Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XXVI. Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten

urn:nbn:de:bsz:31-269430

Visual Library

XXVI.

Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. Das Produkt aus dem vierten und fünften Theil einer Zahl giebt 500. Wie heißt die Zahl?

2. Das Produkt aus dem dritten Theil einer Zahl und aus ihrem Fünffachen liefert 540. Wie heißt die Zahl?

3. Ein Werk besteht aus 4 gleichen Bänden, und jede Seite hat durchschnittlich eben so viel Buchstaben, als das ganze Werk Seiten hat. Wie hoch kommt die Seitenzahl jedes Bandes, wenn das ganze Werk auf 2310400 Buchstaben veranschlagt ist?

4. Eine Frau bringt Eier zur Stadt und verkauft das Stück für so viel Pfennige, als der 12. Theil der Anzahl ihrer Eier beträgt. Wie viel hatte sie, wenn sie für dieselben 3 Mk. einnahm?

5. Jemand hat zwei ~~gleiche~~ Stücke Acker; das eine ist ein Rechteck, das andere ein Quadrat. Das Rechteck ist noch 3mal so groß als das Quadrat. Wie groß ist die Seite des Quadrats, wenn die Seiten des Rechtecks 2844 und 237 Meter lang sind?

6. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 2288 und 3534 Meter. Wie lang die Hypotenuse?

7. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 514 Meter und die eine Kathete 64 Meter. Wie groß ist die andere Kathete?

8. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist a. Wie groß ist die Höhe?

9. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 1000 Meter. Wie groß ist die Seite?

10. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie $3:4$. Wie lang sind dieselben, wenn die Hypotenuse 555 Meter lang ist?

11. Welche Zahlen verhalten sich wie $m : n$, während die Summe ihrer Quadrate $= a^2$ ist?

12. Wie groß muß die Diagonale eines Quadrats sein, dessen Umfang 100 Meter ist?

13. Zwei Körper A und B bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitelpunkt aus. Nach wie viel Sekunden werden sie die Entfernung a von einander haben, wenn sie in einer Sekunde bezüglich m und n Meter zurücklegen?

14. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 1 bildet, so ist das Produkt aus der Summe und der Differenz 360. Wie heißt die Zahl?

15. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 7 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 1066. Wie heißt die Zahl?

16. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 100 beträgt, als die andere darunter, deren Produkt 9831 ist. Wie heißen dieselben?

17. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 58 beträgt als die andere darunter, deren Quadrate in Summe 6970 sind. Wie heißen dieselben?

18. Es giebt eine Zahl, die zwischen 96 und 150 liegt. Die Summen der gesuchten Zahl mit den gegebenen verhalten sich wie die Differenzen der gesuchten Zahl mit den gegebenen. Wie heißt die Zahl?

19. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der gegebenen Zahlen die allgemeinen Zahlzeichen a und b gesetzt werden?

20. Ein Mann kauft ein sehr mageres Pferd, füttert es gut und verkauft es wieder. Er gewinnt bei dem Handel, die Futterkosten nicht gerechnet, ebenso viel Procent, als ihm das Pferd gekostet hat. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn dieser noch 784 Mk. niedriger war als der Verkaufspreis?

21. Jemand gewann bei einer Waare so viel Procent als der 5. Theil des Einkaufspreises betrug. Wie hoch verkaufte er die Waare, wenn er 245 Mk. gewann?

22. Ich habe eine Zahl im Sinne. Bilde ich das Produkt aus den Summen dieser Zahl mit je einer der Zahlen 16 und 19, und ebenso das Produkt aus den Differenzen mit je einer der genannten Zahlen, so beträgt die Summe der beiden Produkte gerade 1000. Wie groß muß die Zahl sein, wenn sie kleiner ist als jede der genannten?

23. Wie groß muß nach den Bedingungen der vorigen Aufgabe die gesuchte Zahl sein, wenn die gegebenen Zahlen 10 und 67 sind, die gesuchte Zahl zwischen beiden liegt und die Differenz der Produkte (nicht die Summe) 2222 beträgt?

24. Die Summe der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, von denen die eine um ebenso viel größer ist als 37 als die andere kleiner, ist gleich der Quadratwurzel aus 74. Wie heißen die Zahlen?

25. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn statt 37 die Zahl 58 gegeben und die Summe der Wurzeln gleich 14 ist?

26. Es giebt eine Zahl, welche größer als 50 ist, von der Art, daß die Summe und Differenz derselben mit der Zahl 37 in demselben Verhältniß stehen, wie die Kuben der Summe und Differenz mit der Zahl 13. Wie heißt dieselbe?

27. Welche Zahl muß man zu 41 addiren und von 41 subtrahiren, daß die Summe der Kubikwurzel aus der Summe und derjenigen aus der Differenz gleich der Kubikwurzel aus 82 ist?

28. Es giebt eine Zahl, die größer ist als 28, von der Art, daß der Unterschied der Kubikwurzeln aus der Summe und der Differenz der gesuchten Zahl mit der Zahl 28 gleich 2 ist. Wie heißt dieselbe?

29. Es giebt zwei Zahlen, von denen die eine ebenso viel über 536 beträgt, als die andere darunter. Zieht man die Kubikwurzeln aus beiden Zahlen und bildet den Quotienten zwischen beiden Wurzeln, so macht dieser mit seinem reziproken Werthe zusammen $2\frac{4}{63}$ aus. Wie heißen die Zahlen?

30. Jemand hat ein Gefäß mit 125 Liter Wein. Er zapft eine gewisse Quantität ab und ersetzt die abgezapfte Flüssigkeit durch Wasser.

Nachdem er dies 3 mal wiederholt hat, sind im Gefäß noch 27 Liter reinen Weins. Wie viel Liter hat er jedesmal abgezapft?

31. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe heißen, wenn statt der Zahlen 125, 27 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und n gesetzt werden?

32. Jemand hat 1250 Liter Alkohol von 80 Procent, d. h. 100 Liter davon enthalten 80 Liter reinen oder wasserfreien Alkohol und 20 Liter Wasser. Er zapft immer eine gewisse Anzahl Liter ab und ersetzt den abgezapften gemischten Alkohol durch Wasser. Nachdem er dies 3 mal wiederholt hat, enthält die Mischung nur noch 125 Liter reinen Alkohol. Wie viel Liter wurden jedesmal abgelassen?

33. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 1250, 125, 80 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b, p und n gesetzt werden?

34. Zwei Seiten eines Dreiecks a und b sind gegeben. Wie groß ist die dritte Seite, wenn der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel 60 Grad ist?

35. Wie ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn der eingeschlossene Winkel 120 Grad faßt?

36. Wie ist das Resultat, wenn der eingeschlossene Winkel 30 Grad ist?

37. Wie groß ist das Resultat, wenn der betreffende Winkel 45 Grad ist?

38. Die eine Seite eines Dreiecks ist 52 Meter, die beiden andern Seiten verhalten sich wie 8 : 15, der von ihnen eingeschlossene Winkel ist 60 Grad. Wie groß sind die beiden andern Seiten?

39. Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 5, der eingeschlossene Winkel ist 120 Grad, die dritte Seite ist 28 Meter lang. Wie lang die beiden ersten Seiten?

40. Auf der Hypotenuse a und der einen Kathete b eines rechtwinkligen Dreiecks liegen zwei Punkte M und N, deren Entfernung von der Ecke, wo a und b zusammenstoßen, bezüglich m und n ist. Wie lang ist die Linie MN?

41. Zwei Körper A und B bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels. A ist jetzt 123 Meter vom Scheitelpunkt entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 239 Meter in der Sekunde vom Scheitelpunkt ab. B ist jetzt 239 Meter vom Scheitelpunkt entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 123 Meter in der Sekunde nach dem Scheitelpunkt hin. Wann hatten und wann werden die Körper eine Entfernung von 850 Meter von einander haben?

42. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 239, 123 und 850 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und m gesetzt werden?

43. Auf der Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreiecks und einer Kathete b bewegen sich zwei Körper, vom Schnittpunkt der Linien a und b anfangend, bezüglich mit den Geschwindigkeiten von m und n Meter in der Sekunde. Nach wie viel Sekunden werden die Körper die Entfernung d Meter von einander haben?

44. Von der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks aus bewegen sich zwei Körper, zu gleicher Zeit anfangend, auf den Seiten mit den Geschwindigkeiten m und n Meter in der Sekunde. Wann werden sie von einander eine Entfernung von d Meter haben?

---

45. Es soll eine Zahl gesucht werden, deren 29-faches das Quadrat derselben noch um 190 übertrifft.

46. Es giebt eine Zahl, deren 10-faches noch um 999 kleiner ist als ihr Quadrat. Wie heißt dieselbe?

47. Die Zahl 53 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 612 ist.

48. Die Größe $a^2 + b^2$ in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt $\frac{1}{4}(a^4 + a^2 b^2 + b^4)$ ist.

49. Die Zahl 384 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Differenz 8 ist.

50. Die Zahl 2268 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe 99 ist.

51. Die Größe $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Differenz $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.

52. Den Bruch $\frac{1}{4}$ in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ ist.

53. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine um 12 größer ist als die andere, beträgt 1130. Wie heißen dieselben?

54. Die Größe $5a + b$ in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe ihrer Quadrate $= 13(a^2 + b^2)$ ist.

55. Der Inhalt eines Rechtecks ist 1440 Q.-Meter. Wie groß sind die Seiten desselben, wenn die eine noch 18 Meter länger ist als die andere?

56. Von den Seiten eines Rechtecks ist die eine noch um 19 Fuß länger als die andere. Wäre die kleinere um den 4. Theil größer und die größere um den 3. Theil kleiner, so würde der Inhalt des ganzen Rechtecks 1320 Q.-Fuß kleiner sein. Wie groß die Seiten?

57. Der Umfang eines Rechtecks ist 252 Fuß, sein Inhalt 3888 Q.-Fuß. Wie groß die Seiten?

58. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produkts 24.20 vergrößern, damit das Produkt um 540 größer wird?

59. Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 900 und deren Quotient 4 beträgt.

60. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 4. Vermehrt man jede um 15, so beträgt die Differenz der Quadrate der neuen Zahlen gerade 999. Wie heißen die Zahlen?

61. Welche Zahl giebt in $4\frac{1}{2}$ dividirt gerade so viel als von $4\frac{1}{2}$ subtrahirt?

62. Welche Zahl giebt durch 5 dividirt noch 1 mehr als in 360 dividirt?

63. Die Zahl 900 in zwei solche Summanden zu zerlegen, daß die Summe ihrer reziproken Werthe gleich dem reziproken Werthe von 221 ist.

64. Die Summe zweier Zahlen ist a, die Summe ihrer reziproken Werthe gleich dem reziproken Werthe von b. Wie heißen dieselben?

65. Das Produkt zweier Zahlen vermehrt um die Summe derselben giebt 999. Wie groß ist jede, wenn die erste die zweite noch um 15 übertrifft?

66. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Vermindert man den Zähler um 3 und vermehrt den Nenner um dieselbe Zahl, so ist der entstehende Bruch nur halb so groß als der ursprüngliche. Wie heißt der Bruch?

67. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 100. Wäre der Zähler um 18 größer und der Nenner um 16 kleiner, so würde der Bruch doppelt so groß sein. Wie heißt derselbe?

68. Es giebt eine Zahl zwischen 50 und 10. Die Unterschiede der Zahl mit den genannten verhalten sich wie die Summen der Zahl mit den Zahlen 94 und 10. Wie heißt die Zahl?

69. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, von denen die erste um 3 größer ist als die zweite. Multiplizirt man die Zahl mit der Summe ihrer Ziffern, so erhält man 814. Wie heißt die Zahl?

70. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 10 ist. Stellt man die Ziffern um und multiplizirt die so erhaltene Zahl mit der ursprünglichen, so erhält man 2944. Wie heißt die Zahl?

71. Zwei Zahlen sind in Summe 200. Die Wurzel der ersten giebt um die zweite Zahl vermehrt 44. Wie heißen die Zahlen?

72. Die Summe zweier Zahlen ist 290, die Summe ihrer Quadratwurzeln 24. Wie heißen die Zahlen?

73. Die Summe zweier Zahlen ist 40, die Summe ihrer Kuben 17080. Wie heißen die Zahlen?

74. Die Differenz zweier Zahlen ist 10, die Differenz ihrer Kuben 20530. Wie heißen die Zahlen?

75. Die Summe zweier Zahlen ist 7110, die Summe ihrer Kubikwurzeln = 30. Wie heißen dieselben?

76. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der 4167 Kubikfuß mehr hielte, als er hält, wenn die Kante um 3 Fuß länger wäre?

77. Um ein Blumenbeet, welches die Form eines Rechtecks hat, dessen Seiten 3 und 4 Meter lang sind, geht ein überall gleich breiter Rasenstreifen, dessen Fläche 10 mal so groß ist als die des Blumenbeetes. Wie breit ist derselbe?

78. Eine Anzahl Soldaten ist 3 Mann tief in Form eines hohlen Carree's aufgestellt. Wären es 9 Mann mehr gewesen, so hätte man sie in einem vollen Carree aufstellen können. Dann hätte die

Seite des vollen Carree's 32 Mann weniger gehabt als die innere Seite des hohlen Carree's. Wie groß die Anzahl?

79. Eine Truppenabtheilung marschirt in geschlossener Colonne und hat 14 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte. Vor dem Feinde wird die Fronte um 828 vergrößert, daß nur noch 5 Mann in der Tiefe stehen. Wie stark ist die Abtheilung?

80. Ein Kaufmann kauft für eine gewisse Summe Waare ein, hat noch 5 Prozent Unkosten und verkauft sie wieder für 504 Mk., wobei er so viel Prozent gewinnt, als der 20. Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie hoch dieser?

81. Jemand hat 8000 G. auf Zinsen und vermehrt sein Kapital am Ende jeden Jahres um 100 G. Im Anfang des dritten Jahres hat er 8982,8 G. — Zu wie viel Prozent stand das Kapital? —

82. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der dort vorkommenden Zahlen der Reihe nach die allgemeinen Zahlen a, m und b gesetzt werden?

83. Zwei Männer A und B haben zusammmen in 20 Tagen eine Mauer aufgeführt. Wie lange hätte jeder allein daran arbeiten müssen, wenn B noch 9 Tage länger gebraucht hätte als A?

84. Durch zwei Röhren kann ein Teich in 6 Stunden gefüllt werden, wenn sie beide offen sind. In wie viel Stunden kann er durch jede allein gefüllt werden, wenn die erste zu dem Zwecke noch 5 Stunden weniger offen zu sein braucht als die zweite?

85. Auf der Peripherie eines Kreises von 360 Meter Länge bewegen sich zwei Körper A und B. A legt in der Sekunde noch 4 Meter mehr zurück als B und braucht daher, um die ganze Peripherie zu durchlaufen, eine Sekunde weniger. Wie viel Meter legt jeder in einer Sekunde zurück?

86. Eine Anzahl von Personen verzehrt in einem Wirthshause für 30 Mk. Wären es 5 Personen weniger gewesen, so hätte jede Person 30 Pf. mehr verzehren können, ohne daß sich die Rechnung geändert hätte. Wie viel Personen?

87. Eine Anzahl von Studenten kehren in einem Wirthshause ein und haben schließlich eine Rechnung von 12 G. zu bezahlen. Wären ihrer 4 mehr gewesen und hätte jeder 25 Kr. weniger verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 15 G. belaufen. Wie groß war die Zahl der Studenten?

88. Eine Frau bringt Butter zur Stadt und löst dafür 30 Mk. Hätte sie 5 Pfund weniger gehabt, so hätte sie das Pfund schon um 20 Pf. theurer verkaufen müssen, wenn sie ebenso viel hätte einnehmen wollen. Wie viel Pfund?

89. Es kauft Jemand für 2 G. Citronen. Hätte er für dasselbe Geld 20 Citronen mehr erhalten, so wäre ihm das Stück $\frac{1}{2}$ Kr. wohlfeiler gekommen. Wie viel Citronen kaufte er?

90. Es kauft Jemand zwei Arten Tuch, zusammen für 49 G., von der ersten Art 2 Ellen weniger als von der zweiten. Das Tuch der ersten Art würde zum Preise der zweiten Art 20 G. kosten. Das

Tuch der zweiten Art würde zum Preise der ersten Art 30 G. kosten. Wie viel Ellen von jeder Art?

91. Jemand kauft zwei Arten Zeug, von der ersten Art 3 Ellen weniger als von der zweiten, und zahlt im Ganzen 126 Mk. Von der ersten Art kostet die Elle 30 mal so viel Pfennige, als er von der zweiten Art Ellen kauft. Von der zweiten Art kostet die Elle 40 mal so viel Pfennige, als er von der ersten Art Ellen kauft. Wie viel Ellen von jeder Art?

92. A und B stehen eine gleiche Zahl von Tagen in Arbeit. A versäumt nur einen Tag und verdient 60 Mk. B versäumt 7 Tage und verdient 54 Mk. Hätte A 7 Tage versäumt und B einen Tag, so hätte B 27 Mk. mehr verdient als A. Wie lange standen sie in Arbeit?

93. Zwei Frauen hatten Eier zur Stadt gebracht, die zweite 24 mehr als die erste, und beide gleich viel Geld gelöst. Hätte ich meine Eier zu deinem Preise verkauft, sprach die erste, so hätte ich 1 Mk. 60 Pf. erhalten. Hätte ich meine Eier zu deinem Preise verkauft, antwortete die zweite, so wäre ich auf 2 Mk. 50 Pf. gekommen. Wie viel Eier hatte jede Frau gehabt?

94. Zwei Personen A und B legen denselben Weg zwischen M und N zurück, A von M nach N, B von N nach M, und gehen zugleich aus. Als sie sich begegnen, hat A 3 Meilen mehr gemacht als B. Würden sie jetzt mit derselben Geschwindigkeit weiter reisen, so würde A in 4 Stunden nach N, B in 9 Stunden nach M gelangen. Wie weit ist es von M nach N?

95. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn statt der Zahlen 9, 4 und 3 die allgemeinen Zahlzeichen a, b und m gesetzt werden?

96. Aus A wird ein Courier nach B abgeschickt, der dort nach 10 Stunden eintreffen wird. Zu derselben Zeit wird aus einem $3\frac{3}{4}$ Meilen mehr rückwärts gelegenen Orte ein zweiter Courier abgeschickt, der mit dem ersten Courier zu gleicher Zeit in B eintreffen soll und daher auf jede Meile 8 Minuten gewinnen muß. Wie weit ist A von B entfernt?

97. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe wenn statt der Zahlen 10, $3\frac{3}{4}$ und 8 die allgemeinen Zahlzeichen a, d und n gesetzt werden?

98. Aus den Oertern A und B gehen zwei Wanderer zu gleicher Zeit aus und begegnen einander nach $10\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange gebraucht jeder zu einer Meile, wenn der erste noch $\frac{1}{4}$ Stunde weniger gebraucht als der zweite und wenn A und B 13 Meilen von einander entfernt sind?

99. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien. A ist jetzt 175 Meter vom Schnittpunkt entfernt, B 20 Meter, und beide kommen vom Schnittpunkt her. Wann betrug und wann wird die Entfernung der beiden Körper von einander 370 Meter betragen, wenn A 49 Meter, B 28 Meter in der Sekunde zurücklegt?

100. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien mit den Geschwindigkeiten von 4 und 3 Meter in der Sekunde. A ist jetzt 300 Meter vom Schnittpunkt entfernt und seine Bewegung ist nach dem Schnittpunkt hin gerichtet. B ist 250 Meter vom Schnittpunkte entfernt und seine Bewegung ist vom Schnittpunkte ab gerichtet. Wann war und wann wird die Entfernug der beiden Körper von einander 1825 Meter sein?

101. Zwei Körper A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin. A macht 6 Meter in der Sekunde, B 4 Meter. A ist jetzt noch 78 Meter vom Schnittpunkt entfernt, B 104 Meter. Die Körper haben demnach jetzt eine gegenseitige Entfernung von 130 Meter. Vor wie langer Zeit war ihre gegenseitige Entfernung 1378 Meter, und nach wie langer Zeit wird sie wieder 1378 Meter sein?

102. Zwei Kreise bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin und darüber hinaus. Der erste hat einen Radius von 981 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 7 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 2442 Meter vom Schnittpunkt der Linien entfernt. Der zweite hat einen Radius von 980 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 5 Meter, sein Mittelpunkt ist jetzt noch 1591 Meter vom Schnittpunkte der Linien entfernt. Nach wie viel Sekunden berühren sich die Kreise zum ersten Mal von außen und nach wie viel Sekunden zum zweiten Mal, vorausgesetzt, daß sie sich in ihren Bewegungen nicht hinderlich sind?

103. Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 2442, 1591, 7, 5, 981 und 980 bezüglich die allgemeinen Zahlzeichen a, b, m, n, r und r_1 gesetzt werden?

104. Zwei Kreise bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien nach dem Schnittpunkte hin. Der erste hat einen Radius von 100 Meter, durchläuft in jeder Sekunde 3 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 247 Meter vom Schnittpunkt entfernt. Der zweite hat einen Radius von 35 Meter, macht in jeder Sekunde 2 Meter, und sein Mittelpunkt ist jetzt noch 169 Meter vom Schnittpunkt entfernt. Nach wie viel Sekunden werden sich die Kreise von innen berühren?

105. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 95 Meter, die lange Kathete 76 Meter. Auf diesen Seiten bewegen sich zwei Körper A und B, zu gleicher Zeit auf denjenigen Enden der Linien anfangend, wo sie mit der dritten Seite des Dreiecks zusammenstoßen, nach dem Schnittpunkte hin. A legt auf der Hypotenuse in jeder Sekunde 5 Meter zurück, B auf der Kathete in jeder Sekunde 11 Meter. Wann haben die Körper eine gegenseitige Entfernung von 65 Meter?

106. Von den Enden der Basis a eines gleichseitigen Dreiecks bewegen sich auf den beiden andern Seiten zwei Körper mit den Geschwindigkeiten m und n Meter in der Sekunde. Wann haben diese eine Entfernung von einander, welche gleich der Höhe des Dreiecks ist?

106_1. Welche Basen haben die Zahlensysteme, in denen die erste der folgenden Zahlen, welche dem dekadischen System angehört, in der Form der zweiten erscheint: 1) 73 als 111; 2) 93 als 333; 3) 86 als 222; 4) 250 als 372; 5) 1281 als 777; 6) 1111 als 787; 7) 2695 als 959?

106_2. Welche Basen müssen den Zahlensystemen zum Grunde liegen, in welchen folgende Multiplikationen richtig sind: 1) $4.13 = 100$; 2) $9.14 = 100$; 3) $3.25 = 111$; 4) $5.36 = 144$; 5) $24.25 = 666$; 6) $26.35 = 888$; 7) $12.21 = 1022$; 8) $18.81 = 1628$?

106_3. Welche Werthe haben die unendlichen Kettenbrüche: 1) mit dem constanten Quotienten 2; 2) 4; 3) 6; 4) 10; 5) 7; 6) 9; 7) a?

106_4. Welche Werthe haben die unendlichen Kettenbrüche mit den periodischen Quotienten: 1) 1, 2; 2) 1, 4; 3) 1, 6; 4) 1, 3; 5) 2, 5; 6) 3, 7; 7) a, b?

106_5. Deßgl. die mit den Quotienten: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 4, 6; 3) 1, 3, 5; 4) 1, 2, 1, 1, 2, 1 . .; 5) 1, 3, 1, 1, 3, 1 . .?

106_6. Wie verhalten sich die unendlichen Kettenbrüche mit den periodischen Quotienten: 1) 1, 2, 3, 4 und 4, 3, 2, 1; 2) 1, 3, 5, 7 und 7, 5, 3, 1; 3) 2, 4, 6, 8 und 8, 6, 4, 2; 4) a, b, c, d und d, c, b, a?

106_7. Welche Wurzelgrößen liefern bei ihrer Entwickelung in Kettenbrüche die periodischen Quotienten: 1) 6, 2, 2, 12, 2, 2, 12 . .; 2) 4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 . .; 3) 7, 1, 6, 1, 14 . .; 4) 6, 1, 2, 2, 2, 1, 12 . .; 5) 7, 1, 2, 7, 2, 1, 14 . .; 6) 5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10 . ., wo die erste Zahl jedesmal die in der Wurzel enthaltenen Ganzen bezeichnet.

Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

107. Welche Werthe nimmt der Ausdruck $a^2 + x^2$ an, wenn man $a = 7$ und für x der Reihe nach die Werthe $+ 3$, $+ 2$, $+ 1$, 0, $- 1$, $- 2$ und $- 3$ setzt, und für welchen Werth von x wird $a^2 + x^2$ ein Minimum?

108. Welche Werthe nimmt der Ausdruck $a^2 - x^2$ an, wenn man $a = 5$ und für x der Reihe nach $+ 3$, $+ 2$, $+ 1$, 0, $- 1$, $- 2$ und $- 3$ setzt, und für welchen Werth von x wird der Ausdruck ein Maximum?

109. Welche Regel läßt sich aus Nr. 107. und 108. ableiten, um zu erkennen, für welchen Werth von x ein Ausdruck ein Maximum oder ein Minimum wird?

110. Für welchen Werth von x wird die Summe der Produkte $(a + x)(b + x) + (a - x)(b - x)$ ein Minimum?

111. Für welchen Werth von x wird die Summe $(a + x)(b - x) + (a - x)(b + x)$ ein Maximum?

112. Eine Linie von 100 Fuß Länge in zwei solche Theile zu zerlegen, daß das Rechteck aus denselben ein Maximum werde.

113. Eine Linie von 24 Fuß Länge in zwei solche Theile zu zerlegen, daß die Summe der Quadrate über den Theilen möglichst klein werde.

114. In welche Summanden muß man eine Zahl a zerlegen, daß das Produkt derselben möglichst groß werde?

115. In welche Faktoren muß man eine Zahl a zerlegen, daß die Summe derselben möglichst klein werde?

116. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat den größten Inhalt?

117. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Inhalt hat den kleinsten Umfang?

118. Der Ausdruck $a + bx + x^2$ wird ein Minimum $(a - \frac{1}{4}b^2)$ für $x = -\frac{1}{2}b$; denn $a + bx + x^2 = a - \frac{1}{4}b^2 + (\frac{1}{2}b + x)^2$ u. s. w. nach Nr. 107.

119. Der Ausdruck $a + bx - x^2$ wird ein Maximum $(a + \frac{1}{4}b^2)$ für $x = \frac{1}{2}b$; denn $a + bx - x^2 = a + \frac{1}{4}b^2 - (\frac{1}{2}b - x)^2$ u. s. w. nach Nr. 108.

120. Was wird aus dem Ausdrucke $13 - 5x + x^2$, wenn man für x die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 setzt, für welchen Werth von x erreicht der Ausdruck sein Minimum, und wie groß ist das Minimum?

121. Was wird aus dem Ausdruck $10 + 7x - x^2$, wenn man für x die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 setzt, für welchen Werth von x wird derselbe ein Maximum, und wie groß ist dies Maximum?

122. Welchen Werth muß x haben, damit das Prod. $(a-x)(b+x)$ ein Maximum wird?

123. Welches von allen Dreiecken, deren Grundlinie und Höhe in Summe $= a$ sind, hat den größten Inhalt, und wie groß ist dieser?

124. Um wie viel muß man die lange Seite a eines Rechtecks kürzer und die kurze b länger machen, ohne den Umfang zu ändern, damit der Inhalt des Rechtecks ein Maximum wird? Wie groß ist der Inhalt des neuen Rechtecks, und um wie viel übertrifft das neue Rechteck das gegebene?

125. Welchen Werth muß x haben, wenn die Summe der Quadrate der Größen $a - x$ und $b + x$ ein Minimum werden soll?

126. Für welchen Werth von x wird $a + bx + cx^2$ ein Minimum, und wie groß wird dies Minimum? (Reduction auf 118.)

127. Für welchen Werth von x wird $a + bx - cx^2$ ein Maximum, und wie groß wird dies Maximum? (Reduction auf 119.)

128. Was wird auch dem Ausdrucke $15 - 7x + 2x^2$, wenn man darin für x die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 und 5 setzt, für welchen Werth von x erreicht der Ausdruck sein Minimum, und wie groß ist dies Minimum?

129. Was wird aus dem Ausdruck $(9 - 2x)^2 - (1 - 3x)^2$, wenn man darin für x die Werthe 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4, −5 setzt, für welchen Werth von x wird derselbe ein Maximum, und wie groß ist dies Maximum?

130. Welches in einen Kreis mit dem Radius r beschriebene Rechteck hat den größten Inhalt, welches den größten Umfang?

131. Wie ist die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a statt des Kreises gegeben ist?

132. Auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien bewegen sich zwei Körper A und B nach den Schnittpunkten hin mit den Geschwindigkeiten von m und n Fuß in der Sekunde. A ist jetzt noch a, B noch b Fuß vom Schnittpunkt entfernt. Wann werden beide Körper sich möglichst nahe kommen, und wie groß wird dann ihre gegenseitige Entfernung sein?

133. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn sich die Linien nicht rechtwinklig, sondern unter einem Winkel von 60 Grad schneiden? (Vgl. S. 210, Nr. 34.)

Eine andere Methode die Maxima und Minima aufzufinden ist folgende: Man setze den betreffenden Ausdruck $= y$, löse die Gleichung nach x auf und setze die sich ergebende Quadratwurzel $= 0$, so liefern die Wurzeln dieser Gleichung die Maxima und Minima von y, und der vor der Quadratwurzel stehende Ausdruck die zugehörigen Werthe von x. (Beweis!)

Manche Ausdrücke haben weder ein Maximum noch ein Minimum, besonders diejenigen, für welche die Quadratwurzel nicht 0 werden kann (134, b). Kann die Quadratwurzel nur auf eine Weise 0 werden (143), so hat y entweder ein Maximum oder ein Minimum; kann sie auf zweifache Weise 0 werden, so hat y im Allgemeinen ein Maximum und ein Minimum zugleich. — Es giebt auch Ausdrücke, welche nur Maxima oder nur Minima haben (134 a). Trigonometrische Functionen haben unzählige Maxima und Minima.

Eine dritte Methode für die Auffindung der Maxima und Minima ist folgende: Man setze den Ausdruck in x gleich demselben Ausdruck in x_1, vereinige die Glieder mit gleichen Koeffizienten, hebe durch $x - x_1$, setze $x_1 = x$, so liefert die sich ergebende Gleichung die gesuchten Werthe von x. (Beweis!)

Die erste Methode führt bei quadratischen Ausdrücken (135—139) am leichtesten und einfachsten zum Ziel. — Die zweite Methode hat den Vorzug, daß sie gleich zeigt, ob und warum ein Maximum oder Minimum eintritt. Man zerlegt den Radikanden der Quadratwurzel in Faktoren und sieht zu, ob ein größerer oder kleinerer Werth von y den Radikanden negativ, also die Wurzel imaginär macht. — Die dritte Methode ist von den drei angegebenen die allgemeinste und reicht auch für viele Fälle aus, die sich nach den beiden ersten Methoden nicht mehr behandeln lassen. — Noch allgemeiner ist die in XXXVI erörterte Methode.

Die Benennung Maximum und Minimum bezieht sich oft nur auf die zunächst liegenden Werthe. Daher kann das Minimum sehr wohl größer sein als das Maximum. (134, d). Ist man ungewiß, ob für einen Werth von x, z. B. für $x = 7$ ein Maximum oder ein Minimum eintritt, so sucht man den Werth des Ausdrucks etwa für $x = 6$ und $x = 8$. Sind die angrenzenden Werthe kleiner als der fragliche, so findet ein Maximum statt; sind sie größer, ein Minimum; ist der eine kleiner und der andere größer, keins von beiden. — Bei den Ausdrücken 145—148 findet meist nur ein Maximum oder ein Minimum statt; sonst muß man die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel in Betracht ziehen.

Untersuche nach einer der angegebenen Methoden, ob folgende Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum haben, für welchen Werth von x ein solches eintritt und wie groß dasselbe ist.

134. $x^2 + \frac{16}{x^2}$ $\quad \frac{x^2 - 9}{2x}$ $\quad 3x^2 + \frac{2}{x^3}$ $\quad \frac{3x}{2} + \frac{8}{x^3}$

135. $\frac{x^2 + 3}{x + 1}$ $\quad \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ $\quad \frac{x - 4}{x^2 - 7}$ $\quad \frac{x - 2}{x^2 + 5}$

136. $\frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4}$, $\frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$, $\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 7}$, $\frac{2x - 5}{x^2 - 6x + 11}$

137. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$, $\frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 - 2x + 2}$, $\frac{7x^2 + 2x + 3}{9x^2 + 6x - 2}$, $\frac{19 + 2x - x^2}{15 + 6x + x^2}$

138. $\frac{9}{x - 3} - \frac{1}{x - 5}$ $\quad \frac{9}{x - 1} - \frac{4}{x - 6}$

139. $\frac{4}{x - 3} - \frac{16}{x - 7}$ $\quad \frac{25}{7 - x} - \frac{9}{3 - x}$

140. $x^3 - x^2 - 16x + 10$ $\quad x^3 - 13x^2 - 64x + 32$

141. $x^3 - 11x^2 - 16x + 98$, $x^3 - 12x^2 + 45x - 10$

142. $x\sqrt{2x - 3}$, $x : \sqrt{2x - 3}$ $\quad x\sqrt{x^2 - 4}$, $x : \sqrt{x^2 - 4}$

143. $x + \sqrt{3 - 2x}$ $\quad \frac{1}{2}x + \sqrt{5 - x}$

144. $2x + \sqrt{13 - 4x}$ $\quad \frac{1}{2}x - \sqrt{x - 3}$

145. $2x + \sqrt{5 - x^2}$ $\quad 2x - \sqrt{x^2 - 12}$

146. $2x + \sqrt{x^2 - 4x - 23}$ $\quad x + \sqrt{31 + 2x - x^2}$

147. $2x + \sqrt{61 - 16x + x^2}$ $\quad 2x - \sqrt{61 + 16x - x^2}$

148. $x - \sqrt{2x^2 + 10x + 13}$ $\quad 3x + \sqrt{24x - 54 - x^2}$

XXVII.

Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Für die Lösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten lassen sich nicht so allgemeine Regeln geben wie für die Lösung der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

Kommen in den Gleichungen nur x^2 und y^2, oder ihre reziproken Werthe vor, so verfährt man wie bei den einfachen Gleichungen und bestimmt diese Größen zunächst. Dann hat man auch die Unbekannten selber (Nr. 1.—4.).

Ist die eine Gleichung eine einfache, in welcher also x und y nur in der ersten Potenz vorkommen, so führt die Substitutionsmethode