue Male im Dividend enthalten, so mufs man den Rest des Dividend mit untergelegtem Divisor den ganzen Einheiten des Quotienten als Bruch anhängen; fragt man z. B.: wieviel mal so grofs ist 23 als 4, so ist die Antwort: der Mafsstab 4 ist im Dividend 5 ganze Mal, und in dem Reste 3 ist der 4te Teil des Mafsstabes (1) noch 3mal enthalten, nämlich $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$, mithin ist 23 gerade $5\frac{3}{4}$ mal so grofs als 4; ebenso ist $\frac{99}{32} = 3\frac{3}{32}$; fragt man: wie oft ist 8 in 3 enthalten, so ist die Antwort: $\frac{3}{8}$ mal &c.; zweitens, wenn man niedere Einheiten auf höhere reduziert, alsdann wird der Einheit des unbenannten Quotienten die Benennung derjenigen höhern Einheit beigelegt, welche dem Divisor gleich gilt. Fragt man z. B.: wieviel Kilo sind 4000 g, so ist, weil $\frac{4000\text{ g}}{1000\text{ g}} = 4$, $4000\text{ g} = 4\text{ kg}$, $556\text{ g} = \frac{556}{1000}$ kg &c.; drittens, wenn von einer Gröfse ein bestimmter Teil gesucht wird, in welchem Fall also der Quotient mit dem Dividend gleichartig ist. So ist z. B. der 4te Teil von 23 $\mathcal{M}$ $5\frac{3}{4}$ $\mathcal{M}$; nämlich 5 ganze Mark und von den übrig bleibenden 3 $\mathcal{M}$ noch den 4ten Teil (§ 33). Ebenso ist $\frac{35}{6}$ L $= 5\frac{5}{6}$ L &c.

Wer nun das Bisherige gut verstanden hat, und sich noch die folgenden fünf Sätze recht klar macht, der wird auch mit gebrochenen Zahlen ebenso leicht, als mit ganzen Zahlen rechnen.

36.

Wenn man den *Zähler* eines Bruchs mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, so wird der Bruch soviel mal so grofs oder so klein, als der Multiplikator oder Divisor die Einheit enthält.

Multipliziert man z. B den Zähler des Bruchs $\frac{6}{32}$ mit 3, so erhält man den Bruch $\frac{18}{32}$; ersterer enthält die Einheit $\frac{1}{32}$ 6 mal, lezterer aber dieselbe Einheit 18mal, und dafs nun 18 Einheiten 3mal soviel ist, als 6 Einheiten derselben Art, ist zu begreifen. Dividiert man den Zähler des Bruchs $\frac{6}{32}$ durch 3, so wird er $\frac{2}{32}$ und dieser Bruch ist offenbar nur der 3te Teil des vorhergehenden. Ebenso ist $\frac{24}{63}$ 6mal so grofs, als $\frac{4}{63}$, und $\frac{3}{63}$ der 8te Teil von $\frac{24}{63}$ &c.

37.

Wenn man aber den *Nenner* eines Bruchs mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, so wird der Bruch, gerade umgekehrt, soviel mal so klein oder so groſs, als der Multiplikator oder Divisor die Einheit enthält.

Dieser umgekehrte Satz des vorhergehenden, den Anfänger aber nicht so leicht zu begreifen pflegen, wird augenblicklich klar, wenn man sich die Bruch-Einheit nur als eine wirkliche Sache, etwa als eine Länge denkt. Multipliziert man z. E. den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ Meter mit 4, so erhält man $\frac{3}{64}$ Meter; denkt man sich nun die Länge des Meters einmal in 16 und einmal in 64 gleiche Teile (mithin jeden der 16 gleiche Teile nochmals in vier gleiche Teile) geteilt, so ist der 16te Teil des Meters, oder die Bruch-Einheit $\frac{1}{16}$ Meter, offenbar 4mal so groſs, als der 64ste Teil oder als die Einheit $\frac{1}{64}$ Meter, und folglich ist auch die aus letzterer viermal so kleinen Einheit $(\frac{1}{64})$ gebildete Zahl $\frac{3}{64}$ viermal so klein, als die Zahl $\frac{3}{16}$; denn von zwei gleich groſsen Zahlen ist die eine immer soviel mal so groſs oder so klein, als ihre Einheit so groſs oder so klein ist. Man denke sich z. B. die Einheiten 1 ℳ, 2 ℳ, 3 ℳ, so ist doch eine beliebige Anzahl 1-ℳ-Stücke nur halb so groſs, als eine gleiche Menge 2-ℳ-Stücke, und nur ein Drittel so groſs, als eine gleiche Menge 3-ℳ-Stücke.

Dividiert man den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ durch 4, so kommt $\frac{3}{4}$ und dieser Bruch $\frac{3}{4}$ ist viermal so groſs, als $\frac{3}{16}$, weil die Einheit $\frac{1}{4}$ viermal so groſs ist, als $\frac{1}{16}$. Ebenso ist $\frac{2}{3}$ zweimal so groſs, als $\frac{2}{6}$; $\frac{2}{12}$ aber nur halb so groſs, als $\frac{2}{6}$ &c.

38.

Der Wert eines Bruchs bleibt also völlig ungeändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert.

Multipliziert man z. E. Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{9}$ mit 3, so erhält er die Form: $\frac{18}{27}$; die Einheit $\frac{1}{27}$ ist hier 3mal so klein, als $\frac{1}{9}$, dafür sind aber auch 3mal soviel Einheiten genommen, mithin ist $\frac{6}{9} = \frac{18}{27}$; dividiert man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{9}$ durch 3, so erhält er die Form $\frac{2}{3}$, hier ist die Einheit $\frac{1}{3}$ dreimal so groſs, als $\frac{1}{9}$, dafür sind aber auch 3mal so wenig Einheiten genommen, folglich ist auch $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{18}{27}$. Man kann also einen Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, unter unzählig verschiedenen Formen darstellen.

39.

Jeden Bruch drückt man gewöhnlich gern durch die möglichst kleinsten Zahlen aus, indem man Zähler und Nenner entweder auf einmal durch ihr gröſstes gemeinschaftliches Maſs (§ 29), oder wiederholt durch solche Zahlen dividiert, durch welche sie teilbar sind, bis Zähler und Nenner Primzahlen unter sich werden, welches man einen Bruch kürzen nennt. Der Bruch $\frac{24}{84}$ erhält, wie (1) oder (2) gekürzt, die einfachere Form $\frac{2}{7}$.

$$(1) \quad \overset{12}{\frac{24}{84}} = \frac{2}{7}. \qquad\qquad (1) \quad \overset{2}{\frac{24}{84}} = \overset{2}{\frac{12}{42}} = \overset{3}{\frac{6}{21}} = \frac{2}{7}.$$

Aufgaben: Wie stehen folgende Brüche gekürzt: $\frac{7}{14}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{31}{93}$, $\frac{111}{636}$, $\frac{194}{4559}$, $\frac{111}{9111}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{5300}{7897}$, $\frac{72}{84}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{8599}{9983}$, $\frac{7141}{7913}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{21}{54}$, $\frac{8}{9}$.

Antwort: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{37}{212}$, $\frac{2}{47}$, $\frac{37}{3037}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{100}{149}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{127}{149}$, $\frac{37}{41}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{9}$.

40.

Soll umgekehrt ein Bruch, ohne Veränderung seines Wertes, auf einen neuen Nenner gebracht werden, der ein genaues Vielfache des alten ist, so braucht man offenbar nur den alten Zähler ebensoviel mal so groſs zu nehmen, als der neue Nenner es ist (§ 38). Man dividiere nämlich mit dem alten Nenner in den vorgeschriebenen neuen Nenner und multipliziere mit dem Quotienten den alten Zähler, so ist das Produkt der neue Zähler. Soll z. B. der Bruch $\frac{4}{5}$ auf den neuen Nenner 45 gebracht werden, so ist $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$. Ebenso ist $\frac{2}{3}$ auf den Nenner 12 gebracht $= \frac{8}{12}$ &c.

Aufgaben: Folgende Brüche auf die angedeutete Form zu bringen: $\frac{5}{6} = \frac{\dots}{144}$; $\frac{6}{17} = \frac{\dots}{51}$; $\frac{5}{7} = \frac{\dots}{84}$; $\frac{9}{13} = \frac{\dots}{2613}$.

Antwort: Es ist: $\frac{5}{6} = \frac{120}{144}$; $\frac{6}{17} = \frac{18}{51}$; $\frac{5}{7} = \frac{60}{84}$; $\frac{9}{13} = \frac{1809}{2613}$.

41.

Um mehrere Brüche von verschiedenen Nennern der Gröſse nach miteinander vergleichen zu können, müssen sie erst alle auf einerlei Bruch-Einheit oder Nenner gebracht werden. Diese Aufgabe ist nicht schwer, indem man nach § 30 leicht eine solche Zahl finden kann, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Sollen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{8}$, alle auf einerlei Nenner (Generalnenner) gebracht werden, so findet man (§ 30) 72 als die kleinste, durch 3, 4, 6, 9, 12, 8 teilbare Zahl, mithin können (§ 40) alle Brüche auf diesen neuen Nenner 72 gebracht werden. Es ist nämlich:

$$\frac{2}{3} = \frac{48}{72};\ \frac{3}{4} = \frac{54}{72};\ \frac{5}{6} = \frac{60}{72};\ \frac{7}{9} = \frac{56}{72};\ \frac{11}{12} = \frac{66}{72};\ \frac{5}{8} = \frac{45}{72}.$$

42.

Addition. Man kann unmittelbar nur solche Zahlen addieren, welche aus gleich groſsen Einheiten gebildet sind. Haben also die zu addierenden Bruchzahlen nicht einerlei Nenner, so müssen sie erst auf einerlei Nenner gebracht oder gleichnamig gemacht werden. Alsdann addiere man nur ihre Zähler und bezeichne die Gröſse der Einheit in der Summe durch die Unterschrift des allgemeinen Nenners. Sind gemischte Zahlen zu addieren, so addiere man die ganzen und die Bruchzahlen, jede besonders. So ist z. B. $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$; $\frac{3}{17}+\frac{5}{17}+\frac{9}{17}+\frac{1}{17}=\frac{18}{17}=1\frac{1}{17}$. Ebenso $3\frac{2}{17}+2\frac{6}{17}=5\frac{8}{17}$. Sind viele Brüche zu addieren, so kann man sie, der Bequemlichkeit wegen, erst untereinander ordnen, wie bei (1). Gewöhnlich verfährt man weniger umständlich, wie bei (2).

(1) $1080 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$

$$\begin{array}{c|l} \frac{2}{3} & 720 \\ \frac{3}{4} & 810 \\ \frac{5}{6} & 900 \\ \frac{7}{8} & 945 \\ \frac{14}{27} & 560 \\ \frac{4}{9} & 480 \\ \frac{7}{15} & 504 \\ \frac{5}{108} & 50 \\ \frac{7}{54} & 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 15 \cdot 108 \cdot 54 \\ 3) & 8 \cdot 5 \cdot 36 \\ 4) & 2 \cdot 5 \cdot 9 \\ & 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 = 1080 \end{array}$$

Summe: $\frac{5109}{1080} = 4\frac{789}{1080} = 4\frac{263}{360}$.

$$(2) \quad \frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{11}{12} = \frac{63+60+77}{7 \cdot 12} = \frac{200}{84} = 2\frac{8}{21}.$$

Der allgemeine Nenner bei (1) ist 1080 (§ 30). Der erste Bruch $\frac{2}{3}$ auf diesen Nenner gebracht, ist $=\frac{720}{1080}$; ebenso ist $\frac{3}{4}=\frac{810}{1080}$ &c. Man dividiert nämlich mit jedem alten Nenner in den allgemeinen Nenner 1080, und multipliziert mit dem Quotienten die alten Zähler, so erhält man die nebenstehenden neuen Zähler. Die Quotienten erhält man oftmals leichter, wenn man die Faktoren des allgemeinen Nenners beibehält; so sieht man z. B. gleich, dafs 15 in 1080, 72mal enthalten ist, weil $\frac{1080}{15}=\frac{2.3.4.5.9}{3.5}=2.4.9=72$ &c.

Kopfrechnen, welches man mehr üben sollte, kommt bei der Bruchrechnung ungemein zu statten. So berechnet man z. E. leicht im Kopfe, dafs $\frac{3}{4}+\frac{8}{24}=\frac{26}{24}=1\frac{1}{12}$ ist, indem man Zähler (und Nenner) des ersten Bruchs (in Gedanken) mit 6 multipliziert, wodurch die Brüche gleichnamig werden. Ebenso dafs $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}=1\frac{17}{24}$, indem man den Zähler des ersten Bruchs mit 4, des andern mit 3 multipliziert; ferner: $\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{15}{28}$ (mit 4 und 7 multipliziert); $\frac{2}{9}+\frac{7}{8}=\frac{16+63}{8.9}=\frac{79}{72}=1\frac{7}{72}$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$ (die Zähler der beiden ersten Brüche mit 4 und 2 multipliziert):

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{2}{3}+\frac{7}{9}=2\frac{1}{8}+1\frac{4}{9}=3\frac{41}{72}$$

(indem man die drei ersten und zwei letzten Brüche besonders addiert).

Aufgaben. Addiere:

1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{11}{12}+\frac{7}{8}+\frac{5}{21}+\frac{1}{3}$.
2) $12\frac{2}{9}+3\frac{1}{2}+4\frac{7}{15}+\frac{1}{4}+2\frac{8}{15}+\frac{2}{3}$.
3) $\frac{11}{19}+\frac{3}{8}+\frac{7}{4}+\frac{8}{19}+\frac{5}{4}+\frac{15}{12}+\frac{5}{8}+\frac{9}{12}$.
4) $\frac{15}{124}+\frac{3}{62}+\frac{6}{248}+\frac{5}{12}$.
5) $\frac{3}{7}+\frac{5}{9}+\frac{1}{14}+\frac{5}{18}+3\frac{2}{3}+\frac{4}{125}$.
6) $\frac{5}{16}+\frac{3}{5}+\frac{17}{24}+\frac{9}{11}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{11}$.
7) $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{3}{100}+\frac{1}{5}$.

Antwort: Man findet $3\frac{139}{168}$, $23\frac{23}{36}$, 7, $\frac{227}{372}$, $5\frac{4}{125}$, $4\frac{29}{240}$, $\frac{761}{1000}$.

43.

Subtraktion. Hier gilt dasselbe wie bei der Addition. Sind nämlich die Brüche nicht gleichnamig, so müssen sie erst gleichnamig gemacht werden. Alsdann braucht man nur den Zähler des Subtrahend vom Zähler des Minuend zu subtrahieren, und dem Rest den gemeinschaftlichen Nenner unterzuschreiben. So ist z. B.

$$\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{8}=\tfrac{2}{8}=\tfrac{1}{4}; \qquad \tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{9}{12}-\tfrac{8}{12}=\tfrac{1}{12}.$$

Ist ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahieren, so muſs man erst eine Einheit vom Minuend nehmen, und diese in einen Bruch von demselben Nenner, welchen der Subtrahend hat, auflösen. So ist z. B.:

$$5-\tfrac{2}{7}=4\tfrac{7}{7}-\tfrac{2}{7}=4\tfrac{5}{7}.$$
$$16-\tfrac{12}{139}=15\tfrac{139}{139}-\tfrac{12}{139}=15\tfrac{127}{139}.$$

Sind gemischte Zahlen voneinander zu subtrahieren, so mache man die Brüche erst gleichnamig und subtrahiere die Brüche und die Ganzen, jede besonders. Ist der Bruch im Subtrahend gröſser, als der im Minuend, so muſs man eine ganze Einheit des Minuends in Brucheinheiten auflösen, z. B.:

$$5\tfrac{7}{8}-1\tfrac{2}{3}=5\tfrac{21}{24}-1\tfrac{16}{24}=4\tfrac{5}{24}.$$
$$14\tfrac{2}{3}-2\tfrac{7}{8}=13\left.\tfrac{24 \atop 16}{24}\right\}-2\tfrac{21}{24}=11\tfrac{19}{24}.$$

Es ist nämlich, im letztern Beispiel, $\tfrac{2}{3}=\tfrac{16}{24}$, und $14=13\tfrac{24}{24}$, folglich $14\tfrac{2}{3}=13\tfrac{40}{24}$. Statt aber die beiden Zähler 24 und 16 erst zu addieren und von ihrer Summe (40) den Zähler 21 zu subtrahieren, ist es offenbar bequemer, ihn von 24 zu subtrahieren und den Rest zu 16 zu addieren.

Aufgaben: $\tfrac{7}{9}-\tfrac{4}{9}$; $\tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{5}$; $\tfrac{3}{4}-\tfrac{5}{8}$; $\tfrac{5}{9}-\tfrac{1}{2}$; $3-\tfrac{2}{3}$; $5\tfrac{5}{12}-2\tfrac{11}{12}$; $22\tfrac{5}{7}-4\tfrac{3}{4}$; $2\tfrac{12}{41}-1\tfrac{2}{3}$; $\tfrac{5}{6}-\tfrac{5}{8}$; $\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}$; $\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{9}$; $\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}$; $4\tfrac{8}{15}-2\tfrac{5}{9}$.

Antwort: $\tfrac{1}{3}$, $\tfrac{7}{20}$, $\tfrac{1}{8}$, $\tfrac{1}{18}$, $2\tfrac{1}{3}$, $2\tfrac{1}{2}$, $17\tfrac{27}{28}$, $\tfrac{77}{123}$, $\tfrac{5}{24}$, $\tfrac{1}{56}$, $\tfrac{1}{72}$, $\tfrac{1}{90}$, $1\tfrac{44}{45}$.

44.

Multiplikation. Die leicht zu behaltende und leicht auszuführende Regel für die Multiplikation zweier Brüche heiſst: m u l t i p l i z i e r e Z ä h l e r m i t Z ä h l e r u n d N e n n e r m i t N e n n e r. Diese gleich näher zu erläuternde Regel begreift alle Fälle. Ist nämlich einer der Faktoren eine ganze Zahl, so kann man darunter 1 als Nenner gesetzt denken; ist einer der beiden Faktoren oder auch beide gemischte Zahlen, so kann man sie erst einrichten, z. B.

$$\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{7}{9}=\frac{1.7}{5.9}=\tfrac{7}{45}$$
$$\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{7}{9}=\frac{4.7}{5.9}=\tfrac{28}{45}$$

$$4 \cdot \tfrac{7}{9} = \tfrac{4}{1} \cdot \tfrac{7}{9} = \tfrac{28}{9} = 3\tfrac{1}{9}$$
$$2\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{7}{9} = \tfrac{11}{4} \cdot \tfrac{7}{9} = \tfrac{77}{36} = 2\tfrac{5}{36}$$
$$2\tfrac{3}{4} \cdot 2\tfrac{7}{9} = \tfrac{11}{4} \cdot \tfrac{25}{9} = \tfrac{275}{36} = 7\tfrac{23}{36}.$$

Erläuterung. Die Multiplikation verlangt eine Gröſse (den Multiplikand) so oft zu nehmen, als eine andere Gröſse (der Multiplikator) die Einheit enthält. Ist nun z. B. $\frac{1}{5}$ der Multiplikator und $\frac{7}{9}$ der Multiplikand, so enthält der Multiplikator, $\frac{1}{5}$, nicht die ganze Einheit, sondern nur den 5ten Teil derselben einmal, mithin muſs auch nicht die ganze Gröſse $\frac{7}{9}$, sondern nur der 5te Teil derselben einmal genommen werden. Nach § 37 erhält man aber den 5ten Teil von $\frac{7}{9}$, wenn man den Nenner 9 fünfmal so groſs macht; daher $\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{45}$. Anfänger pflegen immer mit Befremden zu äuſsern, daſs dieser Fall, $\frac{1}{5}$ mal $\frac{7}{9} = \frac{7}{45}$, zur Multiplikation gerechnet wird, da doch die Gröſse $\frac{7}{9}$ nicht vervielfacht, sondern, gerade umgekehrt, dividiert ist. Diese scheinbare Verwechselung der Begriffe (Multiplikation mit Division) wird aber gleich berichtigt und alle Schwierigkeit fällt weg, wenn man nur bedenkt, daſs man von einer Gröſse sowohl ein Bruchfaches als Vielfaches nehmen kann, daſs die Redensarten: den 5ten Teil von einer Gröſse nehmen, oder die Gröſse $\frac{1}{5}$mal nehmen (mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren) einerlei sagen, und daſs man eben deshalb den Begriff der Multiplikation nicht in dem § 9 angegebenen engen Sinn, sondern in dem angedeuteten weitern Sinn nehmen muſs, nämlich, multiplizieren heiſst: eine Gröſse so oft nehmen, als eine andere die Einheit enthält. Diesem allgemeinern Begriffe der Multiplikation zufolge muſs also auch den Kunstwörtern: Multiplikand, Multiplikator, Produkt, allgemeinere Bedeutung beigelegt werden, und z. E. das Wort Produkt sowohl das Vielfache einer Gröſse als das Bruchfache (Teile) derselben bedeuten. Multiplikand heiſst hiernach jede Gröſse, wenn sie entweder selbst oder auch nur ein Teil von ihr vervielfältigt werden soll; Multiplikator diejenige, welche angiebt, wie oft der ganze Multiplikand oder ein Teil von ihm genommen werden soll. Aus dieser Erklärung folgt mit Hilfe der §§ 37 und 36 sogleich die oben aufgestellte Multiplikationsregel.

Ist z. B. $\frac{4}{5}$ der Multiplikator und $\frac{7}{9}$ der Multiplikand, so enthält der Multiplikator den 5ten Teil der Einheit 4mal, mithin muſs auch der 5te Teil (ein Fünftel) vom Multiplikand 4mal genommen werden. Der 5te Teil von $\frac{7}{9}$ ist (nach § 37) $= \frac{7}{45}$. Nimmt man diesen Teil 4mal (indem man nach § 36 den Zähler 7 mit 4 multipliziert), so erhält man $\frac{28}{45}$, daher $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$. Die Aufgabe, eine Gröſse $\frac{4}{5}$mal nehmen, enthält also eine Division und Multiplikation zugleich.

45.

Sind mehrere Brüche miteinander zu multiplizieren, so muſs man alle Zähler und ebenso alle Nenner miteinander multiplizieren.

Soll z. B. $\frac{8}{9}$ mit $\frac{4}{7}$, das daraus entstehende Produkt mit $\frac{2}{5}$, das dann entstehende Produkt wieder mit $\frac{1}{3}$ multipliziert werden, so hat man:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8.4.2.1}{9.7.5.3} = \frac{64}{945}$$

Ist der Multiplikator ein echter Bruch, so ist das Produkt natürlich immer kleiner, als der Multiplikand. Sind also alle Faktoren echte Brüche, so ist das Produkt immer kleiner, als jeder einzelne Faktor. Es ist z. B. $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{24}{105}$ und $\frac{24}{105} < \frac{1}{3}$, $\frac{24}{105} < \frac{4}{5}$ &c.

46.

Haben Zähler und Nenner der miteinander zu multiplizierenden Brüche Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegen einander aufheben, indem es einerlei ist, ob man dies vor oder nach vollzogener Multiplikation thut (§§ 22, 39). Anfänger pflegen diesen häufig stattfindenden Rechnungsvorteil selten zu benutzen. So ist z. B. $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$ (indem man 7 im Nenner des ersten Bruchs gegen 7 im Zähler des zweiten hebt); $\frac{12}{17} \cdot \frac{17}{32} = \frac{3}{8}$; $\frac{33}{75} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{15}$; $6 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 2 = 4$; $\frac{3}{5} \cdot 25 = 3 \cdot 5 = 15$; $16 \cdot \frac{5}{32} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Sollen die Gröfsen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{3}$ miteinander multipliziert werden, so hat man:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2.11}{4.3} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}.$$

Ist der eine Faktor eine gemischte, der andere eine ganze Zahl, so ist es bequemer, mit letzterm die Ganzen und Brüche des erstern besonders zu multiplizieren, und beide Produkte zu addieren, also die gemischte Zahl nicht erst einzurichten. Man hat z. B.

$$6 \cdot 5\frac{2}{21} = 30 + \frac{12}{21} = 30\frac{4}{7}; \qquad 12 \cdot 13\frac{4}{5} = 156 + \frac{48}{5} = 165\frac{3}{5}.$$

Dieser Rechnungsvorteil findet auch dann noch statt, wenn der eine Faktor eine gemischte Zahl, der andere ein blofser Bruch ist.

Sind beide Faktoren gemischte Zahlen, so könnte man mit den Ganzen und Brüchen des einen die Ganzen und Brüche des andern multiplizieren und dann alle vier Produkte addieren. Dieses Verfahren kann aber nur dann zweckmäfsig sein, wenn dabei nicht mehr als zwei Brüche entstehen, oder wenn die ganzen Zahlen sehr grofs sind. Im allgemeinen erhält man aber das Produkt leichter, wenn man beide Faktoren erst einrichtet. Man hat z. B.

$$\begin{aligned} 25\tfrac{5}{6} \cdot 124\tfrac{3}{4} &= 25 \cdot 124 + 25 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{6} \cdot 124 + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{3}{4} \\ &= 3100 + 18\tfrac{3}{4} + 103\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{8} \\ &= 3221 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{3} = 3222\tfrac{17}{24} \end{aligned}$$

$$3\tfrac{3}{4} \cdot 6\tfrac{4}{5} = \tfrac{15}{4} \cdot \tfrac{34}{5} = \frac{3.17}{2} = 25\tfrac{1}{2}$$

$$25\tfrac{5}{6} \cdot 124\tfrac{4}{5} = \frac{155}{6} \cdot \frac{624}{5} = 31 \cdot 104 = 3124.$$

Zur Multiplikation der Brüche gehört auch die Aufgabe: Bruchteile von einer benannten höhern Einheit durch niedere auszudrücken, indem man den Bruch mit der Anzahl der niedern Einheiten, welche der höhern gleichgelten, multipliziert. Da z. B. 100 ₰ = 1 ℳ, so ist $\frac{3}{4}$ ℳ = $\frac{3}{4} \cdot 100$ ₰ = $3 \cdot 25$ ₰ = 75 ₰. Ebenso ist: $\frac{5}{6}$ t = $\frac{5}{6} \cdot 1000$ kg = $833\frac{1}{3}$ kg = 833 kg $333\frac{1}{3}$ g = 833 kg 333 g $333\frac{1}{3}$ mg.

Aufgaben: Multipliziere mit Benutzung der Vorteile, welche die gemeinschaftlichen Faktoren gewähren: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$; $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$; $2 \cdot \frac{1}{2}$; $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} \cdot \frac{28}{41}$; $\frac{22}{65} \cdot \frac{5}{11}$; $\frac{5}{31} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{15}{11} \cdot \frac{121}{365}$; $125 \cdot 7\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5} \cdot 11\frac{4}{11}$; $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4}$; $2\frac{5}{6} \cdot 33\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$; $2\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2\frac{2}{3}$; $23\frac{5}{6} \cdot 22\frac{5}{13}$; $33\frac{2}{3} \cdot 100$; $27\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{100}$; $\frac{123}{252} \cdot \frac{28}{717}$.

Antwort: Die Produkte sind: $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{6}{41}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{31}$, $\frac{33}{73}$, 975, $6\frac{9}{11}$, $1\frac{1}{4}$, $94\frac{11}{12}$, 1, 3, $\frac{40}{189}$, $4\frac{76}{135}$, $533\frac{1}{2}$, $3366\frac{2}{3}$, $1\frac{47}{50}$, $\frac{41}{2151}$.

47.

Division. Bei Brüchen pflegt man die Division gewöhnlich durch das Colon (:) anzudeuten, indem man den Divisor immer hinter den Dividend setzt. Soll z. B. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiert werden, so schreibt man statt $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ lieber $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$. Die Division der Brüche läſst sich immer auf eine Multiplikation zurückführen. Die höchst einfache Regel heiſst: Um einen Bruch durch einen andern zu dividieren, braucht man nur den Divisor umzukehren (seinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler zu machen) und dann mit diesem umgekehrten Divisor den Dividend zu multiplizieren. Diese gleich näher zu erläuternde Regel ist ganz allgemein, indem man unter ganze Zahlen 1 als Nenner schreiben und gemischte Zahlen einrichten kann. So ist z. B.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$
$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$
$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$
$$2\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{55}{8}$$
$$2\frac{3}{4} : 3\frac{2}{3} = \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{4}.$$

Erläuterung. 1) Sind die Brüche gleichnamig, so kommt der Nenner offenbar gar nicht in Betracht, und man braucht nur mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividend zu dividieren. So ist z. B.: $\frac{6}{8} : \frac{2}{8} = \frac{6}{2} = 3$; $\frac{6}{17} : \frac{2}{17} = 3$; $\frac{6}{35} : \frac{2}{35} = 3$; $\frac{2}{8} : \frac{6}{8} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{2}{17} : \frac{6}{17} = \frac{1}{3}$ &c. Denn daſs 2 Einheiten in 6 Einheiten derselben Art 3mal, und umgekehrt, 6 Einheiten in 2 Einheiten derselben Art $\frac{1}{3}$mal enthalten sind, ist klar. Dasselbe erhält man aber auch nach der gegebenen Regel, indem man mit dem umgekehrten Divisor multipliziert, nämlich:

$$\tfrac{6}{8}:\tfrac{2}{8}=\frac{6}{8}\cdot\frac{8}{2}=\tfrac{6}{2}=3.$$

2) Sind die Brüche ungleichnamig, so könnte man sie erst gleichnamig machen, indem man Zähler und Nenner des Dividend mit dem Nenner des Divisors, und Zähler und Nenner des Divisors mit dem Nenner des Dividend multipliziert. Deutet man diese vorbereitenden Operationen blofs an, z. B. $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4.3}{5.3}:\frac{5.2}{5.3}$, so braucht man nur, da auf diese Weise die Brüche immer gleichnamig werden, und man also den allgemeinen Nenner wieder aufser acht lassen kann, mit dem neuen Zähler des Divisors $(5\cdot 2)$ in den neuen Zähler des Dividend $(4\cdot 3)$ zu dividieren. Bemerkt man hier die Stellung der Ziffern, so ergiebt sich hieraus die vorhin ausgesprochene leichter zu behaltende Regel: dafs man den Divisor blofs umzukehren braucht. Es ist nämlich:

$$\tfrac{4}{5}:\tfrac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}:\frac{5\cdot 2}{3\cdot 5}=\tfrac{4.3}{5.2}=\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{2}=\tfrac{12}{10}.$$

Ebenso

$$\tfrac{5}{7}:\tfrac{2}{3}=\tfrac{5.3}{7.3}:\tfrac{7.2}{7.3}=\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{3}{2}=\tfrac{15}{14}.$$

Aufgaben. Dividiere mit Benutzung der Rechnungsvorteile: $\frac{4}{16}:\frac{3}{16}$; $\frac{5}{9}:\frac{4}{9}$; $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}:\frac{5}{8}$; $\frac{3}{25}:\frac{1}{35}$; $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}:5$; $1:\frac{1}{5}$; $1:\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}:1$; $\frac{5}{17}:1$; $1:\frac{2}{3}$; $\frac{14}{39}:7$; $\frac{13}{17}:17$; $3\frac{2}{3}:7$; $11:5\frac{7}{9}$; $13\frac{3}{4}:\frac{2}{3}$; $15\frac{4}{5}:9\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}:8$; $\frac{345}{1000}:\frac{45}{100}$; $\frac{1}{9}:\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}:\frac{1}{9}$; $\frac{3}{10}:\frac{17}{100}$; $25\frac{2}{3}:16\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5}:\frac{7}{4}$. Wie grofs ist der 8te Teil von $\frac{2}{3}$ m, der 5te Teil von $2\frac{5}{6}$ $\mathcal{M}$, der 4te Teil von $5\frac{1}{5}$ kg. Wie oft ist $\frac{3}{4}$ g in 4 g, $\frac{2}{3}$ $\mathcal{M}$ in 2 $\mathcal{M}$, $\frac{1}{3}$ m in 1 m enthalten?

Antwort. Die Quotienten sind: $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{32}{35}$, $4\frac{1}{5}$, 1, 1, $\frac{1}{25}$, 5, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{17}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{39}$, $\frac{13}{289}$, $\frac{11}{21}$, $1\frac{47}{52}$, $20\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{5}$, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{23}{30}$, $1\frac{1}{9}$, $\frac{9}{10}$, $1\frac{13}{17}$, $1\frac{107}{201}$, $\frac{32}{35}$, $\frac{1}{12}$ m, $\frac{17}{30}$ $\mathcal{M}$, $1\frac{9}{20}$ kg, $5\frac{1}{3}$mal, 3mal, 3mal.