Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XXXIV. Permutationen, Combitationen, Variationen

urn:nbn:de:bsz:31-269430

89. Eine Rente r, die n Jahre läuft, zu p Procent, soll in eine andere verwandelt werden, die n_1 Jahre läuft zu p_1 Procent. Wie hoch wird die letztere sein?

90. Jemand will eine Rente von 1200 Mk., die 20 Jahre hindurch nach Ablauf jedes Jahres gezahlt wird, monatlich ausgezahlt haben. Wie viel wird er da erhalten, die Zinsen jährlich zu 5, monatlich zu $\frac{1}{3}$ Procent gerechnet?

91. Eine Jahrrente von 709 G., die 25 Jahre zu laufen hat, soll in eine andere verwandelt werden, die 30 Jahre hindurch vierteljährlich gezahlt wird. Wie groß wird diese sein, die Zinsen im ersten Fall jährlich zu 5, im zweiten Fall vierteljährlich zu 1 Pct. gerechnet?

92. Jemand bezieht auf 25 Jahre eine Jahrrente von 1500 Mk., er reicht aber damit nicht aus; er wünscht jährlich 1800 Mk. zu haben. Wie lange wird man ihm diese auszahlen können, die Zinsen zu $4\frac{3}{4}$ Procent gerechnet?

93. Eine Jahrrente r hat noch n Jahre zu laufen. Sie soll in eine andere r_1 verwandelt werden. Wie viel Jahre wird diese laufen, zu p Procent gerechnet?

94. Eine Jahrrente r, die noch n Jahre zu laufen hat, zu p Procent gerechnet, soll in eine andere r_1 zu p_1 Procent verwandelt werden. Wie lange wird die neue Rente zu laufen haben?

95. Wie groß ist der bare Werth einer Jahrrente, die n Jahre hindurch fällig ist und in geometrischer Progression wächst, r, er, e^2r, u. s. w., p Procent angenommen?

96. Wie groß ist der bare Werth einer Jahrrente, die n Jahre zu laufen hat und das erste Jahr r Mk. beträgt, in jedem folgenden Jahre aber e Procent mehr als im vorhergehenden, p Procent gerechnet?

97. Eine Jahrrente ist n Jahre hindurch fällig und steigt in arithmetischer Progression r, 2r, 3r u. s w. Wie groß ist der bare Werth derselben, die Zinsen zu p Procent gerechnet?

XXXIV.

Permutationen, Combinationen, Variationen.

A. Permutationen.

1. Was heißt permutiren?
2. Wie nennt man die zu permutirenden Größen?
3. Was versteht man unter einer Complexion?
4. Welches sind die beiden wichtigsten Aufgaben, welche bei den Permutationen vorkommen?

5. Welche beiden Fälle von Permutationen hat man ferner in Bezug auf die Elemente zu unterscheiden?

6. Stelle die verschiedenen Permutationen für zwei Elemente ab, für drei Elemente abc und für vier Elemente abcd dar, lexikographisch geordnet.

7. Bilde die Permutationen von ab, und leite aus diesen auf die einfachste Weise die Permutationen für abc ab.

8. Bilde die Permutationen für drei Elemente abc und leite aus denselben auf die einfachste Weise die Permutationen für vier Elemente abcd ab.

9. Wie kann man daher allgemein aus den Permutationen von n Elementen auf die einfachste Weise die Permutationen von $n+1$ Elementen ableiten? Was ist jedoch über die Ordnung der Permutationen im letzten Falle zu bemerken, wenn sie im ersten Falle lexikographisch geordnet waren?

10. Bilde für fünf Elemente abcde lexikographisch 1) die Permutationen, welche mit a anfangen; 2) die, welche mit c anfangen; 3) die, welche mit dc anfangen.

11. Bilde für sechs Elemente mnopqr lexikographisch 1) die Permutationen, welche mit po anfangen, 2) welche mit rn anfangen.

12. Wie groß ist die Anzahl der Permutationen für 2 Elemente, für 3, für 4, für 5, für 6 Elemente, endlich allgemein für n Elemente?

13. Stelle die Permutationen für drei Elemente aab dar, unter denen zwei gleiche sind.

14. Ebenso für vier Elemente aaab, aabc, aabb.

15. Ebenso für fünf Elemente aaabb, aaabc, aabbc.

16. Deßgleichen für sechs Elemente aaaabc, aaabbc, aaabcd, aabbcd, aabcde?

17. Deßgleichen für sieben Elemente aaaaabb, aaaabbb, aaabbcc, aaabbcd?

18. Wie groß ist allgemein die Anzahl der Permutationen für n Elemente, wenn unter denselben r, p und q gleiche vorkommen?

19. Gieb die Anzahl der Permutationen für die Faktoren folgender Produkte an: a^2b^5, $a^2b^2c^2$, ab^3c^5, $a^2b^4c^6$.

20. Ebenso für $a^3b^3c^3$, $m^4n^4p^4$, $x^5y^5z^5$.

21. Deßgleichen für $a^3b^4c^5d^6$, $a^1b^3c^5d^7$, $a^2b^4c^6d^8$.

22. Deßgleichen für $a^1b^2c^3d^4e^5$, $a^2b^2c^2d^2e^2$, $a^3b^3c^3d^3e^3$.

23. Deßgleichen für $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$.

24. Wie groß die Anzahl der Permutationen von abcdefgh, welche 1) mit a oder f anfangen, 2) mit ab oder he, 3) mit abc oder geh?

25. Wie viel Permutationen giebt es von abcdefgh, in welchen 1) hbfc in derselben Reihenfolge zusammenbleiben, 2) in welchen hbfc zwar zusammenbleiben, aber ihre Reihenfolge auch beliebig ändern können?

26. Die wievielte Permutation von abcd ist cadb, wenn die Permutationen lexikographisch geordnet sind?

27. Die wievielten Permutationen sind ebenso cfadbe und ebdacf von abcdef?

28. Deßgleichen gcdahebf und fbehadcg von abcdefgh?

29. Wie heißt die 100. Permutation von abcde, die 333. von mnopqr, immer vorausgesetzt, daß die Permutationen lexikographisch geordnet sind.

30. Wie heißt ebenso die 1000. Permutation von abcdefg, die 5555. von mnopqxyz?

31. Wie viel Permutationen von $a^2b^3c^4$ giebt es, welche 1) mit a anfangen, 2) mit bba, 3) mit cba?

32. Wie viel Permutationen von a^2b^3c giebt es, in denen 1) an der dritten Stelle ein a steht, 2) abc einmal zusammen in dieser Reihenfolge vorkommen?

33. Die wievielte Permutation ist ababa von aaabb, baccab von aabbcc?

34. Ebenso cababa und babaca von aaabbc?

35. Welches sind die 111., die 999. und die 1111. Permutation von aaaabbbccd?

B. Combinationen.

1. Was versteht man unter Combinationen?

2. Was heißt daher in dieser Beziehung combiniren? was heißt sonst im Allgemeinen combiniren?

3. Was versteht man unter Combinationen der 1., der 2., der 3., der 4. Classe?

4. Wie nennt man die Combinationen der 1. Classe auch sonst? die der 2., der 3., der 4. Classe?

5. Welche beiden Arten von Combinationen unterscheidet man?

6. Was sind Combinationen mit Wiederholung, was Combinationen ohne Wiederholung?

7. Welche beiden Hauptaufgaben kommen auch hier vor?

8. Bilde die Unionen, Amben, Ternen und Quaternen für drei Elemente abc 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

9. Bilde ebenso die Combinationen der fünf ersten Classen für vier Elemente abcd 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

10. Bilde ebenso für fünf Elemente abcde die Combinationen der drei ersten Classen 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.

11. Wie viel Amben sind in 3, 4, 5, 6 Elementen enthalten 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung?

12. Deßgleichen wie viel Ternen?

13. Deßgleichen wie viel Quaternen?

14. Wie groß ist für n Elemente die Zahl der Combinationen der 3. Classe, der 4. Classe, der 5. Classe, der r. Classe 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung?

15. Wie viel Elemente muß man haben, die mit Wiederholung com-

binirt für irgend eine Classe ebenso viel Combinationen geben als 10 Elemente ohne Wiederholung combinirt für dieselbe Classe?

16. Wie viel Elemente muß man haben, die ohne Wiederholung combinirt ebenso viel Combinationen geben, als 12 Elemente mit Wiederholung combinirt?

17. Die wievielte Ambe, Terne oder Quaterne von abdemnr ist am, er, dem, der, aber, ader (ohne Wiederholung)?

18. Die wievielte Ambe, Terne oder Quaterne (mit Wiederholung) von ablort ist ab, aal, aar, all, ort, boot?

19. Wie heißt die 20. Ambe, die 30. Terne, die 40. Quaterne für die Elemente abcdefgh (ohne Wiederholung).

20. Wie heißt die 22. Ambe, die 44. Terne, die 150. Quaterne für die Elemente abcdefgh (mit Wiederholung)?

C. Variationen.

1. Was sind Variationen?
2. Was heißt daher in dieser Beziehung variiren?
3. Was sind Variationen 1. Classe, 2. Classe, 3. Classe, n. Classe?
4. Welche Arten von Variationen hat man zu unterscheiden?
5. Welches sind auch für die Variationen die beiden Hauptaufgaben?
6. Stelle die Variationen der 2. Classe ohne Wiederholung dar für ab, abc, abcd, abcde.
7. Stelle die Variationen der 3. Classe ohne Wiederholung dar für abc, abcd, abcde.
8. Ebenso die Variationen der 4. Classe ohne Wiederholung für abcd und die ersten 20 für abcde.
9. Wie groß ist die Anzahl der Variationen der 2. Classe ohne Wiederholung für 5, 7, 10, n Elemente?
10. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 3. Classe für dieselbe Anzahl von Elementen?
11. Deßgleichen die der 4. Classe?
12. Stelle die Variationen 2. Classe mit Wiederholung dar für ab, abc, abcd und abcde.
13. Stelle die Variationen 3. Classe mit Wiederholung dar für ab, abc, abcd.
14. Deßgleichen diejenigen der 4. Classe für ab und abc.
15. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 2. Classe mit Wiederholung für 2, 3, 5, 7, n Elemente?
16. Deßgleichen die der 3. Classe für dieselbe Anzahl von Elementen?
17. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 4., 5., und 6. Classe mit Wiederholung für n Elemente?
18. Die wievielten Variationen der 3. Classe ohne Wiederholung von ehinr sind ein, her, ihr, nie?

19. Deßgleichen 4. Classe von denselben Elementen mit Wiederholung heer, hehr, hier, nein, rein?

20. Deßgleichen 5. Classe von denselben Elementen mit Wiederholung einer, innen, rinne?

21. Deßgleichen 6. Classe mit Wiederholung herein, hierin, reiner?

22. Die wievielte Variation 6. Classe (mit Wiederholung) der Elemente en ist nennen?

23. Wie heißt die 5. und die 10. Variation 3. Classe ohne Wiederholung von afltu?

24. Wie heißen die 29. und die 54. Variation 4. Classe ohne Wiederholung von afltu?

25. Wie heißen die 17. und die 22. Variation 3. Classe mit Wiederholung von dnu?

26. Wie heißen die 75. und die 199. Variation 4. Classe mit Wiederholung von ehlm?

27. Deßgleichen die 8790., die 11380. und 40146. Variation 6. Classe mit Wiederholung von ehilmn?

28. Wie viel Zahlen kann man bilden aus den Ziffern 012; 1) einziffrige, 2) zweiziffrige, 3) dreiziffrige, 4) vierziffrige, die links stehenden Nullen nicht gerechnet?

D. Anwendungen.

1. Es wollten 10 Personen, die bei einem Wirthe täglich zu Mittag und zu Abend aßen, ihn überreden, ihnen so lange zu creditiren, als sie ihre Plätze wechseln könnten. Wie viel Jahre hätte er noch auf Zahlung warten müssen?

2. Wie würde das Resultat der vorigen Aufgabe für 7 Personen sein?

3. Die wievielte Permutation von hort ist roth, und die wievielte thor?

4. Die wievielte Permutation von blau ist laub?

5. Die wievielte Permutation von name ist amen?

6. Ebenso ernst von stern, abend von baden.

7. Die wievielte Permutation von radius ist darius?

8. Wie heißt die 10. und wie die 24. Permutation von amor?

9. Die wievielte Permutation muß man von heidelberg bilden, um auf geld herbei zu kommen?

10. Wie viel Wortversetzungen läßt der Hexameter von Horaz zu: Vilius argentum est auro, virtutibus aurum? Gieb einige von den Versetzungen an, welche wieder richtige Hexameter bilden.

11. Wie groß ist die Summe aller Ziffern, welche in allen Permutationen der Zahl 23357 enthalten sind, und wie groß die Summe aller dieser Permutationen, jede als eine Zahl gerechnet?

12. Wie sind die Resultate der vorigen Aufgabe für die Zahl 122578?

13. Wie viel dreiziffrige Zahlen, in denen keine Ziffer zweimal vorkommt, kann man mit den Ziffern 123456789 schreiben?

14. Wie viel gerade Linien giebt es, die je zwei von 5, von 6, von n Punkten verbinden?

15. Wie viel Diagonalen hat ein 5-Eck, ein 7-Eck, ein n-Eck?

16. In wie viel Punkten können sich 3, 4, 5, 6, n gerade Linien höchstens schneiden?

17. Wie viel Amben können in einem Lottospiel von 90 Nummern enthalten sein? Deßgleichen wie viel Ternen und Quaternen?

18. Auf wie viel Arten lassen sich 7 Karten unter 2 Personen vertheilen, daß die eine 3, die andere 4 erhält?

19. Auf wie viel Arten lassen sich 9 Karten unter 3 Personen so vertheilen, daß die erste 2, die zweite 3, die dritte 4 erhält?

20. Auf wie viel Arten lassen sich 6 Karten unter 3 Personen so vertheilen, daß jede 2 erhält?

21. Auf wie viel Arten läßt sich das Produkt abcdf in 3 andere zerlegen, jedes zu 2 Faktoren?

22. Auf wievielfache Weise lassen sich 12 Karten unter 4 Personen vertheilen, daß jede 3 erhält?

23. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 12 ungleichen Faktoren abcde . . . in 4 andere zerlegen, jedes zu 3 Faktoren?

24. Auf wie viel Arten lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so vertheilen, daß jeder 8 Karten erhält?

25. Auf wie viel Arten kann dasselbe mit 52 Karten geschehen, für jeden Spieler 13 Karten?

26. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 2n Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 2 Faktoren?

27. Auf wie vielfache Weise läßt sich ein Produkt aus 2n Faktoren in 2 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?

28. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 3n Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 3 Faktoren?

29. Auf wie viel Arten läßt sich ein Produkt aus 3n Faktoren in 3 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?

30. Auf wie viel Arten lassen sich 20 Karten unter 4 Personen vertheilen, daß die erste 3, die zweite 4, die dritte 6, die vierte 7 Karten erhält?

31. Jemand hat zwei Kasten und 17 verschiedene Kugeln. Er wirft in den einen Kasten 8, in den andern 9. Auf wie vielfache Weise kann das geschehen?

32. Jemand hat 3 Kasten und 19 verschiedene Kugeln. Er wirft in den ersten 4, in den zweiten 6, in den dritten 9. Auf wie viel Arten kann das geschehen?

33. Wie viel einsilbige Wörter giebt es, die aus zwei Konsonanten bestehen und einem Vokal, der zwischen jenen steht, wenn man 20 Konsonanten und mit den Umlauten 8 Vokale rechnet?

34. Wie viel Wörter giebt es demnach, die mit 2 Vokalen und 4 Konsonanten geschrieben werden, vorausgesetzt, daß die beiden Vokale die 2. und die 4. Stelle im Worte einnehmen?

35. Wie viel Würfe lassen sich mit zwei Würfeln werfen?

36. Wie viel Würfe lassen sich mit zwei Würfeln werfen, wo beide Würfel ungleiche Augen haben?

37. Wie viel Würfe lassen sich mit 3, mit 4 Würfeln werfen?

38. Wie viel Würfe lassen sich mit 3 Würfeln werfen, wo alle Würfel verschiedene Augen zeigen?

39. Wie viel Würfe lassen sich mit 3 Würfeln thun, wo 2 Würfel (aber nur 2) gleiche Augen haben?

40. Wie viel Würfe lassen sich mit 4 Würfeln thun, 1) wo 2 (nur 2) Würfel gleiche Augen haben, 2) wo 2 und 2 Würfel gleiche Augen haben (aber nicht alle 4), 3) wo 3 (nur 3) Würfel gleiche Augen haben?

XXXV.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das Maß der (mathematischen) Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten eines Ereignisses ist der Quotient, welchen die Anzahl aller günstigen durch die Anzahl aller möglichen Fälle giebt. Dieser Quotient heißt daher auch kurz die Wahrscheinlichkeit. Ist die Wahrscheinlichkeit $= 1$, so tritt das Ereigniß gewiß ein; ist sie $= 0$, so tritt das Ereigniß gewiß nicht ein. Der Quotient, welchen die Anzahl aller ungünstigen Fälle durch die Anzahl aller möglichen Fälle giebt, ist das Maß der Unwahrscheinlichkeit u für das Eintreten eines Ereignisses oder die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten desselben und heißt kurz die Unwahrscheinlichkeit.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit sind folgende Formeln zu merken:

$$\text{I.}\quad w + u = 1,\quad 1 - w = u,\quad 1 - u = w$$

$$\text{II.}\quad w_1 + w_2 = w$$

$$\text{III.}\quad w_1 \cdot w_2 = w$$

Die erste Formel folgt aus der Definition. — Die zweite Formel giebt für zwei fragliche Fälle (einer Ursache) die Wahrscheinlichkeit, daß einer der beiden Fälle eintritt (beide können nicht eintreten), wenn die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall w_1 und die für den zweiten Fall w_2 ist. — Die dritte Formel giebt für zwei fragliche Fälle (zweier Ursachen) die Wahrscheinlichkeit, daß beide eintreten. Die Ermittelung der Wahrscheinlichkeit, daß nur ein Fall eintritt, mindestens ein Fall eintritt u. s. w., bedarf bei zwei und mehreren Ursachen einer besonderen Erwägung.

Wenn u_1, u_2 und u_3 die Unwahrscheinlichkeiten für das Eintreten dreier Ereignisse A, B und C sind, entsprechend den Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 und w_3, wofür geben dann nachstehende Formeln die Wahrscheinlichkeiten an: