Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Erstes Buch. Zahlenbildung und Zahlensystem

Erster Teil.

Specielle Arithmetik.

Erstes Buch.

Zahlenbildung und Zahlensystem.

1.

Die Vorstellung der Einheit oder das einmalige Vorhandensein einer Sache benennen wir mit dem Worte eins. Die wiederholte Vorstellung der Einheit aber wollen wir mit einem einzigen, ursprünglich willkürlichen Worte (wie etwa zwei, duo, deux, two &c.) belegen, und statt eins und eins zu sagen: das kürzere Wort zwei aussprechen. Für die auf zwei folgende Zahl, nämlich zwei und eins, ist schon das Wort drei gewählt, welches wir also beibehalten. — So gehen wir nun schrittweise, jedesmal um eine Einheit weiter, und sagen vier statt drei und eins, fünf statt vier und eins, sechs, sieben, acht.... — Die durch lange Übung im Gedächtnis behaltene Folge dieser Zahlwörter ist es aber eigentlich, wodurch wir uns der bestimmten Anzahl Einheiten, welche jedes Wort bezeichnet, schnell erinnern.

Es ist nicht schwer, auch für einige der nun folgenden Zahlen eigentümliche Wörter zu finden, z. B. neun, zehn, elf, zwölf &c. allein auf diese Weise noch lange fortschreiten zu wollen, würde doch völlig unmöglich und unüberlegt sein; denn wo gäbe es wohl eine so fruchtbare Erfindungsgabe und ein so grofses Gedächtnis, alle sonach nötig werdenden unzähligen Wörter zu ersinnen und zu behalten. Dennoch mag, wenn nicht, wie Josephus berichtet, Adam gleich als gelehrter Mathematiker geboren wurde, die Welt schon lange gestanden haben, bis jemand den vernünftigen Gedanken fafste: um beim fernern Fortzählen der gar zu schnellen Anhäufung von Wörtern vorzubeugen, nur erst eine beliebig kurze Strecke zu zählen, z. B. bis zehn, und dann, ohne neue Wörter nötig zu haben, die Verbindung der folgenden Einheiten mit dieser Zahl zehn durch das Wort und anzudeuten.

Statt also für die auf zehn folgende Zahl ein neues Wort zu wählen, sagt man: eins und zehn, darauf: zwei und zehn, drei und zehn &c. bis zehn und zehn. Daſs man später das Wort und, der Kürze wegen, wieder wegwarf, war keine groſse Erfindung, und daſs man noch später statt einszehn, zweizehn (undecim, duodecim) die etwas kürzeren Wörter: elf, zwölf einführte, war eine unnötige Verbesserung, die, wenn man es bemerken will, der Jugend nur das Zählenlernen erschwert.

Die Zahl zehn kann man als eine aus einfachen Einheiten oder sogenannten Einern zusammengesetzte neue Einheit, Zehner genannt, betrachten, und danach zählen (Vorbegr. VI), mithin statt zehn und zehn auch zweimalzehn sagen. Hierauf folgt also: eins und zweimalzehn, zwei und zweimalzehn ..... zehn und zweimalzehn, dafür: dreimalzehn, ferner: eins und dreimalzehn &c. bis zehnmalzehn. Die Wörter zweimalzehn, dreimalzehn &c. bis neunmalzehn, wurden durch bloſse Auslassung des Wortes „mal" und die kleine Veränderung der Silbe zehn in zig, in die etwas kürzern: zwanzig, dreizig &c. zusammengezogen; statt zehnmalzehn ist das neue Wort hundert eingeführt.

Von hier an wird nun, dem Sprachgebrauche gemäſs, die gröſsere Zahl immer vor der kleineren ausgesprochen, also: hundert und eins, hundert und zwei u. s. f. bis hundert und hundert, dafür: zweihundert, indem man hundert wieder als eine Einheit, Hunderter, betrachtet. Ferner: zweihundert und eins &c. bis zehnmal hundert, wofür man das neue Wort tausend gebraucht. Die Zahl tausend betrachtet man wieder als eine neue Einheit, ebenso die Zahlen zehntausend und hunderttausend, welche letzteren aber keine besondere Namen erhalten haben. Statt tausend mal tausend sagt man: Million, und für Million mal Million: Billion; für Million mal Billion: Trillion. Die nachfolgenden wenigen Wörter kann jeder, der an solchen übersinnlichen Vorstellungen Vergnügen findet, nach dem angedeuteten Gange selbst bilden, nämlich: Quadrillion, Quintillion, Sextillion, Septillion, Octillion, Nonillion, Decillion, Undecillion, Duodecillion &c. &c. Diese letztgenannten Zahlwörter aber sind, schon von Trillion an, völlig überflüssig, weil sie nie vorkommen. Schon Billion ist eine wahre Unzahl, die man nur in seltenen Fällen gebraucht, wenn man z. B. die, wenn auch bestimmte, jedoch über alle deutliche Vorstellung gehende Entfernung der nächsten Fixsterne &c. kurz ausdrücken will.

2.

Auf diese Weise war es also möglich, alle denkbaren Zahlen mit sehr wenigen Wörtern bestimmt zu benennen. — Ursprünglich haben wir nur die zehn ersten und, wenn man die Wörter hundert, tausend, Million und höchstens noch Billion dazu rechnet, im ganzen doch nur vierzehn Wörter zu erfinden brauchen, denn die übrigen, wie

Trillion, Quadrillion &c. gehören zum wissenschaftlichen Luxus. — Wir können schon geläufig zählen, indem wir es von Jugend auf nach und nach spielend lernten. Stellen wir uns aber den ersten Zustand der Wissenschaft recht lebhaft vor, so werden wir auch dieses offenbar nicht durch Zufall entstandene, sondern wohldurchdachte einfache Verfahren, die Zahlen leicht zu unterscheiden, zu würdigen wissen; wie leicht hätte nicht auch zur Qual unserer Jugend ein weit schwerer zu lernendes Verfahren entstehen können. (Siehe Anhang § 311.)

3.

Als man nun so mit dem Zählen aufs Reine gekommen war, dachte man auch auf Mittel, gewisse, ohne Zutreten der Kunst sehr beschwerliche oder gar unmögliche Rechnungen mit den Zahlen zu erleichtern. Anfangs und lange mögen sich unsere Vorfahren (die Europäer noch im 14ten Jahrhundert) mit einem mühsamen Zuzählen und Abzählen und einer gewissen Art Kopfrechnen beholfen haben, bis ein erfindungsreicher Geist, ein wahres mathematisches Genie, auf den glücklichen Gedanken kam, die Zahlenbegriffe durch ganz einfache Zeichen anzudeuten. — So wurde festgesetzt: das Zeichen 1 solle die Einheit bedeuten, das Zeichen 2 an die Zahl zwei erinnern, die Zeichen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die Zahlen drei bis neun darstellen.

Ursprünglich waren diese Zeichen ganz willkürlich; auch haben sie erst nach und nach ihre jetzige einfache Form erhalten. Jedenfalls sind die Indier die Erfinder dieser Zeichen. Von diesem gebildeten Volke sollen die Araber sie bekommen, aber immer verheimlicht haben. Erst zur Zeit des Sarazenenkrieges sind diese Zeichen (von dem Europäer die arabischen Ziffern, von dem Araber selbst aber die indischen genannt) in Europa bekannt geworden. Etwas früher findet man wohl hie und da in Inschriften eine dunkle Spur derselben, ihr nützlicher und kunstgerechter Gebrauch war aber selbst im 15ten Jahrhundert noch wenigen bekannt.

4.

So wie für die Zahlen von eins bis neun, hätte man auch leicht noch für einige der folgenden einfache Zeichen erfinden können, z. B. für zehn das Zeichen: †, für elf: ⊙ &c. Allein auch hier würden Erfindungs- und Gedächtniskraft nicht ausreichen, für jede besondere Zahl ein eigentümliches Zeichen zu erfinden und zu behalten. Der höchst sinnreiche Einfall, diese Unmöglichkeit bloſs durch systematische Stellung der Ziffern aufzuheben, zeugt wahrlich von groſsem Scharfsinn.

Setzen wir z. B. fest, daſs (in Übereinstimmung mit unserm Verfahren zu zählen) die zehn einfachen Einheiten (Einer) zusammengefaſst, als eine neue Einheit (Zehner) für sich betrachtet werden und, zur Unterscheidung von den einfachen Einheiten, eine

Einheit 1sten Ranges heifsen soll; ferner zehn Einheiten ersten Ranges, oder zehn Zehner, d. h. die Zahl hundert, als eine neue Einheit 2ten Ranges anzusehen u. s. f., je zehn Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höheren Ranges gelten zu lassen, so dafs also tausend eine Einheit des 3ten, zehntausend eine Einheit des 4ten, hunderttausend vom 5ten, Million vom 6ten Range wird &c., so können wir, blofs mit Hilfe der neun ersten Ziffern und des nachstehenden Systems, alle möglichen Zahlen auf eine höchst einfache und bestimmte Weise bezeichnen.

Jede der neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deutet, allein stehend, durch ihre eigentümliche Figur eine bestimmte Anzahl Einheiten an, sobald sie aber in verschiedene Plätze des Systems gesetzt werden, erhalten sie auch verschiedene Bedeutung, und die Überschriften geben dem Auge schnell zu erkennen, was für Einheiten sie darstellen, ob Hunderte, ob Tausende &c. Setzt man z. B. die Ziffer 6 in den dritten Rang, so stellt sie sechs Einheiten 3ten Ranges oder die Zahl sechstausend dar &c. Um die Zahl dreifsigtausend mit Ziffern zu schreiben, setzt man die Ziffer 3 in den vierten Rang, weil dreifsigtausend so viel ist, als 3 Einheiten vierten Ranges. Enthält eine Zahl verschiedene Einheiten, so setzt man für jede besondere Art die sie darstellende Ziffer gehörigen Orts hin. Es ist z. B. vierunddreifsigtausendzweihundertsechsundfünfzig so viel, als: dreifsigtausend, viertausend, zweihundert, fünfzig und sechs, wie bei (a). Ebenso schreibt man die Zahl siebenhundertundneuntausendundfünf, wie bei (b), wo die Plätze des 1sten, 2ten und 4ten Ranges unbesetzt bleiben.

.	.	V. Rang Hndrttsd.	IV. Rang Zehntsd.	III. Rang Tausende	II. Rang Hunderte	I. Rang Zehner	Einer	
			3	4	2	5	6	a.
		7	...	9	...	...	5	b.

Sind zwischen den mit Ziffern besetzten Plätzen keine unbesetzt, wie bei (a), so wird der Rang einer jeden Ziffer schon durch die Anzahl der rechts auf sie folgenden bestimmt; so ist z. E. die Ziffer 5 bei (a) vom ersten Range, weil rechts nur noch eine Ziffer folgt. In diesem Falle also, wo alle Ränge vom höchsten an besetzt sind, kann man das Schema offenbar entbehren, und z. E. die Zahl bei (a) kürzer so schreiben: 34256, indem man den Rang einer jeden Ziffer sehr leicht (durch lange Übung schon auf den ersten Blick) findet, wenn man die aufeinander folgenden Ziffern, von der Rechten gegen die Linke (Einer, Zehner, Hunderte &c.) in Gedanken durchläuft. Selbst in den Fällen, wo, wie bei (b), ein oder mehrere Plätze unbesetzt sind, kann man das Schema dennoch weglassen, und den Ziffern dadurch ihren gehörigen Rang anweisen, indem man die auf sie folgenden leeren Plätze durch irgend ein beliebiges, an sich bedeutungsloses Zeichen besetzt.

Man bedient sich allgemein des Zeichens 0, im Deutschen Null genannt (im Arabischen Zephirum, Zero, Ziffer). Die Zahl bei (b) kann man also kürzer so schreiben: 709005. Anfänger pflegen sich selten eine richtige Vorstellung von diesem Stellzeichen 0 zu machen. Es giebt, wie gesagt, nur den vorhergehenden Ziffern Rang und Bedeutung; auf die nachfolgenden aber hat es, als bloſser Lückenbüſser, nicht den geringsten Einfluſs.

5.

Eine jede mit beliebig vielen Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen, hat nunmehr gar keine Schwierigkeit. Man braucht sich nur die Aussprache einer sechsziffrigen Zahl zu merken und sich zu erinnern, daſs man dem Sprachgebrauch zufolge, die Einer vor den Zehnern, und die Einheiten der Tausende, Zehntausende und Hunderttausende auf einmal ausspricht: z. B. 26 lies: sechsundzwanzig, und nicht, wie es nach dem Schema heiſsen müſste: zwanzig sechs (vingt-six); 326000 lies: dreihundertsechsundzwanzig tausend, und nicht: dreihundert tausend, zwanzig tausend, sechstausend. Beispiele:

51207, einundfünfzigtausendzweihundertundsieben
509004, fünfhundertundneuntausendundvier
319039, dreihundertneunzehntausendundneunundreiſsig
100070, (ein)hunderttausendundsiebzig
111111, (ein)hundertundelftausendeinhundertundelf
555555, fünfhundertundfünfundfünfzigtausendfünfhundertundfünfundfünfzig
700009, siebenhunderttausendundneun.

Hat eine Zahl mehr als sechs Ziffern, so teile man sie, von der Rechten gegen die Linke, in Klassen, deren jede sechs Ziffern enthält (die höchste, links stehende Klasse kann aber auch weniger haben), dadurch sind dem Auge Haltpunkte gegeben, wonach es leicht die Einheiten des 6ten, 12ten, 18ten &c. Ranges (Million, Billion, Trillion &c.) erkennt. Dies geschehen, fange man bei der höchsten Klasse an und spreche jede, als wenn sie ganz allein da stände, für sich aus, und setze am Ende einer jeden Klasse nur noch den Namen derjenigen Einheit hinzu, deren Wiederholung sie darstellt. Beispiele:

Anzahl der Trillion	Anzahl der Billion	Anzahl der Million	
2073	975403	400064	507001

lies: zweitausendunddreiundsiebzig Trillionen, neunhundertfünfundsiebzigtausendvierhundertunddrei Billionen, vierhunderttausendundvierundsechzig Millionen, fünfhundertundsiebentausendundeins.

VI	V	IV	III	II	I	
35004	701020	000303	456007	897004	290001	311450

lies; 35004 Sextillionen, 701020 Quintillionen, 303 Quadrillionen, 456007 Trillionen, 897004 Billionen, 290001 Millionen, 311450.

Soll umgekehrt eine in Worten gegebene Zahl mit Ziffern dargestellt werden, so kann man die Plätze, welche die verschiedenen Einheiten einnehmen müssen, erst durch Punkte bezeichnen, und dann die Ziffern hineinschreiben.

III	II	I	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

6.

Diese systematische Ordnung, nach welcher man mit wenigen Ziffern alle Zahlen darstellen kann, heifst ein Zahlensystem. Da bei unserm eben erklärten und wahrscheinlich ziemlich allgemein gebräuchlichen System, das ursprünglich willkürliche Gesetz zum Grunde gelegt worden: dafs jede Einheit einer links stehenden Ziffer zehnmal so grofs ist, als eine Einheit der nächst rechts stehenden, so wird auch aus diesem Grunde die Zahl zehn die Grundzahl unsers Zahlensystems und das System selbst das Zehnersystem, Decimalsystem oder Dekadik genannt (δέκα, zehn).

Mit der schönen und nützlichen Erfindung des Zahlensystems, worüber selbst die gröfsten Männer, wie Newton, Leibnitz, Laplace, ihre Verwunderung und hohe Achtung bezeigt haben, war der Grund zur ganzen speciellen Arithmetik gelegt, die streng genommen, schon in jener Erfindung enthalten ist, und als unmittelbare Anwendung fast ganz von selbst daraus hervorgeht.

Dafs wir beim Rechnen mit Ziffern dieselben immer rückwärts schreiben müssen, rührt daher, dafs im Zahlensystem der Rang der Einheiten von der Rechten gegen die Linke steigt. Diese ursprünglich von den Indiern herrührende Anordnung ist von den Abendländern beibehalten worden, obgleich sie uns im schnellen und geraden Schreiben der Ziffern hinderlich ist. Doch kann dieser kleine, wohl nur von wenigen bemerkte Übelstand leicht entschuldigt werden.

Die Griechen und Römer hatten kein solches wissenschaftlich gebildetes Zahlensystem und daher auch keine Arithmetik. Bei den Römern konnte noch ein Vormund, wegen gröblichen Betrugs vor Gericht gezogen, ungestraft mit der Entschuldigung frei kommen: er sei kein Rechenkünstler, und das um so leichter, da gewisse lichtscheue Leute das Rechnen mit Ziffern für Zauberei und Sünde erklärten, die Mathematiker und Naturforscher, wie Galilei, Bruno u. a., denen die Menschheit sowohl in materieller als geistiger Hinsicht so viel zu verdanken hat (Befreiung von dem die Welt verfinsternden Aberglauben, grausamen Hexenprozesse, Inquisition &c.), in den Kerker und auf den Scheiterhaufen warfen. (§ 312.)