Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XXXVII. Von den Gleichungen höheren Grades im Allgemeinen

urn:nbn:de:bsz:31-269430

Wenn man in einem von x abhängigen Ausdruck $x + h$ für x substituirt, nach Potenzen von h entwickelt, den Koefficienten von $h = 0$ setzt, aus der so erhaltenen Gleichung den Werth von x bestimmt, so wird für diesen der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum. Was von Beiden eintritt, übersieht man in den meisten Fällen leicht*) — Gieb hiernach an, für welche Werthe von x die folgenden Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum werden, was von Beiden eintritt, und wie groß das Maximum oder Minimum des gegebenen Ausdruckes für den gefundenen Werth von x wird.

132. $x^4 - 108x + 244$
133. $x^6 - 6a^5x + 4a^6$
134. $(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)$
135. $(a - x^3)(b - x^3)$
136. $5 + 12x - x^3$
137. $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
138. $\frac{4}{x} + \frac{x}{4}$
139. $\frac{7-x}{x-3} + \frac{x-3}{7-x}$
140. $x + \sqrt{1-x}$
141. $x - \sqrt{3x-2}$

XXXVII.

Von den Gleichungen höheren Grades im Allgemeinen.

1. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 3. Grades?
2. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 4. Grades?
3. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des n. Grades?
4. Wonach ist der Grad einer Gleichung zu beurtheilen?
5. Schreibe sechs möglichst verschiedene Gleichungen des 3. Grades auf.
6. Deßgleichen acht möglichst verschiedene Gleichungen des 4. Grades.
7. Wie nennt man die Werthe der Unbekannten, welche der Gleichung genügen?
8. Welchen Faktor muß die linke Seite einer geordneten auf 0 gebrachten Gleichung haben, wenn m eine Wurzel der Gleichung ist? (Beweis!)
9. Wie muß demnach eine Gleichung in ihrer einfachsten Form heißen, welche die Wurzeln m, n und p hat?
10. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben?

1) 1, 2, 3
2) 1, 1, -2
3) 2, 3, -5
4) 3, -4, -7
5) 7, $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$
6) 2, $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$

---

*) Will man das durch Rechnung darthun, so muß man auch den Koefficienten von h^2 suchen. Ist dieser für den gefundenen Werth von x negativ, so wird der Ausdruck ein Maximum, ist er positiv, ein Minimum. Verschwindet der Koefficient von h^2 ebenfalls, so muß auch der von h^3 verschwinden und es kommt auf das Zeichen des Koefficienten von h^4 an.

7) $-8,\ 0{,}36,\ 0{,}75$ 8) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -0{,}75$
9) $7,\ -3\frac{1}{2},\ -4\frac{1}{4}$ 10) $3\frac{3}{4},\ -\frac{2}{3},\ -1{,}5$
11) $3,\ 1+i,\ 1-i$ 12) $-5,\ 2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$
13) $3,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 14) $-1,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

11. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:
1) $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 2) $1,\ 2,\ -1,\ -2$
3) $-1,\ +2,\ +3,\ -4$ 4) $\pm 2,\ \pm\sqrt{3}$
5) $\sqrt{\pm 5},\ \pm i\sqrt{7}$ 6) $1,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$
7) $2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ 8) $2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3},\ -1\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{3}$
9) $-0{,}2,\ -0{,}5,\ 2{,}2,\ 3{,}3$ 10) $3\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1{,}8,\ 2{,}5$
11) $-4,\ -3,\ 3\pm\sqrt{5}$ 12) $1\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-1})$
13) $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}),\ \pm\sqrt{5}$ 14) $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

12. Von welchem Grade muß eine Gleichung sein, welche drei Wurzeln hat? — Von welchem Grade eine solche, welche vier Wurzeln hat? — Deßgleichen, welche n Wurzeln hat?

13. Welche Beziehung haben die Koefficienten der auf 0 gebrachten geordneten kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zu den Wurzeln dieser Gleichung?

14. Wie gestaltet sich diese Beziehung für die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

15. Welche Beziehung haben die Koefficienten der auf 0 gebrachten geordneten Gleichung des 4. Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zu den Wurzeln dieser Gleichung?

16. Untersuche die Bedeutung der Koefficienten für die Gleichung des 5. Grades $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

17. Wie läßt sich der Grad einer Gleichung vermindern, wenn man eine Wurzel derselben weiß?

18. Wie viel Wurzeln muß demnach eine kubische Gleichung haben, vorausgesetzt, daß sie überhaupt eine hat? — Wie viele eine Gleichung des 4. Grades? — Wie viele eine Gleichung des n. Grades?

19. Von der Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ ist $x = 2$ eine Wurzel, von $2x^3 = 5x^2 + 9$ ebenso $x = 3$; welche Gleichungen hat man weiter zu lösen, um auch die andern Wurzeln zu finden?

20. Von der Gleichung $x^4 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ ist $x = 1$ eine Wurzel, von der Gleichung $3x^4 - x^3 = 5x^2 - x - 2$ ebenso $x = -1$; welche Gleichungen hat man demnach weiter zu lösen, wenn man auch die andern Wurzeln finden will?

21. Wenn $x = \alpha$ der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ genügt, wie findet man dann sehr einfach mit Hülfe der Bedeutung der Koefficienten die quadratische Gleichung $x^2 + mx + n = 0$, welche

man weiter zu lösen hat, um auch die andern Wurzeln der kubischen Gleichung zu erhalten?

22. Wenn $x = \alpha$ der kubischen Gleichung $x^3 = px + q$ genügt, so bleibt nach Ausscheidung der bekannten Wurzel α noch die Gleichung $x^2 + \alpha x + \frac{q}{\alpha} = 0$ oder $x^2 + \alpha x + \alpha^2 - p = 0$ zu lösen übrig. Dann müssen die Wurzeln dieser Gleichung und somit die beiden andern Wurzeln der kubischen Gleichung sein:

$$\tfrac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{p - \frac{3q}{\alpha}}\right) \text{ und } \tfrac{1}{2}\left(-\alpha - \sqrt{p - \frac{3q}{\alpha}}\right)$$

Wie läßt sich das beweisen?

23. Wie bringt man heraus, zwischen welchen Grenzen die reellen Wurzeln einer auf 0 gebrachten Gleichung liegen?

24. Gieb in ganzen Zahlen die engsten Grenzen an, zwischen welchen die reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x + 7 = 0$ liegen.

25. Dasselbe für die Gleichungen:

1) $x^3 - 2x^2 - 10 = 0$ 2) $x^3 = 17x - 100$

3) $x^3 - 9x + 5 = 0$ 4) $2x^3 - 3x^2 = 7x - 5$

5) $5x^3 - 7x^2 + 3x + 9 = 0$

26. Dasselbe für die Gleichungen des 4. Grades:

1) $x^4 - 19x + 11 = 0$ 2) $x^4 - 3x^2 = 9x + 31$

3) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 20x - 47 = 0$

4) $x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 210x + 241 = 0$

5) $x^4 - 7x^3 + 33x^2 - 55x + 80 = 0$

27. Weßhalb muß eine kubische Gleichung, wie überhaupt jede Gleichung von einem ungeraden Grade immer wenigstens eine reelle Wurzel haben?

28. Welches Zeichen muß eine reelle Wurzel der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ haben, wenn c positiv ist; welches, wenn c negativ ist?

29. Weßhalb muß eine Gleichung des 4. Grades, wie überhaupt jede Gleichung von einem geraden Grade, wenn das letzte Glied negativ ist, immer wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, und zwar eine positive und eine negative?

30. Weßhalb müssen in einer Gleichung mit reellen Koefficienten die imaginären Wurzeln immer paarweise vorkommen; oder weßhalb muß, wenn $x = p + qi$ einer Gleichung genügt, derselben auch $x = p - qi$ genügen? Weise dies speciell an den Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ durch Rechnung nach.

31. Wie viel imaginäre Wurzeln kann demnach eine Gleichung des 3., des 4., des 5. Grades haben?

32. Wie viel reelle Wurzeln kann demnach eine kubische Gleichung haben; wie viel eine Gleichung des 4. Grades, wie viel eine des 5. Grades?

33. Wie verwandelt man eine Gleichung, in welcher das 1. Glied einen Koefficienten hat, in eine solche, in welcher das erste Glied frei ist von einem Koefficienten, ohne jedoch auf Brüche zu kommen? Führe dies für die Gleichung $ax^3 + bx = c$ aus.

34. Transformire die folgenden Gleichungen so, daß das erste Glied keinen Koefficienten hat:

1) $2x^3 - 7x = 5$ 2) $9x^3 + 6x^2 = 25$

3) $8x^3 - 6x^2 - 7x + 25 = 0$ 4) $18x^3 - 5x = 29$

35. Eine kubische Gleichung, in welcher kein Glied mit x^2 vorkommt, nennt man eine reducirte kubische Gleichung. Um die vollständige kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in eine reducirte zu verwandeln, hat man $x = y - \frac{1}{3}a$ zu setzen. Will man jedoch die Brüche vermeiden, so muß man, wenn a nicht durch 3 theilbar ist $x = \frac{y-a}{3}$ setzen. Ebenso hat man für $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zu setzen $x = \frac{1}{a}(y - \frac{1}{3}b)$ oder $x = \frac{y-b}{3a}$, jenachdem b durch 3 theilbar ist oder nicht. Wie heißen demnach die reducirten Gleichungen von:

1) $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ 2) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

3) $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ 4) $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$

36. Verwandle ebenso folgende Gleichungen in reducirte kubische Gleichungen:

1) $x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0$ 2) $2x^3 - 12x^2 + 8x - 19 = 0$

3) $x^3 + 5x^2 - 3x - 16 = 0$ 4) $5x^3 - 7x^2 + 3x - 8 = 0$

5) $7x^3 + 3x^2 + 10 = 0$*) 6) $19x^3 - 10x^2 + 8 = 0$

36_1. Um eine vollständige biquadratische Gleichung in eine reducirte zu verwandeln, verfährt man ganz so, wie in 35. angegeben; nur statt der 3 ist eine 4 zu setzen. Heißen die beiden ersten Glieder $ax^4 + 2bx^3$, so genügt $x = \frac{y-b}{2a}$. Verwandle hiernach die biquadratischen Gleichungen XXXIX zweite Reihe Nr. 1—4., letzte Reihe 11—13. in reducirte Gleichungen. Koefficienten beim ersten Gliede und Brüche sollen nicht vorkommen.

---

*) Um eine Gleichung von der Form $ax^3 + bx^2 + c = 0$ in eine reducirte zu verwandeln, kann man einfach $x = \frac{1}{y}$ setzen, oder, wenn die höchste Potenz keinen Koefficienten haben soll, $x = \frac{c}{y}$. Man kommt aber auch mit $x = \frac{y-b}{3a}$ zum Ziele. Diese Umformung ist dann zweckmäßiger, wenn die Gleichung eine reelle irrationale Wurzel hat und außer dieser auch noch die imaginären gesucht werden sollen; jene Umformung ist zweckmäßig, wenn die Gleichung drei reelle irrationale Wurzeln hat.

37. Verwandle die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 5 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um 1 größer sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

38. Verwandle die Gleichung $x^3 - 15x^2 + 7x + 125 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um 5 kleiner sind.

39. Verwandle die Gleichung $x^3 - 3{,}5x^2 + 7{,}5x - 1{,}25 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln doppelt so groß sind.

40. Transformire die Gleichung $x^3 - 12x^2 - 18x + 135 = 0$ in eine andere, deren Wurzeln dreimal so klein sind.

41. Transformire die Gleichung $x^3 - ax^2 - bx + c = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

42. Transformire die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in eine andere, deren Wurzeln die Quadratwurzeln der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

43. Wenn eine geordnete Gleichung, deren erstes Glied keinen Koefficienten hat und in welcher die Koefficienten der andern Glieder ganze Zahlen sind, eine rationale Wurzel hat, wie findet man diese? (Grund!)

44. Wenn in einer geordneten Gleichung kein Glied ohne x vorkommt, welcher Werth von x genügt dann immer der Gleichung, oder welche Wurzel muß dann die Gleichung immer haben?

45. Folgende Gleichungen haben mindestens eine rationale Wurzel. Suche dieselbe auf und gieb die Gleichung an, welche nach Ausscheidung der gefundenen Wurzel noch zu lösen bleibt.

1) $x^3 - 5x = 12$	2) $x^3 - 7x^2 + 50 = 0$
3) $x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0$	4) $x^4 - 3x^3 = 5x - 18$
5) $x^4 - 13x^2 - 7x = 20$	6) $x^4 - 19x = 3x^3 + 7x^2$

46. Folgende Gleichungen haben mindestens eine rationale Wurzel. Schaffe den Koefficienten des ersten Gliedes fort, ohne jedoch auf Brüche zu kommen, suche eine rationale Wurzel der neuen Gleichung und gieb darnach an, wie die entsprechende Wurzel der ursprünglichen Gleichung heißen muß, und welche Gleichung nach Ausscheidung der gefundenen Wurzel noch weiter zu lösen ist.

1) $3x^3 - 11x^2 + 21x - 10 = 0$	2) $4x^3 - 24x^2 + 37x - 5 = 0$
3) $18x^3 - 57x^2 + 38x - 7 = 0$	4) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 11x - 4 = 0$

47. Wenn eine geordnete Gleichung, deren erstes Glied keinen Koefficienten hat und deren Koefficienten sonst lauter ganze Zahlen sind, nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, so kann sie es auch nicht in Brüchen sein. Hat sie reelle Wurzeln, so sind diese weder ganze Zahlen noch Brüche, sondern irrational. Beweise das!

48. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn dieselbe zwei Wurzeln hat, deren Summe $= 0$ ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

49. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - 3ax^2 + 3bx - c = 0$, wenn dieselbe zwei gleiche Wurzeln hat, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

50. Welche Wurzeln hat die kubische Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn man weiß, daß eine Wurzel gleich der Summe der beiden andern ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

51. Wie heißen die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wenn zwei Wurzeln reziprok sind, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

52. Wie heißen die Wurzeln der Gleichung des 4ten Grades $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$, wenn die Summe zweier Wurzeln gleich der Summe der beiden andern ist, und welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Koefficienten der Gleichung genügen?

53. Welchen Bedingungen müssen die Koefficienten der Gleichung des 4. Grades $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$ genügen, wenn zwei Wurzeln die reziproken Werthe der beiden andern sind, und wie heißen in diesem Falle die Wurzeln?

XXXVIII.

Kubische Gleichungen.

Reine kubische Gleichungen, in welchen die Unbekannte nur in der dritten Potenz vorkommt, welche also von der Form $x^3 = a$ sind, kubische Gleichungen mit einer ausgezeichneten Wurzel, insonderheit solche mit einer Wurzel 0, und die symmetrischen kubischen Gleichungen von der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ sind schon oben im 25. Abschnitt behandelt worden. Die Auflösung dieser Arten von kubischen Gleichungen erforderte keine besonderen Hülfsmittel.

Auch die kubischen Gleichungen mit einer rationalen Wurzel lassen sich nach dem vorigen Abschnitt leicht lösen. Die folgenden Gleichungen haben wenigstens eine rationale Wurzel. Es sollen alle Wurzeln derselben angegeben werden.

1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

3) $x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0$

4) $x^3 + 2x^2 - 23x + 6 = 0$

5) $x^3 - 4x^2 - 15x - 42 = 0$

6) $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$

7) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$