Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XXXIX. Gleichungen des vierten Grades

urn:nbn:de:bsz:31-269430

7. $x^3 = 31x - 19$
8. $x^3 = 75x - 250$
9. $x^3 + 10x - 13 = 0$
10. $x^3 = 126x + 559$
11. $x^3 = 144x + 728$
12. $x^3 - 126x + 1241 = 0$
13. $7x^3 = 9x + 5$
14. $9x^3 - 16x + 15 = 0$
15. $9x^3 - 73x - 60 = 0$
16. $17x^3 - 33x^2 + 11 = 0$
17. $6x^3 + 5x^2 - 2 = 0$
18. $10x^3 - 8x^2 + 5 = 0$
19. $x^3 + 9x^2 + 27x + 26 = 0$
20. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
21. $x^3 - 8x^2 + 19x - 20 = 0$
22. $x^3 - 9x^2 - 2x + 101 = 0$
23. $8x^3 - 18x^2 + 17x - 6 = 0$
24. $3x^3 + 18x^2 + 67x = 914$
25. $10x^3 - 26x^2 + 13x + 10 = 0$
26. $9x^3 - 45x^2 + 34x + 37 = 0$
27. $2x^3 - 21x^2 + 74x - 85 = 0$
28. $18x^3 - 36x^2 + 9x + 8 = 0$
29. $12x^3 - 52x^2 + 23x + 42 = 0$
30. $20x^3 - 90x^2 + 126x - 53 = 0$
31. $4x^3 - 60x^2 + 309x + 500 = 0.$

XXXIX.

Gleichungen des vierten Grades.

Die Gleichungen des vierten Grades, welche sich als quadratische Gleichungen lösen lassen, sind schon im 25. Abschnitt in großer Anzahl vorgekommen. Ihre Auflösung hat keine Schwierigkeit.

Gleichungen des vierten Grades, welche eine rationale Wurzel haben, lassen nach Ausscheidung dieser Wurzel, die nach dem 37. Abschnitt leicht aufzufinden ist, noch eine kubische Gleichung übrig. Diese hat man dann weiter nach dem vorigen Abschnitt zu lösen, um auch die drei andern Wurzeln der Gleichung des vierten Grades zu erhalten. — Hat die Gleichung des vierten Grades zwei rationale Wurzeln, so scheidet man diese aus, und es bleibt nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen übrig. — In beiden Fällen sind keine besonderen Betrachtungen nöthig; das im 37. und 38. Abschnitt Gesagte genügt vollständig zur Auflösung.

Die folgenden Gleichungen 1.—22. sind von der genannten Art. Sie haben mindestens entweder eine, oder zwei rationale Wurzeln.

Diese sind nach dem 37. Abschnitt zu ermitteln und darnach auch die übrigen Wurzeln aufzusuchen.

1. $x^4 - 3x^3 - 34x^2 + 18x + 168 = 0$
2. $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 24x - 72 = 0$
3. $x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x + 90 = 0$
4. $x^4 - 13x^2 + 48x - 60 = 0$
5. $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0$
6. $x^4 + 3x^3 - 52x - 60x + 288 = 0$
7. $x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 175x - 300 = 0$
8. $x^4 - 17x^3 + 95x^2 - 199x + 120 = 0$
9. $x^4 + 19x^3 + 123x^2 + 305x + 200 = 0$
10. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 19x - 10 = 0$
11. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 52x - 40 = 0$
12. $x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 13x + 6 = 0$
13. $x^4 - 17x^2 + x + 20 = 0$
14. $2x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 9x + 20 = 0$
15. $3x^4 - 8x^3 - 36x^2 + 25 = 0$
16. $6x^4 - x^3 - 8x^2 - 14x + 12 = 0$
17. $6x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 37x + 24 = 0$
18. $6x^4 - x^3 - 49x^2 + 55x - 50 = 0$
19. $10x^4 + 17x^3 - 16x^2 + 2x - 20 = 0$
20. $12x^4 + 5x^3 - 23x^2 - 5x + 6 = 0$
21. $26x^4 - 108x^3 + 323x^2 - 241x + 60 = 0$
22. $36x^4 - 72x^3 - 31x^2 + 67x + 30 = 0$

Um eine Gleichung des vierten Grades **allgemein** aufzulösen, muß man sie auf eine kubische Gleichung zurückführen. Mit Hülfe der Wurzeln dieser Gleichung, welche man die **Resolvente** der gegebenen Gleichung nennt, hat man dann die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu bestimmen.

Ist die Gleichung des vierten Grades

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \tag{1}$$

gegeben, so löst man die reducirte kubische Gleichung

$$4t^3 - (ae - 4bd + 3c^2)t + ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0 \tag{2}$$

nach t auf. Mittelst der Wurzeln dieser Gleichung, welche t_1, t_2 und t_3 heißen mögen, bestimmt man

$$N_1 = \sqrt{b^2 - ac + at_1}\quad N_2 = \sqrt{b^2 - ac + at_2}\quad N_3 = \sqrt{b^2 - ac + at_3} \tag{3}$$

Dann hat man als die gesuchten Wurzeln der gegebenen Gleichung des 4. Grades (1)

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a}(-b + N_1 + N_2 + N_3) \\
x_2 &= \frac{1}{a}(-b + N_1 - N_2 - N_3) \\
x_3 &= \frac{1}{a}(-b - N_1 + N_2 - N_3) \\
x_4 &= \frac{1}{a}(-b - N_1 - N_2 + N_3)
\end{aligned}
$$

Erster Fall. Die kubische Resolvente (2) hat drei reelle Wurzeln. Dann hat die Gleichung des 4. Grades entweder vier reelle Wurzeln, oder vier imaginäre, oder zwei imaginäre und zwei gleiche reelle. Da die t reell sind, so sind die N entweder reell oder rein imaginär, jenachdem der Radikand positiv oder negativ wird. Ein N muß immer reell sein. Sind alle drei N reell, so hat die Gleichung des 4. Grades, wie man aus (4) ersieht, vier reelle Wurzeln. Ist ein N rell und zwei N rein imaginär und ungleich, oder sind zwei N reell und ein N rein imaginär, so hat die Gleichung des 4. Grades vier imaginäre Wurzeln, wie man aus den Lösungen (4) ebenfalls leicht übersieht. Ist aber ein N reell uud sind zwei N rein imaginär und gleich, wo also die kubische Resolvente (2) unter den drei reellen Wurzeln zwei gleiche haben muß, so hat die Gleichung des 4. Grades zwei imaginäre Wurzeln und zwei gleiche reelle. — Die Rechnung hat in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten. Bei der kubischen Gleichung (2) wird, wenn nicht wenigstens eine Wurzel rational ist, die trigonometrische Lösung anzuwenden sein.

Zweiter Fall. Die kubische Resolvente hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Dann hat die Gleichung des 4. Grades zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Es ist bei der kubischen Gleichung, falls die eine Wurzel nicht rational ist, die Cardanische Lösung anzuwenden. Diese Wurzeln werden also die Form haben

$$t_1 = u + v,\ t_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{-3},\ t_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{-3}$$

Da ein N reell sein muß, so muß es nach dieser Bezeichnung N_1 sein. Dann müssen N_2 und N_3 von der Form sein

$$N_2 = \sqrt{A + B\sqrt{-3}} \quad N_3 = \sqrt{A - B\sqrt{-3}}$$

Hier haben die imaginären Größen unter der Wurzel ihr Unangenehmes. Es muß der imaginäre Theil vom reellen gesondert werden. Indem man die Summe der Quadrate und das Produkt von N_2 und N_3 bildet, erhält man aus der Combination dieser Größen

$$N_2 + N_3 = \sqrt{2(A + \sqrt{A^2 + 3B^2})}$$

$$N_2 - N_3 = \sqrt{2\,(A - \sqrt{A^2 + 3B^2})}$$

Bestimmt man jetzt den Winkel ϑ so, daß

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{B\sqrt{3}}{A}$$

wird, so hat man

$$N_2 + N_3 = 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\sqrt{\frac{A}{\cos\vartheta}}$$

$$N_2 + N_3 = 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\sqrt{-\frac{A}{\cos\vartheta}}$$

Ist A positiv, so wird $N_2 + N_3$ reell und $N_2 - N_3$ rein imaginär. Ist A negativ, so wird $N_2 + N_3$ rein imaginär und $N_2 - N_3$ reell. Um ϑ zu bestimmen, ist es genügend, in (5) für A nur den positiven Werth zu nehmen.

Da die N Quadratwurzeln sind, so können sie auch ebenso gut das entgegengesetzte Zeichen haben. Man muß untersuchen, ob die Bedingung $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$ erfüllt wird. Wird diese nicht erfüllt, so muß man ein N oder alle drei (zwei hat keinen Einfluß) mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen. Ist b in (1) gleich Null, so ist das Kriterium $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$ für die Zeichen der N bedeutungslos; es muß $(x_1 + x_2)\,x_3 x_4 + (x_3 + x_4)\,x_1 x_2 = -\frac{4\,d}{a}$ stimmen, wo für imaginäre Wurzeln x_1 und x_2, wie x_3 und x_4 als conjugirt anzusehen sind.

Um das oben Gesagte zu beweisen, zerlegt man die gegebene Gleichung des 4. Grades in die Differenz zweier Quadrate. Man multiplizirt die Gleichung (1) mit a und zerlegt

$$(7) \qquad a^2x^4 + 4abx^3 + 6acx^2 + 4adx + ae = 0 \text{ in}$$

$$(8) \qquad (ax^2 + 2bx + c + 2t)^2 - (2Nx + M)^2 = 0,$$

wo die Größen t, N und M vorläufig noch unbestimmt sind. Aus der Vergleichung der Koefficienten von (7) und (8) ergiebt sich

$$(9) \quad N = \sqrt{b^2 - a\,(c - t)} \qquad (10) \quad M = \sqrt{(c + 2t)^2 - ae}$$

$$(11) \quad MN = b\,(c + 2t) - ad$$

Die Gleichung für t wird demnach:

$$[b^2 - a\,(c - t)\,(c + 2t)^2 - ae] = [b\,(c + 2t) - ad]^2$$

Entwickelt man, so erhält man die oben in (2) angegebene kubische Gleichung. Sie erscheint in reducirter Form. — Ist t bestimmt, und somit auch N und M, wie aus (9) und (10) folgt, so läßt sich die linke Seite der Gleichung (8) in zwei Faktoren zerlegen:

$$(ax^2 + 2bx + c + 2t) - (2Nx + M) \text{ und}$$

$$(ax^2 + 2bx + c + 2t) + (2Nx + M)$$

Mithin zerfällt die gegebene Gleichung des 4. Grades in die zwei quadratischen

$$(12) \qquad ax^2 + 2(b - N)x + c + 2t - M = 0$$

$$(13) \qquad ax^2 + 2(b + N)x + c + 2t + M = 0$$

Sind x_1 und x_2 die Wurzeln von (12), und x_3 und x_4 die von (13), so hat man in Folge der Bedeutung der Koefficienten

$$(14) \quad x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}(b - N), \quad x_3 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N)$$

Da aber N drei Werthe hat, welche den drei Werthen von t entsprechen, so schließen die Gleichungen (14) drei Paare von Gleichungen ein:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}(b - N_1) \qquad x_3 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N_1)$$

$$x_1 + x_3 = -\frac{2}{a}(b - N_2) \qquad x_2 + x_4 = -\frac{2}{a}(b + N_2)$$

$$x_1 + x_4 = -\frac{2}{a}(b - N_3) \qquad x_2 + x_3 = -\frac{2}{a}(b + N_3)$$

Aus der Combination dieser 6 Gleichungen ergeben sich leicht die oben in (4) angegebenen Formeln für die Wurzeln x_1, x_2, x_3 und x_4.

Die Gleichung des 4. Grades kann 4 reelle, 2 reelle und 2 imaginäre, oder 4 imaginäre Wurzeln haben. In jedem dieser Fälle muß sich die linke Seite mindestens auf eine Art in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten zerlegen lassen. — Hat die Gleichung des 4. Grades 4 reelle Wurzeln, so muß sie sich auf dreifache Weise in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten zerlegen lassen. Es muß drei N und drei t, und folglich auch drei M geben, wie aus (11) folgt, durch welche die Zerlegung (12) und (13) bewerkstelligt werden kann. Die kubische Resolvente hat drei reelle Wurzeln, und ihnen entsprechend sind N_1, N_2 und N_3 ebenfalls reell. — Hat die Gleichung des 4. Grades 4 imaginäre Wurzeln, oder 2 reelle und 2 imaginäre, so ist nur eine Zerlegung derselben in zwei quadratische mit reellen Koefficienten denkbar, diese aber muß immer möglich sein und kann nur wegen (12) und (13) durch ein reelles t und ein dem entsprechendes relles N und M bewirkt werden. — Hat daher die kubische Resolvente drei reelle Wurzeln, so muß unter diesen immer eine sein, welche ein reelles N und wegen (11) auch ein reelles M liefert. Hat die kubische Resolvente nur eine reelle Wurzel, so muß dieser reellen Wurzel auch ein reelles N entsprechen; denn nur so kann eine Zerlegung in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koefficienten entstehen.

Hat man eine reducirte Gleichung des 4. Grades, für welche also $b = 0$ ist, so wird die kubische Resolvente

$$(c - t)(ae - (c + 2t)^2) = ad^2 \text{ und}$$

$$N = \sqrt{a(t - c)}$$

Ist der Koefficient von x^3 durch 4 theilbar und die Koefficienten der Gleichung klein, so thut man meistens ebenso gut, die gegebene Gleichung in eine reducirte zu verwandeln und diese zunächst zu lösen.

Die folgenden Gleichungen des 4. Grades 1.—38. lassen mindestens eine rationale Zerlegung in zwei quadratische Faktoren zu. Die kubische Resolvente hat daher wenigstens eine rationale Wurzel, läßt sich also auf einfache Weise lösen; die Darstellung der N geschieht ohne besondere Hülfsmittel, und die Auffindung der Wurzeln der gegebenen Gleichung verursacht daher keine erheblichen Schwierigkeiten. Wenn sich auch manche von den Gleichungen ohne die oben erörterte Methode lösen lassen (wenn sie eine rationale Wurzel haben), so soll dieselbe doch der Uebung wegen bei allen Gleichungen angewendet werden.

1. $x^4 - 4x^3 + 20x - 25 = 0$
2. $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$
3. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x - 15 = 0$
4. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0$
5. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$
6. $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + 14 = 0$
7. $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 88x + 48 = 0$
8. $x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 24x - 21 = 0$
9. $x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 40x - 32 = 0$
10. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$
11. $x^4 - 16x^3 + 70x^2 - 60x - 88 = 0$
12. $x^4 - 37x^2 - 24x + 180 = 0$
13. $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 18 = 0$
14. $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 34x + 20 = 0$
15. $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 20x + 12 = 0$
16. $x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 50x + 48 = 0$
17. $x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 42x + 10 = 0$
18. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x + 40 = 0$
19. $x^4 + x^3 - 14x^2 - 2x + 24 = 0$
20. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30 = 0$
21. $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$
22. $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 6x + 45 = 0$
23. $x^4 + 11x^3 + 35x^2 + 13x - 60 = 0$
24. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30 = 0$
25. $x^4 - 11x^3 + 47x^2 - 97x + 84 = 0$

26. $x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 153x - 140 = 0$
27. $x^4 - 13x^3 + 11x^2 + 337x - 840 = 0$
28. $4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 8x + 1 = 0$
29. $4x^4 - 12x^3 + 31x^2 - 60x + 55 = 0$
30. $4x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 5x - 7 = 0$
31. $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0$
32. $16x^4 - 48x^3 + 80x^2 - 60x + 27 = 0$
33. $16x^4 - 80x^3 + 136x^2 - 108x + 45 = 0$
34. $16x^4 - 32x^3 - 32x^2 + 40x + 15 = 0$
35. $16x^4 - 96x^3 + 184x^2 - 152x + 45 = 0$
36. $36x^4 - 72x^3 + 23x^2 + 8x - 3 = 0$
37. $36x^4 - 36x^3 - 73x^2 + 81x - 18 = 0$
38. $36x^4 - 348x^3 + 1231x^2 - 1886x + 1058 = 0$

Die folgenden Gleichungen lassen keine rationale Zerlegung in quadratische Faktoren zu, liefern mithin eine kubische Resolvente, welche keine rationale Wurzeln hat. Die kubische Gleichung muß nach der Cardanischen Formel oder trigonometrisch gelöst werden. Die Darstellung der N ist dann in der oben angegebenen Weise zu beschaffen.

1. $x^4 - 4x^3 + 12 = 0$
2. $x^4 - 24x + 37 = 0$
3. $3x^4 - 5x^3 = 31$
4. $4x^4 + 7x + 100 = 0$
5. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8 = 0$
6. $x^4 - 8x^3 + 4x - 7 = 0$
7. $x^4 - 12x^2 - 16x + 41 = 0$
8. $3x^4 - 2x^3 - 7x + 20 = 0$
9. $2x^4 = 7x^3 + 5x^2 + 30$
10. $5x^4 = 3x^2 - 14x - 100$
11. $7x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 4x + 37 = 0$
12. $3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 11 = 0$
13. $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 21 = 0$
14. $5x^4 - 7x^3 - 30x^2 + 8x + 28 = 0$
15. $7x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 5x - 16 = 0$
16. $11x^4 + 7x^3 - 44x^2 - 8x + 23 = 0$
17. $8x^4 - 62x^3 + 162x^2 - 172x + 63 = 0$