Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge

Kriemler, Karl

1902

I. Teil

Einleitung.

Wird ein Stab von äusseren Kräften beansprucht, welche seine Axe schneiden, so ergiebt die Reduktion der auf der einen Seite eines Querschnittes an dem Stabe angreifenden Kräfte z. B. nach dem Schwerpunkte dieses Querschnittes im allgemeinsten Falle 1. ein Moment, 2. eine zum Querschnitt normale Kraft, 3. eine in der Querschnittsebene liegende Kraft. Je nach der Art der Belastung können eine oder zwei dieser drei Reduktionselemente für einzelne oder für alle Querschnitte verschwinden oder von so geringem Einflusse sein, dass sie vernachlässigt werden können. Im Folgenden soll vorerst der Einfluss der zum Querschnitt normalen Kraft d. h. der Normalkraft und der in der Querschnittsebene liegenden Kraft d. h. der Querkraft ausser Berücksichtigung bleiben, es wird also die Annahme gemacht, dass in allen Querschnitten nur Momente wirken. Unter diesen Umständen besteht die Deformation des Stabes in einer reinen Verbiegung.

Ausführlich untersucht werden sollen folgende als reine Biegung aufgefasste Deformations- bezw. Belastungsfälle.

Das eine Ende eines im natürlichen d. h. spannungslosen Zustande geraden gewichtslosen Stabes, dessen Querschnitte gleich und gleich gelegen sind, ist eingespannt, das andere Ende ist frei. Dieser Stab wird künstlich so gekrümmt, dass seine Axe eine noch unbekannte Kurve (ohne Spitzen) in derjenigen Ebene bildet, welche die eine der Hauptträgheitsaxen der aufeinanderfolgenden Querschnitte enthält. In diesem deformierten Zustande soll nun der Stab dadurch erhalten werden, dass in der Ebene der gekrümmten Axe im Schwerpunkte des Stirnquerschnittes am freien Ende eine Einzelkraft angebracht wird, welche das eine Mal zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig, das andere Mal der Richtung der Einspannung parallel ist. Die deformierte Stabaxe wird die elastische Linie des Stabes genannt. Die elastische Linie, die eine Hauptträgheitsaxe der aufeinanderfolgenden Querschnitte und die Kraft, welche die elastische Linie erhalten soll, liegen also in einer Ebene, welche somit, wie in den Figuren 1 und 2 geschehen, als Ebene der zeichnerischen Darstellung Verwendung finden kann.

Erster Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft P, welche zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig ist.

I. Teil.

Da der Stab unter Einwirkung der Kraft P in der Krümmung verbleibt, so sind in jedem Querschnitte die auf dessen Schwerpunkt reduzierten inneren Kräfte im Gleichgewicht mit den eben dorthin reduzierten auf der einen Seite vom Querschnitt am Stab angreifenden Kräften. Von den Reduktionselementen sollen nur die Momente Berücksichtigung finden, also ist $M_i = M_ä$ allein zu erfüllen. Ist ferner J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bezogen auf die zur Ebene der elastischen Linie rechtwinkelige Hauptträgheitsaxe, und ist ϱ der Krümmungsradius der elastischen Linie an der Stelle, wo sie den betrachteten Querschnitt kreuzt, so ist (Grashof, pag. 59 Gl. 81) $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_i}{EJ}$, woraus, da $M_i = M_ä$ ist, folgt, dass in jedem Querschnitt $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_ä}{EJ}$ ist.

Bemerkung. Die Unterscheidung zwischen M_i und $M_ä$ ist nötig, weil nur beim Gleichgewicht beide denselben Wert haben; würde der Stab unter der Wirkung der Kraft P aus dem geraden in den gebogenen Zustand übergehen, so wäre während der Deformation in jedem Augenblicke $M_i = M_ä + M_e$, wo M_e das auf den betreffenden Querschnitt bezogene Moment der auf der einen Seite vom Querschnitt angreifend zu denkenden d'Alembert'schen Ergänzungskräfte ist.

Wird die elastische Linie des in Behandlung stehenden Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung die Einspannungsstelle, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung und dessen y-Axe im Sinne des Pfeiles der Kraft P positiv ist, so hat man die Figur 3.

Es soll nun hier der Krümmungsradius ϱ positiv genommen werden, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen, geraden Stabe auf der Seite lag, nach welcher der Pfeil von P hinweist. Da aber ϱ das Vorzeichen von $M_ä$ hat, so muss hier, wie aus der Figur 3 ersichtlich ist, $M_ä$ als positiv definiert werden, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat.

Wird, wie in der Fig. 3 geschehen ist, die Abscisse des Lastangriffspunktes mit x_a bezeichnet, so ist das auf den Querschnitt, dessen Abscisse x ist, bezogene Moment $M_ä = + P(x_a - x)$, also ist an dieser Stelle $\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{EJ}(x_a - x)$. Zur Abkürzung soll $\frac{P}{EJ} = p^2$ gesetzt werden, so dass $\frac{1}{\varrho} = p^2 (x_a - x)$ ist.

Es ist aber $\varrho \cdot d\varphi = ds$, wo ds das Element der Bogenlänge ist, positiv im Sinne der Bewegung entlang der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende zu, und $d\varphi$ der Elementarwinkel ist, den die Tangente an die elastische Linie im Endpunkte von ds bildet mit der Tangente im Anfangspunkte. Aus den Definitionen für positives ϱ und für positives ds folgt, dass $d\varphi$ positiv ist, wenn die Tangente im Anfangspunkt von ds in die Tangente im Endpunkt von ds durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung übergeht. Wird also auf der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende hin fortgeschritten, d. h. wird ds immer positiv genommen, so haben ϱ und $d\varphi$ stets beide dasselbe Vorzeichen, d. h. bei positivem ϱ geht die Tangente in die nächstfolgende über durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, bei negativem ϱ geht sie in die nächstfolgende über durch eine Drehung, welche der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist. Da nun $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ ist, so ist die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d\varphi}{ds} = p^2 (x_a - x).$$

Der Winkel φ ist derjenige Winkel, den die Tangente im Sinne der wachsenden s und im Sinne der Drehung von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe mit der x-Axe bildet, es ist aber für die formale Behandlung zweckmässig, nicht diesen Winkel zu benützen, sondern den Winkel ψ, welchen die Tangente im Sinne der wachsenden s und im Sinne der Drehung des Uhrzeigers von der x-Axe nach der positiven y-Axe mit der Richtung der y-Axe bildet.

Die Figur 4 giebt $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$; $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$; $d\varphi = d\psi$; $\cos\varphi = \sin\psi$; $\sin\varphi = -\cos\psi$; $\cos\psi = -\sin\varphi$; $\sin\psi = \cos\varphi$.

Mit dieser Substitution wird die Differentialgleichung zu

Gl. I) $$\frac{d\psi}{ds} = p^2 (x_a - x).$$

Wird links und rechts nach ds differentiert, so hat man

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \frac{dx}{ds}, \text{ aber es ist } \frac{dx}{ds} = \cos\varphi = \sin\psi, \text{ also ist } \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \sin\psi.$$

Wird links und rechts mit $d\psi$ multipliciert, wodurch $d\psi \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \sin\psi \, d\psi$, und dann noch die linke Seite mit ds erweitert, so ist $\frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds = -p^2 \sin\psi \, d\psi$; es ist aber

$$d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 2 \frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds,$$

also hat man $\frac{1}{2} d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = -p^2 \sin\psi \, d\psi$.

Die einmalige Integration dieser Gleichung giebt $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = +p^2 \cos\psi + C_1$.

Nun ist für $x = x_a$ nach Gleichung 1 $\frac{d\psi}{ds} = 0$, und in Figur 4 ist für $x = x_a$ der Winkel ψ mit γ bezeichnet, also ist $0 = p^2 \cos\gamma + C_1$; $C_1 = -p^2 \cdot \cos\gamma$. Es ist also $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2(\cos\psi - \cos\gamma)$. Da aber $\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}$ und $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ ist, so ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right); \quad \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 4p^2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right);$$

Gl. 2)
$$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}\,.$$

Hieraus findet man durch Trennung der Variablen $2p\,ds = \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}$.

Führt man nun die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, so ist $\sin\frac{\psi}{2} = u \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$, und da

$$du = \frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\psi}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ ist, so ist umgekehrt } d\psi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}};$$

$$d\psi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}}; \quad d\psi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}.$$

Es ist also mit dieser Substitution

$$2p\,ds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}(1-u^2)}} \cdot \frac{2\,du\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}; \quad 2p\,ds = \frac{2\,du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\frac{\gamma}{2} = arc\sin k$; $\gamma = 2\,arc\sin k$ ist. Demnach ist $p\,ds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Die Grösse s_c ist eine noch unbekannte Konstante.

Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s - s_c)]$, und da $\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot u$ ist, so ist

Gl. 3)
$$\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot sn[p(s - s_c)].$$

Da ferner $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}$, so ist $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - k^2 sn^2[p(s - s_c)]}$, also

Gl. 4) $$\cos\frac{\psi}{2} = dn\,[p\,(s - s_c)]\,.$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\psi}{ds} = 2\,p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}$. Mit $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ und mit $\sin\frac{\psi}{2} = k\,sn\,[p\,(s - s_c)]$ wird nun $\frac{d\psi}{ds} = 2\,pk\sqrt{1 - sn^2\,[p\,(s - s_c)]}$; $\frac{d\psi}{ds} = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$. Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds} = p^2\,(x_a - x)$, es ist also $p^2\,(x_a - x) = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$ oder

Gl. 5) $$x_a - x = \frac{2\,k}{p}\,cn\,[p\,(s - s_c)],$$

worin x_a die Abscisse des Lastangriffspunktes ist.

Ferner ist allgemein $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, hier also $\frac{dy}{ds} = -\cos\psi = -\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, oder wegen Gleichung 3 $\frac{dy}{ds} = -\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}$; $dy = -\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $y - y_c = -\int\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$; $y_c - y = s - \int 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\,ds$.

Die Grösse y_c ist die noch unbekannte Integrationskonstante. Setzt man zur Abkürzung $[p\,(s - s_c)] = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist $y_c - y = s - \frac{2}{p}\,k^2\int sn^2\,(v)\,dv$.

Es ist aber (Appell-Lacour pag. 144)

$$k^2\int sn^2\,[v]\,dv = -\frac{\Theta'\,(v)}{\Theta\,(v)} + v\cdot\frac{\Theta''\,(o)}{\Theta\,(o)},\ \text{also ist}\ y_c - y = s - \frac{2}{p}\left\{v\cdot\frac{\Theta''\,(o)}{\Theta\,(o)} - \frac{\Theta'\,(v)}{\Theta\,(v)}\right\},$$

wo Θ die sogenannte Jacobi'sche Funktion ist. Diese Funktion $\Theta\,(v)$ ist durch folgendes unendliche Produkt dargestellt (Appell pag. 120)

$$\Theta\,(v) = A\left(1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2\right)\left(1 - 2\,q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6\right)\cdots\cdot,\ \text{worin}\ q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

wenn K das Viertel der reellen und K' der halbe Faktor der imaginären Periode von $sn\,(v)$ ist.

Setzt man kurz $\Theta\,(v) = A\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots\cdots$, so ist

$$\Theta'\,(v) = A\cdot\{a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4\cdots + a_1\cdot a_2'\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1\cdot a_2\cdot a_3'\cdot a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots\}\ \text{und}$$

$$\Theta''\,(v) = A\left\{\begin{array}{l} a_1''\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1'\,a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2''\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3''\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4''\cdots + \cdots \\ \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots \end{array}\right\},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{\Theta'\,(v)}{\Theta\,(v)} = \frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \frac{a_3'}{a_3} + \frac{a_4'}{a_4} + \cdots\cdots;$$

$$\frac{\Theta''\,(v)}{\Theta\,(v)} = \frac{a_1''}{a_1} + \frac{a_2''}{a_2} + \frac{a_3''}{a_3} + \frac{a_4''}{a_4} + \cdots\cdots + 2\,\frac{a_1'}{a_1}\sum_2^\infty\frac{a_n'}{a_n} + 2\,\frac{a_2'}{a_2}\sum_3^\infty\frac{a_n'}{a_n} + \cdots\cdots;$$

Da aber $a_1 = 1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2$ ist, so ist $a_1' = +\,2\,q\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}$; $a_1'' = +\,2\,q\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}$, und da

$a_2 = 1 - 2\,q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6$ ist, so ist $a_2' = +\,2\,q^3\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}$; $a_2'' = +\,2\,q^3\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}$.

Man hat somit $\frac{\Theta'\,(v)}{\Theta\,(v)} = 2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\left\{\frac{q}{1 - 2\,q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2\,q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6} + \cdots\right\}$ und

$$\left[\frac{\Theta''\,(v)}{\Theta\,(v)}\right]_{v=o} = 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1 - 2\,q + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2\,q^3 + q^6} + \cdots\right\},$$

weil die Glieder mit den Faktoren a_1'; a_2' etc. verschwinden, da diese für $v = o$ zu Null werden.

Setzt man nun zur Abkürzung $\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 \left\{\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right\} = b$ und

$$\left\{\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi v}{K}+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi v}{K}+q^6} + \cdots\right\} = f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\},$$

so wird $y_c - y = s - \frac{2}{p}\left\{v\cdot\frac{b}{2} - 2\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\cdot f\left[\cos\frac{\pi v}{K}\right]\right\}$, oder mit $v = p(s-s_c)$;

$$y_c - y = s - (s-s_c)\,b + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\, f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\};$$

lässt man noch das konstante Glied $b\cdot s_c$ in die noch unbestimmte Konstante y_c eintreten, dann ist

$$y_c - y = s(1-b) + \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\right\},$$

woraus sich ergiebt $y = y_c + (b-1)\,s - \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\, f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\right\}$, und setzt man $b - 1 = a$, so hat man

Gl. 6) $$y = y_c + a\cdot s - \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\, f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\right\},$$

worin y_c und s_c noch zu bestimmende Integrationskonstanten sind, während

$$a = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right\} - 1 \text{ ist, und}$$

$$f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]\right\} = \frac{q}{1-2q\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(s-s_c)\right]+q^6} + \cdots \text{ ist.}$$

Die Grösse a hat, wie sich beim zweiten Fall ergiebt, eine sehr einfache Bedeutung.

Nun soll der Wert der Integrationskonstante s_c bestimmt werden. Dies kann mit Hilfe der Gleichung 5 geschehen, wenn man berücksichtigt, dass $x = x_a$ und $s = l$ zusammengehörige Werte sind, wenn mit l die Länge des Stabes bezeichnet wird zwischen Einspannungsquerschnitt und Stirnquerschnitt. Aus Gleichung 5 folgt $o = \frac{2k}{p}\,cn\,[p(l-s_c)]$, damit aber diese Gleichung erfüllt sei, muss $cn\,[p(l-s_c)] = o$ sein, d. h. es muss $p(l-s_c) = K$ sein.

Es ist also $l - s_c = \frac{1}{p}K$; $s_c = l - \frac{K}{p}$;

Gl. 7) $$s_c = \frac{1}{p}(pl - K).$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante y_c dienen die zusammengehörigen Werte $s = o$; $y = o$, mit welchen aus Gleichung 6 folgt $o = y_c - \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p(-s_c)\right].\ f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}\,p(-s_c)\right]\right\}$, woraus

$$\text{mit } -s_c = \frac{1}{p}(K-pl);\ y_c = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(K-pl)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}(K-pl)\right]\right\};$$

$$y_c = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}\,pl\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}\,pl\right]\right\}.$$

Es ist aber $\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}\,pl\right] = +\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]$; $\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}\,pl\right] = -\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]$, also ist

Gl. 8) $$y_c = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right]\right\}.$$

Mit dem Werte $-s_c = \frac{1}{p}(K - pl)$ hat man $p(s-s_c) = p\cdot s - p\cdot s_c = p\cdot s + K - p\cdot l$; $p(s-s_c) = K - p(l-s)$, so dass Gleichung 5 wird zu

Gl. 9) $$x_a - x = \frac{2k}{p}\, cn\,[K - p\,(l-s)]$$

und Gleichung 6 wird zu $y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s))\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s))\right]\right\}$;

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\}, \text{ also}$$

Gl. 10) $$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\}.$$

Diese zwei Gleichungen geben für jede Bogenlänge s die Koordinaten x und y der elastischen Linie, falls p, k, K, q und x_a bekannt sind. Da aber $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist, so sind die noch anzugebenden Werte p, k, K, K' und x_a. Nun bestehen zwischen k und K beziehungsweise K' folgende Beziehungen (Appell-Lacour pag. 156)

Gl. A) $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots\right]$$

und mit $k'^2 = 1 - k^2$

Gl. B) $$K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k'^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 k'^{2n} + \cdots\right].$$

Praktisch wird man zweckmässiger das zu k gehörige q aus einer der vorhandenen Tabellen entnehmen

Gl. A+] q aus Tabelle entsprechend k

und hat dann (Schlömilch Band II pag. 449)

Gl. B+] $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right]^2.$$

Es bleiben nun noch anzugeben die Werte von p, k und x_a.

Es sind aber zusammengehörig $s = o$, $x = o$ und $\varphi = o$; mit den zwei ersteren folgt aus Gleichung 9

Gl. C] $$x_a = \frac{2k}{p}\, cn\,[K - pl].$$

Ferner war allgemein (Seite 4) $\frac{dy}{ds} = -\{1 - 2k^2 sn^2 [K - p\,(l-s)]\}$, und weil $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ ist, φ aber für $s = o$ auch gleich null ist, so ist $1 - 2k^2 sn^2 [K - pl] = o$, woraus folgt $sn^2 [K - pl] = \frac{1}{2k^2}$.

Aus Gleichung C folgt aber $cn^2 [K - pl] = \frac{p^2}{4k^2}\cdot x_a^2$, und da $sn^2(v) + cn^2(v) = 1$ ist, so ist $\frac{1}{2k^2} + \frac{p^2}{4k^2} x_a^2 = 1$; $1 + \frac{p^2}{2} x_a^2 = 2k^2$;

Gl. D] $$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} x_a^2.$$

Wie ursprünglich die Aufgabe gestellt war, war die Deformation angenommen, d. h x_a wurde als bekannt vorausgesetzt. Ist aber x_a bekannt, so können aus den Gleichungen C und D die Grössen k und p berechnet werden. Es wird aber in den meisten Fällen p gegeben sein, dann können aus den Gleichungen C und D die Grössen k und x_a berechnet werden.

Für die rechnerische Behandlung bedarf Gleichung C der Umformung. Da $cn\,[K+v] = -k'\frac{sn\,(v)}{dn\,(v)}$ ist, und $v = -pl$ ist, so hat man $cn\,[K-pl] = -k'\frac{sn(-pl)}{dn(-pl)}$, und da $sn\,(-v) = -sn\,(v)$, aber $dn\,(-v) = +dn\,(v)$ ist, so ist $cn\,[K-pl] = k'\frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)}$, also ist (Schlömilch pag. 420)

$$cn\,[K-pl] = \frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \cdots\cdots\right\},$$

und die Gleichung C wird zu

Gl. C*] $$x_a = \frac{4}{p}\,\frac{\pi}{K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \cdots\right\}.$$

Die gesuchten Werte für k und x_a finden sich nun durch successive Annäherung aus den Gleichungen D und C*. Man hat einen wahrscheinlichen Wert von x_a anzunehmen, mit demselben ein vorläufiges k aus Gleichung D zu berechnen, aus den Gleichungen A* und B* vorläufige Werte von q und K zu bestimmen und mit diesen aus Gleichung C* das sich ergebende x_a zu ermitteln. Dieses Verfahren hat man fortzusetzen, bis das sich ergebende x_a mit dem zuletzt angenommenen x_a übereinstimmt.

In den speziellen Fällen, wo der Stab sehr steif und die Last verhältnismässig klein ist, wird die Krümmung des Stabes nur gering sein, und x_a wird nur wenig von l verschieden sein. Dann kann als erste Annäherung $x_a = l$ gesetzt werden, so dass sich aus Gleichung D der vorläufige Wert ergiebt $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}l^2$.

Da ferner (Appell-Lacour pag. 135) $sn\,(pl) = pl\left\{1 - (k^2+1)\frac{p^2l^2}{6} + (k^4+14k^2+1)\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}$ und $dn\,(pl) = 1 - 3k^2\frac{p^2l^2}{6} + (5k^4+20k^2)\frac{p^4l^4}{120} + \cdots$, so ist

$$\frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)} = pl\cdot\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2(k^2-1))\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}$$

und $cn\,[K-pl] = k'pl\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2[k^2-1])\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}$.

Es wird also Gleichung C zu

Gl. C]** $$x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + [1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}.$$

In erster Annäherung ist aber $2k^2 - 1 = 1 + \frac{p^2}{2}l^2 - 1 = \frac{p^2l^2}{2}$ und

$$16k^2(k^2-1) = (8+4p^2l^2)\left(\frac{p^2l^2}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2p^2l^2 - 4 + p^4l^4 - 2p^2l^2 = p^4l^4 - 4,$$

also $[1 + 16k^2(k^2-1)] = p^4l^4 - 3$.

Ferner ist $k'^2 = 1 - k^2$, also in erster Annäherung $k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{p^2l^2}{4}$ und

$$2kk' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^4l^4}{16}} = \sqrt{1 - \frac{p^4l^4}{4}};$$

somit hat man in zweiter Annäherung

$$x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{p^4l^4}{12} - 3\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\};\quad x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 + \cdots\right\},$$

und mit $\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}} = \left(1-\frac{p^4l^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{p^4l^4}{4} + \cdots;\quad x_a = l\cdot\left(1-\frac{1}{8}p^4l^4\right)\left(1+\frac{7}{120}p^4l^4\right)$

$$= l\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 - \frac{1}{8}p^4l^4 - \cdots\right\} = l\left\{1 - \left(\frac{1}{8}-\frac{7}{120}\right)p^4l^4\right\} = l\left\{1 - \frac{16}{240}p^4l^4\right\}.$$

Es wird also bei nur schwachen Krümmungen des Stabes in zweiter Annäherung Gleichung C zu

Gl. C*]** $$x_a = l\left(1 - \frac{1}{15}p^4l^4\right).$$

Mit diesem Werte von x_a kann nun aus Gleichung D, wenn nötig, ein verbesserter Wert von k berechnet werden, dann ergiebt Gleichung C** einen verbesserten Wert von x_a.

Anmerkung. Bei dieser Aufgabe ist vorausgesetzt, dass die Last P in einem ganz bestimmten Punkte $s = l$ der Axe des Stabes angreift, so dass die Wirkungslinie der Last parallel mit sich bei der Deformation des Stabes verschoben wird, wie in Figur 5 dargestellt.

Es soll nun angenommen werden, dass der Last eine unverschiebliche Wirkungslinie angewiesen ist, dann werden bei der Deformation des Stabes immer andere Punkte der Axe zum Lastangriffspunkte, wie in Figur 6 dargestellt.

Bei dieser Annahme bleiben die Gleichungen 1 bis 10, A und B bestehen, während die Verwertung der Gleichungen C und D anderer Art wird.

Ohne Probieren ergiebt sich aus Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} \cdot x_a^2$, worin jetzt x_a gegeben ist.

Aus Gleichung C folgt durch Umformung $cn\,[K - pl] = \frac{p}{2k} x_a$; $K - pl = arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $pl = K - arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $l = \frac{1}{p}\left\{K - arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]\right\}$, so dass auch l ohne Probieren gefunden werden kann. In den speziellen Fällen, wo die Krümmung nur schwach ist, kann in Gleichung C** innerhalb der Klammern als erste Annäherung $l = x_a$ gesetzt werden, so dass man hat $x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2 - 1)\frac{p^2 x_a^2}{6} + [1 + 16k^2(k^2 - 1)]\frac{p^4 x_a^4}{120} + \cdots\right\}$, also mit dem obigen Werte für k^2;

$$x_a = l\sqrt{1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}, \text{ woraus } l = x_a \left(1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}^{-1};$$

$$l = x_a \left(1 + \frac{1}{8} p^4 x_a^4\right)\left\{1 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\};\quad l = x_a \left[1 + \frac{1}{8} p^4 x_a^4 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right];\quad l = x_a \left[1 + \frac{1}{15} p^4 x_a^4\right].$$

Auf die ursprüngliche Aufgabe zurückgehend, bei welcher x_a veränderlich ist, so hat man aus Gleichung D

$$x_a^2 = \frac{4}{p^2}\left(k^2 - \frac{1}{2}\right);\quad x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}.$$

Es giebt also nur ein reelles x_a, wenn

$$k^2 => \frac{1}{2};\quad k => \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da anderseits (Seite 3) $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ ist, so giebt es anderseits nur ein reelles x_a, wenn $k <= 1$ ist.

Für vorliegende Aufgabe kann sich also k nur bewegen zwischen den Grenzen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1, demnach ist $\frac{1}{\sqrt{2}} <= k <= 1$.

Es ist aber der Grenzfall $k = 1$ für die Amplitudenfunktionen ein Fall der Entartung, auf welchen besonders eingegangen werden muss. Mit $k = \sin\frac{\gamma}{2} = 1$ wird Gleichung 2 zu

$$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}};$$

Gl. 2a)
$$\frac{d\psi}{ds} = 2p \cdot \cos\frac{\psi}{2}.$$

Durch Trennung der Variablen wird hieraus $2\,pds = \frac{d\psi}{\cos\frac{\psi}{2}}$; $pds = \frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$, und durch Integration

$$ps = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right) + \log\frac{1}{c};\quad ps = \log\frac{1}{c}\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right).$$

Durch die Inversion erhält man $ce^{ps} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right)$, worin c eine noch unbekannte Integrationskonstante ist.

Nun ist $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{4}\right) = \dfrac{1 + tg\frac{\psi}{4}}{1 - tg\frac{\psi}{4}}$, also ist

$$\left(1 - tg\frac{\psi}{4}\right)\cdot c\cdot e^{ps} = 1 + tg\frac{\psi}{4};\quad c\cdot e^{ps} - 1 = (ce^{ps}+1)\, tg\frac{\psi}{4};\quad tg\frac{\psi}{4} = \frac{c\cdot e^{ps}-1}{c\cdot e^{ps}+1}.$$

Es ist aber $\sin\frac{\psi}{2} = \dfrac{2\,tg\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$; $\cos\frac{\psi}{2} = \dfrac{1-tg^2\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$, also ist

Gl. 3a) $\quad \sin\frac{\psi}{2} = \dfrac{c^2 e^{2ps}-1}{c^2 e^{2ps}+1}$ $\qquad$ **Gl. 4a)** $\quad \cos\frac{\psi}{2} = 2\,\dfrac{c\cdot e^{ps}}{c^2 e^{2ps}+1}$.

Wegen Gleichung 2a ist also $\frac{d\psi}{ds} = 4\cdot p\,\dfrac{c\cdot e^{ps}}{c^2e^{2ps}+1}$; nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds} = p^2(x_a - x)$, also hat man

Gl. 5a) $$x_a - x = \frac{4}{p}\,\frac{c\cdot e^{ps}}{c^2e^{2ps}+1}.$$

Ferner ist (Seite 4) $\frac{dy}{ds} = -\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, somit $-dy = \left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right) ds.$

Aus Gleichung 2a aber ergiebt sich $ds = \dfrac{d\psi}{2\,p\cos\frac{\psi}{2}} = \dfrac{d\frac{\psi}{2}}{p\cos\frac{\psi}{2}}$, also

$$-dy = \frac{1-2\left(1-\cos^2\frac{\psi}{2}\right)}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}\,d\frac{\psi}{2};\quad -dy = \frac{-1+2\cos^2\frac{\psi}{2}}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}\,d\frac{\psi}{2};\quad -dy = \frac{2}{p}\cos\frac{\psi}{2}\,d\frac{\psi}{2} - \frac{1}{p}\,\frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}},$$

woraus durch Integration, weil $pds = \dfrac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$ ist,

$$y_c - y = \frac{2}{p}\int\cos\frac{\psi}{2}\,d\frac{\psi}{2} - \int ds;\quad y_c - y = \frac{2}{p}\sin\frac{\psi}{2} - s;\quad y_c - y = \frac{2}{p}\,\frac{c^2e^{2ps}-1}{c^2e^{2ps}+1} - s;$$

Gl. 6a) $$y = y_c + s - \frac{2}{p}\,\frac{c^2e^{2ps}-1}{c^2e^{2ps}+1}.$$

Nun sind noch die Integrationskonstanten c und y_c zu bestimmen. Es sind $s = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ zusammengehörige Werte, dann ist $\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{4}$ und man hat $\cos\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\psi}{2}$, d. h. mit den Werten aus den Gleichungen 3a und 4a, wenn $s = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{2c}{c^2+1} = \frac{c^2-1}{c^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{oder}\ 2c = c^2 - 1;\quad c^2 - 2c - 1 = 0;\quad c = 1 \pm\sqrt{1+1} = 1\pm\sqrt{2}.$$

Nun ist der kleinste Wert von ψ der Wert $\frac{\pi}{2}$, der grösste aber ist hier, wo $k = 1$ ist,

$$\gamma = 2\,arc\sin(1) = \pi,$$

also bewegt sich der Winkel $\frac{\psi}{2}$ zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$, so dass $\sin\frac{\psi}{2}$ und $\cos\frac{\psi}{2}$ beide positiv sind, und man hat als allein giltig

Gl. 7a) $$c = 1 + \sqrt{2}.$$

Wegen einer späteren Untersuchung soll $c = e^{-p\cdot s_c}$ gesetzt werden, dann ist $-p\cdot s_c = \log c$;

$$s_c = -\frac{1}{p}\log c.$$

Es sind ferner zusammengehörig $s=o$ und $y=o$, also giebt Gleichung 6a

$$o=y_c-\frac{2}{p}\frac{c^2-1}{c^2+1};\quad y_c=\frac{2}{p}\frac{1}{\sqrt{2}};$$

Gl. 8a) $$y_c=\frac{\sqrt{2}}{p}.$$

Ausserdem sind noch zusammengehörig $s=o$ und $x=o$, also ist nach Gleichung 5a

$$x_a=\frac{4}{p}\frac{c}{c^2+1};\quad x_a=\frac{2}{p}\frac{2c}{c^2+1};$$

Gl. Ca) $$x_a=\frac{\sqrt{2}}{p}$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für x_a, den man aus Gleichung D mit $k=1$ bekommt.

Nun sind noch zusammengehörig $s=l$ und $x=x_a$, also giebt Gleichung 5a

$$o=\frac{4}{p}\frac{c\cdot e^{pl}}{c^2 e^{2pl}+1}.$$

Diese Gleichung ist aber nur erfüllt, wenn $e^{2pl}=\infty$ ist, damit dies aber der Fall sei, muss $l=\infty$ sein.

Anmerkung. Die formal mögliche andere Lösung $p=\infty$ setzt, da $p=\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ ist, voraus, dass entweder $J=o$ ist, d. h. dass der Stab in einen vollkommen biegsamen Faden ausgeartet ist, oder dass $P=\infty$ ist; dann konzentriert sich die ganze Biegung auf die Einspannungsstelle, der Stab erscheint, trotzdem er steif ist, gegenüber der unendlich grossen Kraft, nur als ein vollkommen biegsamer Faden. Mit $p=\infty$ hat man richtig x konstant $=o$ und $y=s$, entsprechend einem gezogenen Faden, bei welchem die Deformation durch die Normalkraft vernachlässigt ist. [Es ist in dem Falle $p=\infty$ das Verhalten von $M_ä=P(x_a-x)$ interessant. Da allgemein $P(x_a-x)=4\frac{P}{p}\frac{c e^{ps}}{c^2 e^{2ps}+1}$, und da P proportional p^2 ist, so ist für $p=\infty$; $P(x_a-x)=\frac{\infty^2}{\infty}\cdot\frac{\infty_1}{\infty_1{}^2}=\frac{\infty}{\infty_1}=0$, weil ∞_1 von höherer Ordnung ist als ∞. Es ist also $P(x_a-x)=o$ für alle x. Rechnet man aber direkt $P\cdot x_a$, so hat man $Px_a=\frac{P}{p}\sqrt{2}=\frac{\infty^2}{\infty}=\infty$. Für $x=o$ hat also $M_ä$ zwei Werte, dies erklärt sich daraus, dass der Stab resp. Faden scharf um 90° abgebogen wird.]

Der obere Grenzfall $k=1$ ist also nur möglich, wenn die Stablänge l unendlich gross ist. Da aber für $k=1$ der Winkel γ den Wert π hat, so ist die Lastlinie selbst Berührende an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Nun sind aber die Koordinaten des Lastangriffspunktes in diesem Falle $x=x_a=\frac{\sqrt{2}}{p}$ und $y=y_a=y_c+l-\frac{2}{p}\frac{c^2 e^{2pl}-1}{c^2 e^{2pl}+1}=\infty$.

Es ist also, wenn $k=1$ ist, die Lastlinie $x=x_a=\frac{\sqrt{2}}{p}$ Asymptote der elastischen Linie.

Ist die Stablänge endlich, so kann k den Wert 1 nicht annehmen; die elastische Linie kann bei endlicher Stablänge im Lastangriffspunkt nicht die Richtung der Kraft haben.

Beispiel für die Anwendung.

Ein Stab konstanten Querschnittes aus Schweisseisen ist mit seinem einen Ende horizontal eingespannt und trägt an seinem freien Ende die lotrechte Last P (Figur 7); welche Werte haben nach der Deformation die Koordinaten des Lastangriffspunktes?

Wenn für den Krümmungsradius nicht der genaue Wert

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

sondern, wie üblich, als Annäherung

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

gesetzt wird, und wenn gleichzeitig die Änderungen der Abscissen vernachlässigt werden, so ist (vergleiche Grashof pag. 72) $x_a = l$; $y_a = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} = p^2\frac{l^3}{3}$. Ist nun $l = 400$ cm; $\mathfrak{J} = 100$ cm^4; $E = 2 \cdot 000 \cdot 000$ klg/cm^2, und das eine Mal $P_1 = 40$ klg, das andere Mal $P_2 = 80$ klg, so ist

$$p_1^2 = \frac{40}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 100}; \quad p_2^2 = \frac{80}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 100}; \quad p_1^2 = \frac{1}{5 \cdot 10^6}; \quad p_2^2 = \frac{2}{5 \cdot 10^6}; \text{ also ist}$$

$$y_{1a} = \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \frac{4^3 \cdot 10^6}{3}; \quad y_{2a} = 2 \cdot y_{1a}; \quad y_{1a} = \frac{4^3}{15} = 4{,}27 \text{ cm}; \quad y_{2a} = 8{,}53 \text{ cm}.$$

Nach den genauen Formeln ist die Rechnung wie folgt:

$$P_1 = 40 \text{ kg}; \quad p_1^2 = \frac{4}{5 \cdot 10^6}.$$

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15} p^4 l^4\right)$, hier ist also

$$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\frac{1}{5^2 \cdot 10^{12}} \cdot 4^4 \cdot 10^8\right); \quad x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\frac{1}{25 \cdot 10^4} 256\right);$$

$$x_a = 400\left(1 - \frac{0{,}6827}{10000}\right) = 400 \cdot 0{,}999932; \quad x_a = 399{,}97 \text{ cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p^2 \cdot x_a^2$; hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot 399{,}97^2$;
$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{20 \cdot 10^6} \cdot 159976$; $k^2 = 0{,}507999$; $k = 0{,}7127$.

Hiermit durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch Compendium II pag. 448 $q = 0{,}04421$; $q^2 = 0{,}00196$; $q^3 = 0{,}000086$; $q^4 = 0{,}0000038$; $q^5 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$; $q^6 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}08842 + 0{,}0000076 + \cdots\right]^2; \quad K = \frac{\pi}{2}\left[1{,}1847\right] = \pi \cdot 0{,}59235 = 1{,}8609.$$

Nun ist nach Gleichung 10, wenn $s = l$ gesetzt wird, $y_a = y_c + a \cdot l$.

Nach Gleichung 8 ist aber

$$y_c = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right]\left\{\frac{q}{1 + 2q\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^2} + \frac{q^3}{1 + 2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^6}\right\}.$$

Hier ist $\frac{\pi}{K}pl = \frac{\pi}{1{,}8609} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 10^3} \cdot 400 = \pi \cdot \frac{1}{10{,}403} = 17^\circ\, 18'\, 00''$, also ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}29737; \quad \cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}95476,$$

und man hat

$$y_c = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \frac{1}{0{,}59235}\, 0{,}29737 \left\{\frac{0{,}04421}{1 + 2 \cdot 0{,}04421 \cdot 0{,}95476 + 0{,}002} + \frac{0{,}00009}{1 + 2 \cdot 0{,}00009 \cdot 0{,}95476 + 0}\right\}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}50202 \left\{\frac{0{,}04421}{1{,}08637} + \frac{0{,}00009}{1{,}00017}\right\}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}50202 \left\{\begin{matrix} 0{,}04070 \\ 0{,}00009 \\ 0{,}04079 \end{matrix}\right\} = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}02048; \quad y_c = 183{,}16 \text{ cm}.$$

Es ist ferner nach der Gleichung auf Seite 5

$$a = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 \left(\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right) - 1.$$

Hier ist

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0,59235} = 3,37638; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11,39992;$$

$$1 + a = 11,39992 \cdot \left(\frac{0,04421}{1 - 2 \cdot 0,04421 + 0,00196} + \frac{0,00009}{1 - 2 \cdot 0,00009 + 0}\right);$$

$$1 + a = 11,39992 \cdot \left(\frac{0,04421}{0,91354} + \frac{0,00009}{0,99982}\right);$$

$$1 + a = 11,39992 \cdot \left\{\begin{matrix} 0,04841 \\ 0,00009 \\ \hline 0,04850 \end{matrix}\right\} = 0,55290;$$

$$a = -(1 - 0,55290); \quad a = -0,44710; \quad a \cdot l = -178,84 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_1 = 40$ kg ist,

$$x_a = 399,97 \text{ cm}; \quad y_a = 183,16 - 178,84; \quad y_a = 4,32 \text{ cm}.$$

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a, \ \varDelta = -\frac{3}{10} \text{ mm}; \quad \text{bei } y_a, \ \varDelta = +\frac{5}{10} \text{ mm}.$$

Jetzt sei $P_2 = 80\,kg$; $\quad p_2{}^2 = \frac{2}{5 \cdot 10^6}$.

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15} p^4 l^4\right)$, hier ist also

$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15} \frac{4}{5^2 \cdot 10^{12}} \cdot 4^4 \cdot 10^8\right)$, und mit Benützung des früheren Resultates

$$x_a = 400\left(1 - 4 \cdot \frac{0,6827}{10000}\right) = 400 \cdot 0,999727; \quad x_a = 399,89 \text{ cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p^2 \cdot x_a{}^2$, hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5 \cdot 10^6}\, 399,89^2$;
$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^7} \cdot 159912$; $\quad k^2 = 0,50000 + 0,01599$; $\quad k^2 = 0,515991$; $\quad k = 0,71832$.

Für dieses k findet man durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch pag. 448
$q = 0,04523$; $\quad q^2 = 0,002045$; $\quad q^3 = 0,000092$; $\quad q^4 = 0,000004$.

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0,09046 + 0,000008\right]^2; \quad K = \frac{\pi}{2} \cdot 1,18912 = \pi \cdot 0,59456 = 1,86787.$$

Demnach hat man hier

$\frac{\pi}{K} pl = \frac{\pi}{1,86787} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{1}{10^3} \cdot 400 = \pi \cdot 0,13544$; $\quad \frac{\pi}{K} pl = 24^\circ 22' 46''$, und es ist $\sin \frac{\pi}{K}\, pl = 0,41277$;

$$\cos \frac{\pi}{K} pl = 0,91083.$$

Es ist somit

$$y_c = 4 \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot 10^3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{0,59456}\, 0,41277 \cdot \left\{\frac{0,04523}{1 + 2 \cdot 0,04523 \cdot 0,91083 + 0,002045} + \frac{0,000092}{1 + 2 \cdot 0,000092 \cdot 0,91083 + 0} + \cdots\right\};$$

$$y_c = 4 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\, 10^3 \cdot 0,69423 \left\{\frac{0,04523}{1,08444} + \frac{0,000092}{1,00017}\right\}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot 10^3 \cdot 0,69423 \left\{\begin{matrix} 0,04171 \\ 0,00009 \\ \hline 0,04180 \end{matrix}\right\} = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\, 10^3 \cdot 0,02902 = 183,56 \text{ cm}; \quad y_c = 183,56 \text{ cm}.$$

Es ist ferner hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0,59456} = 3,36383; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11,31535;$$

$$1 + a = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{1 - 2\cdot 0{,}04523 + 0{,}002045} + \frac{0{,}00009}{1 - 2\cdot 0{,}00009 + 0}\right) = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{0{,}91159} + \frac{0{,}00009}{0{,}99982}\right)$$

$$= 11{,}31535\left\{\begin{matrix}0{,}04962\\ 0{,}00009\\ 0{,}04971\end{matrix}\right\} = 0{,}56248;\quad a = -(1 - 0{,}56248);\quad a = -0{,}43752;\quad a\cdot l = -175{,}008\ \text{cm}.$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_2 = 80$ kg ist, $x_a = 399{,}89$ cm; $y_a = 183{,}56 - 175{,}01$; $y_a = 8{,}55$ cm.

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a,\ \Delta = -\frac{11}{10}\ \text{mm};\quad \text{bei } y_a,\ \Delta = +\frac{2}{10}\ \text{mm}.$$

In diesen beiden Beispielen sind die Differenzen in y_a so klein, dass sie jedenfalls nur von den Zufälligkeiten der Rechnung herrühren; die Krümmungen sind demnach innerhalb derjenigen Grenzen, innerhalb welcher die angenäherten Formeln vollständig genügen.

Nun soll bei einem Stabe $l = 400$ cm; $p^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163$ gegeben sein, welches sind die Koordinaten des Lastangriffspunktes nach der Deformation?

Nach Gleichung D hat man $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\cdot x_a^2$. Es soll nun x_a zu 349,4 cm geschätzt werden, also ist vorläufig

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 122080{,}36;\quad k^2 = \frac{1}{2} + 0{,}32706;\quad k^2 = 0{,}82706;\quad k = 0{,}90943$$

vorläufig. Jetzt soll mit diesem k nach Gleichung C** ein verbesserter Wert von x_a gerechnet werden.

Es ist $k'^2 = 1 - k^2 = 0{,}17294$; $k' = 0{,}41586$, also $2\,kk'l = 2\cdot 0{,}90943\cdot 0{,}41586\cdot 400$;

$$2\,kk'l = 302{,}544;\quad 2\,k^2 - 1 = 0{,}65412;\quad \frac{2\,k^2 - 1}{6} = 0{,}10902;\quad k^2 - 1 = -0{,}17294;\quad 16\,k^2 = 13{,}23296;$$

$$16\,k^2(k^2 - 1) = -2{,}28851;\quad 1 + 16\,k^2(k^2 - 1) = -1{,}28851;\quad \frac{1 + 16\,k^2(k^2-1)}{120} = -0{,}01074;$$

$$p^2 l^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 160000 = 1{,}71461;\quad p^4 l^4 = 2{,}93990;\quad \frac{2\,k^2 - 1}{6}\cdot p^2 l^2 = 0{,}18692;$$

$$\frac{1 + 16\,k^2(k^2-1)}{120}\,p^4 l^4 = -0{,}03157;$$

$$1{,}00000 + 0{,}18692;\quad 1{,}18692 - 0{,}03157 = 1{,}15535;\quad x_a = 302{,}544\cdot 1{,}15535;\quad x_a = 349{,}54421.$$

Das angenommene und das gerechnete x_a stimmen genügend überein, also ist $k = 0{,}90943$ endgültig.

Für dieses k findet man mit Hülfe der Tafel Schlömilch II pag. 448:

$$q = 0{,}10800;\quad q^2 = 0{,}01166;\quad q^3 = 0{,}00126;\quad q^4 = 0{,}00014.$$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}21600 + 0{,}00028\right]^2;\quad K = \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}47934 = \pi\cdot 0{,}73967 = 2{,}32373.$$

Hiermit ist

$$\frac{\pi}{K}\,pl = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\sqrt{\frac{1{,}07163}{10^5}}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{\sqrt{10{,}7163}}{10^3}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{3{,}27358}{10^3}\ 400$$

$$= \pi\cdot 0{,}56350 = 101^\circ 25{,}8';\quad \frac{\pi}{K}\,pl = 90^\circ + 11^\circ 25{,}8',\ \text{also ist}$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right] = \sin\left[90^\circ + 11^\circ 25{,}8'\right] = \cos\left[11^\circ 25{,}8'\right] = 0{,}98016;$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{K}\,pl\right] = -\sin\left[11^\circ 25{,}8'\right] = -0{,}19817.$$

Man hat somit

$$y_c = 4\,\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\,0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{1 - 2\cdot 0{,}108\cdot 0{,}19817 + 0{,}01166} + \frac{0{,}00126}{1 - 2\cdot 0{,}00126\cdot 0{,}19817 + 0}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{0{,}96886} + \frac{0{,}00126}{0{,}99950}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\begin{matrix}0{,}11147\\ 0{,}00127\\ 0{,}11274\end{matrix}\right\};\quad y_c = 182{,}56\ \text{cm}.$$

Ferner ist hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0,73967} = 2,70390; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7,31107;$$

$$1 + a = 7,31107\left(\frac{0,10800}{1 - 2\cdot 0,10800 + 0,01166}\right) + \frac{0,00126}{1 - 2\cdot 0,00126 + 0}\Big);$$

$$1 + a = 7,31107\left\{\frac{0,10800}{0,79566} + \frac{0,00126}{0,99748}\right\};$$

$$1 + a = 7,31107\left\{\begin{matrix}0,13571\\0,00127\\\hline 0,13698\end{matrix}\right\} = 1,00147;$$

$$a = +0,00147; \quad a\cdot l = +0,59 \text{ cm.}$$

Es ergiebt sich also bei dieser Aufgabe $y_a = 182,56 + 0,59$; $y_a = 183,15$ cm, und es ist schon gefunden worden $x_a = 349,54$ cm.

Obschon die angenäherten Formeln zur Voraussetzung haben, dass die ursprünglichen Hebelsarme sich nicht ändern, obschon sie also hier, wo der Hebelsarm der Last sich von 400 cm auf 349,54 cm verringert, gar nicht angewendet werden dürften, soll doch zum Vergleich y_a nach der angenäherten Formel berechnet werden. $y_a = p^2\frac{l^3}{3} = \frac{1,07163}{10^5}\cdot\frac{4^3\cdot 10^6}{3}$; $y_a = 228,6$ cm.

Das angenäherte y_a ist zu gross; dies rührt offenbar daher, dass die Momente infolge der zu grossen Hebelsarme zu gross ausfallen.

Bei dieser letzten Aufgabe war

$$p^2 = \frac{1,07163}{10^5}$$

gegeben. Wenn nun der Stab aus Schweisseisen war, so war

$$\frac{P}{2\cdot 000\cdot 000\cdot J} = \frac{1,07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = \frac{2\cdot 10^6\cdot 1,07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = 21,43260.$$

Die Lösung hat nur so lange Gültigkeit, als die grösste Spannung kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist. Die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist aber bei Schweisseisen $\sigma_g = 1600$ klg/cm².

Bei vorliegendem Stabe ist im Gleichgewichtszustand

$$\sigma_{\max} = \frac{P\cdot x_a}{J}\cdot e,$$

wenn e der Abstand der äussersten Faser von der neutralen Axe ist, also muss

$$\frac{P\cdot x_a}{J}\cdot e <= 1600$$

sein, d. h.

$$e <= \frac{1600}{x_a}\left(\frac{J}{P}\right); \quad e <= \frac{1600}{349,54\cdot 21,4326}; \quad e <= \frac{1600}{7491,55}; \quad e <= 0,214 \text{ cm.}$$

Angenommen der Querschnitt des Stabes sei ein Rechteck, mit der Breite $b = 2$ cm und der Höhe $h = 2\cdot e = 0,42$ cm, dann ist

$$J = \frac{2\cdot 0,42^3}{12} = 0,012 \text{ cm}^4; \quad P = 0,012\cdot 21,4326 = 0,26 \text{ kg}; \quad \sigma_{\max} = \frac{0,26\cdot 349,54}{0,012}\cdot 0,21 = 1590 \text{ kg.}$$

Es findet sich demnach an diesem Beispiele bestätigt, dass die sich ergebenden Resultate bei starken Deformationen nur auf bandförmige Federn angewendet werden können.

Bei dem letzten Zahlenbeispiel hat sich zufällig ergeben, dass für $q = 0,10800$ der Wert von a sehr wenig von o verschieden ist. Es soll an dieser Stelle gleich zur späteren Benützung festgestellt werden, dass a mit genügender Annäherung $= o$ wird für $q = 0,10770$.

Wenn $q = 0,10770$ ist, dann ist $q^2 = 0,01159$; $q^3 = 0,00125$; $q^4 = 0,00014$;

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1,00000 + 0,21540 + 0,00028\right\}^2; \quad K = \frac{\pi}{2}\cdot 1,47789 = \pi\cdot 0,73894 = 2,32144;$$

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0,73894} = 2,70658; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7,32557;$$

$$1 + a = 7{,}32557\left(\frac{0{,}10770}{1 - 2\cdot 0{,}10770 + 0{,}01159} + \frac{0{,}00125}{1 - 2\cdot 0{,}00125 + 0}\right)$$

$$= 7{,}32557\left\{\begin{matrix}0{,}13526\\ \underline{0{,}00125}\\ 0{,}13651\end{matrix}\right\} = 1{,}00001;\quad a = o$$

mit einer Abweichung jenseits der vierten Decimale.

Diesem $q = 0{,}10770$ entspricht $k = 0{,}90895$, und da $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ ist, so ist $\frac{\gamma}{2} = 65^\circ 21{,}6'$; $\gamma = 130^\circ 43{,}2'$. Dem Winkel $\psi_a = \gamma$ entspricht der Winkel φ_a, wo $\varphi_a = \gamma - 90$; $\varphi_a = 40^\circ 43{,}2'$.

Für den ersten Belastungsfall (nach Fig. 8) sind demnach folgende ausgezeichnete Werte vorhanden:

$$\varphi_a = 0;\quad \gamma = 90^\circ;\quad k = \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711.$$

$$\varphi_a = 40^\circ 43{,}2';\quad \gamma = 130^\circ 43{,}2';\quad k = \sin\frac{\gamma}{2} = 0{,}90895.$$

$$\varphi_a = 90^\circ;\quad \gamma = 180^\circ;\quad k = \sin\frac{\gamma}{2} = 1{,}00000.$$

II. Teil.

Es mögen die Hauptformeln, welche die allgemeine Lösung der ursprünglichen Aufgabe bilden, an dieser Stelle zusammengestellt werden:

$$\frac{1}{\varrho} = p^2 (x_a - x) = \frac{d\psi}{ds};$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = k\, sn\,[K - p\,(l - s)];\quad \cos\frac{\psi}{2} = dn\,[K - p\,(l - s)];$$

$$dy = -\{1 - 2\,k^2\, sn^2\,[K - p\,(l - s)]\}\, ds;$$

$$x_a = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - pl];$$

$$x_a - x = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - p\,(l - s)];$$

$$y = y_c + as - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(l - s)\right];\quad \cos\left[\frac{\pi}{K}\,p\,(l - s)\right]\right\},$$

worin $F\{\cdots\}$ sich aus Gleichung 10 ergiebt.

Nach den Voraussetzungen der ursprünglichen Aufgabe haben diese Formeln nur Gültigkeit von $s = o$ bis $s = l$, denn falls der Stab länger wäre als l, d. h. falls der Stab über den Lastangriffspunkt hinausragte, so wäre dieser hinausragende Teil geradlinig tangential an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Wenn man aber bei obigen Formeln von der Entstehung derselben ganz absieht, den Grössen k, K, p, l und damit auch den Grössen y_c und a die Bedeutung von Konstanten, der Grösse s aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen giebt, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt. Das Studium dieser Kurve wird rückwärts wieder Schlüsse auf den belasteten Stab ermöglichen.

Die unabhängige Variable s stellt natürlich auch bei dieser Kurve die von O aus gemessene Bogenlänge dar, nur kann bei der Kurve s auch negative Werte annehmen, nämlich wenn von O aus rückwärts gegangen wird.

Da bei dieser Kurve $x_a - x = \frac{2\,k}{p}\, cn\,[K - p\,(l - s)]$ ist, so hat $x_a - x$ sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn\,[K - p\,(l - s)]$ sein Maximum resp. sein Minimum hat.

Es ist aber $\underset{\max}{cn}\,(v) = 1$; $\underset{\min}{cn}\,(v) = -1$, also ist

$$\underset{\max}{(x_a - x)} = +\frac{2\,k}{p};\quad \underset{\min}{x} = x_a - \frac{2\,k}{p};\quad \underset{\min}{(x_a - x)} = -\frac{2\,k}{p};\quad \underset{\max}{x} = x_a + \frac{2\,k}{p}.$$

Der ganze Verlauf der Kurve ist somit eingeschlossen zwischen den zwei Parallelen zur y-Axe,