Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

I. Teil

Damit wird

$$\left\{1+(2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6}+[1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120}+\cdots\right\}=\left\{1+\frac{\sin\varepsilon}{6}p^2l^2+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\}.$$

Ferner ist

$$2kk'=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\varepsilon}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\varepsilon}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)}=\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}\left(\sin\varepsilon+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)\right].$$

Also ist in zweiter Annäherung

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{8}\cos^2\varepsilon\right]\cdot\left\{1+\frac{p^2l^2}{6}\sin\varepsilon+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\};$$

Gl. C++++]
$$x_a=l\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(9-\cos^2\varepsilon)\right].$$

Daraus $x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(8+\sin^2\varepsilon)\right];$

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}\sin^2\varepsilon\right],$$

und da kleine ε vorausgesetzt sind, so ist mit genügender Annäherung

Gl. C+++++]
$$x_a=l.\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon\right],$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung auf Seite 7, wenn $\varepsilon=0$ ist.

Die zweckentsprechende Anwendung der Gleichungen C und D auf Seite 29 giebt die Lösung der allgemeinsten Aufgabe, bei welcher die Kraft P gegen die Einspannung beliebig gerichtet ist.

Zweiter Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft P, welche der Richtung der Einspannung parallel ist.

I. Teil.

Aufgrund der Überlegungen, die Seite 1 und 2 gemacht wurden, ergiebt sich auch hier, wenn nur die reine Biegung vorerst Berücksichtigung findet, dass in jeder Gleichgewichtslage $\frac{1}{\varrho}=\frac{M_{\ddot a}}{EJ}$ ist. Wird die elastische Linie des Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung hat und durch den Lastangriffspunkt geht, dessen y-Axe aber durch die Einspannungsstelle geht, so hat man die Darstellung der Figur 35.

Wird hier wieder $M_{\ddot a}$ als positiv definiert, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat, so ist der Krümmungsradius ϱ positiv, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen geraden Stabe die unterste Faser war.

Nun ergiebt sich aus Figur 35 $M_{\ddot a}=+P(-y)$, also ist $\frac{1}{\varrho}=\frac{P}{EJ}(-y)$, d. h. ϱ ist positiv, so lange y negativ ist, ϱ ist aber negativ, wenn y positiv ist.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{P}{EJ}=p^2$, so ist $\frac{1}{\varrho}=-p^2y$, und da $\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}$ ist, so hat man

$$\frac{d\varphi}{ds}=-p^2y.$$

Beim Fortschreiten im Sinne der wachsenden s, d. h. von der Einspannung gegen den Lastangriffspunkt zu, dreht sich die Tangente im Sinne der Uhrzeigerbewegung solange y negativ ist, entgegen dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, wenn y positiv ist.

Aus der Gleichung

Gl. 1) $$\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$$

folgt durch Differentiation nach ds; $\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -p^2 \frac{dy}{ds} = -p^2 \sin\varphi$, und wird nun mit $2\frac{d\varphi}{ds}$ erweitert, so ist

$$2\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -2p^2 \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}, \text{ also } \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds};$$

$$d\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2\sin\varphi\, d\varphi;\ \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = +2p^2\cos\varphi + C_1.$$

Nun ist für $y = 0$ nach Gleichung 1 $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ und in Figur 35 ist für $y = 0$ der Winkel φ mit α bezeichnet, also ist $o = 2p^2\cos\alpha + C_1$; $C_1 = -2p^2\cos\alpha$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Nun ist aber $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, also ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

Gl. 2) $$\frac{d\varphi}{ds} = \pm 2p\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Nach der getroffenen Wahl in der Figur ist das positive Vorzeichen zu wählen.

$$\text{Demnach } \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\,pds.$$

Führt man die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist $\sin\frac{\varphi}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2}$, und da $du = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist umgekehrt $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$; $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$; $d\varphi = 2\,du\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Es ist also mit dieser Substitution

$$2\,pds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-u^2)}}\cdot\frac{2\cdot du\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}};\ 2\,pds = \frac{2\,du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\alpha}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\alpha = 2\,arc\sin k$ ist. Man hat somit $pds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

worin s_c eine noch unbekannte Konstante ist. Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s - s_c)]$.

Da $s = 0$ und $\varphi = 0$ zusammengehörige Werte sind, und $\sin\frac{\varphi}{2} = u\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist für $s = 0$ auch $u = 0$, somit $0 = sn[p(-s_c)]$, d. h. es ist $s_c = 0$, und man hat $u = sn[ps]$, woraus folgt

Gl. 3) $$\sin\frac{\varphi}{2} = k\cdot sn[ps].$$

Da ferner $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ ist, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-k^2 sn^2[ps]}$;

Gl. 4) $$\cos\frac{\varphi}{2} = dn\,[ps].$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\varphi}{ds} = 2\,pk\sqrt{1 - sn^2\,[ps]}$; $\frac{d\varphi}{ds} = 2\,pk \cdot cn\,[ps]$.

Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$, also ist $-p^2 \cdot y = 2\,pk \cdot cn\,[ps]$;

Gl. 5) $$y = -2\,\frac{k}{p}\,cn\,[ps].$$

Ferner ist allgemein $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$ oder $\frac{dx}{ds} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\frac{dx}{ds} = 1 - 2\,k^2\,sn^2\,[ps]$, also ist $dx = (1 - 2\,k^2\,sn^2\,[ps])\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $x - x_c = s - 2\,k^2\int sn^2\,[ps]\,ds$, wenn x_c eine noch unbekannte Konstante ist.

Setzt man zur Abkürzung $p \cdot s = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}\,k^2\int sn^2\,(v)\,dv; \quad x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right\}.$$

Mit Benützung der beim ersten Falle auf Seiten 4 und 5 gemachten Ableitungen ergiebt sich

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{b}{2} - 2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K} \cdot f\left(\cos\frac{\pi v}{K}\right)\right\} \text{ oder mit } v = ps;$$

$$x - x_c = s - sb + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right);$$

$$x - x_c = s(1 - b) + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right).$$

Zur Bestimmung von x_c hat man die zusammengehörigen Werte $s = o$ und $x = o$, woraus sich ergiebt $x_c = o$, also ist, wenn noch, wie beim ersten Fall geschehen ist, $1 - b = -a$ gesetzt wird,

Gl. 6) $$x = -a \cdot s + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right).$$

In diesen Gleichungen für y und x kommen die Grössen q und K vor, es ergiebt sich aber

Gl. A*] q aus einer Tabelle entsprechend k,

und dann ist

Gl. B*] $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right]^2.$$

Nun sollen aber noch zusammengehörig sein $s = o$ und $y = -\delta$, also ist nach Gleichung 5

$$\delta = 2\,\frac{k}{p}\,cn\,[o],$$

aber es ist $cn\,[o] = 1$, also ist $\delta = \frac{2k}{p}$;

Gl. C] $$k = \frac{p}{2}\,\delta.$$

Ferner sollen zusammengehörig sein $y = o$ und $s = l$, also ist nach Gleichung 5 $o = \frac{2k}{p}\,cn\,[pl]$, d. h. es ist $cn\,[pl] = o$; damit dies aber der Fall sei, muss sein

Gl. D] $$p \cdot l = K.$$

Mit Hülfe dieser vier Gleichungen A*, B*, C und D können, wenn z. B. p und l gegeben sind, der Reihe nach K, q, k und δ berechnet werden, oder wenn l und δ gegeben sind, so können k, q, K und p berechnet werden, oder endlich wenn p und $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ gegeben sind, so können δ, q, K und l berechnet werden.

Sobald k bekannt ist, ist auch der Winkel α der Tangente im Lastangriffspunkt bekannt, denn es ist nach Definition $\alpha = 2\, arc \sin k$. Setzt man in Gleichung 6 für ps aus Gleichung D den Wert $pl = K$, so hat man als Abscisse des Lastangriffspunktes $\underset{s=l}{x} = -a \cdot l$.

Im Gegensatz zu dem ersten Falle besteht hier in den vier Gleichungen A*; B*; C und D kein formaler Grund, warum k nicht alle Werte annehmen sollte, welche $\sin \frac{\alpha}{2}$ annehmen kann, es kann also in diesem zweiten Falle k alle möglichen Werte annehmen zwischen o und 1.

Die Grenzfälle $k = 1$ und $k = 0$ sind aber für die Amplitudenfunktionen Fälle der Entartung, auf welche besonders eingegangen werden muss. Den Fall $k = 1$ zu untersuchen ist aus einem Grunde, der später ersichtlich wird, nicht nötig; bleibt also nur $k = 0$ zu untersuchen.

Aus Gleichung 1 auf Seite 31 ergab sich $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = + 2p^2 \cos\varphi + C_1$. Nun ist im vorliegenden speziellen Falle für $y = 0$ ausser $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ auch $\varphi = \alpha = 0$, also ist $0 = 2p^2 + C_1$; $C_1 = -2p^2$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - 1); \quad \frac{d\varphi}{ds} = p\sqrt{2(\cos\varphi - 1)}; \quad d\varphi = \sqrt{2(\cos\varphi - 1)}\, p\, ds.$$

Soll nun $d\varphi$ nicht imaginär werden, so darf in keinem Querschnitte des Stabes $\cos\varphi$ kleiner als $+1$ werden; grösser als $+1$ kann $\cos\varphi$ aber auch nicht sein; also ist in jedem Querschnitte $\varphi = 0$, d. h. der Stab ist in seinem ganzen Verlaufe geradlinig, und zwar ist dies der Fall ganz unabhängig von der Grösse von p und l, sobald nur $\alpha = 0$ und damit $k = 0$ erfüllt ist.

Frägt man nun bei dem allgemeinen Falle $k > 0$, wann es eine Berührende an die elastische Linie giebt, welche zur Einspannung, oder was dasselbe ist, zur Kraft P normal ist, so hat man denjenigen Punkt aufzusuchen, für welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist.

Es ist nach Gleichung 5 $dy = -\frac{2k}{p}\, d(cn\,[ps])$, also ist

$$dy = -\frac{2k}{p}\{-sn\,[ps]\, dn\,[ps]\, p\, ds\}; \quad dy = +2k\, sn\,[ps]\, dn\,[ps]\, ds.$$

Auf Seite 32 aber findet sich $dx = (1 - 2k^2 sn^2[ps])\, ds$. Es ist somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2k\, sn\,[ps] \cdot dn\,[ps]}{1 - 2k^2 sn^2\,[ps]}, \text{ und damit } \frac{dy}{dx} = \infty \text{ sei,}$$

$$\text{muss } sn^2[ps] = \frac{1}{2k^2}; \quad 2k^2 = \frac{1}{sn^2\,[ps]}; \quad k = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot sn\,[ps]} \text{ sein.}$$

Der grösste Wert, den $sn\,[ps]$ annehmen kann, ist aber 1, also ist der kleinste Wert von k, bei welchem eine zur Kraft P normale Berührende vorkommt, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. es ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, und die normale Berührende ist gerade diejenige im Lastangriffspunkt.

Wenn aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist nach Seite 19 $K = 1{,}854080$, also ist nach Seite 32 Gleichung D $p \cdot l = 1{,}854080$, d. h. die kleinste Stablänge, bei welcher eine zur Kraft P normale Berührende möglich ist, ist $l = \frac{1{,}854080}{p}$.

Da nun $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der untere Grenzwert ist, bei dem der erste Fall der zur Kraft P normalen Einspannung gerade anfängt möglich zu sein, so folgt, dass die elastischen Linien des zweiten Falles, sobald $k => \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, sich in den beim ersten Falle gefundenen Kurven der Figuren 9 und 10 und den aus diesen abgeleiteten folgenden Figuren wieder vorfinden müssen, wenn man je das Stück der Kurve nimmt, welches nach der dortigen Bezeichnung von $x_{\min}$ über $x = 0$ bis $x = x_a$ reicht, denn in $x_{\min}$ ist die Berührende parallel der Kraft P (Fig. 36).

Um formal die Übereinstimmung der Figur 35 mit dem erwähnten Stücke der Kurve in Figuren 9 und 10 darzustellen, hat man in den Gleichungen 5 und 6 des zweiten Falles, wie sich aus dem Vergleich der gewählten Koordinatensysteme ergiebt, α durch γ; x durch $y_{II} - y = y_c + as_c - y$; y durch $x - x_a$; s durch $s - s_c$; l durch $l - s_c$ zu ersetzen. Ist dies geschehen, so werden die genannten Gleichungen zu

$$x - x_a = -\frac{2k}{p}\, cn\,[p\,(s - s_c)];\quad x_a - x = \frac{2k}{p}\, cn\,[p\,(s - s_c)],\ \text{und}$$

$$y_c + as_c - y = -a\,(s - s_c) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s - s_c)\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s - s_c)\right]\right);$$

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s - s_c)\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(s - s_c)\right]\right),$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen 5 und 6 des ersten Falles. Diese Übereinstimmung ist in Figur 36 bildlich dargestellt.

Da für den Berührungspunkt der zur Kraft normalen Tangente nach Seite 33

$$sn^2\,[ps] = \frac{1}{2k^2}\ \text{ist},$$

und nach Gleichung 5

$$y = -2\frac{k}{p}\, cn\,[ps] = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - sn^2\,[ps]}\ \text{ist, so ist}$$

$$y_n = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - \frac{1}{2k^2}};\quad y_n = -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}},$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für x_a auf Seite 8. Setzt man den Absolutwert von y_n statt x_a in die Seite 8 gegebene Gleichung für l ein, so erhält man die Bogenlänge, um welche der Berührungspunkt dieser Tangente von dem Lastangriffspunkt zurückliegt.

Wenn $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so sind keine elastische Linien des ersten Falles vorhanden, welche mit denen des zweiten Falles identisch sein könnten, dieser letztere muss somit für sich untersucht werden.

II. Teil.

Wenn in den Formeln

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\, sn\,[ps];\quad \cos\frac{\varphi}{2} = dn\,[ps];$$

$$y = -\frac{2k}{p}\, cn\,[ps];$$

$$x = -as + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}\,ps\right]\right)$$

den Grössen k; K; p; l und damit auch der Grösse a die Bedeutung von Konstanten, der Grösse s aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen gegeben wird, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt.

Da $y = -\frac{2k}{p}\, cn\,[ps]$ ist, so hat y sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn\,[ps]$ sein Minimum resp. sein Maximum hat, also ist

$$y_{\max} = +\frac{2k}{p};\quad y_{\min} = -\frac{2k}{p}\ \text{entsprechend}\ cn\,[ps] = -1\ \text{resp.}\ cn\,[ps] = +1.$$

Nun ist $cn\,[ps] = +1$, wenn $ps = 4\cdot n\cdot K$; $s = 4\cdot n\cdot\frac{K}{p}$, wo $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ etc. zu nehmen ist, und es ist $cn\,[ps] = -1$, wenn $ps = 4\cdot n\cdot K + 2K$; $s = 2\,(2n + 1)\frac{K}{p}$, wo $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ etc. zu nehmen ist.

Man hat also die zusammengehörigen Werte

$$\begin{array}{lccccccc} s = & 0 & 2\frac{K}{p} & 4\frac{K}{p} & 6\frac{K}{p} & 8\frac{K}{p} & 10\frac{K}{p} & 12\frac{K}{p} \\ y = & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p} & +\frac{2k}{p} & -\frac{2k}{p}. \end{array}$$