Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XVII. Imaginäre Größen

urn:nbn:de:bsz:31-269430

XVII.

Imaginäre Größen.

Unter imaginären oder unmöglichen Größen versteht man im Allgemeinen Wurzeln von einem geraden Grade aus negativen Zahlen (S. 49). Die einfachste imaginäre Größe ist $\sqrt{-1}$. Durch diese lassen sich mit Hinzuziehung reeller Größen alle imaginären Größen ausdrücken. Wegen dieser Wichtigkeit der Größe $\sqrt{-1}$ pflegt man sie mit dem Buchstaben i zu bezeichnen. Dann sind alle imaginären Größen auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ oder $p + qi$ zu bringen, wo p und q reelle Größen sind. Ist $p = 0$, so bleibt nur qi, eine rein imaginäre Größe.

Als Wurzelgrößen sind die imaginären Größen den über Wurzelgrößen aufgestellten Gesetzen unterworfen. Man hat hier besonders zu merken:

$$1.\ \sqrt{-a} = i\sqrt{a}$$

$$2.\ (\sqrt{-a})^2 = -a,\ i^2 = -1$$

$$3.\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}.$$

In den nachstehenden Aufgaben soll der gegebene Ausdruck auf die einfachste Form gebracht oder die angedeutete Operation ausgeführt werden. In Nr. 54.—70. sind die Wurzeln aus dem Nenner fortzuschaffen. In Nr. 71.—75. soll das Reinimaginäre vom Reellen gesondert, der Ausdruck also auf die Form $p + qi$ gebracht werden. Bei den Aufgaben, in welchen das Imaginäre noch nicht durch i ausgedrückt ist, wird man meistens am besten thun, das i zunächst einzuführen und dann erst die Reduktion oder Operation vorzunehmen. In den Resultaten soll das Imaginäre stets durch i bezeichnet werden.

1. $\sqrt{-36}$	$\sqrt{-49}$	$\sqrt{-81}$	$\sqrt{-100}$
2. $\sqrt{-4}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt[4]{-16}$	$\sqrt[3]{-125}$
3. $\sqrt{-a^2}$	$\sqrt{-b^4}$	$\sqrt{-x^{2n}}$	$\sqrt[3]{-x^{3n}}$
4. $\sqrt{-8}$	$\sqrt{-12}$	$\sqrt{-48}$	$\sqrt{-96}$
5. $5\sqrt{-40}$	$2\sqrt[3]{-40}$	$3\sqrt{-72}$	$4\sqrt[3]{-72}$
6. $\sqrt{-a^2b}$	$\sqrt{-3ax^4}$	$\sqrt{-9x^2y}$	$2\sqrt{-8x^2y^3}$
7. $\sqrt{-x}.\sqrt{-x}$,	$\sqrt{-x}.\sqrt{-y}$,	$\sqrt{-a}.\sqrt{-1}$,	$\sqrt{-a^2}.\sqrt{-1}$
8. $\sqrt{3}.\sqrt{-b}$,	$\sqrt{-8}.\sqrt{-12}$,	$\sqrt{15}.\sqrt{-5}$,	$\sqrt{-5}.\sqrt{-20}$
9. i^2	i^3	i^4	i^5
10. i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}
10_1. $ai\,.\,bi$	$i\sqrt{a}\,.\,i\sqrt{b}$	$2i\,.\,5i$	$7i\,.\,i^2\sqrt{7}$

$10_2.$ $i\sqrt{-a}$ $\quad i\sqrt{-x^2}$ $\quad i\sqrt[3]{-x^3}$ $\quad i\sqrt{a}\,.\sqrt{-a}$

$10_3.$ $i\sqrt{x}\,.\sqrt{-xy^2}$, $3i\sqrt{-n}\,.\sqrt{4n}$, $5i^2\sqrt{-9n}$, $\quad i^3\sqrt{-5p^2}$

$10_4.$ i^{4n} $\quad i^{4n+1}$ $\quad i^{4n-1}$ $\quad i^{4n-2}$

$10_5.$ $\sqrt{-i^2}$ $\quad \sqrt{-i^3}$ $\quad \sqrt{-i^4}$ $\quad \sqrt{-i^5}$

11. $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-3}}$ $\quad \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ $\quad \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-6}}$

12. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ $\quad \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$ $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$ $\quad \frac{\sqrt{-ax}}{\sqrt{-x}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ $\quad \frac{a}{\sqrt{-a}}$ $\quad \frac{a^2}{\sqrt{-a^2}}$ $\quad \frac{a^3}{\sqrt[3]{-a^3}}$

$13_1.$ $\frac{1}{i^2}$ $\quad \frac{1}{i^3}$ $\quad \frac{1}{i^4}$ $\quad \frac{1}{i^5}$

$13_2.$ $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$ $\quad \frac{b}{i\sqrt{b}}$ $\quad \frac{-c}{i\sqrt{-c^2}}$ $\quad -\frac{di^3}{\sqrt{-d^2}}$

14. $\sqrt{a-b}\,.\sqrt{b-a}$ 15. $\sqrt{3x-5y}\,.\sqrt{5y-3x}$

16. $(3+5i)(7+4i)$ 17. $(2-5i)(8-3i)$

18. $(7-8i)(5+6i)$ 19. $(8-9i)(8-7i)$

20. $(11-12i)(11-10i)$ 21. $(3+i\sqrt{2})(5+7i\sqrt{2})$

22. $(5-2i\sqrt{7})(6-2i\sqrt{7})$ 23. $(7+3i\sqrt{8})(5-4i\sqrt{2})$

24. $(a+bi)(c+di)$ 25. $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{c}+i\sqrt{d})$

26. $(\sqrt{3}-i\sqrt{6})(\sqrt{2}-i\sqrt{6})$ 27. $(\sqrt{10}-i\sqrt{18})(\sqrt{5}-i\sqrt{45})$

28. $(2\sqrt{7}+3i\sqrt{8})(3\sqrt{7}-10i\sqrt{2})$

29. $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$

30. $(a+bi)(a-bi)$ 31. $(ai+b)(ai-b)$

32. $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$

33. $(a\sqrt{b}+ci\sqrt{d})(a\sqrt{b}-ci\sqrt{d})$

34. $(3+2i)(3-2i)$ 35. $(5+7i)(5-7i)$

36. $(3\sqrt{3}+2i\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2i\sqrt{2})$

37. $(2\sqrt{5}+5i\sqrt{2})(2\sqrt{5}-5i\sqrt{2})$

$37_1.$ $\sqrt{1+i}\,.\sqrt{1-i}$ $\quad 37_2.$ $\sqrt{3+4i}\,.\sqrt{3-4i}$

$37_3.$ $\sqrt{33+56i}\,.\sqrt{33-56i}$ $\quad 37_4.$ $\sqrt{55i+48}\,.\sqrt{55i-48}$

38. $(\sqrt{a}+\sqrt{-a})^2$ 39. $(1+i)^2$
40. $(3+2i\sqrt{2})^2$ 41. $(5-2i\sqrt{6})^2$
42. $(a+bi)^2$ 43. $(\sqrt{a}-i\sqrt{b})^2$
43_1. $(a+bi)^2+(a-bi)^2$ 43_2. $(a+bi)^2-(a-bi)^2$
43_3. $(a+bi)^2+(ai-b)^2$ 43_4. $(7+5i)^2+(7-5i)^2$
43_5. $(\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i})^2$ 43_6. $(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i})^2$
44. $(1+i)^3$ 44_1. $(3-2i)^3$
45. $(1+i)^4$ 45_1. $(a+bi)^4$
45_2. $(a+bi)^3+(a-bi)^3$ 45_3. $(m+ni)^3-(m-ni)^3$
46. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ 47. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$
47_1. $(p+qi)^4+(p-qi)^4$ 47_2. $(p+qi)^4-(pi+q)^4$
47_3. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$ 47_4. $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$
48. $(\sqrt{5}+i\sqrt{7})^4+(\sqrt{5}-i\sqrt{7})^4$ 49. $(1+i\sqrt{5})^4+(1-i\sqrt{5})^4$
50. $(5+2i\sqrt{6})^4+(5-2i\sqrt{6})^4$ 50_1. $(3+2i\sqrt{2})^4-(3-2i\sqrt{2})^4$
50_2. $(a+bi)^5+(a-bi)^5$ 50_3. $(a+bi)^5-(a-bi)^5$
50_4. $(1+i)^5+(1-i)^5$ 51. $(1+i\sqrt{2})^5+(1-i\sqrt{2})^5$
52. $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$ 53. $\left(\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)^5$
53_1. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$ 53_2. $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6$

---

54. $\frac{4}{1+\sqrt{-3}}$ 55. $\frac{64}{1+3\sqrt{-7}}$ 56. $\frac{29}{4+7\sqrt{-5}}$
57. $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$ 58. $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ 59. $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{-1}}$
60. $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$ 61. $\frac{5-29i\sqrt{5}}{7-3i\sqrt{5}}$ 62. $\frac{1+33i\sqrt{3}}{4+3i\sqrt{3}}$
63. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ 64. $\frac{1+i}{1-i}$ 65. $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$
65_1. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ 65_2. $\frac{1-i^3}{1-i}$ 65_3. $\frac{1+i^3}{1-i}$
65_4. $\frac{1+i}{(1-i)^3}$ 65_5. $\frac{1-i^3}{(1+i)^3}$ 65_6. $\frac{m+ni}{m-ni}$
66. $\frac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}$ 67. $\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$ 67_1. $\frac{a-bi}{ai+b}$

$67_2.\ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$ $\qquad$ $67_3.\ \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

$67^7.\ \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1-i)^2}$ $\qquad$ $67_5.\ \frac{1}{(1+i)^4} - \frac{1}{(1-i)^3}$

$67_6.\ \frac{\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}-\sqrt{y-x}}$ $\qquad$ $67_7.\ \frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{x-i\sqrt{1-x^2}}$

$68.\ \frac{a+bi}{c+di} + \frac{a-bi}{c-di}$ $\qquad$ $69.\ \frac{a+bi}{c+di} - \frac{a-bi}{c-di}$

$70.\ \frac{a+bi}{a-bi} + \frac{c-di}{c-di}$ $\qquad$ $70_1.\ \frac{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}{\sqrt{x}-i\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}+i\sqrt{x}}{\sqrt{y}-i\sqrt{x}}$

$70_2.\ \frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$

---

71. $\sqrt{3+4i} \pm \sqrt{3-4i}$, $\qquad$ $\sqrt{4+3i} \pm \sqrt{4-3i}$

72. $\sqrt{5+2i\sqrt{6}} \pm \sqrt{5-2i\sqrt{6}}$, $\sqrt{11+4i\sqrt{3}} \pm \sqrt{11-4i\sqrt{3}}$

73. $\sqrt{5+12i}$, $\sqrt{9-40i}$, $\qquad$ $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$, $\sqrt{1-6i\sqrt{10}}$

74. $\sqrt{7+30i\sqrt{2}}$, $\sqrt{3+2i\sqrt{10}}$, $\sqrt{1-4i\sqrt{14}}$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

75. $\sqrt{a+i\sqrt{x^2-a^2}} \pm \sqrt{a-i\sqrt{x^2-a^2}}$

XVIII.

Von den Logarithmen.

I. $\log ab = \log a + \log b$ $\qquad$ II. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

III. $\log a^n = n \cdot \log a$ $\qquad$ IV. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$

A. Einführung in die Lehre von den Logarithmen.

Da b^x im Allgemeinen nicht gleich x^b ist, man also bei einer Potenz Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen kann, ohne den Werth der Potenz zu ändern, so muß das Potenziren zwei Umkehrungen haben. Die eine, wo man die Basis b oder die Wurzel sucht, das Radiziren, ist im XIII. Abschnitt vorgekommen; die andere, wo man den Exponenten x sucht, ist das Logarithmiren.

Wenn in der Gleichung $b^x = a$ die Größen b und x gegeben sind und die Größe a gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Potenzirens, und man nennt a oder b^x die x Potenz von b. Wenn von den drei Größen in der Gleichung $b^x = a$ die Größen a und x gegeben sind und b gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Radizirens; man nennt b die x. Wurzel aus a und schreibt $\sqrt[x]{a} = b$. Wenn von den drei Größen in der Gleichung $b^x = a$ die Größen a und b gegeben sind und x, der Exponent, gesucht wird, so geschieht dies vermittelst des Logarithmirens; man nennt x den