Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1883

Vorbegriffe

urn:nbn:de:bsz:31-264709

Vorbegriffe.

Könnte man der Mathematik eine Einleitung voranschicken, welche von dem mannigfaltigen Inhalte derselben einen ungefähren Begriff und eine Übersicht gäbe, so würde die Aufzählung dieses Inhalts und ein flüchtiger Grundriſs dieser merkwürdigen Schöpfung menschlichen Scharfsinns gewiſs zur geistigen Erweckung dienen.

Solches ist aber, eben wegen der zu groſsen Mannigfaltigkeit und ganz eigentümlichen Beschaffenheit dieser Wissenschaft durchaus unmöglich. Wer nur den Anfang macht, wird begreifen, daſs jede Unterhaltung über mathematische Gegenstände, also auch das Verstehen einer solchen Einleitung, schon eine gewisse Summe von Vorkenntnissen voraussetzt. Keiner kann — um nur ein dem Anfänger verständliches Beispiel zu wählen — ohne Kenntnis des Zahlensystems die Addition, ohne diese nicht die Multiplikation, ohne diese wiederum nicht die Division in ihrem vollsten Umfange verstehen lernen. So sieht es aber in der ganzen Mathematik aus; die Begriffe liegen ineinander und flieſsen auseinander. Von den einfachsten Sätzen steigt man nur stufenweise zu den höheren hinauf. Kein Satz kann gehörig verstanden werden, wenn man nicht *alle vorhergehenden*, mit welchen er zusammenhängt und gleichsam eine Kette bildet, gehörig verstanden hat.* Zudem bezeichnet das

* Die Mathematik ist eine Wissenschaft aus reinen Begriffen, daher abstrakt, und nicht so leicht faſslich zu lehren und zu lernen als andere Wissenschaften, in welchen die Begriffe neben einanderliegen und die meistens nur das Gedächtnis, den Verstand und Scharfsinn aber wenig in Anspruch nehmen und üben. Beim Unterricht in der Mathematik wird von seiten des Schülers eine gewisse Thätigkeit des Geistes und eine *ununterbrochene* Aufmerksamkeit gefordert, die jedoch selbst der gewandteste Lehrer nicht immer in Spannung erhalten kann. Hat nun der Schüler einen Satz überhört, nicht recht verstanden, oder wegen Abwesenheit nicht hören können, so hat er den Faden verloren, und kann dann auch, wegen des Zusammenhangs der Sätze, keinen der folgenden verstehen. — Störungen und Unterbrechungen sind aber da, wo mehrere Schüler am Unterricht teilnehmen, nie ganz zu vermeiden, und sonach begreift auch der Nichtmathematiker, daſs, wenn dessen ungeachtet die Mathematik dennoch auch auf Schulen mit Erfolg gelehrt werden soll, der Schüler nicht etwa einen Leitfaden, Kompendium (welches für den ersten Anfänger nicht viel besser als

Wort **Mathematik** nicht **eine**, sondern mehrere verschiedene, täglich wachsende, unbegrenzte Wissenschaften (Arithmetik, Geometrie, Mechanik, Optik, Astronomie &c. &c.), deren bloſse Aufzählung und Einteilung (in reine und angewandte Mathematik) jedoch dem Anfänger nichts nützt.

Was Mathematik ist, und ob schon deren Besitz allein oder deren Anwendung ein ernstliches Studium hinlänglich lohne, das kann man erst nach und nach erfahren, indem man sie ernstlich studiert. Soviel können wir aber im voraus versichern, daſs für jedermann jede auf Mathematik und Naturwissenschaften verwandte Stunde bleibenden Nutzen hat fürs geistige und praktische Leben zugleich.

Folgende Erläuterungen mögen indessen zur Vorbereitung dienen, um die ersten sich auf Gröſsen beziehenden Grundbegriffe, von welchen die mathematischen Betrachtungen ausgehen, noch besonders hervorzuheben:

I. Keine Sache ist an sich weder groſs noch klein; dies wird sie erst durch Vergleichung mit einer andern gleichartigen Sache. Sagt z. E. jemand, das ist ein groſses Haus, so hat er noch ein anderes im Sinn, womit er ersteres vergleicht. Eine solche unbestimmte Steigerung giebt aber noch keinen klaren Begriff von der eigentlichen Gröſse (Quantum) einer Sache, indem das, was in einer Beziehung groſs heiſst, in einer andern wieder klein heiſsen kann. Damit dieser Begriff Bestimmtheit erhalte, ist offenbar erforderlich: erstens, eine bestimmte Vorstellung von der zum Maſs (Einheit) genommenen Vergleichungsgröſse, zweitens eine bestimmte Vorstellung, wie oft dieses Maſs in der damit verglichenen Gröſse enthalten ist. Hat man z. E. von der Gröſse (Länge) eines Meters eine deutliche Vorstellung und weiſs man, wie oft er in dem Abstande zweier Örter enthalten ist, so giebt die Vorstellung dieser Einheit (Meter), verbunden mit der Vorstellung (Zahl), welche ihre Wiederholung angiebt, einen bestimmten Begriff von der Entfernung der beiden Örter; und so mit allen übrigen Gröſsen, deren es sehr verschiedene Arten giebt. Man spricht z. B. von der Gröſse einer Länge, Fläche, Kraft, Zeit, Wärme, Menge, Anzahl &c.

II. Alle Gröſsen haben aber das miteinander gemein, daſs sie aus Teilen bestehen, und je nachdem diese Teile getrennt sind oder unmittelbar miteinander zusammenhängen, ist und heiſst die Gröſse **unstetig** oder **stetig**. Eine Anzahl z. B. ist eine unstetige

---

ein Register ist), sondern ein ausführliches, leichtverständliches Lehrbuch haben muſs, um danach das, was er nicht recht verstanden, vergessen oder versäumt hat, so oft nachzulesen, als nötig ist. Lehrbücher werden nicht für Lehrer, sondern für Schüler geschrieben, und müssen daher, ihrem Zwecke gemäſs, der Fassungskraft des Schülers angemessen sein, den gewöhnlichen Grad von Aufmerksamkeit und Nachdenken berücksichtigen, und selbst solche kleine theoretische und praktische Schwierigkeiten berühren, welche dem Kundigen schon in Fleisch und Blut verwandelt sind.

Gröſse, weil sie aus einzelnen nicht zusammenhängenden Teilen besteht. Erbsen, sagt ein alter Mathematiker, kann man nicht haspeln. Stetige Gröſsen dagegen sind: die Zeit, Linien, Flächen &c. Man kann sich z. B. eine Linie als aus mehreren kleineren Linien zusammengesetzt denken, so daſs das Ende des einen Teils zugleich der Anfang des damit zusammenhängenden ist, und also alle Teile zusammen ein ununterbrochenes oder stetiges Ganze (Kontinuum) bilden.

III. Jede Gröſse kann (unmittelbar) nur mit einer gleichartigen verglichen und ausgemessen werden. Anfänger müssen sich dieses wohl merken. Man kann z. B. die Zeit nicht wägen. Der Zeitmaſsstab muſs selbst eine Zeit, die Flächeneinheit eine Fläche, das Winkelmaſs ein Winkel sein &c. Daher eben so viele verschiedenartige Einheiten, als verschiedenartige Gröſsen.

IV. Eine Einheit kann in kleinere aufgelöst und umgekehrt kann eine beliebige Anzahl gleichartiger Einheiten wieder als eine gröſsere Einheit betrachtet werden. Daher die verschiedenen einfachen und zusammengesetzten (niedern und höhern) Einheiten einerlei Art, z. B. Längen-Einheiten: Meter, Centimeter, Meile; Gewichts-Einheiten: Gramm, Kilogramm; Zeit-Einheiten: Stunde, Tag, Jahr. Überhaupt wird in der Mathematik jede Gröſse Einheit genannt, insofern sie als Vergleichungsgröſse oder Einheit dient.

V. Eine Anzahl ist nach dem Vorhergehenden eine unbestimmte, eine Zahl aber eine bestimmte Vielheit oder Ausdruck des Verhältnisses, welches eine Gröſse zu der Einheit hat, mit welcher sie verglichen oder ausgemessen worden. Der Name, durch welchen die Gröſse einer Zahl angegeben wird, heiſst Zahlwort. Dieses giebt also an, wie oft die Einheit gesetzt oder wiederholt gedacht ist. Für jede besondere Zahl ist daher ein besonderes Zahlwort erforderlich. Da aber die Zahlenbegriffe sich bloſs nach der in ihnen enthaltenen gröſsern oder kleinern Menge Einheiten unterscheiden, so ist es offenbar nicht genug, dass das Gedächtnis sich nur die besonderen Namen der Zahlen merkt, sondern es muſs dies notwendig auch in der natürlichen Aufeinanderfolge derselben geschehen, wonach jedes vom Gedächtnis aufgenommene Zahlwort nur eine Einheit mehr bezeichnet, als das nächst vorhergehende. So hat man z. B. von der Zahl fünf nur deshalb einen bestimmten Begriff, weil man ihn von der vorhergehenden Zahl vier hat &c. bis zu Anfang. Es würde nicht möglich sein, die Zahlenbildung in einer andern Folge, wie: fünf, drei, hundert, zwei &c. zu lehren. „Denn wenn das Erst' und Zweit' nicht wär', das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr."

VI. Die Zahlen in ihrer natürlichen Folge hersagen, oder Zahlen bilden, die nach und nach um eine Einheit wachsen, heiſst zählen. Führt die Einheit, welche einer Zahl zum Grunde liegt, noch einen besonderen Namen, so nennt man sie, sowie auch die Zahl, benannt. Drückt aber die Einheit überhaupt nur das einmalige Vorhandensein einer Sache aus, so ist sie, sowie auch die daraus gebildete Zahl, unbenannt; fünf Fuſs ist eine benannte, fünf aber eine unbenannte Zahl.

Derjenige Teil der gesamten Mathematik, welcher sich ausschlieſslich mit der Ableitung und Verbindung der Zahlenbegriffe beschäftigt, führt den Titel Arithmetik. Ihre Grundbegriffe sind: Gröſse, Einheit, Vielheit. Aus diesen höchst einfachen, jedem Menschen gleichsam angeborenen (einfachen und deshalb nicht weiter zu erklärenden) Vorstellungen muſs sich die ganze Mathematik entwickeln.

Gröſsenkenntnis kann keiner entbehren, und da diese nur vermittelst der Zahlen möglich ist, so gehört auch die Zahlenbildung mit zu den ersten und notwendigsten unserer geistigen Bedürfnisse; denn das erste kindliche Verfahren, eine Vielheit bei eins und eins und eins anzugeben, ist doch ein wenig gar zu natürlich und ungekünstelt.

Die Bildung der ursprünglich willkürlichen, auch in allen Sprachen verschieden lautenden Zahlwörter liegt eigentlich der Sprachlehre ob; weil aber doch ein gewisses mathematisches Verfahren dabei zu beachten ist, welches das Gedächtnis so wenig als möglich belästigt, so mag auch die Arithmetik die Bildung der Zahlwörter und Zahlzeichen als ihre erste Aufgabe übernehmen. Und damit nun in der Folge alles möglichst leicht und klar werde, wollen wir nichts als bekannt voraussetzen, uns daher absichtlich in den frühesten Zustand der Mathematik zurückdenken, mit der Erfindung des Zählens, also vom Ei an beginnen, und so nach und nach die ersten Pforten derjenigen Wissenschaft aufschlieſsen, welche uns mit dem Himmel in Verbindung setzt.