Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XXXVI. Der binomische Satz

XXXVI.

Der binomische Satz.

1. Was versteht man unter einem Binom? was unter einem Polynom?

2. Schreibe 10 möglichst verschiedene Binome auf.

3. Warum ist die Betrachtung eines Binoms von besonderer Wichtigkeit, wichtiger als die eines Trinoms oder eines Polynoms?

4. Sind sonst schon Operationen mit Binomen vorgekommen und welche? Suche Beispiele im Buche auf, wo Binome vorkommen.

5. Was für einen Satz versteht man unter dem binomischen Satz?

6. Wie weit sind die Formeln für den binomischen Satz schon dagewesen?

7. Entwickele durch Multipl. die Produkte $(x+a)(x+b)(x+c)$ und $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, und gieb das Gesetz an, wie die Koeffizienten der Potenzen von x gebildet sind.

8. Gieb darnach ohne Rechnung die Entwickelung des Produkts $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$ an.

9. Wie werden die Entwickelungen von $(x-a)(x-b)(x-c)$ und $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ heißen?

10. Wie heißen sie von $(x+a)(x-b)(x-c)$ und von $(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$?

11. Entwickele nach dem aufgefundenen Gesetze direkt ohne Multiplikation $(x+1)(x+2)(x+3)$, $(x+2)(x+4)(x+6)$, $(x-1)(x-5)(x-9)$.

12. Entwickele ebenso $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ und $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

13. Führe ohne Rechnung aus $(x-1)(x-2)(x+3)$ und $(x+1)(x+4)(x-5)$.

14. Was giebt deßgleichen $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$ und $(x+1)(x-3)(x-5)(x+8)$?

15. Entwickele durch Multiplikation $(ax+1)(bx+1)(cx+1)$ und $(ax+1)(bx+1)(cx+1)(dx+1)$, und gieb das Gesetz für die Bildung der Koeffizienten an.

16. Entwickele darnach ohne Multipl. $(3x+1)(2x+1)(5x+1)$ und $(7x+1)(4x-1)(3x-1)$.

17. Was wird aus d. Prod. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ und seiner Entwickelung, wenn $a=b=c=d$ wird?

18. Was aus $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)$, wenn $a=b=c$ u. s. w. ist?

19. Der binomische Satz heißt, wenn n eine ganze Zahl ist,

$$(a+b)^n$$

$$=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\dots b^n$$

Wie läßt sich dieser Satz nach dem Obigen beweisen?

20. Welches Gesetz findet statt für die Exponenten der Potenzen von a und b in der Entwickelung von $(a+b)^n$ hinsichtlich ihres Abnehmens und Wachsens, und wie groß muß ihre Summe in jedem Gliede stets sein?

21. Wenn daher $N a^p b^q$ ein Glied der Entwickelung von $(a+b)^n$ ist, welcher Bedingung müssen p und q dann stets genügen, und wie groß muß q sein, wenn z. B. $p = 7$ ist?

22. Wie viel Glieder hat die Entwickelung von $(a+b)^{20}$, von $(a+b)^{35}$, von $(a+b)^{2n-1}$?

23. Entwickele nach dem binomischen Satze $(x+a)^6$, $(y+b)^8$, $(p+q)^{10}$.

24. Deßgleichen $(r+t)^5$, $(x+y)^7$, $(u+v)^9$.

25. Wie heißt die Entwickelung für $(a-b)^n$, und wie unterscheidet sich diese von derjenigen für $(a+b)^n$?

26. Was ist demnach $(a-x)^5$, was $(t-x)^7$?

27. Was ist $(1+x)^6$, $(1-x)^7$, $(1+t)^8$, $(t-1)^9$?

28. Was ist $(a+x)^6 + (a-x)^6$, $(1+t)^6 - (1-t)^6$?

29. Welche Glieder müssen in der Summe und Differenz von $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ bei der Entwickelung fortfallen und welche sich verdoppeln?

30. Schreibe hiernach die Summen $(1+x)^7 + (1-x)^7$, $(x+1)^7 + (x-1)^7$, $(1+x)^8 + (1-x)^8$, $(x+1)^8 + (x-1)^8$ hin, ohne die ganze Entwickelung zu machen.

31. Deßgleichen die Differenzen $(1+x)^7 - (1-x)^7$, $(x+1)^9 - (x-1)^9$, $(1+x)^8 - (1-x)^8$, $(x+1)^{10} - (x-1)^{10}$.

32. Wie heißt das 7. Glied der Entwickelung von $(a+b)^{10}$, das 11. Glied von $(x-y)^{15}$, das 8. Glied von $(p-q)^{20}$?

33. Was versteht man unter Binominalkoefficienten? Wie heißen der 4. und der 7. Binominalkoefficient (1 nicht gerechnet) in der Entwickelung von $(a+b)^n$?

34. Wie heißt der 6. und wie der 10. Binominalkoefficient in der 14. Potenz eines Binoms? wie der 8. und der 18. Koefficient der 20. Potenz?

35. Wie heißt der r. Koefficient in den Entwickelungen von $(a+b)^n$, $(a-b)^n$, $(a-b)^{2r}$, $(a-b)^{2r-1}$?

36. Wie heißen die Koefficienten von $a^4 b^5$ und von $a^2 b^7$ in der Entwickelung von $(a+b)^9$?

37. Wie die von $a^{10} b^5$ und $a^3 b^{12}$ für $(a-b)^{15}$?

38. Wie die von $a^7 b^3$, $a^5 b^5$ und $a^2 b^8$ für $(a+b)^{10}$? wie die von $x^5 y^6$ und $x^6 y^5$ für $(x-y)^{11}$?

39. Die Koefficienten der Entwickelung von $(a+b)^n$ müssen nach rechts und links symmetrisch sein. Weßhalb?

40. Welche Glieder haben in der Entwickelung von $(a+b)^n$ dieselben Koefficienten wie das 5., das 7. und das r. Glied, und wie heißen diese Glieder?

41. Welche Glieder haben in der 31. Potenz eines Binoms dieselben Koefficienten wie das 7., das 12., das 27. Glied und wie heißen sie?

42. Welche Potenzenprodukte haben in der Entwickelung von $(a+b)^9$ gleiche Koefficienten mit a^2b^7 und a^4b^5? welche in der Entwickelung von $(a+b)^{16}$ mit a^5b^{11}, a^7b^9 und a^8b^8, und wie heißen die zugehörigen Koefficienten?

43. Welche Potenz von x hat in der Entwickelung von $(1+x)^{12}$ mit x^4 und welche mit x^6 gleichen Koefficienten? welche in $(1+x)^{17}$ mit x^5 und mit x^8, und wie heißen die zugehörigen Koefficienten?

44. Wenn A der 9. Binomialkoefficient der Entwickelung von $(a+b)^n$ ist, wie heißt dann der 10. Koefficient?

45. Wenn A, B, C, D bezüglich der 7te, der 13te, der 20ste, der 29ste Koefficient der 16ten, der 20sten, der 50sten, der 58sten Potenz eines Binoms sind, wie heißt dann in jedem Falle der nächstfolgende Koefficient?

46. Welches Gesetz gilt für die Koefficienten in der Entwickelung der nten Potenz eines Binoms, so lange n eine positive ganze Zahl?

47. Bei einer ungeraden Potenz des Binoms kommen alle Koefficienten paarweise vor, bei einer geraden Potenz der mittlere nur einmal. Weßhalb?

48. Die wievielten Koefficienten sind die beiden größten in den Entwickelungen von $(a+b)^9$ und $(a+b)^{13}$, und wie heißen dieselben?

49. Die wievielten Koefficienten sind in den Entwickelungen von $(a+b)^{10}$ und $(a+b)^{14}$ die größten, und wie heißen dieselben?

50. Die wievielten Koefficienten sind die mittleren in den Entwickelungen von $(a+b)^{2n-1}$, $(a+b)^{2n+1}$, $(a+b)^{2n}$ und $(a+b)^{2n-2}$, und wie heißen dieselben?

51. Wenn n_1, n_2, n_3 u. s. w. die Binomialkoefficienten für die nte Potenz eines Binoms sind, so ist immer bei einer ähnlichen Bezeichnung für die $(n+1)$te Potenz: $n_r + n_{r-1} = (n+1)_r$. Wie heißt dieser Satz in Worten, und wie wird er bewiesen?

52. Wie groß ist demnach die Summe des 7. und 8. Binomialkoefficienten der 13. Potenz und wie groß ist die des 5. und 6. der 16. Potenz?

53. Wie groß ist die Summe aller Koefficienten in den Entwickelungen von $(a+b)^7$, $(a+b)^{10}$, $(a+b)^n$?

54. Deßgleichen von $(a-b)^8$, $(a-b)^{11}$, $(a-b)^n$?

54_1. Was folgt ans 53. und 54. für die Summe der geraden und die der ungeraden Binomialkoefficienten irgend einer Potenz, und wie groß ist darnach die Summe aller geraden und die aller ungeraden Combinationen für n Elemente?

55. Entwickele $(x-2y)^7$, $(3x+y)^8$. $(2x+3y)^5$, $(5-2t)^6$.

56. Deßgleichen $(1+x^2)^6$, $(1-x^3)^7$, $(1+x^2)^5$, $(x^2-y^3)^6$

57. Deßgleichen $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^5$, $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)^6$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x\right)^7$,

58. Deßgleichen $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$, $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^7$, $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{2c}\right)^6$.

59. Wie heißt das 7. Glied in der Entwickelung von $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$, das 10. Glied in der von $\left(\frac{m}{2n} - \frac{2x}{m}\right)^{15}$?

60. Wie heißt das 5. Glied in der Entwickelung von $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{2a}{x^3}\right)^9$, wie das 9. Glied in der Entwickelung von $\left(\frac{2a^2}{3x} - \frac{3x^2}{2a}\right)^{14}$, und welche Glieder haben in jedem Falle denselben Koefficienten, wie die verlangten und wie heißen sie?

61. Wie heißt der Koefficient von x^4 in der Entwickelung von $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$, die Glieder mit x und x^{16} in $\left(\frac{a}{2x^2} - \frac{2x^3}{a}\right)^{12}$, das Glied mit x in $\left(\frac{x}{2m} - \frac{2a}{x}\right)^{13}$?

62. Wie heißt das Glied mit a^{-2} in $\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a^2}\right)^7$, das Glied mit x^{-5} in $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x^3}\right)^{11}$?

Entwickele und berechne (auf 6 Decimalstellen) folgende Ausdrücke mit Hülfe des binomischen Satzes:

63. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^6$, $\quad (1 + \sqrt{x})^7 - (1 - \sqrt{x})^7$
64. $(a + bi)^5 + (a - bi)^5$, $\quad (a + bi)^6 - (a - bi)^6$
65. $(1 + i)^8 + (1 - i)^8$, $\quad (1 + i)^9 + (1 - i)^9$
66. $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$, $\quad (1 + i)^{11} - (1 - i)^{11}$
67. $(3 + i\sqrt{5})^7 + (3 - i\sqrt{5})^7$, $\quad (3 + i\sqrt{5})^7 - (3 - i\sqrt{5})^7$
68. $(1 + i\sqrt{3})^9 + (1 - i\sqrt{3})^9$, $\quad (1 + i\sqrt{3})^9 - (1 - i\sqrt{3})^9$
69. $(2 + 3i)^6 + (2 - 3i)^6$, $\quad (2i + 3)^6 + (2 + 3i)^6$
70. $(3 + 2i)^7 + (3 - 2i)^7$, $\quad (3 + 2i)^7 - (3 - 2i)^7$
71. $(4 + 3i)^8 + (4 - 3i)^8$, $\quad (4 + 3i)^8 - (4 - 3i)^8$
72. $1{,}1^{10}$ $\quad 1{,}02^{20}$ $\quad 1{,}003^{22}$ $\quad 1{,}0007^{27}$
73. $0{,}9^9$ $\quad 0{,}98^{15}$ $\quad 0{,}997^{24}$ $\quad 0{,}9995^{30}$
74. $\left(\frac{91}{90}\right)^{10}$ $\quad \left(\frac{79}{80}\right)^{11}$ $\quad \left(\frac{51}{50}\right)^{12}$ $\quad \left(\frac{29}{30}\right)^{13}$
75. $\left(\frac{48}{47}\right)^6$ $\quad \left(\frac{83}{84}\right)^7$ $\quad \left(\frac{565}{563}\right)^8$ $\quad \left(\frac{872}{875}\right)^9$

---

76. Beweise, daß der binomische Satz auch für $(1 + x)^0$ gilt.

77. Deßgleichen für $(1 + x)^{-1}$ und $(1 + x)^{-2}$.

78. Wie unterscheiden sich diese Entwickelungen wesentlich von den vorhergehenden?

79. Wie beweist man allgemein, daß der binomische Satz auch für ganze negative Exponenten anwendbar ist?

80. Wie gestaltet sich der binomische Satz in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$, und wie in der von $(a-b)^{-n}$?

81. Welches Gesetz gilt hier für die Koefficienten hinsichtlich ihrer Größe und ihrer Wiederholung?

82. Was haben die Koefficienten in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ zu bedeuten und wie ist diese Bedeutung zu erklären?

83. Welches Gesetz gilt auch in der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ für die Exponenten der Potenzen von a und b?

84. Was muß bei der Entwickelung von $(a+b)^{-n}$ vorausgesetzt werden, wenn die Entwickelung Anwendung finden soll? Gieb die Bedingung für die Convergenz an.

85. Entwickele $(a+b)^{-3}$, $(a-b)^{-5}$, $(1+x)^{-6}$, $(1+x^2)^{-4}$.

86. Deßgleichen $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^{-7}$, $\left(\frac{3a^2}{x}-\frac{x^2}{3}\right)^{-8}$.

87. Wie heißt das 5. Glied der Entwickelung von $\left(\frac{2a^2}{b}-\frac{x}{6a^2}\right)^{-3}$, das 6. Glied von $\left(\frac{2x^2}{3y}-\frac{3y^2}{2x}\right)^{-4}$?

88. Wie heißt das r. Glied in der Entwickelung von $(a-b)^{-2r}$, von $(a+b)^{1-2r}$, von $(a-b)^{2-2r}$?

89. Wie heißt der 4. und wie der 7. Koefficient in der Entwickelung von $(a-b)^{-5}$?

90. Wie heißt der 6. Koefficient in der Entwickelung von $(a-b)^{5-n}$?

91. Wie heißt der r. Koefficient in der Entwickelung von $(a+b)^{r-n}$?

92. Wie heißt in der Entwickelung von $(a+b)^{7-n}$ der Faktor von $a^{-n}b^7$? wie der von x^{20} in $\left(\frac{2a^2}{x}-\frac{x^2}{2a}\right)^{-5}$?

---

93. Wenn p_1, p_2, p_3 u. s. w. die Binomialkoefficienten der p. Potenz, q_1, q_2, q_3 u. s. w. die der q. Potenz, $(p+q)_1$, $(p+q)_2$, $(p+q)_3$ u. s. w. die der $(p+q)$ten Potenz sind, so ist, was auch p und q für Zahlen sein mögen, immer

$$p_2 + p_1 q_1 + q_2 = (p+q)_2$$
$$p_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_3 = (p+q)_3$$
$$p_4 + p_3 q_1 + p_2 q_2 + p_1 q_3 + q_4 = (p+q)_4.$$

Beweise das.

94. Beweise, daß allgemein für jedes p und q immer sein muß:

$$p_r + p_{r-1} q + p_{r-2} q_2 + p_{r-3} q_3 + \ldots + q_r = (p+q)_r$$

Dies geschieht durch den Schluß von r auf r + 1. Man setzt in der Reihe für $(p+q)_r$ erst $p-1$ statt p, dann $q-1$ statt q, multiplicirt die so erhaltenen Reihen bezüglich mit p und mit q, addirt sie und dividirt ihre Summe durch $r+1$.

95. Beweise hieraus: Das Produkt zweier Binomialreihen für die Exponenten p und q giebt stets wieder eine Binomialreihe für den Exponenten $p+q$.

96. Wie folgt daraus:* Die n. Potenz einer Binomialreihe für den Exponenten p giebt eine Binomialreihe für den Exponenten np?

97. Wie folgt hieraus der allgemeine Beweis des binomischen Satzes auch für Bruchexponenten?

Entwickele und berechne (6 Decimalen) folgende Ausdrücke mit Hülfe des binomischen Satzes:

98.	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1-x}$	$\sqrt{a^2+1}$	$\sqrt{x^2+y^2}$
99.	$\sqrt[3]{1+x}$	$\sqrt[3]{1-x}$	$\sqrt[3]{a^3+1}$	$\sqrt[3]{a^3+b^3}$
100.	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$
101.	$\sqrt{1{,}0001}$	$\sqrt{1{,}001}$	$\sqrt{1{,}01}$	$\sqrt{1{,}1}$
102.	$\sqrt{0{,}9999}$	$\sqrt{0{,}999}$	$\sqrt{0{,}99}$	$\sqrt{0{,}9}$
103.	$\sqrt[3]{1{,}0004}$	$\sqrt[3]{1{,}003}$	$\sqrt[3]{1{,}02}$	$\sqrt[3]{1{,}1}$
104.	$\sqrt[3]{0{,}9996}$	$\sqrt[3]{0{,}997}$	$\sqrt[3]{0{,}98}$	$\sqrt[3]{0{,}9}$
105.	$\sqrt{10}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{102}$	$\sqrt{905}$
106.	$\sqrt{8}$	$\sqrt{143}$	$\sqrt{253}$	$\sqrt{959}$
107.	$\sqrt[3]{65}$	$\sqrt[3]{511}$	$\sqrt[3]{731}$	$\sqrt[3]{1003}$
108.	$\sqrt{2}$*)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$
109.	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{19}$
110.	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$
111.	$\sqrt[5]{244}$	$\sqrt[6]{727}$	$\sqrt[7]{131}$	$\sqrt[7]{2190}$

112. Welches ist in der Entwickeluug von $(1-x^2)\sqrt{1+x^2}$ der Koefficient von x^6 für $x < 1$ und der von x^{-5} für $x > 1$?

113. Welches ist der Koefficient von x^5 in der Entwickelung von $(1+x^2)^{-1}\sqrt[3]{1-x}$ für $x < 1$?

114. Wie heißen die Faktoren von x^7 und x^{-7} in der Entwickelung von $(a-x)^{-1}\sqrt[3]{a^3+x^3}$, wenn bezüglich $x < a$ und $x > a$ ist?

---

*) Von 108.—111. sind die Radikanden erst umzuformen, ehe man entwickelt. Man hat z. B. $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{25 \,.\, 2} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$; $\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{16 \,.\, 3} = \frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$; $\sqrt[3]{2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{512 \,.\, 2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{1024} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1{,}024}$ u. s. w.

Setze in folgenden Ausdrücken $x + h$ statt x, entwickele nach h und gieb den Faktor von h an.

115. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\qquad x^{10} - x^9 + x^8 - x^7$

116. $ax^n + bx^p$ $\qquad ax^{n+1} - bx^{n-1}$

117. $\frac{4}{7}x^7 - \frac{3}{4}x^8 - \frac{1}{5}x^{10}$ $\qquad \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{8}x^8 + \frac{5}{6}x^{12}$

118. $\frac{3}{5x^5} - \frac{4}{3x^6} - \frac{5}{6x^{12}}$ $\qquad \frac{7}{3x^9} - \frac{8}{5x^{10}} - \frac{3}{4x^{12}}$

119. $\frac{m}{nx^n} - \frac{n}{mx^m}$ $\qquad \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \frac{b}{(m-1)x^{m-1}}$

120. $(a + x)^5 - (b - x)^7$ $\qquad (ax + 1)^m - (a - x)^n$

121. $(3 - 2x)^5$ $\qquad (a - bx)^{n+1}$

122. $\frac{5}{7 - 3x}$ $\qquad \frac{1}{(3 - 4x)^6}$

123. $\frac{1 + x}{1 - x}$ $\qquad \frac{5 + 3x}{5 - 3x}$

124. $\frac{3 - 2x + x^2}{1 - 2x + 3x^2}$ $\qquad \frac{(x^3 + 2)^2}{6(3 - 5x^2)^3}$

125. $\sqrt[5]{1 - x^3}$ $\qquad \sqrt[7]{1 - x + x^2}$

Ausdrücke, welche x enthalten, erscheinen bisweilen für einen Werth von x unter der Form $\frac{0}{0}$. Dieser Quotient ist unbestimmt. Um den wahren Werth desselben zu ermitteln, setzt man, wenn a der fragliche Werth von x ist, $a + h$ statt x, entwickelt Zähler und Nenner nach Potenzen von h und läßt die Glieder mit h^2 fort. Folgende Quotienten erscheinen für den in Klammern beigesetzten Werth von x in unbestimmter Form; suche auf dem angegebenen Wege den wahren Werth derselben.

126. $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}\,[1]$ $\qquad \frac{x^6 - 64}{x^5 - 32}\,[2]$

127. $\frac{a^5 - x^5}{a^3 - x^3}\,[a]$ $\qquad \frac{x^5 - x^4}{x^6 - 1}\,[1]$

128. $\frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 - x + 2}\,[-1]$ $\qquad \frac{x^5 - 4x^3 + 3x - 6}{3x^5 - 6x^4 + x^2 - 4}\,[2]$

129. $\frac{a^7 - (a - x)^7}{b^7 - (b - x)^7}\,[0]$ $\qquad \frac{(a + x)^8 - (a + b)^8}{(a - b)^6 - (a - x)^6}\,[b]$

130. $\frac{x^4 - \sqrt[4]{x}}{x^2 - \sqrt[8]{x}}\,[1]$ $\qquad \frac{\sqrt{5x + 3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x}}\,[1]$

131. $\frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{5}}\,[2]$ $\qquad \frac{\sqrt[5]{3 - x} - 1}{\sqrt[6]{3 - x} - 1}\,[2]$

Wenn man in einem von x abhängigen Ausdruck $x + h$ für x substituirt, nach Potenzen von h entwickelt, den Koefficienten von $h = 0$ setzt, aus der so erhaltenen Gleichung den Werth von x bestimmt, so wird für diesen der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum. Was von Beiden eintritt, übersieht man in den meisten Fällen leicht*) — Gieb hiernach an, für welche Werthe von x die folgenden Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum werden, was von Beiden eintritt, und wie groß das Maximum oder Minimum des gegebenen Ausdruckes für den gefundenen Werth von x wird.

132. $x^4 - 108x + 244$ 133. $x^6 - 6a^5x + 4a^6$

134. $(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)$ 135. $(a - x^3)(b - x^3)$

136. $5 + 12x - x^3$ 137. $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

138. $\frac{4}{x} + \frac{x}{4}$ 139. $\frac{7-x}{x-3} + \frac{x-3}{7-x}$

140. $x + \sqrt{1-x}$ 141. $x - \sqrt{3x-2}$

XXXVII.

Von den Gleichungen höheren Grades im Allgemeinen.

1. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 3. Grades?
2. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 4. Grades?
3. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des n. Grades?
4. Wonach ist der Grad einer Gleichung zu beurtheilen?
5. Schreibe sechs möglichst verschiedene Gleichungen des 3. Grades auf.
6. Deßgleichen acht möglichst verschiedene Gleichungen des 4. Grades.
7. Wie nennt man die Werthe der Unbekannten, welche der Gleichung genügen?
8. Welchen Faktor muß die linke Seite einer geordneten auf 0 gebrachten Gleichung haben, wenn m eine Wurzel der Gleichung ist? (Beweis!)
9. Wie muß demnach eine Gleichung in ihrer einfachsten Form heißen, welche die Wurzeln m, n und p hat?
10. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben?

1) 1, 2, 3 2) 1, 1, -2

3) 2, 3, -5 4) 3, -4, -7

5) 7, $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ 6) 2, $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$

*) Will man das durch Rechnung darthun, so muß man auch den Koefficienten von h^2 suchen. Ist dieser für den gefundenen Werth von x negativ, so wird der Ausdruck ein Maximum, ist er positiv, ein Minimum. Verschwindet der Koefficient von h^2 ebenfalls, so muß auch der von h^3 verschwinden und es kommt auf das Zeichen des Koefficienten von h^4 an.