Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Zweites Buch. Von den vier ersten Rechnungsarten

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Zweites Buch.

Von den vier ersten Rechnungsarten.

1. Addition.

7.

Die erste Anwendung des Zahlensystems besteht darin, mehrere Zahlen miteinander zu vereinigen, oder in einem einzigen Zahlenbegriff zusammen zu fassen. Die Zahl, welche nach der Vereinigung entsteht, und allein so groſs ist, oder dieselbe Menge Einheiten enthält, als alle gegebenen Zahlen (Summanden) zusammen, heiſst die Summe, und das Verfahren, dieselbe auf eine kürzere Weise als durch das mühsame Zuzählen bei eins und eins zu finden, addieren. Dieses setzt voraus, daſs man die Summe je zwei einziffriger Zahlen auswendig wisse. Die Addition kann keine besondere Erfindung genannt werden, weil ihr Verfahren ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems folgt. Man schreibt nämlich die zu addierenden Zahlen so untereinander, daſs nach dem Zahlensystem gleichnamige Rang-Einheiten untereinander stehen (Einer unter Einer, Zehner unter Zehner &c.) und addiert alsdann, bei den niedrigsten Einheiten anfangend, jede Reihe für sich, indem man für je zehn Einheiten einer Reihe eine Einheit auf die folgende überträgt, d. h. die in der Reihe der Einer enthaltenen Zehner zur zweiten Reihe, die in der Reihe der Zehner enthaltenen Hunderter zur dritten Reihe zählt &c. Sind sehr viele Zahlen zu addieren, so kann man auch beliebige Einschnitte machen, die Summe erst teilweise suchen und dann wieder diese Summe addieren.

Es ist offenbar gleichgültig, in welcher Folge man die Zahlen unter einander ordnet und addiert; man erhält doch immer dieselbe Menge Einheiten als deren Summe. Beispiele:

		789959
		98879
	70	357768
	4275	5599
	599	99075
	90	800
Summanden:	78407	997997
	34	60088
	42549	7673099
Summe	126024	10083264

2. Subtraktion.

8.

Die Addition lehrt aus beliebig vielen, z. B. 2 Summanden ihre Summe finden. Denkt man sich jedoch diese Summe, z. B. 12, und eine der beiden Summanden, z. B. 7, als gegebene Zahlen, um aus beiden den andern Summand — 5 — zu finden, so bezeichnet man diese Operation mit dem Namen Subtraktion. Jene gegebene Zahl 12, von welchen die andere gegebene Zahl 7 abgezogen (subtrahiert) werden soll, nennt man Minuend, die letztere abzuziehende (zu subtrahierende) Zahl 7: Subtrahend. Die Zahl 5, welche man hierbei als Resultat erhält, heiſst Rest, Differenz oder Unterschied. Die Regel der Subtraktion ergiebt sich ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems und der Addition. Man wird nämlich den Subtrahend so unter den Minuend setzen, daſs gleichnamige Einheiten untereinander stehen, und dann bei den Einern anfangend, jede Ziffer des Subtrahend von der gleichnamigen darüber stehenden im Minuend subtrahieren,* und im Fall diese Ziffer kleiner ist, die nächste links stehende Ziffer um eine Einheit verkleinern und dafür jener zehn Einheiten wieder zurechnen, alsdann kann die untenstehende Ziffer im Subtrahend von der darüber stehenden, um zehn vergröſserten subtrahiert werden (No. 2).

Ist die Ziffer, von welcher subtrahiert werden soll, zu klein und die zunächst links folgende eine Null (No. 3), so muſs man weiter gehen und aus der ersten geltenden Ziffer eine Einheit wegnehmen. Für diese Einheit kann man an die Stelle der folgenden Null zehn setzen. Aus diesen zehn Einheiten wieder eine Einheit genommen, kommt an die Stelle der Null neun zu stehen &c., so dass also die erste geltende Ziffer um eine Einheit kleiner, aus jeder folgenden Null eine Neun und die zu kleine Ziffer, von welcher subtrahiert werden soll, um zehn Einheiten gröſser wird. Dieses Verfahren wird noch anschaulicher, wenn man nach geschehener Subtraktion den Rest wieder zum Subtrahend addiert, wo dann, wenn in beiden Operationen kein Fehler vorgefallen, der Minuend wieder erscheinen muſs.

			. 10 . 10		. 10 . 10
(1)	Minuend 789	(2)	3 4 5 3	(3)	30002503
	Subtrahend 246		1 9 1 4		27494097
	Rest 543		1 5 3 9		2508406

(4)	70040321
	29067332
	40972989

* Das Wort Ziffer wird oft, der Kürze wegen, gleichbedeutend mit dem Worte Zahl gebraucht. An sich ist aber eine Ziffer ebensowenig eine Zahl, als die vier Zeichen: H, a, u, s eine wirkliche Wohnung sind.

3. Multiplikation.

9.

Sind die zu addierenden Zahlen einander gleich, z. B. 7 7 7 7 so vereinfacht die Multiplikation eine solche Addition dadurch, 28, dafs sie nur 2 Zahlen dafür setzt. Die eine dieser beiden Zahlen giebt den Summand (hier 7) an und wird Multiplikand (die zu vervielfachende Zahl) genannt, die andere giebt an, wieviel gleiche Summanden vorhanden sind (hier 4) und heifst Multiplikator (Vervielfacher). Die durch die Multiplikation erhaltene Zahl (jene Summe 28) wird Produkt (Vielfaches) genannt. Oft macht man keinen Unterschied zwischen Multiplikand und Multiplikator, sondern nennt die zu multiplizierenden Zahlen: Faktoren. Soll also das 4fache der Zahl 7 gesucht (7 mit 4 multipliziert) werden, so erhielte man folgendes Schema:

$$\begin{array}{lr} \text{Multiplikand} & 7 \\ \text{Multiplikator} & 4 \\ \hline \text{Produkt} & 28. \end{array}\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Faktoren.}$$

Der erste, der die schöne und wichtige Erfindung der Multiplikation von mehrstelligen Faktoren machte, ist vielleicht durch folgende Betrachtungen darauf gekommen.

Es sei z. B. das 4253fache der Zahl 8067 zu finden. Man denke sich nun den Multiplikand, wie bei A angedeutet, so oft unter einander gesetzt, als der Multiplikator die Einheit enthält. Den Multiplikator denke man sich in seine einzelnen Rang-Einheiten zerlegt, wie bei B, und dann die ganze Reihe der untereinander stehenden gleichen Zahlen in kleinere Abschnitte geteilt, wovon der erste so viele Summanden enthält, als der Multiplikator Einer, dann so viele gleiche Abschnitte, von je zehn Summanden, als der Multiplikator Zehner enthält, ferner soviel gleiche Abschnitte von je hundert Summanden, als der Multiplikator Hunderte enthält u. s. f.

Wenn man nun die Summe der einzelnen Abschnitte sucht und dann wieder diese Summen addiert, so erhält man offenbar das verlangte Produkt.

Die Summe, welche 10, 100, 1000 gleiche Summanden enthalten, findet man nun aber ohne alle Rechnung, wenn man nur überlegt, dafs nach der Theorie unsers Zahlensystems eine Zahl 10 mal nehmen, nichts anderes heifst, als jede ihrer Rang-Einheiten in den nächst höheren Rang zu rücken, oder ihr blofs eine Null anzuhängen; eine Zahl 100 mal nehmen, soviel ist, als jede ihrer Rang-Einheiten um zwei Ränge höher zu bringen, was durch Anhängen von zwei Nullen geschieht.

B	A	
3	8067	
10	8067	
10	8067	
10	——	24201
10	8067	
10	8067	
100	8067	
100	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
4253	8067	
	8067	
	——	80670
	8067	
	u. s. w.	

Man findet also die Summe der ganzen Reihe A oder das 4253fache des Multiplikand, indem man denselben erst so oft zu sich selbst addiert, als der Multiplikator Einer enthält, wie bei a, dann so oft, als der Multiplikator Zehner enthält, und der Summe eine Null anhängt, wie bei b &c. c, d, und endlich alle diese Summen a, b, c, d, wieder addiert, wie bei e.

a	b	c	d	e
	80670			
	80670		8067000	24201
8067	80670		8067000	403350
8067	80670	806700	8067000	1613400
8067	80670	806700	8067000	32268000
24201	403350	1613400	32268000	34308951

Da die höchste Ziffer im Multiplikator nur 9 sein kann, so folgt, dafs man nach diesem Verfahren den Multiplikand nie öfter als 9 mal zu sich selbst zu addieren braucht. Macht man sich also zu diesem Gebrauch die kleine Multiplikationstabelle f, aus welcher man das Zweifache, Dreifache ... bis Neunfache einer jeden einziffrigen Zahl unmittelbar entnehmen kann, so wird die Arbeit bedeutend erleichtert, noch mehr, wenn man diese kleine, unter dem Namen Einmaleins bekannte, nützliche Tabelle im Kopfe hat, indem man dann die einzelnen Summen a, b, c, d gleich unter einander stellen kann, wie bei g.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

(f)

g

Multiplikand: 8067 } Faktoren
Multiplikator: 4253 }

24201
40335
16134
32268

Produkt: 34308951

Man multipliziert nämlich erst mit der letzten Ziffer des Multiplikators, dann mit der vorletzten, indem man das Produkt um eine Stelle gegen die Linke rückt &c., wie bei g.

10.

Haben beide Faktoren, oder auch nur einer derselben, Nullen am Ende, so braucht man nur (wie aus der vorhergehenden Theorie leicht zu folgern ist) die bedeutlichen Ziffern miteinander zu multiplizieren, und dem Produkte soviel Nullen anzuhängen, als beide Faktoren zusammen (am Ende) haben (No. 1 und 2). Kommen mitten im Multiplikator Nullen vor, so kann man, um einem Irrtum vorzubeugen, das Zurückrücken der einzelnen Produkte durch Punkte bemerken (No. 3). Übrigens kann man die Faktoren eines Produkts immer miteinander verwechseln, und, der leichtern Rechnung wegen, den kleinsten zum Multiplikator nehmen. (Siehe § 313.)

(1)	(2)	(3)
32	5302000	30794
4000	3400	200506
128000	21208	184764
	15906	153970·
	18026800000	61588··
		6174381764

4. Division.

11.

Wie aus der Addition die Subtraktion entstand, so ergiebt sich in gleicher Weise aus der Multiplikation eine neue Rechnungsart: die Division. Bei der Multiplikation kann das gesuchte Produkt 54 aus den gegebenen Faktoren 6 und 9 enstanden sein. Denkt man sich nun umgekehrt das Produkt 54 und einen der Faktoren, z. B. 6, als gegebene Zahlen, so findet die Division den andern Faktor 9, und zwar beantwortet diese neue Rechnungsart hierbei zweierlei Fragen: 1) Wie groſs der 6. Teil von 54 ist; 2) Wie oft 6 in 54 enthalten ist. Man wird in beiden Fällen eine Zahl (9) zu suchen haben, die mit dem gegebenen Faktor (6) multipliziert das gegebene Produkt (54) giebt. Man nennt alsdann die letztere, als Produkt gedachte Zahl Dividend (die zu teilende Zahl), den gegebenen Faktor: Divisor (Teiler) und den gesuchten Faktor: Quotient (Teil, die durch die Division gesuchte Zahl). „54 durch 6 dividiert giebt also 9“ oder „6 ist in 54 9mal enthalten.“ Hier ist 54 der Dividend, 6 der Divisor, 9 der Quotient.

Soll eine vielstellige Zahl durch eine andere vielstellige Zahl, z. B. 34308951 durch 4253 dividiert werden, so findet man die Regeln hierzu leicht aus folgender Betrachtung. Statt nämlich, wie es der erste Gedanke eingiebt, den Divisor wiederholt vom Dividend zu subtrahieren, und für jede Subtraktion eine Einheit in den Quotienten zu setzen, zeigt ein wenig Aufmerksamkeit, daſs sich dieses Verfahren mit Hilfe der Multiplikation sehr abkürzen läſst. Vergleicht man die Ziffern des Divisors mit ebensovielen des Dividend, so sieht man leicht, indem man den Divisor mit 8 multipliziert und diesem Produkt (in Gedanken) drei Nullen anhängt, daſs das 8000fache des Divisors noch kleiner, das 9000fache aber gröſser ist, als der Dividend. Der Quotient liegt also zwischen 8000 und 9000, und 8 mufs mithin dessen erste Ziffer sein. Man kann also das 8000fache des Divisors auf einmal subtrahieren. Vergleicht man wieder die Ziffern des Divisors mit ebensovielen des Restes, so sieht man, dafs das 60fache des Divisors kleiner, das 70fache aber gröfser ist, als der Rest, und dafs mithin 0 die zweite und 6 die dritte Ziffer im Quotienten sein mufs &c.

Divisor	Dividend	Quotient
4253	34308951	8000
	34024000	60
	284951	7
	255180	8067
	29771	
	29771	

	kürzer:	
	34308951	8067
4253	34024:::	
	28495:	
	25518:	
	29771	
	29771	

12.

Aus den soeben erklärten vier Rechnungsarten, bei welchen sich die Multiplikation als eine vereinfachte Addition, die Subtraktion als eine Umkehrung der Addition, die Division als eine Umkehrung der Multiplikation darstellt, können noch drei andere Rechnungsarten gebildet werden und zwar das Potenzieren als eine vereinfachte Multiplikation, das Radizieren (Wurzelausziehen) und das Logarithmieren als Umkehrungen des Potenzierens. Die elementare Arithmetik bedarf jedoch zunächst nur jener vier, zuerst entwickelten Rechnungsarten. Die grofse Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher man mit diesen operiert, ist offenbar eine Folge des einfachen Gesetzes im Zahlensystem, dafs durchgehends die Einheit einer links stehenden Ziffer ein gleich Vielfaches einer Einheit der nächst rechts stehenden gilt, weshalb man auch bei allen vier Rechnungsarten an den Namen der Einheiten, mit welchen man rechnet, gar nicht zu denken braucht. Wäre statt dieses einfachen Gesetzes ein verwickelteres eingeführt worden, z. E. dafs sechs Einheiten der ersten rechts stehenden Ziffer eine Einheit der zweiten, dann vier Einheiten der zweiten eine Einheit der dritten gelten solle &c., wie stände es dann um unsere schöne leichte Arithmetik?