

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Erster Teil. Spezielle Arithmetik

[urn:nbn:de:bsz:31-264709](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-264709)

Erster Teil.

Specielle Arithmetik.

Erstes Buch.

Zahlenbildung und Zahlensystem.

1.

Die Vorstellung der Einheit oder das einmalige Vorhandensein einer Sache benennen wir mit dem Worte eins. Die wiederholte Vorstellung der Einheit aber wollen wir mit einem einzigen, ursprünglich willkürlichen Worte (wie etwa zwei, duo, deux, two &c.) belegen, und statt eins und eins zu sagen: das kürzere Wort zwei aussprechen. Für die auf zwei folgende Zahl, nämlich zwei und eins, ist schon das Wort drei gewählt, welches wir also beibehalten. — So gehen wir nun schrittweise, jedesmal um eine Einheit weiter, und sagen vier statt drei und eins, fünf statt vier und eins, sechs, sieben, acht.... — Die durch lange Übung im Gedächtnis behaltene Folge dieser Zahlwörter ist es aber eigentlich, wodurch wir uns der bestimmten Anzahl Einheiten, welche jedes Wort bezeichnet, schnell erinnern.

Es ist nicht schwer, auch für einige der nun folgenden Zahlen eigentümliche Wörter zu finden, z. B. neun, zehn, elf, zwölf &c. allein auf diese Weise noch lange fortschreiten zu wollen, würde doch völlig unmöglich und unüberlegt sein; denn wo gäbe es wohl eine so fruchtbare Erfindungsgabe und ein so großes Gedächtnis, alle sonach nötig werdenden unzähligen Wörter zu ersinnen und zu behalten. Dennoch mag, wenn nicht, wie Josephus berichtet, Adam gleich als gelehrter Mathematiker geboren wurde, die Welt schon lange gestanden haben, bis jemand den vernünftigen Gedanken faßte: um beim fernern Fortzählen der gar zu schnellen Anhäufung von Wörtern vorzubeugen, nur erst eine beliebig kurze Strecke zu zählen, z. B. bis zehn, und dann, ohne neue Wörter nötig zu haben, die Verbindung der folgenden Einheiten mit dieser Zahl zehn durch das Wort und anzudeuten.

Statt also für die auf zehn folgende Zahl ein neues Wort zu wählen, sagt man: eins und zehn, darauf: zwei und zehn, drei und zehn &c. bis zehn und zehn. Dafs man später das Wort und, der Kürze wegen, wieder wegwarf, war keine grofse Erfindung, und dafs man noch später statt einszehn, zweizehn (undecim, duodecim) die etwas kürzeren Wörter: elf, zwölf einführte, war eine unnötige Verbesserung, die, wenn man es bemerken will, der Jugend nur das Zählenlernen erschwert.

Die Zahl zehn kann man als eine aus einfachen Einheiten oder sogenannten Einern zusammengesetzte neue Einheit, Zehner genannt, betrachten, und danach zählen (Vorbegr. VI), mithin statt zehn und zehn auch zweimalzehn sagen. Hierauf folgt also: eins und zweimalzehn, zwei und zweimalzehn zehn und zweimalzehn, dafür: dreimalzehn, ferner: eins und dreimalzehn &c. bis zehnmalzehn. Die Wörter zweimalzehn, dreimalzehn &c. bis neunmalzehn, wurden durch blofse Auslassung des Wortes „mal“ und die kleine Veränderung der Silbe zehn in zig, in die etwas kürzern: zwanzig, dreizig &c. zusammengezogen; statt zehnmalzehn ist das neue Wort hundert eingeführt.

Von hier an wird nun, dem Sprachgebrauche gemäß, die gröfsere Zahl immer vor der kleineren ausgesprochen, also: hundert und eins, hundert und zwei u. s. f. bis hundert und hundert, dafür: zweihundert, indem man hundert wieder als eine Einheit, Hunderter, betrachtet. Ferner: zweihundert und eins &c. bis zehnmal hundert, wofür man das neue Wort tausend gebraucht. Die Zahl tausend betrachtet man wieder als eine neue Einheit, ebenso die Zahlen zehntausend und hunderttausend, welche letzteren aber keine besondere Namen erhalten haben. Statt tausend mal tausend sagt man: Million, und für Million mal Million: Billion; für Million mal Billion: Trillion. Die nachfolgenden wenigen Wörter kann jeder, der an solchen übersinnlichen Vorstellungen Vergnügen findet, nach dem angedeuteten Gange selbst bilden, nämlich: Quadrillion, Quintillion, Sextillion, Septillion, Octillion, Nonillion, Decillion, Undecillion, Duodecillion &c. &c. Diese letztgenannten Zahlwörter aber sind, schon von Trillion an, völlig überflüssig, weil sie nie vorkommen. Schon Billion ist eine wahre Unzahl, die man nur in seltenen Fällen gebraucht, wenn man z. B. die, wenn auch bestimmte, jedoch über alle deutliche Vorstellung gehende Entfernung der nächsten Fixsterne &c. kurz ausdrücken will.

2.

Auf diese Weise war es also möglich, alle denkbaren Zahlen mit sehr wenigen Wörtern bestimmt zu benennen. — Ursprünglich haben wir nur die zehn ersten und, wenn man die Wörter hundert, tausend, Million und höchstens noch Billion dazu rechnet, im ganzen doch nur vierzehn Wörter zu erfinden brauchen, denn die übrigen, wie

Trillion, Quadrillion &c. gehören zum wissenschaftlichen Luxus. — Wir können schon geläufig zählen, indem wir es von Jugend auf nach und nach spielend lernten. Stellen wir uns aber den ersten Zustand der Wissenschaft recht lebhaft vor, so werden wir auch dieses offenbar nicht durch Zufall entstandene, sondern wohlgedachte einfache Verfahren, die Zahlen leicht zu unterscheiden, zu würdigen wissen; wie leicht hätte nicht auch zur Qual unserer Jugend ein weit schwerer zu lernendes Verfahren entstehen können. (Siehe Anhang § 311.)

3.

Als man nun so mit dem Zählen aufs Reine gekommen war, dachte man auch auf Mittel, gewisse, ohne Zutreten der Kunst sehr beschwerliche oder gar unmögliche Rechnungen mit den Zahlen zu erleichtern. Anfangs und lange mögen sich unsere Vorfahren (die Europäer noch im 14ten Jahrhundert) mit einem mühsamen Zuzählen und Abzählen und einer gewissen Art Kopfrechnen beholfen haben, bis ein erfindungsreicher Geist, ein wahres mathematisches Genie, auf den glücklichen Gedanken kam, die Zahlenbegriffe durch ganz einfache Zeichen anzudeuten. — So wurde festgesetzt: das Zeichen 1 solle die Einheit bedeuten, das Zeichen 2 an die Zahl zwei erinnern, die Zeichen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die Zahlen drei bis neun darstellen.

Ursprünglich waren diese Zeichen ganz willkürlich; auch haben sie erst nach und nach ihre jetzige einfache Form erhalten. Jedenfalls sind die Indier die Erfinder dieser Zeichen. Von diesem gebildeten Volke sollen die Araber sie bekommen, aber immer geheimlich haben. Erst zur Zeit des Sarazenenkrieges sind diese Zeichen (von dem Europäer die arabischen Ziffern, von dem Araber selbst aber die indischen genannt) in Europa bekannt geworden. Etwas früher findet man wohl hie und da in Inschriften eine dunkle Spur derselben, ihr nützlicher und kunstgerechter Gebrauch war aber selbst im 15ten Jahrhundert noch wenigen bekannt.

4.

So wie für die Zahlen von eins bis neun, hätte man auch leicht noch für einige der folgenden einfache Zeichen erfinden können, z. B. für zehn das Zeichen: †, für elf: ⊙ &c. Allein auch hier würden Erfindungs- und Gedächtniskraft nicht ausreichen, für jede besondere Zahl ein eigentümliches Zeichen zu erfinden und zu behalten. Der höchst sinnreiche Einfall, diese Unmöglichkeit bloß durch systematische Stellung der Ziffern aufzuheben, zeugt wahrlich von großem Scharfsinn.

Setzen wir z. B. fest, daß (in Übereinstimmung mit unserm Verfahren zu zählen) die zehn einfachen Einheiten (Einer) zusammengefaßt, als eine neue Einheit (Zehner) für sich betrachtet werden und, zur Unterscheidung von den einfachen Einheiten, eine

Einheit 1sten Ranges heißen soll; ferner zehn Einheiten ersten Ranges, oder zehn Zehner, d. h. die Zahl hundert, als eine neue Einheit 2ten Ranges anzusehen u. s. f., je zehn Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höheren Ranges gelten zu lassen, so daß also tausend eine Einheit des 3ten, zehntausend eine Einheit des 4ten, hunderttausend vom 5ten, Million vom 6ten Range wird &c., so können wir, bloß mit Hilfe der neun ersten Ziffern und des nachstehenden Systems, alle möglichen Zahlen auf eine höchst einfache und bestimmte Weise bezeichnen.

Jede der neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deutet, allein stehend, durch ihre eigentümliche Figur eine bestimmte Anzahl Einheiten an, sobald sie aber in verschiedene Plätze des Systems gesetzt werden, erhalten sie auch verschiedene Bedeutung, und die Überschriften geben dem Auge schnell zu erkennen, was für Einheiten sie darstellen, ob Hunderte, ob Tausende &c. Setzt man z. B. die Ziffer 6 in den dritten Rang, so stellt sie sechs Einheiten 3ten Ranges oder die Zahl sechstausend dar &c. Um die Zahl dreißigtausend mit Ziffern zu schreiben, setzt man die Ziffer 3 in den vierten Rang, weil dreißigtausend so viel ist, als 3 Einheiten vierten Ranges. Enthält eine Zahl verschiedene Einheiten, so setzt man für jede besondere Art die sie darstellende Ziffer gehörigen Orts hin. Es ist z. B. vierunddreißigtausendzweihundertsechsfünfzig so viel, als: dreißigtausend, viertausend, zweihundert, fünfzig und sechs, wie bei (a). Ebenso schreibt man die Zahl siebenhundertundneuntausendundfünf, wie bei (b), wo die Plätze des 1sten, 2ten und 4ten Ranges unbesetzt bleiben.

	V. Rang Hndrtdsd.	IV. Rang Zehntsd.	III. Rang Tausende	II. Rang Hunderte	I. Rang Zehner	Einer	
		3	4	2	5	6	a.
	7	...	9	5	b.

Sind zwischen den mit Ziffern besetzten Plätzen keine unbesetzt, wie bei (a), so wird der Rang einer jeden Ziffer schon durch die Anzahl der rechts auf sie folgenden bestimmt; so ist z. E. die Ziffer 5 bei (a) vom ersten Range, weil rechts nur noch eine Ziffer folgt. In diesem Falle also, wo alle Ränge vom höchsten an besetzt sind, kann man das Schema offenbar entbehren, und z. E. die Zahl bei (a) kürzer so schreiben: 34256, indem man den Rang einer jeden Ziffer sehr leicht (durch lange Übung schon auf den ersten Blick) findet, wenn man die aufeinander folgenden Ziffern, von der Rechten gegen die Linke (Einer, Zehner, Hunderte &c.) in Gedanken durchläuft. Selbst in den Fällen, wo, wie bei (b), ein oder mehrere Plätze unbesetzt sind, kann man das Schema dennoch weglassen, und den Ziffern dadurch ihren gehörigen Rang anweisen, indem man die auf sie folgenden leeren Plätze durch irgend ein beliebiges, an sich bedeutungsloses Zeichen besetzt.

Man bedient sich allgemein des Zeichens 0, im Deutschen Null genannt (im Arabischen Zephirum, Zero, Ziffer). Die Zahl bei (b) kann man also kürzer so schreiben: 709005. Anfänger pflegen sich selten eine richtige Vorstellung von diesem Stellzeichen 0 zu machen. Es giebt, wie gesagt, nur den vorhergehenden Ziffern Rang und Bedeutung; auf die nachfolgenden aber hat es, als bloßer Lückenbüßer, nicht den geringsten Einfluß.

5.

Eine jede mit beliebig vielen Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen, hat nunmehr gar keine Schwierigkeit. Man braucht sich nur die Aussprache einer sechsziffrigen Zahl zu merken und sich zu erinnern, daß man dem Sprachgebrauch zufolge, die Einer vor den Zehnern, und die Einheiten der Tausende, Zehntausende und Hunderttausende auf einmal ausspricht: z. B. 26 lies: sechsundzwanzig, und nicht, wie es nach dem Schema heißen müßte: zwanzig sechs (vingt-six); 326000 lies: dreihundertsechsundzwanzig tausend, und nicht: dreihundert tausend, zwanzig tausend, sechs-tausend. Beispiele:

51207, einundfünfzigtausendzweihundertundsieben
 509004, fünfhundertundneuntausendundvier
 319039, dreihundertneunzehntausendundneunddreißig
 100070, (ein)hunderttausendundsiebzig
 111111, (ein)hundertundelftausendeinhundertundelf
 555555, fünfhundertundfünfundfünfzigtausendfünfhundertundfünf-
 undfünfzig
 700009, siebenhunderttausendundneun.

Hat eine Zahl mehr als sechs Ziffern, so teile man sie, von der Rechten gegen die Linke, in Klassen, deren jede sechs Ziffern enthält (die höchste, links stehende Klasse kann aber auch weniger haben), dadurch sind dem Auge Haltpunkte gegeben, wonach es leicht die Einheiten des 6ten, 12ten, 18ten &c. Ranges (Million, Billion, Trillion &c.) erkennt. Dies geschehen, fange man bei der höchsten Klasse an und spreche jede, als wenn sie ganz allein da stände, für sich aus, und setze am Ende einer jeden Klasse nur noch den Namen derjenigen Einheit hinzu, deren Wiederholung sie darstellt. Beispiele:

Anzahl der Trillion	Anzahl der Billion	Anzahl der Million	
2073	975403	400064	507001

lies: zweitausendunddreiundsiebzig Trillionen, neunhundertfünfund-siebzigttausendvierhundertunddrei Billionen, vierhunderttausendundvierundsechzig Millionen, fünfhundertundsiebentausendundeins.

VI	V	IV	III	II	I	
35004	701020	000303	456007	897004	290001	311450

lies; 35004 Sextillionen, 701020 Quintillionen, 303 Quadrillionen, 456007 Trillionen, 897004 Billionen, 290001 Millionen, 311450.

Soll umgekehrt eine in Worten gegebene Zahl mit Ziffern dargestellt werden, so kann man die Plätze, welche die verschiedenen Einheiten einnehmen müssen, erst durch Punkte bezeichnen, und dann die Ziffern hinschreiben.

III	II	I	
.....

6.

Diese systematische Ordnung, nach welcher man mit wenigen Ziffern alle Zahlen darstellen kann, heißt ein Zahlensystem. Da bei unserm eben erklärten und wahrscheinlich ziemlich allgemein gebräuchlichen System, das ursprünglich willkürliche Gesetz zum Grunde gelegt worden: daß jede Einheit einer links stehenden Ziffer zehnmal so groß ist, als eine Einheit der nächst rechts stehenden, so wird auch aus diesem Grunde die Zahl zehn die Grundzahl unsers Zahlensystems und das System selbst das Zehnersystem, Decimalsystem oder Dekadik genannt (*δέκα*, zehn).

Mit der schönen und nützlichen Erfindung des Zahlensystems, worüber selbst die größten Männer, wie Newton, Leibnitz, Laplace, ihre Verwunderung und hohe Achtung gezeigt haben, war der Grund zur ganzen speciellen Arithmetik gelegt, die streng genommen, schon in jener Erfindung enthalten ist, und als unmittelbare Anwendung fast ganz von selbst daraus hervorgeht.

Daß wir beim Rechnen mit Ziffern dieselben immer rückwärts schreiben müssen, rührt daher, daß im Zahlensystem der Rang der Einheiten von der Rechten gegen die Linke steigt. Diese ursprünglich von den Indiern herrührende Anordnung ist von den Abendländern beibehalten worden, obgleich sie uns im schnellen und geraden Schreiben der Ziffern hinderlich ist. Doch kann dieser kleine, wohl nur von wenigen bemerkte Übelstand leicht entschuldigt werden.

Die Griechen und Römer hatten kein solches wissenschaftlich gebildetes Zahlensystem und daher auch keine Arithmetik. Bei den Römern konnte noch ein Vormund, wegen gröblichen Betrugs vor Gericht gezogen, ungestraft mit der Entschuldigung frei kommen: er sei kein Rechenkünstler, und das um so leichter, da gewisse lichtscheue Leute das Rechnen mit Ziffern für Zauberei und Sünde erklärten, die Mathematiker und Naturforscher, wie Galilei, Bruno u. a., denen die Menschheit sowohl in materieller als geistiger Hinsicht so viel zu verdanken hat (Befreiung von dem die Welt verfinsternden Aberglauben, grausamen Hexenprozesse, Inquisition &c.), in den Kerker und auf den Scheiterhaufen warfen. (§ 312.)

Zweites Buch.

Von den vier ersten Rechnungsarten.

1. Addition.

7.

Die erste Anwendung des Zahlensystems besteht darin, mehrere Zahlen miteinander zu vereinigen, oder in einem einzigen Zahlenbegriff zusammen zu fassen. Die Zahl, welche nach der Vereinigung entsteht, und allein so groß ist, oder dieselbe Menge Einheiten enthält, als alle gegebenen Zahlen (Summanden) zusammen, heißt die Summe, und das Verfahren, dieselbe auf eine kürzere Weise als durch das mühsame Zuzählen bei eins und eins zu finden, addieren. Dieses setzt voraus, daß man die Summe je zwei einziffriger Zahlen auswendig wisse. Die Addition kann keine besondere Erfindung genannt werden, weil ihr Verfahren ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems folgt. Man schreibt nämlich die zu addierenden Zahlen so untereinander, daß nach dem Zahlensystem gleichnamige Rang-Einheiten untereinander stehen (Einer unter Einer, Zehner unter Zehner &c.) und addiert alsdann, bei den niedrigsten Einheiten anfangend, jede Reihe für sich, indem man für je zehn Einheiten einer Reihe eine Einheit auf die folgende überträgt, d. h. die in der Reihe der Einer enthaltenen Zehner zur zweiten Reihe, die in der Reihe der Zehner enthaltenen Hunderter zur dritten Reihe zählt &c. Sind sehr viele Zahlen zu addieren, so kann man auch beliebige Einschnitte machen, die Summe erst teilweise suchen und dann wieder diese Summe addieren.

Es ist offenbar gleichgültig, in welcher Folge man die Zahlen unter einander ordnet und addiert; man erhält doch immer dieselbe Menge Einheiten als deren Summe. Beispiele:

		789959										
		98879										
		357768										
		5999										
		99075										
		800										
		997997										
		60088										
		7673099										
		<hr style="width: 100%;"/>										
		10083264										
Summanden:	{	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="padding-right: 5px;">70</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">4275</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">599</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">90</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">78407</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">34</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">42549</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><hr style="width: 100%;"/></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">126024</td> </tr> </tbody> </table>	70	4275	599	90	78407	34	42549	<hr style="width: 100%;"/>	126024	
70												
4275												
599												
90												
78407												
34												
42549												
<hr style="width: 100%;"/>												
126024												
		Summe	<hr style="width: 100%;"/>									

2. Subtraktion.

8.

Die Addition lehrt aus beliebig vielen, z. B. 2 Summanden ihre Summe finden. Denkt man sich jedoch diese Summe, z. B. 12, und eine der beiden Summanden, z. B. 7, als gegebene Zahlen, um aus beiden den andern Summand $- 5 -$ zu finden, so bezeichnet man diese Operation mit dem Namen Subtraktion. Jene gegebene Zahl 12, von welcher die andere gegebene Zahl 7 abgezogen (subtrahiert) werden soll, nennt man Minuend, die letztere abzuziehende (zu subtrahierende) Zahl 7: Subtrahend. Die Zahl 5, welche man hierbei als Resultat erhält, heißt Rest, Differenz oder Unterschied. Die Regel der Subtraktion ergibt sich ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems und der Addition. Man wird nämlich den Subtrahend so unter den Minuend setzen, daß gleichnamige Einheiten untereinander stehen, und dann bei den Einern anfangend, jede Ziffer des Subtrahend von der gleichnamigen darüber stehenden im Minuend subtrahieren,* und im Fall diese Ziffer kleiner ist, die nächste links stehende Ziffer um eine Einheit verkleinern und dafür jener zehn Einheiten wieder zurechnen, alsdann kann die untenstehende Ziffer im Subtrahend von der darüber stehenden, um zehn vergrößerten subtrahiert werden (No. 2).

Ist die Ziffer, von welcher subtrahiert werden soll, zu klein und die zunächst links folgende eine Null (No. 3), so muß man weiter gehen und aus der ersten geltenden Ziffer eine Einheit wegnehmen. Für diese Einheit kann man an die Stelle der folgenden Null zehn setzen. Aus diesen zehn Einheiten wieder eine Einheit genommen, kommt an die Stelle der Null neun zu stehen &c., so daß also die erste geltende Ziffer um eine Einheit kleiner, aus jeder folgenden Null eine Neun und die zu kleine Ziffer, von welcher subtrahiert werden soll, um zehn Einheiten größer wird. Dieses Verfahren wird noch anschaulicher, wenn man nach geschehener Subtraktion den Rest wieder zum Subtrahend addiert, wo dann, wenn in beiden Operationen kein Fehler vorgefallen, der Minuend wieder erscheinen muß.

	. 10 . 10	
(1) Minuend 789	(2) $\begin{array}{r} 345\bar{3} \\ 1914 \\ \hline 1539 \end{array}$	(3) $\begin{array}{r} 3000250\bar{3} \\ 27494097 \\ \hline 2508406 \end{array}$
Subtrahend 246		
Rest 543		
	(4) $\begin{array}{r} 70040\bar{3}21 \\ 29067332 \\ \hline 40972989 \end{array}$	

* Das Wort Ziffer wird oft, der Kürze wegen, gleichbedeutend mit dem Worte Zahl gebraucht. An sich ist aber eine Ziffer ebensowenig eine Zahl, als die vier Zeichen: H, a, u, s eine wirkliche Wohnung sind.

3. Multiplikation.

9.

Sind die zu addierenden Zahlen einander gleich, z. B. $\frac{7}{7}$
 so vereinfacht die Multiplikation eine solche Addition dadurch, $\frac{7}{28}$
 daß sie nur 2 Zahlen dafür setzt. Die eine dieser beiden Zahlen giebt
 den Summand (hier 7) an und wird Multiplikand (die zu verviel-
 fachende Zahl) genannt, die andere giebt an, wieviel gleiche Summanden
 vorhanden sind (hier 4) und heißt Multiplikator (Vervielfacher).
 Die durch die Multiplikation erhaltene Zahl (jene Summe 28) wird
 Produkt (Vielfaches) genannt. Oft macht man keinen Unterschied
 zwischen Multiplikand und Multiplikator, sondern nennt die zu multi-
 plizierenden Zahlen: Faktoren. Soll also das 4fache der Zahl 7
 gesucht (7 mit 4 multipliziert) werden, so erhalte man folgendes
 Schema:

$$\begin{array}{r} \text{Multiplikand } 7 \\ \text{Multiplikator } 4 \\ \hline \text{Produkt } 28. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{Multiplikand } 7 \\ \text{Multiplikator } 4 \end{array}} \right\} \text{Faktoren.}$$

Der erste, der die schöne und wichtige Erfindung der Multi-
 plikation von mehrstelligen Faktoren machte, ist vielleicht durch
 folgende Betrachtungen darauf gekommen.

Es sei z. B. das 4253fache der Zahl 8067 zu finden. Man
 denke sich nun den Multiplikand, wie bei A angedeutet, so oft
 unter einander gesetzt, als der Multiplikator die Einheit enthält.
 Den Multiplikator denke man sich in seine einzelnen Rang-Ein-
 heiten zerlegt, wie bei B, und dann die ganze Reihe der unter-
 einander stehenden gleichen Zahlen in kleinere Abschnitte geteilt,
 wovon der erste so viele Summanden enthält, als der Multiplikator
 Einer, dann so viele gleiche Abschnitte, von je zehn Summanden, als
 der Multiplikator Zehner enthält, ferner soviel gleiche Abschnitte von
 je hundert Summanden, als der Multiplikator Hunderte enthält u. s. f.

Wenn man nun die Summe der ein-
 zelnen Abschnitte sucht und dann wieder
 diese Summen addiert, so erhält man offen-
 bar das verlangte Produkt.

Die Summe, welche 10, 100, 1000
 gleiche Summanden enthalten, findet man
 nun aber ohne alle Rechnung, wenn man
 nur überlegt, daß nach der Theorie unsers
 Zahlensystems eine Zahl 10 mal nehmen,
 nichts anderes heißt, als jede ihrer Rang-
 Einheiten in den nächst höheren Rang zu
 rücken, oder ihr bloß eine Null anzuhängen;
 eine Zahl 100 mal nehmen, soviel ist, als
 jede ihrer Rang-Einheiten um zwei Ränge
 höher zu bringen, was durch Anhängen von
 zwei Nullen geschieht.

B	A	
3	8067	
10	8067	
10	8067	
10	8067	24201
10	8067	
100	8067	
100	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
4253	8067	
	8067	80670
	8067	

u. s. w.

Man findet also die Summe der ganzen Reihe A oder das 4253fache des Multiplikand, indem man denselben erst so oft zu sich selbst addiert, als der Multiplikator Einer enthält, wie bei a, dann so oft, als der Multiplikator Zehner enthält, und der Summe eine Null anhängt, wie bei b & c. d, und endlich alle diese Summen a, b, c, d, wieder addiert, wie bei e.

a	b	c	d	e
	80670			
	80670		8067000	24201
8067	80670		8067000	403350
8067	80670	806700	8067000	1613400
8067	80670	806700	8067000	32268000
24201	403350	1613400	32268000	34308951

Da die höchste Ziffer im Multiplikator nur 9 sein kann, so folgt, daß man nach diesem Verfahren den Multiplikand nie öfter als 9 mal zu sich selbst zu addieren braucht. Macht man sich also zu diesem Gebrauch die kleine Multiplikationstabelle f, aus welcher man das Zweifache, Dreifache ... bis Neunfache einer jeden einziffrigen Zahl unmittelbar entnehmen kann, so wird die Arbeit bedeutend erleichtert, noch mehr, wenn man diese kleine, unter dem Namen Einmaleins bekannte, nützliche Tabelle im Kopfe hat, indem man dann die einzelnen Summen a, b, c, d gleich unter einander stellen kann, wie bei g.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

	g	
Multiplikand: 8067	}	Faktoren
Multiplikator: 4253	}	
	24201	
	40335	
	16134	
	32268	
Produkt: 34308951		

Man multipliziert nämlich erst mit der letzten Ziffer des Multiplikators, dann mit der vorletzten, indem man das Produkt um eine Stelle gegen die Linke rückt &c., wie bei g.

10.

Haben beide Faktoren, oder auch nur einer derselben, Nullen am Ende, so braucht man nur (wie aus der vorhergehenden Theorie leicht zu folgern ist) die bedeutlichen Ziffern miteinander zu multiplizieren,

und dem Produkte soviel Nullen anzuhängen, als beide Faktoren zusammen (am Ende) haben (No. 1 und 2). Kommen mitten im Multiplikator Nullen vor, so kann man, um einem Irrtum vorzubeugen, das Zurückrücken der einzelnen Produkte durch Punkte bemerken (No. 3). Übrigens kann man die Faktoren eines Produkts immer miteinander verwechseln, und, der leichtern Rechnung wegen, den kleinsten zum Multiplikator nehmen. (Siehe § 313.)

(1)	(2)	(3)
32	5302000	30794
4000	3400	200506
-----	-----	-----
128000	21208	184764
	15906	153970
	-----	-----
	18026800000	61588

		6174381764

4. Division.

11.

Wie aus der Addition die Subtraktion entstand, so ergibt sich in gleicher Weise aus der Multiplikation eine neue Rechnungsart: die *Division*. Bei der Multiplikation kann das gesuchte Produkt 54 aus den gegebenen Faktoren 6 und 9 entstanden sein. Denkt man sich nun umgekehrt das Produkt 54 und einen der Faktoren, z. B. 6, als gegebene Zahlen, so findet die Division den andern Faktor 9, und zwar beantwortet diese neue Rechnungsart hierbei zweierlei Fragen: 1) Wie groß der 6. Teil von 54 ist; 2) Wie oft 6 in 54 enthalten ist. Man wird in beiden Fällen eine Zahl (9) zu suchen haben, die mit dem gegebenen Faktor (6) multipliziert das gegebene Produkt (54) giebt. Man nennt alsdann die letztere, als Produkt gedachte Zahl *Dividend* (die zu teilende Zahl), den gegebenen Faktor: *Divisor* (Teiler) und den gesuchten Faktor: *Quotient* (Teil, die durch die Division gesuchte Zahl). „54 durch 6 dividiert giebt also 9“ oder „6 ist in 54 9mal enthalten.“ Hier ist 54 der *Dividend*, 6 der *Divisor*, 9 der *Quotient*.

Soll eine vielstellige Zahl durch eine andere vielstellige Zahl, z. B. 34308951 durch 4253 dividiert werden, so findet man die Regeln hierzu leicht aus folgender Betrachtung. Statt nämlich, wie es der erste Gedanke eingiebt, den *Divisor* wiederholt vom *Dividend* zu subtrahieren, und für jede Subtraktion eine Einheit in den *Quotienten* zu setzen, zeigt ein wenig Aufmerksamkeit, daß sich dieses Verfahren mit Hilfe der Multiplikation sehr abkürzen läßt. Vergleicht man die Ziffern des *Divisors* mit ebensovielen des *Dividend*, so sieht man leicht, indem man den *Divisor* mit 8 multipliziert und diesem Produkt (in Gedanken) drei Nullen anhängt, daß das 8000fache des *Divisors* noch kleiner, das 9000fache aber größer

ist, als der Dividend. Der Quotient liegt also zwischen 8000 und 9000, und 8 muß mithin dessen erste Ziffer sein. Man kann also das 8000fache des Divisors auf einmal subtrahieren. Vergleicht man wieder die Ziffern des Divisors mit ebensoviele des Restes, so sieht man, daß das 60fache des Divisors kleiner, das 70fache aber größer ist, als der Rest, und daß mithin 0 die zweite und 6 die dritte Ziffer im Quotienten sein muß &c.

Divisor	Dividend	Quotient		kürzer:	
4253	34308951	8000		34308951	8067
	34024000	60	4253	34024:::	
	284951	7		28495:	
	255180	8067		25518:	
	29771			29771	
	29771			29771	

12.

Aus den soeben erklärten vier Rechnungsarten, bei welchen sich die Multiplikation als eine vereinfachte Addition, die Subtraktion als eine Umkehrung der Addition, die Division als eine Umkehrung der Multiplikation darstellt, können noch drei andere Rechnungsarten gebildet werden und zwar das Potenzieren als eine vereinfachte Multiplikation, das Radizieren (Wurzelausziehen) und das Logarithmieren als Umkehrungen des Potenzierens. Die elementare Arithmetik bedarf jedoch zunächst nur jener vier, zuerst entwickelten Rechnungsarten. Die große Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher man mit diesen operiert, ist offenbar eine Folge des einfachen Gesetzes im Zahlensystem, daß durchgehends die Einheit einer links stehenden Ziffer ein gleichVielfaches einer Einheit der nächst rechts stehenden gilt, weshalb man auch bei allen vier Rechnungsarten an den Namen der Einheiten, mit welchen man rechnet, gar nicht zu denken braucht. Wäre statt dieses einfachen Gesetzes ein verwickelteres eingeführt worden, z. E. daß sechs Einheiten der ersten rechts stehenden Ziffer eine Einheit der zweiten, dann vier Einheiten der zweiten eine Einheit der dritten gelten solle &c., wie stände es dann um unsere schöne leichte Arithmetik?

Drittes Buch.

Zeichen, Kunstwörter, Eigenschaften der Zahlen,
Teilbarkeit, Maße &c.

13.

Jede Wissenschaft hat zur Benennung zusammengesetzter Begriffe ihre eigenen Kunstwörter, die gleich den Fürwörtern ganze Sätze vertreten und mithin zur Abkürzung des Vortrags dienen. Wer nicht alle Augenblicke auf Dunkelheiten stoßen will, muß sich die Bedeutung dieser Kunstwörter wohl merken, denn im schriftlichen Vortrage werden sie nur einmal erklärt und dann als bekannt vorausgesetzt. — Um dem Anfänger dies einleuchtend und zugleich begreiflich zu machen, daß, ohne Kunstwörter zu gebrauchen, der Vortrag unerträglich weitläufig und dadurch undeutlich werden würde, nehmen wir als Beispiel nur den Satz:

„Der Rest zum Subtrahend addiert, giebt den Minuend wieder.“
Sollte nun dieser Satz ausgesprochen werden, ohne von den eben gebrauchten Kunstwörtern Rest, Subtrahend, Minuend &c. zu profitieren, so müßte man sehr weitschweifig sagen:

„Die Zahl, welche von einer andern weggenommen worden ist, giebt, zu der Zahl, welche übrig geblieben, hinzugezählt, diejenige Zahl wieder, von welcher man erstere abgezogen hat.“

Man kann also auch solche Kunstwörter, die, wie man sieht, nicht allein zur Abkürzung des Vortrags, sondern auch zur Deutlichkeit dienen, nicht als fremde Wörter betrachten. Die meisten Kunstwörter der Mathematik sind fast in allen Sprachen dieselben. Solche Kunstwörter müssen also, eben weil sie ganze Sätze oder mehrere Vorstellungen enthalten, bevor sie gebraucht werden dürfen, immer erst erklärt werden, und das selbst, wenn man auch in der Sprache reden wollte, aus welcher sie stammen; sie lassen sich auch schon deshalb nicht durch ein einziges Wort übersetzen, weil die Begriffe, welche man mit ihnen verbindet, beim jetzigen Zustande der Wissenschaft viel größeren Inhalt haben, als sie ursprünglich, in der Kindheit der Wissenschaft, hatten.

Die Mathematik würde den Anfängern von einigermaßen gereiftem Verstande nicht so schwer vorkommen, wenn sie von Haus aus die Begriffe klar aufzufassen suchten, und Zeichen und Kunstwörter nicht miteinander verwechselten.

14.

Um kurz anzudeuten, daß mehrere Größen addiert werden sollen, verbindet man dieselben in beliebiger Folge durch das Plus- oder Additionszeichen (+), welches also abgekürzt, statt des Wortes plus (mehr) steht. Soll z. B. 3, 8 und 5 addiert werden, so ist $3 + 8 + 5$ zu setzen, gelesen: 3 plus 8 plus 5.

Soll eine Größe von einer andern subtrahiert werden, so setzt man, um dies in Zeichen anzugeben, vor die zu subtrahierende Größe das Minus- oder Subtraktionszeichen (—), z. B. $8 - 5$ lies: 8 minus (weniger) 5.

Um anzudeuten, daß zwei oder auch mehrere Faktoren miteinander multipliziert werden sollen, schreibt man die Faktoren in beliebiger Folge nacheinander hin und setzt zwischen sie das Multiplikationszeichen (\cdot), (das liegende Kreuz \times ist wenig gebräuchlich, weil es leicht mit dem Additionszeichen +, oder mit dem Buchstaben X verwechselt werden kann). Soll z. B. 8 mit 5 multipliziert werden, so schreibt man $8 \cdot 5$, oder $5 \cdot 8$, lies: 8 mal 5, oder 5 mal 8. Soll 4 mit 5, das daraus entstehende Produkt wieder mit 3, das dann entstehende Produkt wieder mit 2 multipliziert werden, welches also 120 geben würde, so deutet man dies so an: $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$, oder $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, oder $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ &c. Es ist nämlich gleichgültig, in welcher Ordnung man die Faktoren miteinander multipliziert. (§ 313).

Um anzudeuten, daß eine Größe durch eine andere dividiert werden soll, setzt man zwischen den Dividend und dem darauffolgenden Divisor ein Kolon (:), z. B. $8 : 2$, lies: „8 dividiert durch 2“. Die Division hat aber noch ein zweites Zeichen, welches gewöhnlich nur bei Brüchen angewendet wird. Es ist dies ein Strich (Bruchstrich), der zwischen dem Dividend und dem senkrecht darunter geschriebenen Divisor gesetzt wird, z. B. $\frac{10}{5}$, lies: „10 dividiert durch 5“ (oder „zehn Fünftel“).

15.

Ein aus mehreren durch + und — miteinander verbundenen Teilen gebildeter Größenausdruck heißt im allgemeinen eine vierteilige Größe, die man, so lange ihre Teile nicht in eins zusammengerechnet sind, zuweilen nach der Anzahl der Teile zu benennen pflegt, wobei man Multiplikations- und Divisions-Ausdrücke nur für einzelne Teile ansieht. So wären z. E.

$$4 \cdot 8; \frac{12}{3}; \frac{4 \cdot 6}{2} \text{ einteilige Größen.}$$

$$7 + 2; \frac{64}{8} - 2 \cdot 3 \text{ zweiseitige Größen.}$$

$$\frac{16}{2} + \frac{18}{3} - \frac{4 \cdot 9}{3} \text{ eine dreiteilige Größe.}$$

16.

Um anzudeuten, daß zwei Gröſſen-Ausdrücke am Betrage völlig gleich sind, ſetzt man zwischen beide das Gleichheitszeichen (=) und nennt dann eine ſolche durch dieſes Zeichen angedeutete Gleichheit eine Gleichung. Was dieſſeits des Gleichheitszeichens ſteht, heißt die erſte oder linke Seite, was jenseits ſteht, die zweite oder rechte Seite, und die einzelnen durch + und - verbundenen Teile die Glieder der Gleichung. So iſt z. E.

$$8 + 5 = 13; \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

$$8 - 5 = 3; \quad \frac{64}{8} - 2 \cdot 3 = 5 - 3;$$

$$\frac{3 \cdot 8}{6} = 4; \quad \frac{4 \cdot 6}{2} + 8 = 4 \cdot 6 - \frac{8}{2}$$

17.

Die Ungleichheit zweier Gröſſen deutet man durch das Zeichen < an, welches man ſo zwischen die beiden ungleichen Gröſſen ſtellt, daß die Spitze der kleinern Gröſſe zugewandt iſt, z. B. $9 > 7$ oder $7 < 9$, lies: 9 iſt größer als 7, oder 7 iſt kleiner als 9; ebenſo: $3 + 6 > 8$.

18.

Lehrsatz. Gleiches gleich behandelt, giebt Gleiches. Wenn man z. B. auf beiden Seiten einer Gleichung gleiche Gröſſen addiert oder ſubtrahiert, oder auf beiden Seiten mit einerlei Gröſſe multipliziert oder dividiert, ſo erhält man wieder eine richtige Gleichung. Es iſt z. B. $2 \cdot 6 = 8 + 4$, und wenn man auf beiden Seiten 5 addiert, ſo iſt notwendig auch: $2 \cdot 6 + 5 = 8 + 4 + 5$.

19.

Um anzudeuten, daß eine vielteilige Gröſſe als eine einzige Gröſſe betrachtet, z. B. mehrmals genommen, oder mit einer einteiligen Gröſſe multipliziert werden ſoll, ſchließt man die vielteilige Gröſſe in Klammern ein, und ſetzt vor oder hinter dieſelbe den Multiplikator, und zwar ohne Multiplikationszeichen, welches durch die Klammern entbehrlich wird. Es iſt dann einerlei, ob man die vielteilige Gröſſe erſt in eine einteilige zuſammenzieht und dieſen Betrag multipliziert, oder ob man erſt jeden Teil derſelben multipliziert und die Produkte addiert. Um die Richtigkeit einzusehen, braucht man ſich nur die vielteilige Gröſſe ſo oft als Summand (untereinander) geſetzt zu denken, als der davorſtehende Faktor

Einheiten enthält. Soll z. E. die GröÙe $3 + 5 + 1$ fünfmal genommen werden, so deutet man dies so an: $5(3 + 5 + 1)$ und es ist dann

$$5(3 + 5 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 15 + 25 + 5 = 45$$

Denn es ist:

$$5(3 + 5 + 1) = \begin{array}{r} 3 + 5 + 1 \\ 3 + 5 + 1 \\ 3 + 5 + 1 \\ 3 + 5 + 1 \\ 3 + 5 + 1 \end{array}$$

$$5(3 + 5 + 1) = \frac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{5}$$

$$5(3 + 5 + 1) = 15 + 25 + 5^*$$

20.

Soll eine vielteilige GröÙe durch eine einteilige dividiert werden, so muß es nach § 19 einerlei sein, ob man den Betrag der vielteiligen GröÙe erst zusammenrechnet und dann in die Summe dividiert, oder ob man erst in jeden Teil dividiert und die Quotienten addiert. Soll z. E. von der vielteiligen GröÙe $15 + 25 + 5$ der 5te Teil genommen werden, so deutet man dies so an: $\frac{15 + 25 + 5}{5}$, und es ist dann:

$$\frac{15 + 25 + 5}{5} = \frac{15}{5} + \frac{25}{5} + \frac{5}{5} = 3 + 5 + 1 = 9$$

21.

Wenn also mehrere Zahlen durch eine und dieselbe Zahl ohne Rest teilbar sind, so muß es auch die Summe sein. Es sind z. B. die Zahlen 15, 25, 5 durch 5 ohne Rest teilbar, und mithin auch ihre Summe 45.

22.

Ein aus mehreren Faktoren entwickeltes Produkt ist offenbar durch jeden seiner Faktoren, sowie auch durch Produkte aus je zwei, je drei derselben &c., ohne Rest teilbar und der Quotient ist dem Produkte der übrigen Faktoren gleich. Es ist z. E. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, und die Zahl 120 ist nicht allein durch 2, 3, 4 und 5, sondern auch durch $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 4 = 8$; $3 \cdot 5 = 15$ &c.; $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ &c. teilbar. Man hat z. B.:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5; \quad \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 5} = 2 \cdot 4 = 8$$

* Der Anfänger muß sich ganz besonders die §§ 19, 20, 22 und 23 merken, welche für die Folge von großer Wichtigkeit sind.

23.

Soll man zwei Zahlen, z. B. 18 und 52, miteinander multiplizieren und das Produkt durch eine dritte Zahl, z. B. 6, dividieren, in Zeichen: $\frac{18 \cdot 52}{6}$, so darf man nur in den einen Faktor dividieren und mit dem erhaltenen Quotienten den andern Faktor multiplizieren. Es ist z. B.

$$\frac{18 \cdot 52}{6} = \frac{18}{6} \cdot 52 = 3 \cdot 52 = 156.$$

Um die Richtigkeit dieses Rechnungsvorteils einzusehen, denke man sich den Multiplikand 52, achtzehnmal als Summand hingesetzt, und dann von diesen 18 gleichen Summanden den 6ten Teil genommen, nämlich 3 Summanden. Beispiele:

$$\frac{24 \cdot 36}{12} = 2 \cdot 36 = 72;$$

$$\frac{18 \cdot 49}{7} = 18 \cdot 7 = 126.$$

Um solche oft stattfindende Rechnungsvorteile benutzen zu können, kommt es sehr zu statten, wenn man es einer Zahl gleich ansehen kann, durch welche andere sie ohne Rest teilbar ist. Man merke sich daher folgende wenige, leicht zu behaltende Kennzeichen.

24.

Eine Zahl ist stets durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer es ist, wie 10; 24; 210; 506 &c.; durch 2 · 2 oder 4, wenn ihre beiden letzten Ziffern es sind, wie 100; 316; 5124; 500 &c.; durch 2 · 2 · 2 oder 8, wenn ihre drei letzten Ziffern es sind, wie 5832; 1008, 2160 &c.; durch 2 · 2 · 2 · 2 oder 16, wenn ihre vier letzten Ziffern es sind u. s. f. (§ 314.)

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer es ist, wie 10; 65; 75; 310 &c.; durch 5 · 5 oder 25, wenn die beiden letzten; durch 5 · 5 · 5 oder 125, wenn die drei letzten Ziffern es sind u. s. f. (§ 314.)

Eine Zahl ist durch 3 und 9 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern es ist; z. B. 141 ist durch 3 teilbar, weil die Summe der Ziffern 1 + 4 + 1 = 6 es ist, ebenso: 99; 111; 1101; 6504 &c.; die Zahl 5121 ist durch 9 teilbar, weil die Summe der Ziffern 5 + 1 + 2 + 1 = 9 es ist, ebenso 99; 7074; 9297; 7992 &c. (§ 314.)

Die Regeln für die Teilbarkeit durch die übrigen Zahlen, wie 7, 13, 17 &c. sind viel zu weitläufig und nicht praktisch brauchbar.

25.

Alle Zahlen, welche durch 2 ohne Rest teilbar sind, wie 2, 4, 184, 100 &c. heißen gerade, und die, welche durch 2 dividiert, 1 zum Rest lassen, wie 3, 5, 7, 101 &c. heißen ungerade.

Anmerkung. Obgleich 0 als Stellzeichen und 1 als Einheit, aus deren Wiederholung erst eine Zahl entsteht, keine Zahlen sind, so pflegt man doch oftmals, der Allgemeinheit wegen, beide zu den Zahlen zu rechnen, und zwar 0 zu den geraden und 1 zu den ungeraden.

26.

Eine Zahl, welche durch andere ohne Rest teilbar ist, sich mithin in Faktoren auflösen läßt, heißt eine zusammengesetzte Zahl oder Produktzahl, und die, durch welche sie teilbar ist, heißen Faktoren derselben. So ist z. B. 8 eine zusammengesetzte Zahl und 2 und 4 sind deren Faktoren, ebenso sind 9, 10, 12, 27 &c. zusammengesetzte Zahlen, denn: $9 = 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Diejenigen Zahlen aber, welche sich nicht durch andere ohne Rest (vielmehr nur durch 1 und sich selbst) teilen, also auch nicht in Faktoren auflösen lassen, heißen Primzahlen. Solche sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 &c. — Jede Primzahl, die erste (2) ausgenommen, ist also immer eine ungerade Zahl; nicht aber umgekehrt.

Die Mathematiker haben mehrere merkwürdige Eigenschaften der Zahlen entdeckt, aber noch keine allgemeine Kennzeichen der Primzahlen.

27.

Wenn mehrere Zahlen zugleich durch eine andere ohne Rest teilbar sind, so heißen erstere zusammengesetzte Zahlen unter sich, und letztere deren gemeinschaftliches Maß oder gemeinschaftlicher Faktor. So sind z. B. 21, 28, 14, 7 und ebenso 9, 27, 18 zusammengesetzte Zahlen unter sich; erstere haben 7 und letztere 3 und auch 9 als gemeinschaftlichen Faktor.

Zahlen aber, welche nicht zugleich durch eine andere, ohne Rest teilbar sind, heißen Primzahlen unter sich. Solche sind z. E. 8, 9 oder 17, 31.

28.

Um alle, sowohl einfache als zusammengesetzte Faktoren zu finden, durch welche eine zusammengesetzte Zahl, z. B. 210, ohne Rest teilbar ist, dividire man sie erst durch eine Primzahl, den Quotienten wieder durch eine Primzahl und so fort, bis man auf die Einheit kommt, alsdann sind alle gleich neben dem Striche stehende Zahlen die verlangten einfachen Faktoren. Multipliziert man diese je zu zwei, je drei &c. miteinander (§ 22), so

erhält man auch die zusammengesetzten Faktoren. Man multipliziert nämlich mit dem ersten neben dem Striche stehenden einfachen Faktor alle folgenden, dann mit dem zweiten alle folgenden einfachen und die daneben stehenden zusammengesetzten u. s. w. bis zu Ende. Kommen unter den einfachen Faktoren mehrere gleiche vor, so braucht man blofs den letzten gleichen Faktor zu multiplizieren (No. 2). (S. § 316.)

No. 1.	210		$210 = 2 \cdot 105$
	105	2,	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$
	35	3, 6,	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
	7	5, 10, 15, 30,	
	1	7, 14, 21, 42, 35, 70, 105.	

No. 2.	360	
	180	2,
	90	2, 4,
	45	2, 4, 8,
	15	3,
	5	3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
	1	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180.

Es ist also $210 = 2 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ und die Zahl 210 ist mithin (§ 22) durch 2, 3, 5, 7, 6, 10, 15, 30, 14, 21 &c. ohne Rest teilbar. Ebenso ist die Zahl $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ durch 2, 3, 5, 4, 8, 6, 12, &c. teilbar.

Aufgaben: Welches sind die einfachen und zusammengesetzten Faktoren a) von 4158; b) von 1836; c) von 1155.

Antwort: a) Es ist $4158 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$ mithin 3, 2, 7, 11; 9, 27, 6, 18, 54, 21, 63, 189, 14, 42, 126, 378, 33, 99, 297, 22, 66, 198, 594, 77, 231, 693, 2079, 154, 462, 1386.

b) Es ist $1836 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$; daher 2, 3, 17; 4, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 34, 68, 51, 102, 204, 153, 306, 612, 459, 918.

c) Es ist $1155 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$; daher 5, 3, 7, 11; 15, 35, 55, 21, 93, 77 &c.

29.

Die gemeinschaftlichen Faktoren mehrerer Zahlen, z. B. von 68, 88, findet man sehr leicht, wenn man diese Zahlen nach § 28 erst in Faktoren zerlegt; so ist z. B. $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$; und die Zahlen 68, 88 sind also durch 2 und $2 \cdot 2$ oder 4, als deren gemeinschaftliche Faktoren, zu gleicher Zeit teilbar. Will man aber von zwei Zahlen nur einen und zwar den grössten gemeinschaftlichen Faktor haben, so findet man diesen gewöhnlich kürzer auf folgende Weise: Man dividire (ohne auf die Quotienten zu achten) mit der kleinsten Zahl in die grösste, mit dem etwa gebliebenen

Rest in den vorhergehenden Divisor, mit dem jetzt bleibenden Rest in den nächst vorhergehenden Divisor u. s. f. mit dem letzten Rest in den vorletzten, wie No. 1 oder No. 2 es zeigt. Diejenige Zahl, durch welche die Division zuletzt aufgeht, ist der größte gemeinschaftliche Faktor der beiden Zahlen. Hiernach findet man, daß 4 der größte gemeinschaftliche Faktor von 68 und 88 ist, No. 1; ferner, daß 17 der größte gemeinschaftliche Faktor von 595 und 306 ist, nach No. 2. (§ 315.)

(1)

$$\begin{array}{r} 88 : 68 = 1 \\ \underline{68} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 : 20 = 3 \\ \underline{60} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 : 8 = 2 \\ \underline{16} \end{array}$$

$$8 : 4 = 2.$$

(2)

$$\begin{array}{r} 595 : 306 = 1 \\ \underline{306} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 306 : 289 = 1 \\ \underline{289} \end{array}$$

$$289 : 17 = 17.$$

Aufgaben: Welches ist der größte gemeinschaftliche Faktor von 235 und 564; von 1240 und 372; von 65 und 112.

Antwort: Für die beiden ersten Zahlen ist es 47, für die beiden folgenden 124; die beiden Zahlen 65 und 112 haben keinen gemeinschaftlichen Faktor und sind also Primzahlen unter sich.

30.

Beim Addieren und Subtrahieren der Brüche wird in der Folge häufig die Aufgabe vorkommen, die kleinste Zahl zu finden, welche durch mehrere gegebene Zahlen ohne Rest teilbar ist. Diese Zahl findet man folgendermaßen sehr leicht: erstlich kann man diejenigen der gegebenen Zahlen, welche schon in andern enthalten sind, auslassen; haben alsdann von den übrigen noch zwei oder mehrere einen Faktor gemeinschaftlich, so kann man sie durch diesen gemeinschaftlichen Faktor dividieren, und statt dieser Zahlen den gemeinschaftlichen Faktor und die erhaltenen Quotienten setzen. Werden dann diese miteinander und mit den etwa noch übrigen Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, multipliziert, so ist das Produkt die kleinstmögliche Zahl, welche durch alle gegebene ohne Rest teilbar ist. Sucht man z. E. eine Zahl, welche durch 2, 5, 4, 18, 6, 9, 10, 24, 35, 21 teilbar ist, so würde nach § 22 das Produkt aus diesen Zahlen die verlangte Eigenschaft haben; um aber die kleinstmögliche Zahl zu erhalten, kann man offenbar die Zahlen 2, 5, 4, 6 und 9, als schon in den übrigen 18, 10, 24, 35 enthalten, auslassen, denn weil das Produkt aus den übrigen Zahlen 18, 10, 24, 35, 21 durch $18 = 2 \cdot 9$, durch $10 = 2 \cdot 5$; durch $24 = 4 \cdot 6$ &c. teilbar ist, so ist es offenbar auch durch die ausgestrichenen Zahlen 2, 5, 4, 6 &c. teilbar. Von den übrig gebliebenen Zahlen bei (a) haben 18 und 24 den Faktor 6 gemeinschaft-

lich; dividiert man durch diesen herausgesetzten Faktor, so erhält man die Reihe Zahlen bei b, wo wieder die Zahl 3, als in 21 enthalten, weggelassen wird; außerdem haben 10 und 35 noch den Faktor 5 gemeinschaftlich; diesen ebenfalls herausgesetzt, kommt die Zahlenreihe bei c, wo man wieder 2 als in 4, und 7 als in 21 enthalten, auslöst. Die übrigen, 4, 21, welche Primzahlen unter sich sind, sowie die herausgesetzten gemeinschaftlichen Faktoren, 6, 5, muß man nun miteinander multiplizieren. Daß durch dieses Verfahren das gefundene Produkt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 21 = 2520$ notwendig die Faktoren $6 \cdot 3$; $3 \cdot 3$; $2 \cdot 5$; $5 \cdot 7$ behalten, folglich auch durch 18, 9, 10, 35 &c. teilbar sein muß, ist leicht einzusehen (§ 22). Es ist mithin: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 21 = 2520$, als die gesuchte kleinste, durch 2, 5, 4, 18... teilbare Zahl.

$$\begin{array}{r}
 \underline{2, 3, 4, 18, 6, 9, 10, 24, 35, 21} \\
 \underline{18, 10, 24, 35, 21} \text{ (a)} \\
 \underline{6) 3, 10, 4, 35, 21} \text{ (b)} \\
 \underline{5) 2, 4, 7, 21} \text{ (c)} \\
 \underline{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 21 = 2520}
 \end{array}$$

Ebenso findet man 5040, als die kleinste, durch 6, 9, 5, 7, 21, 56, 8, 12, 10, 16 teilbare Zahl.

$$\begin{array}{r}
 \text{(No. 2.)} \quad \underline{6, 9, 3, 7, 21, 56, 8, 12, 10, 16} \\
 \underline{9, 21, 56, 12, 10, 16} \\
 \underline{3) 3, 7, 56, 4, 10, 16} \\
 \underline{8) 3, 7, 10, 2} \\
 \underline{3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 = 5040}
 \end{array}$$

Aufgaben: Welches sind die kleinsten, durch 2, 11, 9, 21, 8, 18, 7, 22; durch 2, 3, 4, 6; durch 5, 12, 20, 15; durch 124, 100 teilbare Zahlen?

Antwort: 5544; 12; 60; 8100.

Viertes Buch.

Von den gewöhnlichen (gemeinen) Brüchen.

31.

Um von der GröÙe einer Sache eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, muß diese GröÙe mit einer gleichartigen, welche als Einheit dient, verglichen und ausgemessen werden (Vorbegr. I). Nun kann es sich aber häufig treffen, daß die Einheit in der auszumessenden GröÙe nicht genaue Male enthalten ist, oder daß, nachdem sie einigemal darin abgesetzt worden, noch ein Stück zu messen übrig bleibt, welches kleiner ist, als die Einheit. In diesem Fall bleibt dann kein anderes Mittel, als das übrig gebliebene Stück mit einer andern und zwar kleinern Einheit auszumessen. Diese zweite Einheit wird man aber nicht willkürlich annehmen, sondern, der einfachern Vorstellung wegen, von der erstern ableiten. Hat man nämlich eine deutliche Vorstellung von der GröÙe der zuerst angelegten Einheit, so hat man zugleich auch eine deutliche Vorstellung von einem jeden bestimmten Teil derselben. Läßt sich nun irgend ein bestimmter Teil der Einheit (z. B. der 3te, 8te, 100ste &c.) angeben, welcher genaue Male in dem überschüssigen Teil der auszumessenden GröÙe enthalten ist, so kann man diesen als die zweite Einheit nehmen. Weiß man dann, wie oft die gröÙere Einheit in der GröÙe und ebenso, wie oft die kleinere Einheit in dem überschüssigen Teil enthalten ist, so geben die Vorstellungen dieser beiden verschiedenen Einheiten und der daraus gebildeten Zahlen eine deutliche Vorstellung von der fraglichen GröÙe.

Von den beiden verschiedenen Einheiten kann man die erste sckicklicher Weise die ganze Einheit und die andere, als ein von dieser ganzen Einheit abgebrochener Teil, die Bruch-Einheit, und sonach die aus der ersten Einheit gebildete Zahl die ganze Zahl, und die aus der Bruch-Einheit gebildete Zahl die

Bruch-Zahl oder Bruch, und beiderlei Zahlen zusammen eine gemischte Zahl nennen. (Ein Bruch ist also insofern eine ganze Zahl, als er, wie diese, eine bestimmte Menge von Einheiten enthält, denn nur auf die Einheit bezieht sich das Wort Bruch.)

32.

Um diese verschiedenen Zahlen kurz und deutlich mit Ziffern bezeichnen zu können, hat man folgendes festgesetzt: Die ganze Einheit und die ganze Zahl wird wie gewöhnlich bezeichnet, die Bruch-Einheit aber dadurch, daß man unter das Zeichen für die ganze Einheit einen wagerechten Strich zieht (¹), und unter diesen Strich diejenige Zahl setzt, welche angiebt, der wievielte Teil der größeren Einheit zur Bruch-Einheit genommen ist, der Bruch selbst dadurch, daß man die Zahl, welche die Wiederholung der Bruch-Einheit angiebt oder zählt, über den Strich, statt des Einheitszeichens, setzt. Wäre z. E. der 8te Teil eines Meters in einer damit angemessenen Länge 5mal enthalten, so würde $\frac{5}{8}$ Meter die Bruch-Einheit und $\frac{5}{8}$ Meter die Bruchzahl darstellen.

Die Zahl, welche über dem Striche steht und die Anzahl der Bruch-Einheiten angiebt (zählt), heißt der Zähler, die unter dem Striche stehende Zahl, welcher man beim Aussprechen die Endung tel anhängt, heißt der Nenner des Bruchs. Beide Benennungen sind nicht unpassend. So ist z. E. im Bruche $\frac{5}{8}$ (lies: fünf Achtel) 5 der Zähler, 8 der Nenner und $\frac{1}{8}$ die Einheit; in $\frac{15}{34}$ ist $\frac{1}{34}$ die Einheit, 34 der Nenner und 15 der Zähler.

Eine gemischte Zahl wird dargestellt, indem man die Bruchzahl unmittelbar neben die ganze setzt, z. B. $7\frac{5}{8}$ (lies: sieben fünf Achtel) d. h. 7 ganze Einheiten und 5mal den 8ten Teil der ganzen Einheit (gleichbedeutend mit $7 + \frac{5}{8}$).

33.

Die Bezeichnung eines Bruchs (welche ursprünglich anders war) stimmt mit der Andeutung einer Division überein. Auch kann man immer eine angedeutete Division als einen Bruch und umgekehrt einen Bruch als eine angedeutete Division betrachten. Es ist z. B. gleichgültig, ob man sagt: $\frac{3}{4}$ kg heiße so viel, als: dreimal den vierten Teil von einem Kilogramm oder einmal den vierten Teil von drei Kilogramm. Dies wird deutlicher, wenn man die benannte Einheit, 1 Kilogramm, in kleinere auflöst; so ist z. B. 1 kg = 1000 g, mithin $3 \text{ kg} = 3 \cdot 1000 \text{ gr} = 3000 \text{ g}$. Ob man nun den 4ten Teil von 1000 g 3mal, oder den 4ten

Teil von 3000 g 1mal nimmt, das ist gleichgültig; $3 \cdot \frac{1000}{4} = \frac{3 \cdot 1000}{4} = 750$. (§ 23.) Ebenso ist es einerlei, ob man sagt, $\frac{8}{4}$ heisse: 8 dividiert durch 4, oder acht Viertel &c.; denn jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{1000}{1000}$ &c., ist offenbar der Einheit gleich und daher sind auch 8 Viertel so viel als 2mal $\frac{4}{4}$, d. i. zwei Ganze.

34.

Man kann daher auch jede ganze Zahl in Bruchform mit beliebigem Nenner darstellen, wenn man die ganze Zahl erst mit dem Nenner multipliziert und dem Produkte den Nenner wieder unterschreibt. Soll z. E. die Zahl 7 als Bruch mit dem Nenner 4 oder 5 dargestellt werden, so ist $7 = \frac{4 \cdot 7}{4} = \frac{28}{4}$; $7 = \frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5}$ &c. Ebenso kann man jede gemischte Zahl als eine einzige Bruchzahl darstellen, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruchs multipliziert, zum Produkte den Zähler addiert, und der Summe den Nenner wieder unterschreibt. Dies nennt man eine gemischte Zahl einrichten. So ist z. B. $7\frac{5}{8} = \frac{8 \cdot 7 + 5}{8} = \frac{61}{8}$; $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $200\frac{11}{13} = \frac{2611}{13}$ &c. Übrigens werden alle Brüche, deren Zähler größer ist, als der Nenner, wie $\frac{61}{8}$, $\frac{8}{3}$ &c., unechte, und die, deren Zähler kleiner ist, als der Nenner, wie $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ &c., echte Brüche genannt.

35.

Die Fälle, wo man bei der Ausmessung und Vergleichung der Größen auf Brüche kommt, sind folgende zwei:

1) wenn die auszumessende Größe eine stetige (kontinuierliche) ist, und die Einheit nicht genau darin paßt. Da dieser Fall aber alle Augenblicke vorkommt, so ist schon im Voraus dafür gesorgt, daß die meisten Einheiten, welche im gewöhnlichen Leben gebraucht werden, in die erforderlichen Unterabteilungen geteilt sind. So hat man z. E. von der Gewichts-Einheit, Kilogramm genannt, auch zugleich den 10ten, 100sten, 1000sten &c. Teil; von der Längen-Einheit Meter, den 10ten, 100sten Teil &c. Einige dieser kleineren Bruch-Einheiten haben besondere Namen erhalten. Umgekehrt können die kleineren Einheiten, ohne ihre besondere Namen nötig zu haben, wieder als Bruchteile einer größeren Einheit dargestellt werden, wenn man nur weiß, wieviel kleinere Einheiten auf die größere gehen.

2) Bei der Vergleichung, Ausmessung und Teilung der un-stetigen Größen durch Division kommt man ebenfalls auf Brüche.

Da man bei der Division allemal untersucht, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, so kann oder muß man den Divisor immer als eine aus mehreren gleichen Teilen zusammengesetzte Einheit betrachten, und dann folgende drei Fälle unterscheiden: erstens, fragt man: wieviel mal so groß eine Größe ist, als eine andere gleichartige, so ist der Quotient allemal eine unbenannte Zahl, die bloß von dem Verhältnis der beiden verglichenen Größen, nicht aber von deren wirklichen Größe oder Benennung abhängt. Fragt man z. E.: wieviel mal so groß 20 ist, als 4, 20 *Rp.*: so groß als 4 *Rp.*: 80 m so groß, als 16 m &c., so ist die Antwort bei allen: 5mal. Ist der Divisor nicht genau Male im Dividend enthalten, so muß man den Rest des Dividend mit untergelegtem Divisor den ganzen Einheiten des Quotienten als Bruch anhängen; fragt man z. B.: wieviel mal so groß ist 23 als 4, so ist die Antwort: der Maßstab 4 ist im Dividend 5 ganze Mal, und in dem Reste 3 ist der 4te Teil des Maßstabes (1) noch 3mal enthalten, nämlich $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$, mithin ist 23 gerade $5\frac{3}{4}$ mal so groß als 4; ebenso ist $\frac{9}{3\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{2}$; fragt man: wie oft ist 8 in 3 enthalten, so ist die Antwort: $\frac{8}{3}$ mal &c.; zweitens, wenn man niedere Einheiten auf höhere reduziert, alsdann wird der Einheit des unbenannten Quotienten die Benennung derjenigen höhern Einheit beigelegt, welche dem Divisor gleich gilt. Fragt man z. B.: wieviel Kilo sind 4000 g, so ist, weil $\frac{4000 \text{ g}}{1000 \text{ g}} = 4$, 4000 g = 4 kg, 556 g = $\frac{556}{1000}$ kg &c.; drittens, wenn von einer Größe ein bestimmter Teil gesucht wird, in welchem Fall also der Quotient mit dem Dividend gleichartig ist. So ist z. B. der 4te Teil von 23 *M* $5\frac{3}{4}$ *M*; nämlich 5 ganze Mark und von den übrig bleibenden 3 *M* noch den 4ten Teil (§ 33). Ebenso ist $\frac{3}{6} \text{ L} = 5\frac{3}{8} \text{ L}$ &c.

Wer nun das Bisherige gut verstanden hat, und sich noch die folgenden fünf Sätze recht klar macht, der wird auch mit gebrochenen Zahlen ebenso leicht, als mit ganzen Zahlen rechnen.

36.

Wenn man den Zähler eines Bruchs mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, so wird der Bruch soviel mal so groß oder so klein, als der Multiplikator oder Divisor die Einheit enthält.

Multipliziert man z. B. den Zähler des Bruchs $\frac{6}{3\frac{1}{2}}$ mit 3, so erhält man den Bruch $\frac{18}{3\frac{1}{2}}$; ersterer enthält die Einheit $\frac{6}{3\frac{1}{2}}$ 6 mal, letzterer aber dieselbe Einheit 18mal, und daß nun 18 Einheiten 3mal soviel ist, als 6 Einheiten derselben Art, ist zu begreifen. Dividiert man den Zähler des Bruchs $\frac{6}{3\frac{1}{2}}$ durch 3, so wird er $\frac{2}{3\frac{1}{2}}$ und dieser Bruch ist offenbar nur der 3te Teil des vorhergehenden. Ebenso ist $\frac{2}{3} \frac{4}{3}$ 6mal so groß, als $\frac{4}{3}$, und $\frac{3}{8}$ der 8te Teil von $\frac{3}{8}$ &c.

Wenn man aber den *Nenner* eines Bruchs mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, so wird der Bruch, gerade umgekehrt, soviel mal so klein oder so groß, als der Multiplikator oder Divisor die Einheit enthält.

Dieser umgekehrte Satz des vorhergehenden, den Anfänger aber nicht so leicht zu begreifen pflegen, wird augenblicklich klar, wenn man sich die Bruch-Einheit nur als eine wirkliche Sache, etwa als eine Länge denkt. Multipliziert man z. E. den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ Meter mit 4, so erhält man $\frac{3}{64}$ Meter; denkt man sich nun die Länge des Meters einmal in 16 und einmal in 64 gleiche Teile (mithin jeden der 16 gleiche Teile nochmals in vier gleiche Teile) geteilt, so ist der 16te Teil des Meters, oder die Bruch-Einheit $\frac{1}{16}$ Meter, offenbar 4mal so groß, als der 64ste Teil oder als die Einheit $\frac{1}{64}$ Meter, und folglich ist auch die aus letzterer viermal so kleinen Einheit ($\frac{1}{64}$) gebildete Zahl $\frac{3}{64}$ viermal so klein, als die Zahl $\frac{3}{16}$; denn von zwei gleich großen Zahlen ist die eine immer soviel mal so groß oder so klein, als ihre Einheit so groß oder so klein ist. Man denke sich z. B. die Einheiten 1 *M.*, 2 *M.*, 3 *M.*, so ist doch eine beliebige Anzahl 1-*M.*-Stücke nur halb so groß, als eine gleiche Menge 2-*M.*-Stücke, und nur ein Drittel so groß, als eine gleiche Menge 3-*M.*-Stücke.

Dividiert man den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ durch 4, so kommt $\frac{3}{4}$ und dieser Bruch $\frac{3}{4}$ ist viermal so groß, als $\frac{3}{16}$, weil die Einheit $\frac{1}{4}$ viermal so groß ist, als $\frac{1}{16}$. Ebenso ist $\frac{2}{3}$ zweimal so groß, als $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{2}$ aber nur halb so groß, als $\frac{1}{4}$ &c.

Der Wert eines Bruchs bleibt also völlig un geändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl multipliziert oder dividiert.

Multipliziert man z. E. Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{7}$ mit 3, so erhält er die Form: $\frac{18}{21}$; die Einheit $\frac{1}{21}$ ist hier 3mal so klein, als $\frac{1}{7}$, dafür sind aber auch 3mal soviel Einheiten genommen, mithin ist $\frac{6}{7} = \frac{18}{21}$; dividiert man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{7}$ durch 3, so erhält er die Form $\frac{2}{7}$, hier ist die Einheit $\frac{1}{7}$ dreimal so groß, als $\frac{1}{21}$, dafür sind aber auch 3mal so wenig Einheiten genommen, folglich ist auch $\frac{6}{7} = \frac{2}{7}$. Man kann also einen Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, unter unzähligen verschiedenen Formen darstellen.

Jeden Bruch drückt man gewöhnlich gern durch die möglichst kleinsten Zahlen aus, indem man Zähler und Nenner entweder auf einmal durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß (§ 29), oder wiederholt durch solche Zahlen dividiert, durch welche sie teilbar sind, bis Zähler und Nenner Primzahlen unter sich werden, welches

man einen Bruch kürzen nennt. Der Bruch $\frac{3}{4}$ erhält, wie (1) oder (2) gekürzt, die einfachere Form $\frac{3}{4}$.

$$(1) \frac{13}{24} = \frac{3}{4}.$$

$$(1) \frac{24}{24} = \frac{12}{12} = \frac{6}{6} = \frac{3}{4}.$$

Aufgaben: Wie stehen folgende Brüche gekürzt: $\frac{7}{14}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{31}{93}$, $\frac{111}{635}$, $\frac{194}{4559}$, $\frac{111}{9111}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{5300}{7897}$, $\frac{72}{54}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{8599}{9983}$, $\frac{7141}{7913}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{21}{54}$, $\frac{8}{9}$.

Antwort: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{37}{212}$, $\frac{2}{47}$, $\frac{37}{3037}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{100}{149}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{127}{149}$, $\frac{37}{41}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{9}$.

40.

Soll umgekehrt ein Bruch, ohne Veränderung seines Wertes, auf einen neuen Nenner gebracht werden, der ein genaues Vielfache des alten ist, so braucht man offenbar nur den alten Zähler ebensoviel mal so groß zu nehmen, als der neue Nenner es ist (§ 38). Man dividire nämlich mit dem alten Nenner in den vorgeschriebenen neuen Nenner und multipliziere mit dem Quotienten den alten Zähler, so ist das Produkt der neue Zähler. Soll z. B. der Bruch $\frac{4}{5}$ auf den neuen Nenner 45 gebracht werden, so ist $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$. Ebenso ist $\frac{3}{8}$ auf den Nenner 12 gebracht = $\frac{9}{12}$ &c.

Aufgaben: Folgende Brüche auf die angedeutete Form zu bringen:

$$\frac{5}{8} = \frac{\quad}{144}; \frac{6}{17} = \frac{\quad}{51}; \frac{7}{84} = \frac{\quad}{252}; \frac{9}{13} = \frac{\quad}{2613}.$$

$$\text{Antwort: Es ist: } \frac{5}{8} = \frac{120}{144}; \frac{6}{17} = \frac{18}{51}; \frac{7}{84} = \frac{60}{84}; \frac{9}{13} = \frac{1809}{2613}.$$

41.

Um mehrere Brüche von verschiedenen Nennern der Größe nach miteinander vergleichen zu können, müssen sie erst alle auf einerlei Bruch-Einheit oder Nenner gebracht werden. Diese Aufgabe ist nicht schwer, indem man nach § 30 leicht eine solche Zahl finden kann, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Sollen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{8}$, alle auf einerlei Nenner (Generalnenner) gebracht werden, so findet man (§ 30) 72 als die kleinste, durch 3, 4, 6, 9, 12, 8 teilbare Zahl, mithin können (§ 40) alle Brüche auf diesen neuen Nenner 72 gebracht werden. Es ist nämlich:

$$\frac{2}{3} = \frac{48}{72}; \frac{3}{4} = \frac{54}{72}; \frac{5}{6} = \frac{60}{72}; \frac{7}{8} = \frac{63}{72}; \frac{11}{12} = \frac{66}{72}; \frac{5}{8} = \frac{45}{72}.$$

42.

Addition. Man kann unmittelbar nur solche Zahlen addieren, welche aus gleich großen Einheiten gebildet sind. Haben also die zu addierenden Bruchzahlen nicht einerlei Nenner, so müssen sie erst auf einerlei Nenner gebracht oder gleichnamig gemacht werden. Alsdann addiere man nur ihre Zähler und bezeichne die Größe der Einheit in der Summe durch die Unterschrift des allgemeinen Nenners. Sind gemischte Zahlen zu addieren, so addiere man die ganzen und

die Bruchzahlen, jede besonders. So ist z. B. $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$; $\frac{3}{17} + \frac{5}{17} + \frac{9}{17} + \frac{1}{17} = \frac{18}{17} = 1\frac{1}{17}$. Ebenso $3\frac{2}{17} + 2\frac{6}{17} = 5\frac{8}{17}$. Sind viele Brüche zu addieren, so kann man sie, der Bequemlichkeit wegen, erst untereinander ordnen, wie bei (1). Gewöhnlich verfährt man weniger umständlich, wie bei (2).

$$(1) \quad 1080 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$$

2	720	
3	810	
4	900	3 · 4 · 6 · 8 · 9 · 27 · 15 · 108 · 54
5	945	
6	560	3) 8 · 5 · 36
7	480	4) 2 · 5 · 9
8	504	
9	50	3 · 4 · 2 · 5 · 9 = 1080
10	140	

$$\text{Summe: } \frac{5109}{1080} = 4\frac{789}{1080} = 4\frac{863}{600}.$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{1}{2} = \frac{63 + 60 + 77}{7 \cdot 12} = \frac{200}{84} = 2\frac{8}{21}.$$

Der allgemeine Nenner bei (1) ist 1080 (§ 30). Der erste Bruch $\frac{3}{8}$ auf diesen Nenner gebracht, ist $= \frac{720}{1080}$; ebenso ist $\frac{5}{8} = \frac{675}{1080}$ &c. Man dividiert nämlich mit jedem alten Nenner in den allgemeinen Nenner 1080, und multipliziert mit dem Quotienten die alten Zähler, so erhält man die nebenstehenden neuen Zähler. Die Quotienten erhält man oftmals leichter, wenn man die Faktoren des allgemeinen Nenners beibehält; so sieht man z. B. gleich, daß 15 in 1080, 72mal enthalten ist, weil $\frac{1080}{15} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 5} = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$ &c.

Kopfrechnen, welches man mehr üben sollte, kommt bei der Bruchrechnung ungemein zu statten. So berechnet man z. E. leicht im Kopfe, daß $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{4} + \frac{5}{8} = 1\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = 1\frac{9}{8}$, indem man den Zähler des ersten Bruchs mit 4, des andern mit 3 multipliziert; ferner: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{3}{8} = \frac{2}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ (mit 4 und 7 multipliziert); $\frac{2}{5} + \frac{7}{8} = \frac{16 + 63}{8 \cdot 9} = \frac{79}{72} = 1\frac{7}{72}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 1\frac{7}{8}$ (die Zähler der beiden ersten Brüche mit 4 und 2 multipliziert):

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{2}{8} + \frac{7}{8} = 2\frac{1}{8} + 1\frac{3}{8} = 3\frac{4}{8}$$

(indem man die drei ersten und zwei letzten Brüche besonders addiert).

Aufgaben. Addiere:

- 1) $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8} + \frac{5}{21} + \frac{1}{3}$.
- 2) $12\frac{2}{9} + 3\frac{1}{2} + 4\frac{7}{15} + \frac{1}{4} + 2\frac{8}{15} + \frac{2}{3}$.
- 3) $\frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{7}{4} + \frac{8}{19} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{9}{12}$.
- 4) $\frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{3}{6 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 4 \cdot 8} + \frac{5}{1 \cdot 9}$.
- 5) $\frac{3}{7} + \frac{5}{9} + \frac{1}{4} + \frac{5}{18} + 3\frac{2}{3} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 5}$.
- 6) $\frac{5}{16} + \frac{3}{5} + \frac{1}{24} + \frac{9}{11} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{11}$.
- 7) $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100} + \frac{1}{5}$.

Antwort: Man findet $3\frac{139}{1080}$, $23\frac{23}{80}$, 7 , $\frac{227}{372}$, $5\frac{1}{120}$, $4\frac{29}{240}$, $\frac{761}{1000}$.

43.

Subtraktion. Hier gilt dasselbe wie bei der Addition. Sind nämlich die Brüche nicht gleichnamig, so müssen sie erst gleichnamig gemacht werden. Alsdann braucht man nur den Zähler des Subtrahend vom Zähler des Minuend zu subtrahieren, und dem Rest den gemeinschaftlichen Nenner unterzuschreiben. So ist z. B.

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}.$$

Ist ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahieren, so muß man erst eine Einheit vom Minuend nehmen, und diese in einen Bruch von demselben Nenner, welchen der Subtrahend hat, auflösen. So ist z. B.:

$$5 - \frac{2}{7} = 4\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = 4\frac{5}{7}.$$

$$16 - \frac{19}{139} = 15\frac{139}{139} - \frac{19}{139} = 15\frac{120}{139}.$$

Sind gemischte Zahlen voneinander zu subtrahieren, so mache man die Brüche erst gleichnamig und subtrahiere die Brüche und die Ganzen, jede besonders. Ist der Bruch im Subtrahend größer, als der im Minuend, so muß man eine ganze Einheit des Minuends in Brucheinheiten auflösen, z. B.:

$$5\frac{7}{8} - 1\frac{2}{3} = 5\frac{21}{24} - 1\frac{16}{24} = 4\frac{5}{24}.$$

$$14\frac{2}{3} - 2\frac{7}{8} = 13\frac{16}{24} - 2\frac{21}{24} = 11\frac{9}{24}.$$

Es ist nämlich, im letztern Beispiel, $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$, und $14 = 13\frac{24}{24}$, folglich $14\frac{2}{3} = 13\frac{16}{24}$. Statt aber die beiden Zähler 24 und 16 erst zu addieren und von ihrer Summe (40) den Zähler 21 zu subtrahieren, ist es offenbar bequemer, ihn von 24 zu subtrahieren und den Rest zu 16 zu addieren.

Aufgaben: $\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$; $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; $\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$; $3 - \frac{2}{3}$; $5\frac{5}{12} - 2\frac{11}{12}$;
 $22\frac{5}{7} - 4\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6} - \frac{5}{8}$; $\frac{1}{7} - \frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}$; $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$; $4\frac{8}{15} - 2\frac{5}{9}$.

Antwort: $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $2\frac{1}{2}$, $17\frac{27}{88}$, $\frac{77}{123}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{90}$, $1\frac{44}{45}$.

44.

Multiplikation. Die leicht zu behaltende und leicht auszuführende Regel für die Multiplikation zweier Brüche heißt: multipliziere Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Diese gleich näher zu erläuternde Regel begreift alle Fälle. Ist nämlich einer der Faktoren eine ganze Zahl, so kann man darunter 1 als Nenner gesetzt denken; ist einer der beiden Faktoren oder auch beide gemischte Zahlen, so kann man sie erst einrichten, z. B.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{7}{45}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{28}{45}$$

$$\begin{aligned}
 4 \cdot \frac{7}{9} &= \frac{4}{1} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9} \\
 2\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} &= \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{36} = 2\frac{5}{36} \\
 2\frac{3}{4} \cdot 2\frac{7}{9} &= \frac{11}{4} \cdot \frac{25}{9} = \frac{275}{36} = 7\frac{23}{36}.
 \end{aligned}$$

Erläuterung. Die Multiplikation verlangt eine GröÙe (den Multiplikand) so oft zu nehmen, als eine andere GröÙe (der Multiplikator) die Einheit enthält. Ist nun z. B. $\frac{1}{3}$ der Multiplikator und $\frac{7}{9}$ der Multiplikand, so enthält der Multiplikator, $\frac{1}{3}$, nicht die ganze Einheit, sondern nur den 5ten Teil derselben einmal, mithin, muß auch nicht die ganze GröÙe $\frac{7}{9}$, sondern nur der 5te Teil derselben einmal genommen werden. Nach § 37 erhält man aber den 5ten Teil von $\frac{7}{9}$, wenn man den Nenner 9 fünfmal so groß macht; daher $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{27}$. Anfänger pflegen immer mit Befremden zu äußern, daß dieser Fall, $\frac{1}{3}$ mal $\frac{7}{9} = \frac{7}{27}$, zur Multiplikation gerechnet wird, da doch die GröÙe $\frac{7}{9}$ nicht vervielfacht, sondern, gerade umgekehrt, dividiert ist. Diese scheinbare Verwechslung der Begriffe (Multiplikation mit Division) wird aber gleich berichtigt und alle Schwierigkeit fällt weg, wenn man nur bedenkt, daß man von einer GröÙe sowohl ein Bruchfaches als Vielfaches nehmen kann, daß die Redensarten: den 5ten Teil von einer GröÙe nehmen, oder die GröÙe $\frac{1}{5}$ mal nehmen (mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren) einerlei sagen, und daß man eben deshalb den Begriff der Multiplikation nicht in dem § 9 angegebenen engen Sinn, sondern in dem angedeuteten weitern Sinn nehmen muß, nämlich, multiplizieren heißt: eine GröÙe so oft nehmen, als eine andere die Einheit enthält. Diesem allgemeinem Begriffe der Multiplikation zufolge muß also auch den Kunstwörtern: Multiplikand, Multiplikator, Produkt, allgemeinere Bedeutung beigelegt werden, und z. E. das Wort Produkt sowohl das Vielfache einer GröÙe als das Bruchfache (Teile) derselben bedeuten. Multiplikand heißt hiernach jede GröÙe, wenn sie entweder selbst oder auch nur ein Teil von ihr vervielfältigt werden soll; Multiplikator diejenige, welche angiebt, wie oft der ganze Multiplikand oder ein Teil von ihm genommen werden soll. Aus dieser Erklärung folgt mit Hilfe der §§ 37 und 36 sogleich die oben aufgestellte Multiplikationsregel.

Ist z. B. $\frac{4}{3}$ der Multiplikator und $\frac{7}{9}$ der Multiplikand, so enthält der Multiplikator den 5ten Teil der Einheit 4mal, mithin muß auch der 5te Teil (ein Fünftel) vom Multiplikand 4mal genommen werden. Der 5te Teil von $\frac{7}{9}$ ist (nach § 37) $= \frac{7}{45}$. Nimmt man diesen Teil 4mal (indem man nach § 36 den Zähler 7 mit 4 multipliziert), so erhält man $\frac{28}{45}$, daher $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$. Die Aufgabe, eine GröÙe $\frac{4}{3}$ mal nehmen, enthält also eine Division und Multiplikation zugleich.

45.

Sind mehrere Brüche miteinander zu multiplizieren, so muß man alle Zähler und ebenso alle Nenner miteinander multiplizieren.

Soll z. B. $\frac{8}{9}$ mit $\frac{4}{7}$, das daraus entstehende Produkt mit $\frac{2}{5}$, das dann entstehende Produkt wieder mit $\frac{1}{3}$ multipliziert werden, so hat man:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{64}{945}$$

Ist der Multiplikator ein echter Bruch, so ist das Produkt natürlich immer kleiner, als der Multiplikand. Sind also alle Faktoren echte Brüche, so ist das Produkt immer kleiner, als jeder einzelne Faktor. Es ist z. B. $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{24}{105}$ und $\frac{24}{105} < \frac{1}{3}$, $\frac{24}{105} < \frac{4}{5}$ &c.

46.

Haben Zähler und Nenner der miteinander zu multiplizierenden Brüche Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegen einander aufheben, indem es einerlei ist, ob man dies vor oder nach vollzogener Multiplikation thut (§§ 22, 39). Anfänger pflegen diesen häufig stattfindenden Rechnungsvorteil selten zu benutzen. So ist z. B. $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$ (indem man 7 im Nenner des ersten Bruchs gegen 7 im Zähler des zweiten hebt); $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{21}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{77}$; $6 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 2 = 4$; $\frac{2}{5} \cdot 25 = 3 \cdot 5 = 15$; $16 \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot 2 = 4$. Sollen die Größen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$ miteinander multipliziert werden, so hat man:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 11}{4 \cdot 3} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$$

Ist der eine Faktor eine gemischte, der andere eine ganze Zahl, so ist es bequemer, mit letzterm die Ganzen und Brüche des erstern besonders zu multiplizieren, und beide Produkte zu addieren, also die gemischte Zahl nicht erst einzurichten. Man hat z. B.

$$6 \cdot 5\frac{2}{3} = 30 + \frac{4}{3} = 30\frac{1}{3}; \quad 12 \cdot 13\frac{1}{2} = 156 + 4 = 160$$

Dieser Rechnungsvorteil findet auch dann noch statt, wenn der eine Faktor eine gemischte Zahl, der andere ein bloßer Bruch ist.

Sind beide Faktoren gemischte Zahlen, so könnte man mit den Ganzen und Brüchen des einen die Ganzen und Brüche des andern multiplizieren und dann alle vier Produkte addieren. Dieses Verfahren kann aber nur dann zweckmäßig sein, wenn dabei nicht mehr als zwei Brüche entstehen, oder wenn die ganzen Zahlen sehr groß sind. Im allgemeinen erhält man aber das Produkt leichter, wenn man beide Faktoren erst einrichtet. Man hat z. B.

$$\begin{aligned} 25\frac{5}{6} \cdot 124\frac{3}{4} &= 25 \cdot 124 + 25 \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot 124 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \\ &= 3100 + 18\frac{3}{4} + 103\frac{1}{3} + \frac{5}{8} \\ &= 3221 + \frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 3222\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$3\frac{3}{4} \cdot 6\frac{4}{5} = \frac{15}{4} \cdot \frac{34}{5} = \frac{3 \cdot 17}{2} = 25\frac{1}{2}$$

$$25\frac{5}{6} \cdot 124\frac{4}{5} = \frac{155}{6} \cdot \frac{624}{5} = 31 \cdot 104 = 3124$$

Zur Multiplikation der Brüche gehört auch die Aufgabe: Bruchteile von einer benannten höhern Einheit durch niedere auszudrücken,

indem man den Bruch mit der Anzahl der niedern Einheiten, welche der höhern gleichgelten, multipliziert. Da z. B. $100 \text{ } \mathcal{L} = 1 \text{ } \mathcal{M}$, so ist $\frac{3}{4} \text{ } \mathcal{M} = \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ } \mathcal{L} = 3 \cdot 25 \text{ } \mathcal{L} = 75 \text{ } \mathcal{L}$. Ebenso ist: $\frac{5}{8} \text{ t} = \frac{5}{8} \cdot 1000 \text{ kg} = 833\frac{1}{8} \text{ kg} = 833 \text{ kg } 333\frac{1}{8} \text{ g} = 833 \text{ kg } 333 \text{ g } 333\frac{1}{8} \text{ mg}$.

Aufgaben: Multipliziere mit Benutzung der Vorteile, welche die gemeinschaftlichen Faktoren gewähren: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$; $2 \cdot \frac{1}{3}$; $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} \cdot \frac{28}{41}$; $\frac{22}{55} \cdot \frac{5}{11}$; $\frac{5}{31} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{15}{11} \cdot \frac{121}{365}$; $125 \cdot 7\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5} \cdot 11\frac{4}{11}$; $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4}$; $2\frac{5}{6} \cdot 33\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot 6$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$; $2\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2\frac{2}{3}$; $23\frac{5}{8} \cdot 22\frac{5}{13}$; $33\frac{2}{3} \cdot 100$; $27\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{100}$; $\frac{122}{52} \cdot \frac{28}{117}$.

Antwort: Die Produkte sind: $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{6}{41}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{31}$, $\frac{3}{73}$, 975 , $6\frac{9}{11}$, $1\frac{1}{2}$, $94\frac{11}{13}$, 1 , 3 , $\frac{40}{189}$, $4\frac{76}{135}$, $533\frac{1}{2}$, $3366\frac{2}{3}$, $1\frac{47}{50}$, $\frac{41}{2151}$.

47.

Division. Bei Brüchen pflegt man die Division gewöhnlich durch das Colon (:) anzudeuten, indem man den Divisor immer hinter den Dividend setzt. Soll z. B. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden,

so schreibt man statt $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ lieber $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$. Die Division der Brüche läßt

sich immer auf eine Multiplikation zurückführen. Die höchst einfache Regel heißt: Um einen Bruch durch einen andern zu dividieren, braucht man nur den Divisor umzukehren (seinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler zu machen) und dann mit diesem umgekehrten Divisor den Dividend zu multiplizieren. Diese gleich näher zu erläuternde Regel ist ganz allgemein, indem man unter ganze Zahlen 1 als Nenner schreiben und gemischte Zahlen einrichten kann. So ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} : \frac{2}{3} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} \\ \frac{2}{3} : \frac{4}{5} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} \\ \frac{3}{5} : 5 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25} \\ 5 : \frac{3}{5} &= 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3} \\ 2\frac{3}{4} : \frac{2}{5} &= 2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = 5\frac{5}{8} \\ 2\frac{3}{4} : 3\frac{2}{3} &= 2\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Erläuterung. 1) Sind die Brüche gleichnamig, so kommt der Nenner offenbar gar nicht in Betracht, und man braucht nur mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividend zu dividieren. So ist z. B.: $\frac{6}{8} : \frac{2}{8} = \frac{6}{2} = 3$; $\frac{6}{17} : \frac{2}{17} = 3$; $\frac{6}{35} : \frac{2}{35} = 3$; $\frac{2}{8} : \frac{6}{8} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{2}{17} : \frac{6}{17} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ &c. Denn da 2 Einheiten in 6 Einheiten derselben Art 3mal, und umgekehrt, 6 Einheiten in 2 Einheiten derselben Art $\frac{1}{3}$ mal enthalten sind, ist klar. Dasselbe erhält man aber auch nach der gegebenen Regel, indem man mit dem umgekehrten Divisor multipliziert, nämlich:

$$\frac{6}{8} : \frac{2}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

2) Sind die Brüche ungleichnamig, so könnte man sie erst gleichnamig machen, indem man Zähler und Nenner des Dividend mit dem Nenner des Divisors, und Zähler und Nenner des Divisors mit dem Nenner des Dividend multipliziert. Deutet man diese vorbereitenden Operationen bloß an, z. B. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} : \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3}$, so braucht man nur, da auf diese Weise die Brüche immer gleichnamig werden, und man also den allgemeinen Nenner wieder außer acht lassen kann, mit dem neuen Zähler des Divisors ($5 \cdot 2$) in den neuen Zähler des Dividend ($4 \cdot 3$) zu dividieren. Bemerkt man hier die Stellung der Ziffern, so ergibt sich hieraus die vorhin ausgesprochene leichter zu behaltende Regel: daß man den Divisor bloß umzukehren braucht. Es ist nämlich:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} : \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = 1\frac{2}{5}.$$

Ebenso

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} : \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}.$$

Aufgaben. Dividiere mit Benutzung der Rechnungsvorteile: $\frac{4}{16} : \frac{3}{16}$; $\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$; $\frac{6}{6} : \frac{2}{3}$; $\frac{4}{7} : \frac{5}{8}$; $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$; $\frac{1}{5} : 5$; $1 : \frac{1}{5}$; $1 : \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} : 1$; $\frac{1}{7} : 1$; $1 : \frac{2}{3}$; $\frac{14}{3} : 7$; $\frac{12}{7} : 17$; $3\frac{2}{3} : 7$; $11 : 5\frac{1}{5}$; $13\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$; $15\frac{4}{5} : 9\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$; $\frac{4}{5} : 8$; $\frac{345}{1000} : \frac{45}{1000}$; $\frac{1}{9} : \frac{1}{10}$; $\frac{1}{10} : \frac{1}{9}$; $\frac{3}{10} : \frac{17}{1000}$; $25\frac{2}{3} : 16\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5} : \frac{7}{4}$. Wie groß ist der 8te Teil von $\frac{2}{3}$ m, der 5te Teil von $2\frac{1}{2}$ M, der 4te Teil von $5\frac{1}{2}$ kg. Wie oft ist $\frac{2}{3}$ g in 4 g, $\frac{2}{3}$ M in 2 M, $\frac{1}{3}$ m in 1 m enthalten?

Antwort. Die Quotienten sind: $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $4\frac{1}{3}$, 1, 1, $\frac{1}{25}$, 5, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{17}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{1}{21}$, $1\frac{17}{52}$, $20\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{5}$, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $11\frac{3}{7}$, $1\frac{10}{17}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{1}$ m, $\frac{17}{30}$ M, $1\frac{9}{20}$ kg, $5\frac{1}{3}$ mal, 3mal, 3mal.

Fünftes Buch.

Von den Decimalbrüchen.

48.

Vorbegriffe über näherungsweise Rechnungen. In den meisten Fällen, wo die Theorie in die Praxis übertritt, kann und muß dieselbe von ihrer strengen Forderung ein wenig nachlassen, und sich mit einer gewissen Annäherung begnügen. Dies ist namentlich immer da der Fall, wo die Größen, aus welchen andere berechnet werden sollen, erst durch die Erfahrung, also vermittelt unserer Sinne und sinnlicher Werkzeuge bestimmt werden, und wo demnach die Genauigkeit der Praxis von der Vollkommenheit und Beständigkeit der Sinne abhängt.

Hat man z. E. die Entfernung zweier Örter, etwa = 2000 Fuß, unmittelbar mit einer Kette gemessen, so wird auf einer solchen Länge die Genauigkeit von einem halben Zoll mehr oder weniger nicht verbürgt und nicht verlangt werden können. Selbst in vielen Fällen, wo man durch gewisse künstliche, von Gauss erfundene Rechnungen (Wahrscheinlichkeitsrechnung), die Unvollkommenheit unserer Sinne und die daraus entsprungnen Fehler entdecken, berechnen und unschädlich machen kann, würde die möglichste Genauigkeit in den minder wichtigen Fällen nicht der Mühe lohnen.

In allen den Fällen nun, wo man in der Praxis eine völlige Genauigkeit doch nicht erreichen kann, oder nicht erreichen will, wo die Vernachlässigung eines kleinen Bruchs auf ein zu suchendes Resultat keinen nachteiligen Einfluß hat, da kann man sich die Rechnung mit Brüchen, durch eine gewisse Form, welche man denselben giebt, bedeutend erleichtern, was wir hier erst durch ein Additions-Beispiel erläutern wollen. Zuvor merke man folgendes: einen Bruch kann man ohne Veränderung seines Werts leicht auf jeden beliebigen Nenner bringen, indem man Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs erst mit dem neuen Nenner multipliziert, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt. Soll z. E. $\frac{6}{8}$ auf den Nenner 12 gebracht werden, so hat man erst $\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{72}{8 \cdot 12}$, durch 8 wieder gekürzt = $\frac{9}{12}$. Ist aber der alte Nenner in dem Produkte aus dem alten Zähler und neuen Nenner nicht ohne Rest enthalten, so wird der neue Zähler eine gemischte Zahl. Bringt man z. B. $\frac{5}{8}$ auf den Nenner 12, so

ist $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{7\frac{1}{2}}{12} = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}$. — Brüche, deren Zähler selbst ein Bruch ist, wie $\frac{1}{12}, \frac{1}{4}$ &c., heißen Doppel-Brüche. Es ist klar, daß ein Doppelbruch desto kleiner ist, je größer sein Nenner ist; es ist z. B. $\frac{1}{10} < \frac{1}{4}$ &c.

Will man z. B. wissen, wieviel ganze Achtel der Bruch $\frac{7}{9}$ enthält, so hat man $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{56}{8} = \left(\frac{68}{8}\right) = \frac{6}{8}$. Will man nur die vollen Zehntel, Hundertel oder Tausendtel &c. haben, welche ein Bruch, z. B. $\frac{7}{8}$ enthält, so hat man:

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{10} = \left(\frac{80}{10}\right) = \frac{8}{10}; \frac{7}{8} = \frac{700}{100} = \left(\frac{87\frac{1}{2}}{100}\right) = \frac{87}{100}; \frac{7}{8} = \frac{7000}{1000} = \frac{875}{1000}.$$

Hieraus folgt: daß, wenn man dem Zähler eines Bruches ein, zwei, drei Nullen anhängt, und durch den Nenner dividirt, den etwa entstehenden Bruch wegwirft, der Quotient dann die Anzahl der vollen Zehntel, Hundertel, Tausendtel &c., welche der Bruch enthält, angebt.

Bedeutet nun folgende zu addierende Summanden

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{7}{9} + \frac{5}{11} + \frac{9}{13} + \frac{13}{17} + \frac{13}{19} + \frac{1}{177}$$

Bruchteile von einer kleinen Einheit, wie etwa Centimeter, Gramm &c. und kommt es nicht darauf an, ob man die Summe um $\frac{1}{10}$ einer solchen Einheit zu klein oder zu groß findet, so kann man die Arbeit bedeutend abkürzen, wenn man den allgemeinen Nenner (der nach § 30 eine sehr große Zahl werden würde) ganz willkürlich annimmt, wozu eine einfache Rangzahl, wie 10, 100, 1000 &c. offenbar am bequemsten ist. Nehmen wir in vorliegender Aufgabe 100 als den allgemeinen Nenner, so brauchen wir nur jedem Zähler (in Gedanken) zwei Nullen anzuhängen, und durch die alten Nenner zu dividieren, alsdann sind die nebenstehenden Quotienten, bei welchen Brüche unter $\frac{1}{2}, = 0$, und über $\frac{1}{2}, = 1$ gesetzt worden, die zum allgemeinen Nenner gehörigen neuen Zähler (welche sich leicht im Kopfe berechnen lassen):

	100
$\frac{1}{2}$	50
$\frac{1}{3}$	3 + $\frac{1}{3}$
$\frac{4}{5}$	80
$\frac{6}{7}$	86 — $\frac{2}{7}$
$\frac{7}{9}$	78 — $\frac{2}{9}$
$\frac{5}{11}$	45 + $\frac{5}{11}$
$\frac{9}{13}$	69 + $\frac{3}{13}$
$\frac{13}{17}$	5 + $\frac{65}{17}$
$\frac{13}{19}$	0 + $\frac{300}{19}$
$\frac{1}{177}$	6 — $\frac{2}{177}$
Summe	$\frac{422}{100} = 4\frac{1}{5}$.

Anmerkung. Hätte man bei dieser nähernden Berechnung auch bei jedem Zähler eine halbe Bruch-Einheit ($\frac{1}{100}$) vernachlässigt, so würde der dadurch für alle zehn Summanden angewachsene Fehler doch erst $\frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)$ betragen haben. Da wir aber nur Brüche kleiner als $\frac{1}{2}$ vernachlässigten, und diese Fehler, weil sie bald auf die eine, bald auf die andere Seite fallen, sich zum Teil aufheben, so muß der Fehler an der Summe $4\frac{1}{5}$ noch bedeutend kleiner als $\frac{1}{5}$ sein.

Hätte man aber statt 100 eine größere Rangzahl 100000, 1000000 &c., zum allgemeinen Nenner genommen, wodurch die Rechnung nicht viel schwerer wird, so würde der Fehler schon für die Sinne

verschwunden sein, wenn auch die Einheit der Summe, Kilogramm, Mark, Meile &c. wäre.

49.

Der Umstand, daß man, um gewöhnliche Brüche darzustellen, immer zweierlei Zahlen, Zähler und Nenner, schreiben muß, welches nicht allein zeitraubend ist, sondern auch (besonders bei Anfertigung von Tabellen &c.) viel Raum einnimmt, die Übersicht erschwert; sowie auch der Umstand, daß die Bruchrechnung viele vorbereitende Operationen erfordert, wie z. B. das Einrichten bei der Multiplikation und Division, das Gleichnamigmachen bei der Addition und Subtraktion, haben die Erfindung und den Gebrauch der Decimalbrüche veranlaßt, wodurch alle jene in größerer Praxis sehr fühlbare Unbequemlichkeiten auf einmal gehoben, die Darstellung und das Rechnen mit Brüchen ebenso einfach, als mit ganzen Zahlen gemacht worden.

50.

Decimalbruch wird nämlich jeder Bruch genannt, dessen Nenner eine einfache Rangzahl des Zehnersystems ist, wie $\frac{873}{1000}$, $\frac{47}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{1000}$ &c. Ein solcher Bruch hat nämlich, als eine notwendige Folge seines Nenners und als Grund seiner Benennung die Eigenschaft, daß er sich immer in so viele Brüche zerlegen läßt, als der Nenner Nullen hat, und zwar so, daß die Einheiten dieser Brüche nach dem dekadischen Gesetze aufeinander folgen, nämlich $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c. Es ist z. B. (weil $873 = 800 + 70 + 3$) $\frac{873}{1000} = \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{3}{1000}$; oder indem man die Nullen am Ende der Zähler gegen ebenso viele ihrer Nenner austreicht:

$$\begin{aligned}\frac{873}{1000} &= \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} \\ \frac{34507}{100000} &= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{7}{100000} \\ \frac{47}{1000} &= \frac{0}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} \\ \frac{47}{100000} &= \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{7}{100000}\end{aligned}$$

wo, der Gleichförmigkeit wegen, die Zähler der fehlenden Zehntel &c. durch Nullen ergänzt sind.

51.

Aus der gezeigten Zergliederung ist zu ersehen, daß, wenn der Zähler eines Decimalbruchs so viele Ziffern hat, als sein Nenner Nullen, wie $\frac{875}{1000}$, $\frac{71}{100}$ &c. oder wenn, der Gleichförmigkeit wegen, die fehlenden Ziffern im Zähler durch vorgesetzte Nullen ergänzt werden, wie $\frac{47}{1000} = \frac{047}{1000}$, $\frac{47}{10000} = \frac{0047}{10000}$ &c., alsdann die erste Ziffer im Zähler die Anzahl der Zehntel (oder fehlenden Zehntel), die zweite Ziffer die Anzahl der Hundertel enthält, und so nach diesem Gesetze weiter.

Diese Bemerkung führt nun sogleich zu dem gebräuchlichen Verfahren, die Decimalbrüche weit einfacher ohne ihre Nenner zu schreiben. Man schneidet nämlich mittelst eines Decimalzeichens (Komma oder Punkt) rückwärts vom Zähler des Decimalbruchs so viele Ziffern ab, als sein Nenner Nullen hat (indem man die fehlenden Ziffern im Zähler durch vorgesezte Nullen ergänzt). Links vor das Decimalzeichen setze man endlich noch eine Null, oder die etwaigen ganzen Einheiten, welche der Decimalbruch enthält oder bei sich hat. Alsdann bedeuten die links vor dem Decimalzeichen stehenden Ziffern ganze Einheiten; die rechts auf das Decimalzeichen folgenden aber Bruch-Einheiten, und zwar die erste Ziffer Zehntel, die zweite Ziffer Hundertel &c. So schreibt man z. E.:

$$\frac{875}{1000} = 0,875 \text{ (lies: 0 Ganze, 8 Zehntel, 7 Hundertel \&c. oder einfacher: 0 Ganze, 875 Tausendtel)}$$

$$2\frac{875}{1000} = 2,875 \text{ (2 Ganze, 8 Zehntel \&c.)}$$

$$\frac{47}{10000} = 0,0047 \text{ (0 Ganze, 0 Zehntel, 0 Hundertel, 4 Tausendtel \&c.)}$$

$$5\frac{47}{1000} = 5,047; \frac{24805}{1000} = 24,805; 32\frac{5}{100} = 32,05.$$

Es ist also leicht, einen Decimalbruch ohne Nenner zu schreiben, und umgekehrt, einen ohne Nenner geschriebenen Decimalbruch wieder in gewöhnlicher Bruchsform herzustellen, indem man ihm nur eine einfache Rangzahl mit so vielen Nullen unterzuschreiben braucht, als Decimalstellen auf das Decimalzeichen folgen, und dann das Decimalzeichen wieder weglässt, so ist z. B.

$$0,875 = \frac{875}{1000}; 0,0071 = \frac{0071}{10000} = \frac{71}{10000} \text{ \&c.}$$

Aufgaben. 1) Wie schreibt man folgende Decimalbrüche ohne Nenner:

$$\frac{5}{10}, \frac{1}{10}, \frac{13}{100}, \frac{3}{100}, \frac{101}{10000}, \frac{1}{10000}, \frac{3}{1000}, \frac{75}{100}, \frac{376}{10000}, \frac{2005}{100000},$$

$$\frac{501007}{1000000}, 3\frac{2}{10}, 728\frac{47}{100}, 10\frac{15}{1000}, 11\frac{1101}{100000}, \frac{50013}{1000}, \frac{705}{10}.$$

Antwort. 0,5; 0,1; 0,13; 0,03; 0,0101; 0,0001; 0,003; 0,75; 0,0376; 0,02005; 0,501007; 3,2; 728,47; 10,015; 11,01101; 50,013; 70,5.

2) Wie schreibt man folgende Decimalbrüche mit untergelegtem Nenner: 0,54; 0,015; 2,004; 30,07; 0,005; 100,001.

Antwort. $\frac{54}{100}$, $\frac{15}{1000}$, $\frac{2004}{1000} = 2\frac{4}{1000}$, $30\frac{7}{100} = \frac{3007}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $100\frac{1}{1000} = \frac{100001}{1000}$.

52.

Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Der Gebrauch der Decimalbrüche findet besonders in der angewandten Mathematik statt, und namentlich bei den Rechnungen mit Wurzelgrößen und Logarithmen, welche dieselben gar nicht entbehren können, und ihre Einführung eigentlich zuerst veranlaßt haben. Obgleich nun in der Praxis die Decimalbrüche sich fast immer von selbst in gehöriger Form darstellen, so ist es doch auch manchmal erforderlich, einen gewöhnlichen echten Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln und dies geschieht am leichtesten

auf folgende Weise: Man setze erst 0 als Ganze und das Decimalzeichen, hänge darauf dem Zähler eine Null an und dividire mit dem Nenner, so giebt der Quotient die Anzahl der vollen Zehntel an, welche der Bruch enthält (an dessen Stelle man aber eine Null setzen muß, wenn der Bruch keine Zehntel enthält), dem Rest hänge man wieder eine Null an, und dividire abermals durch den Nenner, so erhält man Hundertel, und so fahre man fort bis die Division entweder aufgeht, oder bis man so viele Decimalen bestimmt hat, als es die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Mehr als sieben Decimalstellen sind höchst selten erforderlich. Manchmal genügen schon zwei, drei oder fünf. Die letzte Decimale pflegt man um eine Einheit zu vergrößern, wenn die folgende eine 5 oder darüber ist. Wollte man von dem Bruche 0,8468 nur die drei ersten Decimalstellen beibehalten, so würde 0,847 den wahren Wert genauer darstellen als 0,846, ersterer ist nur um $\frac{2}{100000}$ zu groß, letzterer aber um $\frac{8}{100000}$ zu klein. Läßt sich der Nenner des in einen Decimalbruch umzuformenden Bruchs in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 5}$ &c., so muß die Division, wenn man sie soweit treiben wollte, jedesmal ein Ende nehmen; läßt sich aber der Nenner nicht in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$; $\frac{4}{15} = \frac{4}{3 \cdot 5}$ &c., so kann die Division auch niemals aufgehen (317). Beispiele:

$$\frac{3}{16} = 0,1875; \frac{7}{8} = 0,875; \frac{6}{2117} = 0,0028\dots$$

Man sage nämlich: 16 in 3 Ganze giebt 0 Ganze, 16 in 30 Zehntel giebt 1 Zehntel und 14 als Rest, 16 in 140 Hundertel giebt 8 Hundertel &c.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, denn ob man z. B. nach (§ 48) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ erst mit einer Rangzahl multipliziert, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt und den dadurch entstehenden Bruch nach (§ 51) ohne Nenner schreibt, oder ob man dem Zähler die Nullen nach und nach anhängt, das ist einerlei. Man hat z. B.

$$\frac{3}{16} = \frac{3000}{16.1000} = \frac{187\frac{8}{1000}}{1000} = 0,187.$$

Anmerkungen. 1) Ist der umzuformende Bruch unecht, so muß man natürlich erst die Ganzen herausziehen und diese statt der Null vor das Decimalzeichen setzen, z. B. $2\frac{1}{8} = 2,625$; $2\frac{3}{4} = 2,75$ &c.

2) Wenn man einem Decimalbruch rechts noch beliebig viele Nullen anhängt, so wird dadurch der Wert desselben nicht geändert, indem dies ebenso gleichgültig ist, als wenn man einer ganzen Zahl noch Nullen vorsetzt. So ist z. B. $0,54 = 0,540 = 0,5400$ &c. Man kann also, wenn es die Gleichförmigkeit fordert, mehreren Decimalbrüchen durch angehängte Nullen leicht gleich viele Decimalstellen geben, d. h. sie gleichnamig machen.

3) Wenn beim Verwandeln eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch die Division kein Ende nimmt, so müssen, wenn die Division weit genug getrieben wird, notwendig einige Decimalstellen immer in derselben

Ordnung (periodisch) wiederkehren. Solche Brüche pflegt man wohl periodische Decimalbrüche zu nennen und die Wiederholung der Perioden durch Punkte anzudeuten. So ist z. E. $\frac{1}{8} = 0,0505\dots$ mit der Periode 05, $\frac{1}{3} = 0,666\dots$ mit der Periode 6.

Aufgaben. Folgende Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, und zwar wenn die Division nicht früher aufgeht, bis auf 5 Decimalstellen genau:
 $\frac{3}{4}, \frac{9}{25}, \frac{5}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{100}{3374}, \frac{1}{99}, \frac{11}{474}, \frac{1}{8}, \frac{3700}{301}, \frac{1595}{245}, \frac{300}{1157}, 20\frac{3}{8}, 304\frac{5}{7}, \frac{1}{93}, \frac{1}{10}, \frac{3}{1000}, \frac{37}{36000}, \frac{141}{40000}, \frac{7}{40}, \frac{3}{200}, \frac{77}{800}$.

Antwort. 0,75; 0,36; 0,71429; 0,111...; 0,22...; 0,44...; 0,5; 0,4; 0,02963; 0,0101...; 0,02321; 0,125; 12,29236; 6,5102; 0,25929; 20,375; 304,71429; 0,01075; 0,1; 0,003; 0,00103; 0,00352; 0,175; 0,015; 0,128333...

53.

Bei einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch findet das Decimalsystem überall statt, nämlich auch im Übergange von den Bruch-Einheiten zu den Ganzen. In der Zahl

20704,56803

gelten z. B. 10 Einheiten der zweiten Decimale (6) eine Einheit der nächst vorhergehenden Ziffer (5) ($10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$); zehn Einheiten der Ziffer 5 eine Einheit der folgenden Ziffer (4) ($10 \cdot \frac{1}{10} = 1$) &c. Aus dieser Ursache ist nun auch das Rechnen mit Decimalbrüchen ebenso wie mit ganzen Zahlen; nur auf die richtige Stellung des Decimalzeichens muß man ein wenig Aufmerksamkeit richten.

54.

Addition. Man schreibt die Größen so untereinander, daß die Decimalzeichen und mithin gleichnamige Einheiten übereinander stehen, Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel &c., addiert dann wie gewöhnlich, indem man für je zehn Einheiten einer Reihe eine Einheit auf die nächst höhere überträgt. Sind einige von den Größen gewöhnliche Brüche, so muß man sie erst in Decimalbrüche verwandeln. So findet man z. B.

$$0,72 + 0,087 + 2,5 + 14,0089 = 17,3159.$$

$$0,05012 + 30,0707\dots + 0,66\dots + \frac{5}{8} + 2\frac{3}{4} = 34,370827$$

$$10,3131\dots + 9,11\dots + 0,503 + 0,003 + 0,1 = 20,0302.$$

0,72 ..	0,05012 .
0,087 .	30,070707
2,5 ...	0,666667
14,0089	$\frac{5}{8} = 0,833333$
17,3159	$2\frac{3}{4} = 2,75\dots$
	34,370827

55.

Subtraktion. Man schreibt Subtrahend und Minuend in derselben Ordnung wie bei der Addition untereinander; ist einer von ihnen ein gewöhnlicher Bruch, so muß man ihn erst zu einem Decimalbruch machen, und alsdann wie gewöhnlich subtrahieren. Es ist z. B.:

Minuend	1,0407	8,000	13,66667	$\frac{3}{4} = 0,75 \dots$
Subtr.	0,9745	7,995	3,67809	0,2305
Differ.	0,0662	0,005	9,98858	0,5195

56.

Multiplikation. 1. Regel: Ist ein Decimalbruch mit einer einfachen Rangzahl zu multiplizieren, so braucht man das Decimalzeichen nur um so viele Stellen nach rechts zu rücken, als die Rangzahl Nullen enthält. Es ist z. B.: 10 (0,045) = 0,45; 100 (0,045) = 4,5; 1000 (0,045) = 45; 10000 (0,045) = 450; 100 (2,003) = 200,3.

2. Regel: Um 2 Decimalbrüche zu multiplizieren, multipliziert man wie bei ganzen Zahlen, ohne auf die Decimalzeichen der Faktoren zu achten, schneidet aber vom Produkt rückwärts so viele Decimalen wieder ab, als die Faktoren Decimalen zusammen enthalten, indem man die, welche das Produkt weniger hat, durch vorgesetzte Nullen ergänzt. Beispiele:

(1)	0,43	(2)	8,034	(3)	0,0478
	0,25		0,46		0,003
	215		48204		0,0001434
	86		32136		
	0,1075		3,69564		
(4)	4,03	(5)	0,035	(6)	0,056
	2,15		2,04		24
	2015		140		224
	403		70		112
	806		0,07140		1,344
	8,6645				

Bei (1) haben beide Faktoren zusammen vier Decimalen, bei (2) fünf, bei (3) sieben, bei (4) vier, bei (5) fünf, bei (6) drei.

Die Richtigkeit dieser Regel erklärt sich von selbst, wenn man die Decimalbrüche mit untergelegtem Nenner geschrieben denkt, dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, und den erhaltenen Bruch wieder ohne Nenner darstellt. So ist z. E.:

$$(0,43) (0,25) = \frac{43}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{1075}{10000} = 0,1075;$$

(der Nenner des Produkts erhält nämlich so viele Nullen, als beide Faktoren Decimalstellen enthalten;)

$$8,034 \cdot 0,46 = \frac{8034}{1000} \cdot \frac{46}{100} = \frac{369564}{100000} = 3,69564.$$

$$0,056 \cdot 24 = \frac{56}{1000} \cdot 24 = \frac{1344}{1000} = 1,344 (\S 51).$$

Aufgaben. Folgende angedeutete Multiplikation zu entwickeln:
 (0,057) (0,005); (0,205) (7,04); (1,09) (1,003); 11 . (1,1036); (0,013) . 101;
 (203,07) (105,002); 100 . (0,031); (0,2) . 100; 1000 . (31,0451); (21,005) (0,74) (0,07).

Antwort. Die Produkte sind: 0,000285; 1,4432; 1,09327; 12,1396; 1,313;
 21322,75614; 3,1; 20; 31045,1; 1,0880590 = 1,088059.

57.

Division. 1. Regel: Ist ein Decimalbruch durch eine einfache Rangzahl zu dividieren, so braucht man nur das Decimalzeichen so viele Stellen nach links zu rücken, als die Rangzahl Nullen hat. So ist z. B.:

$$\frac{320,45}{100} = 3,2045; \quad \frac{5,23}{10} = 0,523; \quad \frac{1,04}{100} = 0,0104.$$

2. Regel: Ist der Divisor eine ganze Zahl, so dividiert man jede Stelle des Dividend, und setzt zu dem etwaigen Reste die folgende Ziffer, z. B. $\frac{3,645}{8} = 0,455625$. (Man sage nämlich: der 8te Teil von 3 Ganzen giebt 0 Ganze, der 8te Teil von 36 Zehntel giebt 4 Zehntel &c.). Ebenso ist $\frac{0,06305}{12} = 0,005254..$

3. Regel: Man rückt das Komma im Divisor ohne Rücksicht auf die Anzahl der Decimalstellen des Dividend soviel Stellen nach rechts, daß derselbe sich in eine ganze Zahl verwandelt. Hierauf rückt man das Komma im Dividend gleichviel Stellen nach rechts und dividiert alsdann beide Zahlen nach der 2. Regel. Z. B.:

$\frac{0,057}{3,2}$? Da der Divisor eine Decimalstelle hat, so ist das Komma in beiden Zahlen eine Stelle nach rechts zu rücken = $\frac{0,57}{32} = 0,01781$; denn $\frac{0,057}{3,2} = \frac{0,057 \cdot 10}{3,2 \cdot 10} = \frac{0,57}{32}$.

$\frac{0,85}{0,4073}$? Der Divisor hat 4 Decimalstellen, folglich ist das Komma in beiden Zahlen 4 Stellen nach rechts zu rücken = $\frac{8500}{4073} = 0,85932$.

$\frac{0,34}{0,17} = \frac{34}{17} = 2$; denn $\frac{0,34}{0,17} = \frac{0,34 \cdot 100}{0,17 \cdot 100} = \frac{34}{17}$
 $\frac{8}{0,245} = \frac{8000}{245} = \frac{8000}{245} = 32,65306$;
 $\frac{0,3645}{0,8} = 3,645 : 8 = 0,455625$.

Anmerkungen. 1) Ist ein Decimalbruch mit einem gewöhnlichen Bruche zu multiplizieren, so könnte man letztern erst in einen Decimalbruch verwandeln, leichter erhält man aber das Produkt, wenn man mit seinem Zähler multipliziert und durch seinen Nenner dividiert. So ist z. B.:

$$\frac{2}{3} \cdot (6,0435) = \frac{2 \cdot 6,0435}{3} = 2 \cdot (2,0145) = 4,029;$$

$$\frac{3}{4} \cdot (0,25) = \frac{0,75}{4} = 0,1875.$$

2) Ist ein Decimalbruch durch einen gewöhnlichen Bruch zu dividieren, so kann man mit dem umgekehrten Divisor multiplizieren; z. B.:

$$0,326 : \frac{2}{3} = 0,326 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1,304}{2} = 0,43466\dots$$

3) Ist ein gewöhnlicher Bruch durch einen Decimalbruch zu dividieren, so muß man erstern in einen Decimalbruch verwandeln oder dem Decimalbruch seinen Nenner unterschreiben, ihn dann umkehren und multiplizieren. Es ist z. B.:

$$\frac{2}{3} : 0,321 = \frac{0,75}{0,321} = \frac{750}{321} = 2,3364 \text{ oder auch}$$

$$\frac{2}{3} : 0,321 = \frac{2}{3} : \frac{321}{1000} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1000}{321} = \frac{2000}{963} = 2,3364.$$

Aufgaben. Man vollziehe folgende angedeutete Divisionen bis auf 4 Decimalen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{0,305}{0,506} & \frac{0,0578}{0,23} & \frac{2,035}{0,76} & \frac{0,03}{8,134} & \frac{3,207}{4,085} & \frac{0,091}{183} & \frac{25}{0,507} & \frac{0,0453}{8} & \frac{2,1616\dots}{12} & \frac{0,04}{10} & \frac{540,047}{1000} \\ \frac{0,04}{100} & \frac{8471}{100} & \frac{1}{100} & \frac{35}{1000} & \frac{1}{0,305} & \frac{1}{1,012} & \frac{2}{3,05} \end{array}$$

$$\frac{7}{8} : 0,14; 4,03 : \frac{2}{3}; 0,1875 : \frac{2}{3}; 0,056 : \frac{2}{3}; 0,435 : 2\frac{2}{3}; \frac{2}{3} : 0,05; \left(\frac{0,03}{0,05}\right) \cdot \frac{2}{3}.$$

Antwort. Die Quotienten sind: 0,6028; 0,2513; 2,6776; 0,0037; 0,785; 0,0005; 49,3097; 0,0056; 0,1801; 0,004; 0,540047; 0,0004; 84,71; 0,01; 0,035; 3,2787; 0,9882; 0,6557; 2,0408...; 6,045; 0,25; 0,13066...; 0,1581; 7,5; 0,4.

Sechstes Buch.

Rechnung mit benannten Zahlen.

Wer mit unbenannten Zahlen rechnen kann, kann es auch mit benannten, nur die Kenntnis der verschiedenen Unterabteilungen der benannten Einheiten, oder ein Münz-, Maß- und Gewichts-System, aus welchem man sich erforderlichenfalls Rats erholen kann, ist hiezu erforderlich.

58.†

Addition. Sind mehrnamige Größen zu addieren, so stelle man die gleichnamigen Einheiten untereinander, und addiere dann, bei der niedrigsten Sorte anfangend, welche man gleich auf höhere reduziert. Beispiele:

8 <i>M</i>	45 <i>℔</i>	27 kg	537 g	8,45 <i>M</i>	27,537 kg
11 =	32 =	29 =	756 =	11,32 =	29,756 =
126 =	89 =	37 =	825 =	126,89 =	37,825 =
— =	28 =	20 =	762 =	0,28 =	20,762 =
17 =	2 =	8 =	59 =	17, 2 =	8,059 =
<u>1</u>		<u>123 kg</u>	<u>939 g</u>	<u>163,96 <i>M</i></u>	<u>123,939 kg</u>
163 <i>M</i>	96 <i>℔</i>				

5 St.	37 Min.	18 Sek.
18 =	48 =	16 =
9 =	20 =	39 =
12 =	11 =	42 =
5 =	7 =	8 =
<u>51 St.</u>	<u>5 Min.</u>	<u>3 Sek.</u>

59.

Subtraktion. Die Stellung ist hier wie oben. Ist eine Anzahl Einheiten im Subtrahend größer, als die darüber stehende im Minuend, so muß man von den nächst höhern Einheiten im Minuend eine Einheit herübernehmen. Beispiel:

10 St.	45 Min.	30 Sek.
<u>7^h</u>	<u>59'</u>	<u>45''</u>
2 ^h	45'	45''

Ein paar Beispiele (für die Subtraktion und Addition) aus der Zeitrechnung mögen hier noch Platz finden, weil sie eher, als die obigen leichten Fälle, einer Erläuterung bedürfen.

Um den Unterschied zweier Zeiträume, welche beide von einem und demselben Anfange (Christi Geburt) gerechnet und in Jahren und Datum ausgedrückt sind, zu finden, muß man die Zeiträume erst etwas anders ausdrücken, nämlich durch die wirklich verflossenen Jahre, Monate, Tage, Stunden &c. und sich dabei erinnern, daß der bürgerliche Tag (Datum) um Mitternacht (12 Uhr) anfängt, und $2 \cdot 12 = 24$ Stunden dauert. Die z. B. bis 1834 den 25. April abends 7 Uhr wirklich verflossene Zeit beträgt hiernach: 1833 volle Jahre, 3 volle Monate, 24 volle Tage und $12 + 7 = 19$ Stunden.

Februar ausgenommen, welcher in jedem gemeinen Jahre 28 und in jedem Schaltjahre (jedes durch 4 ohne Rest teilbare Jahr) 29 Tage hat, findet man die Tage der übrigen Monate sehr leicht nach der bekannten Regel: daß, wenn man, vom Zeigefinger angefangen, die Knöchel der Hand und die Zwischenplätze zweimal quer durchzählt und zugleich die Namen der Monate vom Januar an, der Reihe nach hernennt, jeder auf einen der Knöchel treffende Monat 31, und jeder dazwischen fallende 30 Tage hat.

Aufgabe. 1) Welche Zeit ist von 1790 den 24. Oktober 5 Uhr 31 Min. nachmittags bis 1832 den 22. März 11 Uhr 27 Min. vormittags verflossen?

Auflösung. Die verflossene Zeit bis:

	29
1832. März 22, 11 U. 27 M. vorm. = 1831 J. 2 M. 21 T. 11 St. 27 M.	
1790. Okt. 24, 5 z 31 z nachm. = 1789 z 9 z 23 z 17 z 31 z	

Also die verfl. Zeit = 41 J. 4 M. 26 T. 17 St. 56 M.

Der hier entlehnte zweite Monat Februar fällt in das Schaltjahr 1832.

Aufgabe. Wann wird seit 1819 den 17. Juli 11 Uhr 25 Min. nachm. eine Zeit von 60 Jahren 2 Monaten 16 Tagen 17 Stunden und 50 Minuten verflossen sein?

Auflösung. Die bis 1819 den 17. Juli verflossene Zeit ist:

	25 M.
= 1818 J. 6 M. 16 T. 23 St. 25 M.	
Hiezu addiert 60 z 2 z 16 z 17 z 50 z	
	1878 J. 9 M. 3 T. 17 St. 15 M.
	1879 den 4. Okt. 5½ Uhr nachm.

60.

Multiplikation. Der Multiplikator muß bei jeder Multiplikation eine unbenannte Zahl sein, indem man keine benannten Zahlen mit einander multiplizieren kann. Ist nun der Multiplikand eine mehrnamige Größe, so kann man jede Sorte besonders multiplizieren und dann das Produkt auf höhere Einheiten reduzieren. Einige kleine Rechnungsvorteile, welche sich hiebei in besonders günstigen Fällen (durch die sogenannte Zerstreungsmethode) anbringen lassen, finden sich von selbst. Fragt man z. E. wieviel 7 kg einer gewissen Ware kosten, wenn das Kilogramm 6,72 *M* kostet, so muß man

letztere Gröfse 7mal nehmen, oder mit der unbenannten Zahl 7 multiplizieren, nämlich:

$$\begin{array}{r} 6,72 \text{ M} \\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$47,04 \text{ M}$$

Aufgaben. 1) 7 m 83 cm 5 mal zu nehmen.

2) Die Gröfse 2 kg 430 g $2\frac{1}{2}$ mal zu nehmen.

3) Die Gröfse 3 Stunden 26 Minuten 12 Sekunden mit $\frac{3}{5}$ zu multiplizieren.

Antwort. Die Produkte sind: 44 m 74 cm = 44,74 m.; 6 kg 682,5 g; 2 Stunden 51 Minuten 50 Sekunden.

61.

Division. Erster Fall. Soll vom Dividend ein bestimmter Teil angegeben werden, so ist der Divisor immer unbenannt, der Quotient aber, als ein Teil des Dividend, auch wie dieser benannt. Man dividirt, bei der höchsten Sorte anfangend, indem man etwaige Bruchtheile von höheren Einheiten in nächst niedere Einheiten auflöst. Sucht man z. E. den 8ten Teil von 29 Tag. 18 St. 14 Min., so hat man:

$$\frac{29 \text{ Tag. } 15 \text{ St. } 14 \text{ Min.}}{8} : 8$$

$$3 \text{ Tag. } 16 \text{ St. } 54\frac{1}{2} \text{ Min.}$$

Zweiter Fall. Sind beide, Divisor und Dividend, benannt, so müssen beide erst auf einerlei Einheit, entweder auf die niedrigste oder höchste, reduziert werden, weil man nur gleichnamige Einheiten durcheinander dividieren kann. Der Quotient ist in diesem Falle eine unbenannte Zahl, der blofs das Verhältnis des als Einheit betrachteten Divisors zum Dividend ausdrückt. Fragt man z. B., wie oft 18 Hektoliter 51 Liter in 64 Hektoliter 78,5 Liter enthalten ist, so hat man:

$$64 \text{ hl } 78,5 \text{ l} = 6478,5 \text{ l}$$

$$18 \text{ hl } 51 \text{ l} = 1851 \text{ l}$$

$$\text{mithin: } \frac{64 \text{ hl } 78,5 \text{ l}}{18 \text{ hl } 51 \text{ l}} = \frac{6478,5 \text{ l}}{1851 \text{ l}} = 3\frac{1}{2} \text{ mal.}$$

Aufgaben. 1) Wieviel mal so grofs ist 8 m 11 cm, als 2 m 6 cm?

2) Wie grofs ist der 24ste Teil von 130 M 20 M?

3) Wieviel mal so grofs ist der Zeitraum von 6 Stunden 34 Minuten 54 Sekunden, als 4 Stunden 16 Minuten?

Antwort. 1) $3\frac{1}{2}$ mal. 2) 5 M 42,5 M. $1\frac{1}{2}$ mal.

Siebentes Buch.

Von den geraden, umgekehrten und zusammengesetzten Verhältnissen. (Regel de tri.)

62.

Gerades Verhältniß. Wenn zwei Gröfsen so von einander abhängen, dafs, wenn die eine sich ändert und einigemal so groß oder so klein als ursprünglich wird, auch die andere ebensoviel mal so groß oder so klein genommen werden muß, so sagt man: beide Gröfsen stehen im geraden Verhältniß zu einander. So steht z. B. die Menge einer Ware mit ihrem Wert in geradem Verhältniß, denn für 2-, 3mal soviel Ware muß man auch einen 2-, 3mal so großen Preis geben, für $\frac{1}{3}$ der Ware auch nur $\frac{1}{3}$ des Preises &c.

Aufgaben dieser Art, bei welchen nämlich die Änderung einer Gröfse gegeben ist, und die Änderung der andern abhängigen Gröfse gesucht wird, kommen im gemeinen Leben gerade am häufigsten vor. Schluß und Ansatz ist aber bei allen derselbe, und wer nur eine dieser leichtesten Aufgaben gehörig verstanden hat, kann auch alle übrigen lösen.

Beispiel. Wenn 5 Meter Tuch 54 Mark kosten, wie teuer kommen dann im gleichen Verhältniß 100 Meter?

Erste Auflösung. Für je 5 Meter müssen 54 Mark bezahlt werden, so oft also die als Maßstab gegebene Gröfse, 5 Meter, in der sogenannten Fragezahl (d. h. die, nach deren Wert gefragt wird) enthalten ist, so oft muß man 54 Mark setzen, daher ist der gesuchte Wert

$$= \frac{100 \text{ Meter}}{5 \text{ Meter}} \cdot 54 \text{ M} = \frac{100}{5} \cdot 54 \text{ M} = 20 \cdot 54 \text{ M} = 1080 \text{ M} \quad (\S 61, 2).$$

Zweite Auflösung. Man kann auch die als Maßstab gegebene Gröfse erst auf die wirkliche Einheit reduzieren und so schließen: da 5 Meter 54 Mark kosten, so kostet 1 Meter, nämlich der 5te Teil, $\frac{54}{5}$ Mark, und mithin ist der Preis für 100 Meter:

$$= 100 \cdot \frac{54}{5} \text{ M} = 1080 \text{ M} \quad (\S 60).$$

Beide Schlußformen lassen sich auch in die leicht zu behaltende Regel, den sogenannten Dreisatz, oder Regel de tri, bringen. Man sage nämlich:

5 Meter geben 54 Mark, wieviel 100 Meter?

und multipliziere die beiden hinteren Glieder miteinander und dividiere das Produkt durch das erste Glied, indem man hierbei die beiden ein- und gleichnamigen äusseren Glieder als unbenannte Zahlen betrachtet. Deutet man diese Operationen vorläufig nur an, so kann man, der leichtern Rechnung wegen, die etwaigen Faktoren, welche Dividend und Divisor gemeinschaftlich haben, erst gegeneinander aufheben.

Dafs die beiden äusseren Glieder, im Fall sie mehrnamig sind, erst auf einnamige reduziert werden müssen, entweder auf die niedrigste Einheit oder (was in der Regel kürzere Rechnung giebt) auf die höchste Einheit, indem man niedere als Bruchteile der höhern ausdrückt, folgt schon aus § 61, 2. Wenn übrigens zwei Gröfsen im geraden Verhältnis zueinander stehen, so müssen immer die beiden gleichlautenden Steigerungen: je mehr — je mehr, oder je weniger — je weniger stattfinden, wodurch dieses gerade Verhältnis leicht von dem im folgenden Paragraph zu erahnenden umgekehrten Verhältnis zu unterscheiden ist.

Aufgaben. 1) 100 *M* bringen in einem Jahre 5 *M* Zinsen, wieviel Zinsen bringt hiernach ein Kapital von 625 *M* in einem Jahre?

Antwort. $\frac{5}{100} \cdot 5 = 31\frac{1}{2}$ *M* (je mehr Kapital, je mehr Zinsen, so oft 100 in 625 enthalten ist, so oft 5 *M*; oder 100 geben 5, wieviel 625?)

2) Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 1065 *M* 25 $\frac{1}{2}$, welches ein Jahr zu 5 Prozent steht (Prozent, für hundert)?

Antwort. 53 *M* 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$.

3) 14560 *M* bringen in einem Jahre 364 *M* Zinsen, zu wieviel Prozent (%) ist es belegt, d. h. wieviel Zinsen geben 100 *M*?

Antwort. $\frac{14560}{100} \cdot 364 = 2\frac{1}{2}\%$.

Bei der Zinsenrechnung wird immer eine gewisse Zeit als Einheit angenommen, z. B. 1 Jahr, $\frac{1}{2}$ Jahr, 1 Monat &c. Wird nun ein Kapital früher oder später bezahlt, so müssen die nach der festgesetzten Zeit-Einheit fälligen Zinsen noch soviel mal so grofs oder so klein genommen werden, als die verflossene Zeit so grofs oder so klein ist, als die festgesetzte Zeit-Einheit. Beispiele:

4) Wieviel Zinsen trägt ein Kapital von 600 *M* in 3 Jahren, wenn es zu 4% jährlich belegt ist?

Antwort. $\frac{4}{100} \cdot 4 \cdot 3 = 72$ *M*.

5) Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 34,50 *M* in 6 Jahren 3 Monaten zu 2 $\frac{1}{2}$ %?

Antwort. $\frac{34,50}{100} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} = \frac{69}{2 \cdot 100} \cdot \frac{7 \cdot 2 \cdot 5}{4} = \frac{23 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{161}{32} = 5\frac{1}{32}$ *M*.

6) Wieviel betragen die 14tägigen Zinsen von 73,75 *M* zu 5% jährlich?

Antwort. $\frac{73,75}{100} \cdot 5 \cdot \frac{14}{365} \text{ *M* } = 14,144$ $\frac{1}{2}$.

Wenn ein ohne Zinsen zahlbares Kapital, Wechsel &c., vor dem Verfalltage entrichtet wird, so muß dem Inhaber für den entbehrten Nutzen ein gewisser nach einer festgesetzten Zeit-Einheit prozentweise bestimmter Abzug gestattet werden. Beispiel:

7) Ein erst nach 4 Wochen zahlbarer Wechsel von 600 \mathcal{M} wird sogleich mit 8 $\frac{0}{10}$ (jährlichem) Abzug (Diskont, Escompte, Rabatt) bezahlt, wieviel beträgt der Abzug?

$$\text{Antwort. } \frac{600 \cdot 8}{100} = \frac{6 \cdot 8}{13} = 3\frac{9}{13} \mathcal{M}.$$

63.

Umgekehrtes Verhältnis. Wenn zwei Gröfsen so voneinander abhängen, dafs, wenn die eine einigemal so groß oder so klein wird, die andere gerade umgekehrt soviel mal so klein oder so groß genommen werden muß, so sagt man: beide Gröfsen stehen im umgekehrten Verhältnis zu einander. In diesem Fall müssen immer die entgegengesetzten Steigerungen stattfinden: je mehr — je weniger, oder je weniger — je mehr, wodurch dies umgekehrte Verhältnis leicht zu erkennen ist.

Wenn z. E. 4 Arbeiter 6 Tage zu einer gewissen Arbeit brauchen, so werden 2mal soviel oder 8 Arbeiter nicht auch 2mal soviel Zeit, sondern gerade umgekehrt nur $\frac{1}{2}$ mal soviel Zeit dazu brauchen &c.; denn je mehr Arbeiter, je weniger Zeit, d. h. die Zahl der Arbeiter steht mit der Zeit, welche zur Arbeit erforderlich ist, im umgekehrten Verhältnis. Ebenso: wenn 4 Arbeiter in 6 Tagen eine gewisse Arbeit verfertigen können, und nun gefragt wird: wieviel Arbeiter angestellt werden müssen, um dieselbe Arbeit in zwei Tagen zu vollenden, so muß man offenbar schließeln, soviel mal die Zeit so klein ist, soviel mal soviel Arbeiter müssen angestellt werden. Man muß nämlich bei allen Aufgaben dieser Art die Fragezahl durch die als Maßstab gegebene Gröfse dividieren, und mit diesem Quotienten die dritte abzuändernde Gröfse dividieren, oder, was dasselbe ist, mit dem umgekehrten Quotienten multiplizieren, so dafs also die Fragezahl hier immer als Divisor gebraucht wird. Nach der Regel de tri angesetzt, muß man die beiden ersten Glieder miteinander multiplizieren und durch das dritte Glied dividieren, mithin die beim geraden Verhältnis gegebene Regel umkehren, weshalb sie auch hier „umgekehrte Regel de tri“ genannt wird.

Aufgaben. 1) Sechs Arbeiter fertigen eine Arbeit in 3 Tagen, wieviel Arbeiter müssen angestellt werden, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Antwort. $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ Arbeiter.

Oder: 3 Tage erfordern 6 Arbeiter, wieviel 2 Tage?

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 6 \\ 18 : 2 \\ 9 \text{ Arbeiter.} \end{array}$$

2) 6 Mann brauchen zu einer Arbeit 7 Stunden, wieviel Stunden brauchen hierzu 8 Arbeiter?

Antwort. $\frac{6}{8} \cdot 7 = 5\frac{1}{2}$ Stunden. (Je mehr Arbeiter, je weniger Zeit.)

3) Von einem $\frac{11}{4}$ breiten Tuche braucht man $3\frac{1}{2}$ Meter zu einem Kleide, wieviel Meter braucht man von einem Tuche, welches $\frac{7}{2}$ breit ist?

Antwort. Soviel mal weniger breit, soviel mal mehr Tuch, daher:

$$\frac{\frac{11}{4}}{\frac{7}{2}} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{11}{9} \cdot \frac{7}{2} = 4,28 \text{ Meter.}$$

4) In einer Festung befinden sich 600 Mann, welche auf 4 Monate so mit Brot versorgt sind, daß jeder täglich 1 kg erhalten kann, wieviel kg Brot aber wird jeder erhalten können, wenn zu den 600 Mann noch 400 Mann hinzukommen?

Antwort. $\frac{600}{1000} \cdot 1 \text{ kg} = \frac{3}{5} \text{ kg.}$

64.

Zusammengesetzte Verhältnisse. Eine Größe kann von mehreren andern so abhängen, daß sie mit jeder derselben, einzeln genommen, im geraden oder umgekehrten, und mit allen zugleich im zusammengesetzten Verhältnis steht.

Wenn z. E. 6 Mauerleute in 7 Tagen eine Mauer aufführen, welche 4 Stein dick, 90 cm hoch und 120 m lang ist, und nun gefragt wird, wieviel Zeit 12 Mauerleute nach diesem als bekannt gegebenen Fall nötig haben, um eine Mauer aufzuführen, welche 2 Stein dick, 2,70 m hoch und 60 m lang ist, so kann man diese leichte Aufgabe, sowie alle andern Aufgaben dieser Art, auf folgende Weise behandeln.

Man stelle, der leichtern Übersicht wegen, den bekannten Fall erst so unter den unbekanntem, daß gleichnamige Größen übereinander stehen, nämlich:

12 Mauerl., wieviel Zeit? 2 St. dick, 270^{cm} hoch, 60^m lang (unbek. Fall),
6 = 7 Tage, 4 = = 90 = = 120 = = (bek. Fall).

Hier steht nun die gesuchte Zeit in der obersten Reihe mit der Anzahl der Mauerleute im umgekehrten, mit jeder der übrigen Größen aber im geraden Verhältnis, denn je mehr Mauerleute, je weniger Zeit; je weniger dick, je weniger Zeit; je höher, je mehr Zeit &c.

Man untersuche nun erst, wieviel mal so groß oder so klein die Zeit genommen werden muß, wenn bloß ein Umstand, z. B. die Anzahl der Arbeiter verschieden, die übrigen aber, wie Dicke, Höhe &c. vorläufig noch in beiden Fällen gleich wären. Wegen der vergrößerten Anzahl Arbeiter braucht man, die übrigen Umstände gleich gesetzt, nur $\frac{6}{12}$ mal soviel Zeit; jetzt ziehe man noch einen andern ungleichen Umstand, z. B. die Dicke, in Rechnung. Wegen verringerter Dicke allein ist nur $\frac{4}{2}$ mal, also wegen beider ungleichen Umstände nur $\frac{6}{12} \cdot \frac{4}{2}$ mal soviel Zeit nötig. Wegen vergrößerter Höhe ist aber $\frac{270}{90}$ mal soviel Zeit erforderlich; die vorhin wegen größerer Anzahl Arbeiter und geringerer Dicke nur $\frac{6}{12} \cdot \frac{4}{2}$ mal zu nehmende Zeit muß also wieder $\frac{270}{90}$ mal so groß, also $\frac{6}{12} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{270}{90}$ mal genommen werden, weil aber endlich auch die Mauer nicht so lang

sein soll, so ist aus dieser Ursache die ebenbefundene Zeit nur $\frac{2}{10}$ mal erforderlich. Die gesuchte Zeit ist demnach

$$= \frac{6}{12} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{20}{40} \cdot 7 \text{ Tage} = 2\frac{5}{8} \text{ Tage.}$$

Die ganze Rechnung kommt also immer auf eine bloße Multiplikation mehrerer Brüche (Verhältnisse) miteinander zurück. Man muß nämlich die einzelnen Verhältnisse miteinander multiplizieren und mit dem daraus gebildeten Produkte, welches ein zusammen-gesetztes Verhältnis genannt wird, die Größe multiplizieren, deren Veränderung man sucht.

Aufgaben. 1) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden gearbeitet, einen Graben von 40 Meter Länge machen können, wie lang muß hiernach ein Graben werden, welchen (unter übrigens gleichen Umständen, d. h. bei gleicher Breite und Tiefe &c.) 4 Mann in 18 Tagen, täglich 10 Stunden, verfertigen?

Antwort. $66\frac{2}{3}$ Meter = 66,67 m
 4 M. 18 T. 10 St. wie lang? (alle Verhältnisse sind gerade)
 $6 \text{ z } 8 \text{ z } 9 \text{ z } 40 \text{ Meter}$
 $\frac{4}{6} \cdot \frac{18}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot 40 \text{ Meter} = 66\frac{2}{3} \text{ Meter.}$

2) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden arbeitend, einen Wall von 40 Meter Länge auführen, wieviel Tage brauchen dann 4 Mann, die täglich 10 Stunden arbeiten, um einen Wall von $66\frac{2}{3}$ Meter Länge aufzuführen?

Antwort. 18 Tage.
 4 M. Tage? 10 St. 200 Meter (je weniger Mannschaft, je
 $6 \text{ z } 8 \text{ z } 9 \text{ z } 120$ mehr Zeit; je mehr Stun-
 $\frac{4}{6} \cdot 8 \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{200}{120} = 18 \text{ Tage}$ den täglich, je weniger Zeit;
 je länger, je mehr Zeit.)

3) 1500 Mann können sich hinsichtlich des Proviants 30 Tage in einer Festung halten, wenn jedem Manne täglich 1 kg Brot gereicht wird. Nun kommen aber noch 500 Mann dazu, und die ganze Mannschaft soll sich auf 24 Tage halten, wieviel Brot kann jetzt jeder täglich empfangen?

Antwort. $\frac{2}{3} \cdot 1 \text{ kg} = \frac{2}{3} \text{ kg.}$

4) Wenn 40 Weber in 7 Wochen, wöchentlich 6 Tage und täglich 12 Stunden arbeitend, 200 Stück Leinwand, jedes Stück 48 Meter lang und 100 Centimeter breit, verfertigen, wieviel Stück Leinwand werden, in gleichem Verhältnis, 60 Weber in 8 Wochen, wöchentlich 5 Tage und täglich 8 Stunden, verfertigen, wenn jedes Stück 36 Meter lang und 70 Centimeter breit sein soll?

Antwort. $\frac{60}{40} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{100}{100} \cdot 200 = 362\frac{2}{11} \text{ Stück.}$

Achstes Buch.

Von den Verhältniszahlen und deren Gebrauch.

65.

Bei manchen mathematischen Untersuchungen braucht man nicht die wirkliche GröÙe der Dinge, welche der Rechnung unterworfen werden, sondern nur deren Verhältnis zu kennen, d. h. nur zu wissen, wieviel mal so groß oder klein die eine GröÙe ist, als die andere. Dieses GröÙen-Verhältnis kann also dadurch dargestellt werden, indem man statt der GröÙen solche Zahlen setzt, welche, durcheinander dividiert, denselben Quotienten geben, als die GröÙen, worauf sie sich beziehen. Hat z. B. eine Person A 200 Thlr., eine andere Person B 600 Thlr. Vermögen, so kann man sagen, die Vermögensumstände der beiden Personen A und B verhalten sich, der GröÙe nach, gerade so zu einander, wie die beiden Zahlen 2 und 6, oder wie man es wohl auszudrücken pflegt, wie 2 : 6 (lies: wie 2 zu 6, das Kolon steht hier statt der Präposition zu und nicht als Divisionszeichen). Ebenso kann man auch sagen, indem man die beiden Verhältniszahlen 2 und 6 mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder dividiert, wie 1 : 3 : wie $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$: wie 100 : 300 &c. &c., indem der Erklärung gemäß, je zwei dieser Verhältniszahlen, durcheinander dividiert, denselben Quotient geben, als die beiden GröÙen 200 Thlr. und 600 Thlr., worauf sie sich beziehen.

Verhalten sich z. B. die Einwohnerzahlen der vier Städte A, B, C, D, wie die Zahlen 3, 2, 6, 4, oder wie 3 : 2 : 6 : 4, so verhalten sie sich auch, indem man alle diese Verhältniszahlen beliebige male so klein oder so groß nimmt (durch 3, 2, 6, 4 dividiert),

$$\begin{array}{l} \text{A, B, C, D.} \\ \text{wie: } 3 : 2 : 6 : 4 \\ \text{oder auch wie: } 1 : \frac{2}{3} : 2 : \frac{4}{3} \\ \text{wie: } \frac{2}{3} : 1 : 3 : 2 \\ \text{wie: } \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 : \frac{2}{3} \\ \text{wie: } \frac{3}{4} : \frac{1}{2} : \frac{3}{2} : 1 \end{array}$$

z. B. die Einwohnerzahl von A verhält sich zu der von C, wie 3 : 6, oder 1 : 2, oder $\frac{3}{3} : 3$, $\frac{1}{2} : 1$ &c., und die von A verhält sich zu der von D, wie 3 : 4; $1 : \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ &c.

66.

Aus den durch Zahlen dargestellten Verhältnissen mehrerer GröÙen kann man (wozu auch eigentlich die Verhältniszahlen dienen)

sogleich entscheiden, wieviel mal so groß oder so klein die eine Größe ist, als die andere, so sieht man z. B. aus der obigen ersten Reihe, daß B $\frac{2}{3}$ mal, C 2mal, D $\frac{4}{3}$ mal soviel Einwohner hat, als A; aus der dritten Reihe, daß A $\frac{2}{3}$ mal, C 3mal, D 2mal soviel Einwohner hat, als B &c.

Wenn also die Verhältnisse mehrerer Größen gegeben, und eine von den Größen bekannt ist, so kann man die übrigen leicht berechnen, indem man, der deutlichen Übersicht wegen, die Zahlen, welche die Verhältnisse darstellen, erst so einrichtet, daß diejenige, auf welche sich die bekannte Größe bezieht, zur Einheit wird, und also zuvor alle Verhältniszahlen durch diese dividiert (vgl. § 322).

Würde z. B. gesagt, die Bevölkerung der vier Städte A, B, C, D verhalten sich der Reihe nach, wie 3:2:6:4; A hat 6000 Einwohner, und, nach der Bevölkerung von B, C, D gefragt, so würde man so schließen: da sich die Bevölkerungen von

A, B, C, D verhalten
wie: 3, 2, 6, 4, so verhalten sie sich auch (durch 3 dividiert)
wie: 1, $\frac{2}{3}$, 2, $\frac{4}{3}$,
folglich muß, da A 6000 = 6000 Einw. hat,
B $\frac{2}{3} \cdot 6000 = 4000$ Einw.,
C $2 \cdot 6000 = 12000$ Einw.,
D $\frac{4}{3} \cdot 6000 = 8000$ Einw. haben.

Aufgabe. Das Alter einer Person A verhält sich zu dem einer Person B wie 2:5, A ist 20 Jahre alt, wie alt ist B?

Antwort. $\frac{5}{2} \cdot 20 = 50$ Jahre.

67.

Oftmals drückt man die Verhältniszahlen auch so aus, daß die kleinste von ihnen 100 wird, wenn man nämlich wissen will, um wieviel Prozent die Größen verschieden sind. Der Preuß. Thlr. verhielt sich zum alten Hamb. Thlr. wie 5:6, oder mit $\frac{100}{5}$ multipliziert, wie 100:120, d. h. der Hamb. Thlr. war um 20 % besser, als der Preuß., oder dieser um $16\frac{2}{3}$ % schlechter, als jener. Die Brabanter Elle war um 20 % größer, als die Schlesische, heißt soviel, als: 100 Brabanter Ellen = 120 Schlesische Ellen, oder die Brabanter Elle verhält sich zur Schlesischen, wie 120:100.

68.

Gebrauch der Verhältniszahlen, um darnach eine Größe in verhältnismäßige Teile zu teilen. Es genügt, sich einen Fall dieser Art recht klar gemacht zu haben.

Soll z. B. die Zahl 72 in drei solche Teile geteilt werden, welche sich der Größe nach wie 2, 4, 6 verhalten, so findet man diese Teile, wenn man die zu teilende Größe erst durch die Summe der Verhältniszahlen dividiert

und den Quotienten mit jeder Verhältniszahl multipliziert. Denn dividiert man 72 durch $2 + 4 + 6 = 12$, so erhält man den zwölften Teil von 72. Wird nun dieser zwölfte Teil 2mal, 4mal und 6mal genommen, so verhalten sich die Produkte nicht allein wie die gegebenen Zahlen, 2, 4, 6, sondern geben auch addiert, als Probe der richtigen Rechnung, alle zwölf Teile ($\frac{72}{12}$) der ganzen GröÙe wieder. Der eine Teil ist also

$$= 2 \cdot \frac{72}{2 + 4 + 6} = 2 \cdot 6 = 12, \text{ d. i. } 2 \text{ Zwölftel von } 72$$

$$\text{der 2te Teil} = 4 \cdot 6 = 24, \text{ d. i. } 4 \quad = \quad = \quad =$$

$$\text{der 3te Teil} = 6 \cdot 6 = 36, \text{ d. i. } 6 \quad = \quad = \quad =$$

$$\text{Probe-Summe} = 72, \text{ d. i. } 12 \text{ Zwölftel von } 72.$$

Aufgaben. 1) An eine für 3000 *M* verkaufte Konkursmasse, von welcher, nachdem die Gerichte, die Advokaten, Curator massae &c. für die den Gläubigern geleisteten Dienste, den ihnen als privilegiati gebührenden Teil vorabgenommen hatten, — noch 300 *M* übrig blieben, hat samt Zinsen und Kosten zu fordern: A 1800 *M*, B 150 *M*, C 150 *M*, D 900 *M*; wieviel wird jeder Gläubiger vom Reste erhalten, wenn derselbe nach dem Verhältnis der Forderungen verteilt wird?

Antwort. A 180 *M*, B 15 *M*, C 15 *M*, D 90 *M*.

2) Vier Kaufleute unternehmen ein Handelsgeschäft, zu welchem A 600 *M*, B 750 *M*, C 1200 *M* und D 1050 *M* hergiebt. Nach beendigtem Geschäft findet sich ein Gewinn von 1500 *M*, wieviel wird jeder davon erhalten?

Antwort. A 250 *M*, B 312½ *M*, C 500 *M* und D 437½ *M*.

Anmerkung. Dafs (wenn weiter keine juristischen Gründe, als Naturrecht und Billigkeit vorhanden sind) unter gleichbeteiligten Gläubigern eine Konkursmasse nach den Verhältnissen der Forderungen; ein Gewinn oder Verlust bei einem Geschäft nach Verhältnis der Einlagen verteilt werden müsse, ist leicht zu begreifen. So muß z. B. in der vorhergehenden 1sten Aufgabe A wegen der 12mal so großen Forderung auch 12mal soviel haben als B; denn man kann sich statt A erst 12 andere Personen, jede mit 150 *M* Forderung, und diese dann auf eine einzige Person übertragen denken &c.

Bei der zweiten Aufgabe ist jedoch zu bemerken, dafs, wenn die Einlagen nicht gleich lange stehen, wenn etwa nach Verlauf einer Zeit (ohne dafs der Zustand des Geschäfts untersucht wird) Teilnehmer mit ihren Einlagen aus- oder eintreten, sich aber verbindlich machen, auch den bei Beendigung des Geschäfts sich ergebenden Verlust zu tragen, alsdann auch die Zeiten mit in Rechnung gezogen, und nach dem zusammengesetzten Verhältnisse der Einlagen und Zeiten geteilt werden muß. Die Richtigkeit dieses Schlusses ist folgendermaßen leichter zu begreifen:

Angenommen: drei Personen unternehmen ein Geschäft. A giebt dazu 6 *M* auf 2 Monate, B 12 *M* auf 4 M., C 18 *M* auf 6 M.: das Geschäft soll nach 6 Monaten beendigt sein und der Gewinn von 42 *M* gehörig verteilt werden. Man urteile so: Ob A 6 *M* auf 2 Monate, oder $2 \cdot 6 = 12$ *M* auf 1 M. giebt, das ist vollkommen einerlei, denn man denke sich nur, A habe seine 6 *M* nach einem Monat zurückgenommen, gleich darauf aber wieder eingesetzt, was dann offenbar ebensoviel ist, als wenn zwei andere Personen, jede mit 6 *M* auf einen Monat nacheinander

oder auch zugleich, und also statt ihrer eine einzige Person A mit 12 *M* auf einen Monat eingetreten wäre. Ebenso ist es einerlei, ob B 12 *M* auf 4 M. oder 4.12 = 48 *M* auf 1 M., ob C 18 *M* auf 6 M. oder 6.18 = 108 *M* auf 1 M. giebt &c. Hierdurch ist also die Zeit bei allen auf die Einheit zurückgeführt, und die ausgesprochene Regel, daß man die Gewinne oder Verluste nach den Produkten aus den Einlagen mit den Zeiten teilen muß, erklärt. Man hat also:

A	6 <i>M</i>	auf	2	Monate	=	12 <i>M</i>	auf	1	Monat
B	12	:	:	4	:	=	48	:	1
C	18	:	:	6	:	=	108	:	1

Summe der Verhältnis-Zahlen = 168.

Folglich erhält vom Gewinne:

$$A, 12 \cdot \frac{42}{168} = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3 \text{ } M$$

$$B, 48 \cdot \frac{1}{168} = 12 \text{ } :$$

$$C, 108 \cdot \frac{1}{168} = 27 \text{ } :$$

$$\text{Probe-Summe } 42 \text{ } M$$

Aufgabe. Zu einem Handel, in welchem 200 *M* verloren wurden, hat A 200 *M* auf 5 Mon., B 500 auf 2 Mon., C 300 auf 4 Mon., D 600 auf 3 Mon. hergegeben; wieviel muß jeder vom Verlust tragen?

Antwort. A, $1000 \cdot \frac{1}{25} = 40 \text{ } M$; B, 40 *M*; C, 48 *M*; D, 72 *M*.

69.

Gebrauch der Verhältniszahlen bei Mischungen, wo die Bestandteile ein gegebenes Verhältnis zu einander haben müssen. Aufgaben dieser Art, welche in der praktischen Chemie &c. vorkommen, gehören eigentlich ganz zu denen des vorhergehenden Paragraphen. Ein einziges Beispiel wird zur Erläuterung genügen.

Aufgabe. Das gewöhnliche Schießpulver ist eine Mischung aus Salpeter, Schwefel und Kohle, welche Bestandteile sich dem Gewichte nach wie 16, 2, 3 verhalten (d. h. auf je 16 Gewichtsteile Salpeter müssen 2 solche Gewichtsteile Schwefel und 3 solche Gewichtsteile Kohle genommen werden); wieviel ist nun von jedem Bestandteil zu 1470 kg Pulver erforderlich?

Auflösung. So oft $16 + 2 + 3 = 21$ in 1470 enthalten ist, so oft muß jeder Bestandteil genommen werden; folglich ist zu 1470 kg Pulver erforderlich:

$$70 \cdot 16 = 1120 \text{ kg Salpeter,}$$

$$70 \cdot 2 = 140 \text{ kg Schwefel,}$$

$$70 \cdot 3 = 210 \text{ kg Kohle.}$$

$$\text{Probe-Summe } 1470 \text{ kg Pulver.}$$

Will man wissen, wieviel Prozent eine Mischung von jedem ihrer Bestandteile enthält, d. h. wieviel von jedem Bestandteile in einer Mischung enthalten ist, welche man sich dem Gewichte (oder Masse) nach in 100 gleiche Teile denkt, so muß man mit der Summe der Verhältniszahlen in 100 dividieren und mit dem Quotienten jede multiplizieren. Zu 100 Teilen Pulver ist z. B. erforderlich:

$$\frac{100}{21} \cdot 16 = 76 \frac{4}{21} \text{ Teile oder } 76 \frac{4}{21} \% \text{ Salpeter,}$$

$$\frac{100}{21} \cdot 2 = 9 \frac{1}{11} \text{ Teile Schwefel} = 9 \frac{1}{11} \% ,$$

$$\frac{100}{21} \cdot 3 = 14 \frac{6}{21} \text{ Teile Kohle} = 14 \frac{6}{21} \% .$$

$$\text{Summe } 100 \text{ Teile Pulver.}$$

Neuntes Buch.

70.

Die Verhältniszahlen der Münzen, Maße und Gewichte haben sich in neuerer Zeit, namentlich durch die großartigen Erfolge der preussisch-deutschen Politik ungemein verringert. Von jetzt an giebt es in Deutschland, Oesterreich, in der Schweiz und in den romanischen Staaten keine verschiedenen Maße und Gewichte mehr, nur England, Russland und die skandinavischen Länder stehen noch außerhalb der Vereinigung. Ebenso hat sich Deutschland eine einheitliche Münzordnung gegeben, und da der Binnenverkehr sich zum internationalen im allgemeinen wie ein Riese zu einem Zwerge verhält, so läßt sich leicht ermessen, wieviel Riesenarbeit in Zukunft erspart werden möge.

Die Grundlage der deutschen Maß- und Gewichtsordnung ist die französische. Frankreich, das schon früh zu einer politischen Einheit verschmolzen war, fühlte das Bedürfnis eines einheitlichen Maß-, Gewichts- und Münzsystems. Daher wurden schon im 17. Jahrhunderte allerlei Versuche gemacht, ein solches herzustellen. Man suchte im allgemeinen nach einem Längenmaße, auf welches alle anderen Maße und ebenso die Gewichte und Münzen bezogen werden könnten, und zugleich sollte dieses Längenmaß der Art sein, daß es, im Falle es verloren ginge, wieder aus der Natur hergestellt werden könnte. Manche Versuche scheiterten an der Veränderlichkeit des Maßes, z. B. des Sekundenpendels, welches nach den Polen länger ist als nach dem Äquator hin. Dagegen hielt man die Erdoberfläche für konstant genug, um das etwa verlorene Normalmaß durch neue Messung wieder herstellen zu können. Auf diesen Gedanken hatten die Meridianmessungen, welche aus rein theoretischen Gründen ausgeführt wurden, von selbst hingeleitet. Um nun die Länge eines Erdmeridians genau zu bestimmen, maß man denjenigen, der durch Barcelona und Dünkirchen geht, und bezeichnete $\frac{1}{40000000}$ desselben oder $\frac{1}{10000000}$ seines Quadranten als Einheit für das Längenmaß und nannte diese: Meter (m). Das Meter ist aber nicht $\frac{1}{10000000}$ des Meridianquadranten, sondern $\frac{1}{10000856}$ desselben, welche Zahl aber, da sie aus empirischer Messung hervorgegangen ist, immer noch mit Fehlern behaftet ist. Das Metermaß, wenn es verloren ginge, wiederzufinden, ist also sehr unwahrscheinlich. Man bestimmte das Meter zu 3,186 preuß. Fufs, zu 3,163 Wiener Fufs, zu 3,281 engl. Fufs &c., und leitete aus ihm höhere und niedrigere Längeneinheiten ab.

Maßgebend war hierfür das dekadische oder Zehnerzahlensystem. Um die höheren und niederen Einheiten des Meters mit diesen in Übereinstimmung zu bringen, setzte man 10 Meter zu einer höheren Einheit zusammen und zerlegte 1 Meter in zehn niedrigere Einheiten und setzte jene Zusammensetzung und diese Zerlegung soweit fort, als das praktische Bedürfnis erforderte. Zur Bezeichnung der höheren und niederen Einheiten des Meters wählte man Namen, die dem System zur Empfehlung gereichten und ihm in Aussicht stellten, internationale Bedeutung zu gewinnen. Man bezeichnete nämlich das

10-, 100-, 1000-, 10000fache des Meters durch Vorsetzung der griechischen und $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ des Meters durch Vorsetzung der lateinischen Zahlennamen. Da nun im Griechischen 10 deka (*δεκα*), 100 hekaton (*εκατον*), 1000 chiliot (*χιλιοι*), 10000 myrias (*μυριας*), im Lateinischen 10 decem, 100 centum, 1000 mille bedeutet, so bezeichnet man

10 Meter durch 1 Dekameter (Dm),
 100 Meter durch 1 Hektometer (Hm),
 1000 Meter durch 1 Kilometer (km),
 10000 Meter durch 1 Myriameter (Mym),
 $\frac{1}{10}$ Meter durch 1 Decimeter (dm),
 $\frac{1}{100}$ Meter durch 1 Centimeter (cm),
 $\frac{1}{1000}$ Meter durch 1 Millimeter (mm),

so {dafs nach den in den Parenthesen gegebenen Abkürzungen folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Mym} &= 10 \text{ km} = 100 \text{ Hm} = 1000 \text{ Dm} = 10000 \text{ m}, \\ 1 \text{ km} &= 10 \text{ Hm} = 100 \text{ Dm} = 1000 \text{ m}, \\ 1 \text{ Hm} &= 10 \text{ Dm} = 100 \text{ m}, \\ 1 \text{ Dm} &= 10 \text{ m}, \\ &1 \text{ m}; \\ 1 \text{ m} &= 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}, \\ 1 \text{ dm} &= 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}, \\ 1 \text{ cm} &= 10 \text{ mm}, \\ &1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Um das Flächenmafs zu gewinnen, nahm man das Quadrat des Meters als Einheit an, brauchte die griechische und lateinische Bezeichnung wie beim Längenmafs und setzte den Namen das Zeichen □ (Quadrat) vor. Setzt man daher der Kürze wegen $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, $10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ &c., so erhält man für das Flächenmafs folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 \square \text{ Mym} &= 10^2 \square \text{ km} = 10^4 \square \text{ Hm} = 10^6 \square \text{ Dm} = 10^8 \square \text{ m}, \\ 1 \square \text{ km} &= 10^2 \square \text{ Hm} = 10^4 \square \text{ Dm} = 10^6 \square \text{ m}, \\ 1 \square \text{ Hm} &= 10^2 \square \text{ Dm} = 10^4 \square \text{ m}, \\ 1 \square \text{ Dm} &= 10^2 \square \text{ m}, \\ &1 \square \text{ m}; \\ 1 \square \text{ m (oder qm)} &= 10^2 \square \text{ dm} = 10^4 \square \text{ cm} = 10^6 \square \text{ mm}, \\ 1 \square \text{ dm} &= 10^2 \square \text{ cm} = 10^4 \square \text{ mm}, \\ 1 \square \text{ cm} &= 10^2 \square \text{ mm}, \\ &1 \square \text{ mm}. \end{aligned}$$

Als Einheit des Feldmafses leitete man hieraus das Ar = 100 □ m ab und bildete die Namen Myriar, Kilar, Hektar, Dekar, Ar, Deciar, Centiar, Milliar, welche aber nach 10 fortschreiten, so dafs also folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ MyAr} &= 10 \text{ KAr} = 100 \text{ HAr} = 1000 \text{ DAr} = 10000 \text{ Ar}, \\ 1 \text{ KAr} &= 10 \text{ HAr} = 100 \text{ DAr} = 1000 \text{ Ar}, \\ 1 \text{ HAr} &= 10 \text{ DAr} = 100 \text{ Ar}, \\ 1 \text{ DAr} &= 10 \text{ Ar}, \\ &1 \text{ Ar}; \\ 1 \text{ Ar} &= 10 \text{ dAr} = 100 \text{ cAr} = 1000 \text{ mAr}, \\ 1 \text{ dAr} &= 10 \text{ cAr} = 100 \text{ mAr}, \\ 1 \text{ cAr} &= 10 \text{ mAr}, \\ &1 \text{ mAr}. \end{aligned}$$

Doch sind in die Praxis nur folgende Bezeichnungen übergegangen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ HAr (ha)} &= 100 \text{ Ar (a)} = 10000 \text{ cAr (= 10000 } \square \text{ m)}, \\ 1 \text{ Ar} &= 100 \text{ cAr (= 100 } \square \text{ m)}. \end{aligned}$$

Auch das Körpermafs ist auf das Meter zurückgeführt, indem der Cubikmeter (Cm) die Einheit bildet. Bezeichnet man das Körpermafs überhaupt durch C (Cubik), so ist

$$\begin{aligned}
 1 \text{ CMym} &= 10^3 \text{ CKm} = 10^6 \text{ CHm} = 10^9 \text{ CDm} = 10^{12} \text{ Cm}, \\
 1 \text{ CKm} &= 10^3 \text{ CHm} = 10^6 \text{ CDm} = 10^9 \text{ Cm}, \\
 1 \text{ CHm} &= 10^3 \text{ CDm} = 10^6 \text{ Cm}, \\
 1 \text{ CDm} &= 10^3 \text{ Cm}, \\
 1 \text{ Cm} &= 1 \text{ Cm}; \\
 1 \text{ Cm (oder cbm)} &= 10^3 \text{ Cdm} = 10^6 \text{ Ccm} = 10^9 \text{ Cmm}, \\
 1 \text{ Cdm} &= 10^3 \text{ Ccm} = 10^6 \text{ Cmm}, \\
 1 \text{ Ccm} &= 10^3 \text{ Cmm}, \\
 1 \text{ Cmm} &= 1 \text{ Cmm}.
 \end{aligned}$$

Als Einheit des Hohlmafses nahm man den Decimeter-Würfel und bezeichnete den Raum, den derselbe einnimmt, durch das Wort Liter (l), und erhielt so folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ kl} &= 10 \text{ hl} = 100 \text{ Dl} = 1000 \text{ l} (= 1000 \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ hl} &= 10 \text{ Dl} = 100 \text{ l} (= 100 \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ Dl} &= 10 \text{ l} (= 10 \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ l} &= 1 \text{ Cdm}; \\
 1 \text{ l} &= 10 \text{ dl} = 100 \text{ cl} = 1000 \text{ ml} (= 1 \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ dl} &= 10 \text{ cl} = 100 \text{ ml} (= \frac{1}{10} \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ cl} &= 10 \text{ ml} (= \frac{1}{100} \text{ Cdm}), \\
 1 \text{ ml} &= 1 \text{ Ccm}.
 \end{aligned}$$

Als Gewichtseinheit endlich setzte man fest, dafs das Gewicht eines Cubikcentimeters Wasser bei einer Temperatur von 4° C. dieselbe darstelle und ein Gramm (g) genannt wurde. Man bekam daher folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Myg} &= 10 \text{ Kg (kg)} = 100 \text{ Hg} = 1000 \text{ Dg} = 10000 \text{ g} (= 10 \text{ Cdm Wasser}), \\
 1 \text{ Kg} &= 10 \text{ Hg} = 100 \text{ Dg} = 1000 \text{ g} (= 1 \text{ Cdm Wasser}), \\
 1 \text{ Hg} &= 10 \text{ Dg} = 100 \text{ g} (= \frac{1}{10} \text{ Cdm Wasser}), \\
 1 \text{ Dg} &= 10 \text{ g} (= \frac{1}{100} \text{ Cdm Wasser}), \\
 1 \text{ g} &= 1 \text{ Ccm Wasser}; \\
 1 \text{ g} &= 10 \text{ dg} = 100 \text{ cg} = 1000 \text{ mg} (= 1 \text{ Ccm Wasser}), \\
 1 \text{ dg} &= 10 \text{ cg} = 100 \text{ mg} (= \frac{1}{10} \text{ Ccm Wasser}), \\
 1 \text{ cg} &= 10 \text{ mg} (= \frac{1}{100} \text{ Ccm Wasser}), \\
 1 \text{ mg} &= 1 \text{ Cmm Wasser}.
 \end{aligned}$$

An diese Bestimmungen schließt sich, wie schon gesagt, die deutsche Maß- und Gewichtsordnung an. Die Einheit für das Längenmaß ist das Meter (Stab) und wird durch Verhältniszahlen vervielfacht und in gleiche Teile eingeteilt:

$$\begin{aligned}
 [1 \text{ Meile} &= 7500 \text{ Meter}; \\
 1 \text{ Kilometer (km)} &= 100 \text{ Dekameter} = 1000 \text{ Meter}; \\
 1 \text{ Dekameter oder Kette (dm)} &= 10 \text{ Meter}; \\
 1 \text{ Meter oder Stab (m)} &= 100 \text{ Centimeter}; \\
 1 \text{ Centimeter oder Neuzoll (cm)} &= 10 \text{ Millimeter oder Strich (mm)}.
 \end{aligned}$$

Die Meile und das Kilometer dienen als Entfernungsmafs.

Wie im französischen Flächenmafs bildet auch im deutschen das Quadratmeter die Einheit, und es gelten dafür die oben angegebenen Gleichungen. Dieselben sind:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Quadratkilometer (}\square\text{Km)} &= 100 \text{ Hektar} = 10000 \text{ Ar}; \\
 1 \text{ Hektar (ha)} &= 100 \text{ Ar}; \\
 1 \text{ Ar (a)} &= 100 \text{ Quadratmeter}; \\
 1 \text{ Qu.-mtr (qm)} &= 10000 \text{ Quadrateentimeter}; \\
 1 \text{ Qu.-cmtr (qcm)} &= 100 \text{ Quadratmillimeter (qmm)}.
 \end{aligned}$$

Ebenso ist die Einheit für das deutsche Hohlmaß das Liter (die Kanne). Aus folgenden Systemen von Gleichungen übersieht man sofort den Zusammenhang zwischen den daraus abgeleiteten Maßen

- 1 Cubikmeter (cbm) = 1000000 Cubikcentimeter (= 1000 Liter).
- 1 Cubikcentimeter (ccm) = 1000 Cubikmillimeter (cmm).
- 1 Hektoliter oder Fafs (hl) = 2 Scheffel (Neuscheffel) = 100 Liter.
- 1 Scheffel = 50 Liter oder Kannen (Neukannen).
- 1 Liter (l) = 2 Schoppen.

Endlich ist als Einheit des deutschen Gewichtsystems das Kilogramm, also implicite ebenfalls das französische Gramm festgesetzt und zwar ebenfalls mit der Bestimmung, daß das Gewicht des Wassers bei einer Temperatur von + 4° C. bestimmt werde.

Bezeichnet man Tonne durch *t*, die noch vorläufig in Gebrauch sich befindlichen Centner durch *Ctr.* und Pfund durch *℔*, so erhält man folgende Gleichungen:

- 1 *t* = 1000 Kilogramm = 2000 *℔*.
- 1 *Ctr.* = 50 " = 100 *℔*.
- 1 Kilogr. (kg) = 2 *℔* = 1000 Gramm.
- 1 *℔* [= 50 Dekagramm (dg) oder Neulot] = 500 Gramm.
- 1 Gramm (g) [= 100 Centigramm (cg)] = 1000 Milligramm (mg).

Weniger nun stimmt die deutsche Reichsmünze (1 Mark oder *M* = 100 Pfennige) mit den Münzen der übrigen europäischen Länder überein; aber dieselbe gilt für das ganze deutsche Reich. Reduktionstabellen werden daher immer noch gebraucht werden und vielleicht auf langehin notwendig sein.

71.

Mittelt solcher Tabellen ist es nun aber leicht — jedoch umständlich und zeitraubend — die Maßeinheiten, welche in einem Lande gäng und gäbe sind, in die eines andern Landes zu verwandeln.

Will man z. B. wissen, wieviel 732 russische Sashen in Metern betragen und findet man in den Tafeln, daß 1 Sashen = 2½ englische Yard, und 1 Meter = 1,09363 englische Yard sind, so hat man

$$732 \text{ Sashen} = 2\frac{1}{2} \text{ Yard} \cdot 732 = \frac{7 \cdot 732}{3} \text{ Yard,}$$

$$1 \text{ Yard} = \frac{1}{1,09363} \text{ Meter} = \frac{100000}{109363} \text{ Meter,}$$

$$\text{also} \quad 732 \text{ Sashen} = \frac{100000 \cdot 7 \cdot 732}{3 \cdot 109363} \text{ Meter} = 1561,772 \text{ Meter.}$$

72.

Obgleich die Werte der verschiedenen Münzen vermöge des in ihnen enthaltenen reinen Metalls ein fest bestimmtes Verhältnis zu einander haben, so giebt es doch mehrere durch Staats- und Handelspolitik bestimmte Gründe, welche diese Verhältnisse wandelbar machen, und den Münzen auf eine kurze Zeit, je nachdem sie gerade sehr oder wenig gesucht werden, bald einen größeren bald einen kleineren Wert beilegen. Diese Wandelbarkeit ist jedoch in enge Grenzen eingeschlossen; denn ständen die Münzen lange unter dem Werte des in ihnen enthaltenen reinen Metalls, so würde man sie einschmelzen, ständen sie aber weit über dem Werte ihres inneren Gehaltes und der Prägekosten, so würde man sie nicht annehmen.

Hat man also Münzen eines Ortes oder Landes in die eines anderen umzusetzen, so muß man sich jedesmal nach dem zeitigen, von der Politik bestimmten und öffentlich bekannt gemachten Kours (Verhältnis) richten. Hier können nun aber Fälle vorkommen, wo das Verhältnis einer Münzsorte zu dem einer andern, auf welche erstere reduziert werden soll, nicht geradezu, sondern durch Zwischenverhältnisse gegeben ist, aus welchen dann ersteres durch die sogenannte Kettenregel (wiederholte Regeldetri) leicht gefunden werden kann. Ein einziges Beispiel wird zur Erläuterung solcher leichten Reduktionen genügen.

Wieviel sind 125 Rubel (Petersburg) in Dollars (Newyork) wert, wenn 100 Rubel 202 Mark in Berlin, 100 Mark 59 Gulden in Wien und 135 Gulden in Wien 54 Dollars in Newyork sind?

Da

100 Rubel	=	202 Mark,
100 Mark	=	59 Gulden,
135 Gulden	=	54 Dollars

ist, so ist 1 Rubel = $\frac{202 \text{ M}}{100}$, 1 M = $\frac{59 \text{ G}}{100}$, 1 G = $\frac{54 \text{ \$}}{135}$, mithin

$$125 \text{ Rubel} = \frac{202 \cdot 125}{100} \text{ M} = \frac{202 \cdot 125 \cdot 59}{100 \cdot 100} \text{ G} = \frac{202 \cdot 125 \cdot 59 \cdot 54}{100 \cdot 100 \cdot 135} \text{ \$} = 59.59 \text{ \$}.$$

Anmerkung. Wer alle Tage solche Reduktionen machen muß, der merke sich folgende mechanische Regel, deren Richtigkeit sich von selbst erklärt.

Kettenregel. Man stelle der leichteren Übersicht wegen, und um sich zu überzeugen, daß die Kette der Reduktionssätze keine Lücke hat, dieselben erst nach folgender Ordnung untereinander, daß die Fragezahl, deren Umsatz oder Wert gesucht wird, rechts zu stehen kommt, dann jedes erste Glied der folgenden Sätze dem zweiten Gliede, wie es auch benannt sein möge, an Wert, dem zweiten Gliede des nächst vorhergehenden aber an Benennung vollkommen gleich ist, nämlich so:

Wieviel	Dollar	=	125 Rubel,
wenn	100 Rubel	=	202 Mark,
	100 Mark	=	59 Gulden,
	135 Gulden	=	54 Dollars,

und dividiere alsdann das Produkt der rechtsstehenden Zahlen durch das Produkt der links stehenden, indem man zuvor die etwa gemeinschaftlichen Faktoren auf beiden Seiten gegeneinander aufhebt.

Auch alle anderen Aufgaben, welche auf den wiederholten Dreisatz mit nur geraden Verhältnissen führen, können nach der Kettenregel berechnet werden. Der Kettensatz ist offenbar ganz dasselbe. Übrigens kommen solche weitläufige Reduktionen, wie die vorstehende in der Wirklichkeit selten vor.

73.

Sämtliche in diesem ersten Teile erklärten Rechnungen pflegt der gemeine Mann wohl die kaufmännischen zu nennen, weil sie so oft im Handel und Wandel vorkommen. Allein jeder Mensch muß handeln und wandeln, und alle nach derselben Regeldetri, die uns Gerechtigkeit lehrt, wie Seume sagt. — Zuweilen wird aber der sonst leichte Sinn solcher alltäglichen Rechnungen durch fremde Wörter und Handwerksausdrücke verdunkelt, wie z. B. durch die Wörter brutto, tara, netto, conto, pari &c.

Von solchen und ähnlichen Sachen muß man aber die Erklärungen nicht in einem Lehrbuche der Mathematik, sondern gehörigen Orts im Wörterbuch suchen. — Nur ein paar allgemein gebräuchliche Ausdrücke mögen hier noch erklärt werden:

Um die Feinheit des Goldes oder Silbers zu bestimmen, giebt man an, wie viele Teile Gold oder Silber in 1000 Teilen der Mischung enthalten sind. Das Gold oder Silber ist rein oder gediegen, wenn das Metall nur Gold, resp. Silber enthält. Es ist alsdann $\frac{1000}{1000}$ fein. Dagegen ist es grob, wenn es einen Zusatz (gewöhnlich Kupfer) enthält. So ist z. B. die Feinheit der Goldmünzen des Deutschen Reiches $\frac{900}{1000}$, d. h. $\frac{900}{1000}$ eines Kilogramms des groben Goldes ist reines Gold und $\frac{100}{1000}$ sind Zusatz. Aus einem Pfunde feinen Goldes werden $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke und aus einem Pfunde der Mischung $125,55$ Zehnmarkstücke geprägt und es ist in der That $125,55 : 139,5 = 900 : 1000$. Dasselbe Verhältnis haben auch die Silbermünzen, nämlich $\frac{900}{1000}$.