

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XIII. Wurzeln oder irrationale Größen

[urn:nbn:de:bsz:31-269430](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-269430)

72. $(3x + x^{-1} + 2)(3x + x^{-1} - 2)$

73. $(8x^2 - 5x^{-2} + 3)(3x^2 + 4x^{-2} - 5)$

74. $(9x^2 + 2x^{-2} + 6)(9x^2 + 2x^{-2} - 6)$

75. $(25x^2 + 2x^{-2} + 10)(25x^2 + 2x^{-2} - 10)$

76. $(6x^2 - 3x + 4 - 2x^{-1})(6x^2 + 3x - 4 - 2x^{-1})$

XIII.

Wurzeln oder irrationale Größen.

Unter Wurzel (radix) einer Zahl versteht man eine Zahl, welche wiederholt als Faktor gesetzt jene Zahl giebt. Da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist, so ist 2 eine Wurzel der Zahl 8. Da $3 \cdot 3 = 9$ ist, so ist 3 eine Wurzel der Zahl 9. Da $aaaa = a^4$ ist, so ist a eine Wurzel von a^4 . Bestimmter nennt man in diesem Falle a eine Wurzel des 4. Grades oder die 4. Wurzel aus a^4 und schreibt das $\sqrt[4]{a^4} = a$. Ebenso ist $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2 \cdot 2 \cdot 2$, d. h. $2^3 = 8$ ist; $\sqrt[3]{81} = 3$ weil $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ oder $3^4 = 81$ ist; $\sqrt[5]{64} = 2$, weil $2^5 = 64$ ist.

Allgemein ist $\sqrt[n]{a} = b$, wenn $b^n = a$ ist. Die Wurzel des n. Grades aus a oder die n. Wurzel aus a bedeutet die Zahl (b), welche nmal als Faktor gesetzt oder mit n potenziert a giebt.

Das Zeichen $\sqrt{\quad}$ (ursprünglich ein r) nennt man das Wurzelzeichen; die Zahl a, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, heißt der Radikand; die Zahl n, mit welcher man die Wurzel b potenzieren muß, um den Radikanden zu erhalten, heißt Wurzelexponent. Die Wurzel aus einer Zahl suchen oder ausziehen heißt radizieren.

Da nach dem Obigen

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ und ebenso } (\sqrt[n]{a})^n = a$$

sein muß, so heben sich Wurzelexponent und Potenzexponent gegenseitig auf; Potenzieren und Radizieren sind somit entgegengesetzte Operationen.

Aus der Definition der Wurzel folgt ferner auch, daß

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4, \quad \sqrt[n]{a^{nx}} = a^x$$

sein muß. Aus einer Potenz zieht man demnach die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividirt.

Die Gleichungen $b^n = a$ und $\sqrt[n]{a} = b$ bedingen sich gegenseitig. Wenn die eine gilt, so muß auch die andere gelten. Hat man beim Potenzieren $b^n = a$, so sind b und n gegeben, es wird a gesucht.

Beim Radizieren verwandelt sich diese Gleichung in $\sqrt[n]{a} = b$; es sind

a und n gegeben, es wird b gesucht. Das Radizieren ist mithin eine Umkehrung des Potenzirens. Was beim Potenziren Potenz heißt, heißt beim Radizieren Radikand; was beim Potenziren Basis heißt, heißt beim Radizieren Wurzel; was beim Potenziren Potenzexponent heißt, heißt beim Radizieren Wurzelexponent.

Der Wurzelexponent 2 wird meistens fortgelassen. Man schreibt statt $\sqrt[2]{a}$ nur \sqrt{a} , und wie man a^2 meistens aQuadrat liest, so liest man \sqrt{a} meistens Quadratwurzel aus a oder kurz nur Wurzel aus a . Ebenso liest man $\sqrt[3]{a}$ meistens Kubikwurzel aus a .

Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl, welche sich durch eine ganze Zahl nicht angeben läßt, läßt sich auch nicht durch eine ganze Zahl und einen Bruch angeben, sondern nur genähert. Ebenso kann eine Wurzel aus einem Bruch, der auf seine einfachste Form gebracht ist, weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch sein, wenn sich die Wurzel nicht aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen läßt, kann also ebenfalls nur genähert angegeben werden. Wurzeln, welche sich nur genähert angeben lassen, nennt man irrational. Wurzeln, welche sich genau in ganzen Zahlen oder Brüchen angeben lassen, heißen rational. Die rationalen Zahlen sind entweder ganze, oder gebrochene; die irrationalen Zahlen sind weder ganze noch gebrochene.

Die Wurzel aus 9 ist 3, mithin ist $\sqrt{9}$ eine rationale Größe. $\sqrt{11}$ ist eine irrationale Größe und läßt sich nur genähert angeben.

Eine Wurzel von einem geraden Grade kann positiv und negativ genommen werden, ist also doppeldeutig. So kann $\sqrt{a^2} = +a$ u. $-a$ gesetzt werden, da sowohl $(+a)^2$ als auch $(-a)^2$ wieder a^2 giebt. Ebenso kann $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ oder $= b - a$ gesetzt werden, d. h. $\pm(a - b)$, $\sqrt{9} = \pm 3$. Aber $\sqrt{(+a)^2}$ darf nur $= +a$, $\sqrt{(-a)^2}$ nur $= -a$ gesetzt werden.

Eine Wurzel von einem geraden Grade aus einer negativen Zahl ist eine unmögliche Größe, da keine Zahl, mit einer geraden Zahl potenziert, ein negatives Resultat geben kann. So ist $\sqrt{-9}$ eine unmögliche Größe, da weder $+3$, noch -3 paßt. Ebenso ist allgemein $\sqrt[n]{-a}$ eine unmögliche Größe. Man weiß von ihr nur, daß sie, mit $2n$ potenziert, $-a$ giebt. Die unmöglichen Größen werden imaginäre Größen genannt, denen entgegen alle übrigen Größen reelle heißen.

Eine Wurzel von einem ungeraden Grade aus einer positiven Zahl muß wieder positiv, aus einer negativen Zahl muß wieder negativ sein. So ist $\sqrt[3]{+8} = +2$, weil $(+2)^3 = +8$ ist; $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $(-2)^3 = -8$ ist. Aber $\sqrt[3]{+8}$ kann nicht $= -2$, $\sqrt[3]{-8}$ nicht $= +2$ sein.

Ueber die Rechnung mit Wurzeln oder Wurzelgrößen gelten folgende Sätze:

Wie
Werden?
Formel von

1. $\sqrt{7}$,

2. $\sqrt[3]{0}$,

3. $(\sqrt[3]{8})^3$

4. $\sqrt[3]{a}$,

5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

6. \sqrt{x}

7. $\sqrt{a^2}$

8. $\sqrt{m^2}$

9. $\sqrt{x^2}$

10. $\sqrt[3]{a^3}$

11. $\sqrt[3]{81}$

12. $\sqrt[3]{4}$

13. $\sqrt[3]{4}$

14. $(\sqrt[3]{a})^3$

15. $(\sqrt[3]{2})^3$

16. $(a/\sqrt{a})^2$

17. $(4/\sqrt{x})^2$

18. $(4/\sqrt{a})^2$

19. $(8/\sqrt{a})^2$

$$1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3. \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$4. \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot x]{a^{m \cdot x}}$$

$$5. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Wie werden diese Sätze bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten? Vergiß dabei den Satz nicht, der entsteht, wenn du die Formel von rechts nach links liest.

1. Ueber die Definition der Wurzel.

- | | | | |
|---|-------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{7}$, | \sqrt{a} , | $\sqrt[3]{1}$, | $\sqrt[3]{1}$ |
| 2. $\sqrt[3]{0}$, | $\sqrt[3]{1}$, | $\sqrt[0]{a}$, | $\sqrt{a^0}$ |
| 3. $(\sqrt[3]{8})^3$, | $\sqrt[3]{8^3}$, | $(\sqrt[3]{16})^4$, | $\sqrt[3]{16^4}$ |
| 4. $\sqrt[3]{a^7}$, | $(\sqrt[3]{x})^3$, | $\sqrt{y^2}$, | $\sqrt{m^4}$ |
| 5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, | $\sqrt[3]{3x} \cdot \sqrt[3]{3x}$, | $(\sqrt{ay})^2$, | $\sqrt{(a-y)^2}$ |
| 6. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}$, | $(\sqrt{2x-1})^2$, | $\sqrt[3]{(ax-b)^3}$, | $\sqrt[3]{(x-y)^4}$ |
| 7. $\sqrt{a^6}$, | $\sqrt{b^{10}}$, | $\sqrt{c^{14}}$, | $\sqrt{d^{2n}}$ |
| 8. $\sqrt[3]{m^3}$, | $\sqrt[3]{n^6}$, | $\sqrt[3]{p^{12}}$, | $\sqrt[3]{q^{3x}}$ |
| 9. $\sqrt[4]{x^4}$, | $\sqrt[5]{y^{10}}$, | $\sqrt[5]{u^{30}}$, | $\sqrt[7]{v^{7x}}$ |
| 10. $\sqrt[5]{a^5}$, | $\sqrt[5]{b^{25}}$, | $\sqrt[5]{c^{5x}}$, | $\sqrt[n]{d^{np}}$ |
| 11. $\sqrt[4]{81}$, | $\sqrt[4]{32}$, | $\sqrt[4]{64}$, | $\sqrt[4]{729}$ |
| 12. $3\sqrt[4]{4}$, | $7\sqrt[4]{9}$, | $5\sqrt[4]{36}$, | $10\sqrt[4]{49}$ |
| 13. $\sqrt[4]{4}$, | $6\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, | $8\sqrt[4]{\frac{9}{16}}$, | $10\sqrt[4]{4\frac{2}{3}}$ |
| 14. $(5\sqrt{a})^2$, | $(7\sqrt{x})^2$, | $(a\sqrt{b})^2$, | $(x\sqrt{x})^2$ |
| 15. $(5\sqrt[2]{2})^2$, | $(3\sqrt[3]{3})^2$, | $(2\sqrt[5]{5})^2$, | $(10\sqrt[7]{10})^2$ |
| 16. $(a\sqrt{a})^3$, | $(a\sqrt[3]{a})^3$, | $(2\sqrt[5]{5})^3$, | $(2\sqrt[3]{5})^3$ |
| 17. $(4\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt{a-b})^2 + (5\sqrt{b-x})^2$ | | | |
| 18. $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{7b-4a})^2 - (6\sqrt{b})^2$ | | | |
| 19. $(8\sqrt{a})^2 - (12\sqrt{b})^2 + (4\sqrt{9b-4a-3x})^2 + (7\sqrt{x})^2$ | | | |

2. Vereinfachung des Radikanden. Fortschaffung des Nenners unter der Wurzel.

- | | | | |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sqrt{a^2b}$, | $\sqrt{ax^6}$, | $\sqrt[3]{5x^4}$, | $\sqrt[5]{3x^5y}$ |
| 2. $\sqrt{4ab^2}$, | $\sqrt{9a^2x}$, | $\sqrt{7x^2y^2}$, | $\sqrt{ax^4y^2}$ |
| 3. $\sqrt{5abc^2}$, | $\sqrt{9a^4b^2c}$, | $\sqrt{16a^2bc^4}$, | $\sqrt{7a^2b^4x^2}$ |
| 4. $\sqrt{a^2b^2}$, | $\sqrt{a^2 + b^2}$, | $\sqrt{a^2 - b^2}$, | $\sqrt{(a + b)^2}$ |
| 5. $\sqrt{1 + x^2}$, | $\sqrt{1 - x^2}$, | $\sqrt{(1 + x)^2}$, | $\sqrt{(1 - x)^2}$ |
| 6. $\sqrt[3]{8ab^3}$, | $\sqrt[3]{27a^3x}$, | $\sqrt[3]{11x^3y^3}$, | $\sqrt[3]{12x^6y^9}$ |
| 7. $\sqrt[3]{a^3b^3}$, | $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, | $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$, | $\sqrt[3]{(a - b)^3}$ |
| 8. $\sqrt{x^3}$, | $\sqrt{x^7}$, | $\sqrt{x^{2n+1}}$, | $\sqrt{x^{2n-1}}$ |
| 9. $\sqrt[3]{x^4}$, | $\sqrt[3]{x^3}$, | $\sqrt[3]{x^{3n+1}}$, | $\sqrt[3]{x^{3n-2}}$ |
| 10. $\sqrt[n]{x^{n+1}}$, | $\sqrt[n]{x^{n+3}}$, | $\sqrt[n]{5x^{2n+1}}$, | $\sqrt[n]{ax^{2n-1}}$ |
| 11. $\sqrt{ab^3c^4}$, | $\sqrt{4a^2b^2c^3}$, | $\sqrt{7x^4y^9z^{11}}$, | $\sqrt{9x^3y^8z^{10}}$ |
| 12. $\sqrt[3]{ab^3c^4}$, | $\sqrt[3]{8a^5b^2c^3}$, | $\sqrt[3]{7x^2y^9z^4}$, | $\sqrt[3]{9x^3y^8z^{10}}$ |
| 13. $\sqrt{a^2 + b^4}$, | $\sqrt{a^6 + b^6}$, | $\sqrt{a^2(1 + b^2)}$, | $\sqrt[3]{a^3(1 - b)^3}$ |
| 14. $\sqrt{28}$, | $\sqrt{45}$, | $\sqrt{18}$, | $\sqrt{24}$ |
| 15. $\sqrt{27}$, | $\sqrt{32}$, | $\sqrt{96}$, | $\sqrt{243}$ |
| 16. $\sqrt{320}$, | $\sqrt{405}$, | $\sqrt{363}$, | $\sqrt{432}$ |
| 17. $3\sqrt{8}$, | $5\sqrt{80}$, | $8\sqrt{75}$, | $6\sqrt{150}$ |
| 18. $3\sqrt{12a^2}$, | $4\sqrt{20b^2}$, | $5\sqrt{40c}$, | $7\sqrt{48ax^2}$ |
| 19. $\frac{5}{2}\sqrt{24a^3}$, | $\frac{4}{3}\sqrt{27b^5}$, | $\frac{5}{6}\sqrt{45c^6}$, | $\frac{5}{3}\sqrt{80x^3y^4}$ |
| 20. $1\frac{1}{4}\sqrt{72a^2}$, | $7\frac{1}{2}\sqrt{96b^7}$, | $3\frac{1}{3}\sqrt{54c^9}$, | $2\frac{1}{5}\sqrt{125x^2y^3}$ |
| 21. $\sqrt[3]{16}$, | $\sqrt[3]{24}$, | $\sqrt[3]{54}$, | $\sqrt[3]{72}$ |
| 22. $\sqrt[3]{80}$, | $\sqrt[3]{-81}$, | $\sqrt[3]{250}$, | $\sqrt[3]{-648}$ |
| 23. $2\sqrt[3]{48}$, | $7\sqrt[3]{108}$, | $5\sqrt[3]{-320}$, | $8\sqrt[3]{-375}$ |
| 24. $\sqrt{\frac{3}{4}}$, | $\sqrt{\frac{5x}{9}}$, | $8\sqrt{\frac{7a}{16x^2}}$, | $15\sqrt{\frac{11b}{25y^2}}$ |
| 25. $\sqrt{\frac{1}{2}}$, | $\sqrt{\frac{1}{3}}$, | $\sqrt{\frac{3}{5}}$, | $\sqrt{\frac{7}{8}}$ |
| 26. $\sqrt{\frac{5}{7}}$, | $\sqrt{\frac{9}{8}}$, | $\sqrt{\frac{5}{14}}$, | $\sqrt{\frac{1}{17}}$ |
| 27. $\sqrt{\frac{1}{2,8}}$, | $\sqrt{\frac{1}{0,75}}$, | $\sqrt{\frac{3}{0,5}}$, | $\sqrt{\frac{4}{0,7}}$ |

28. $\sqrt{\frac{5^4}{3^4}}$
 29. $a\sqrt{\frac{1}{b}}$
 30. $\sqrt{\frac{2a^2}{3b^3}}$
 31. $2a\sqrt{\frac{1}{b}}$
 32. $7ab\sqrt{\frac{1}{c}}$
 33. $\sqrt{\frac{a^4-b^4}{x^2}}$
 34. $\sqrt{\frac{a^4}{x^4-2}}$
 35. $\sqrt{16}$
 36. $\sqrt{\frac{1}{11}}$
 37. $\frac{1}{5}\sqrt{11}$
 38. $\frac{1}{2}\sqrt{11}$
 38. \sqrt{x}
 38. $\sqrt{3}$
 38. $\sqrt{\frac{3}{8}}$
 39. $\sqrt{72}$
 40. $\sqrt{24}$
 41. $\sqrt{1024}$
 1. $\sqrt{3} +$
 2. $\sqrt{3} +$

28. $\sqrt{\frac{5,4}{2,4}}$, $\sqrt{\frac{0,8}{3,6}}$, $\sqrt{\frac{4,4}{0,06}}$, $\sqrt{\frac{0,15}{5,4}}$,
 29. $a\sqrt{\frac{x}{a}}$, $b\sqrt{\frac{x^2}{b}}$, $c\sqrt{\frac{x^3}{c}}$, $c\sqrt[3]{\frac{x^3}{c}}$
 30. $\sqrt{\frac{2a^2}{3b^2}}$, $\sqrt{\frac{3a^2}{5x^3}}$, $\sqrt{\frac{5a^3}{6x^5}}$, $\sqrt{\frac{7a^3}{10b}}$,
 31. $2a\sqrt{\frac{5}{8a^2}}$, $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{11}{12}a^3}$, $2ax\sqrt{\frac{17x^2}{24a}}$, $\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{13a^7}{18x}}$
 32. $7ab\sqrt{\frac{81a^2}{98b^2}}$, $20b^3\sqrt{\frac{31a}{50b^3}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{45}a^4}$, $2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{28}{75}x^3}$
 33. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2y^2}}$, $\sqrt{\frac{a^2(1+b^2)}{x^2(1+y^2)}}$, $\sqrt{\frac{a^2(1+b)^2}{x^2(1-y)^2}}$, $\sqrt{\frac{a+b^2}{(x+y)^2}}$
 34. $\sqrt{\frac{a^4+b^6}{a^4b^6c^2}}$, $\sqrt{\frac{xy^3z^5}{x+y^3}}$, $\sqrt{\frac{(a^2+b^4)c^6}{x^2y^2(1+z^4)}}$, $\sqrt{\frac{a^2(b+c^2)}{(x+y^2)^2}}$
 35. $\sqrt{16+9}$, $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$
 36. $\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{5}{18}-\frac{1}{36}}$, $\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{9}{4}}$
 37. $\frac{1}{7}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$, $\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}$, $\frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{1}{25}}$
 38. $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}$, $\frac{3}{8}\sqrt{1-\frac{1}{64}}$, $\frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{100}}$
 38₁. $\sqrt{ax^2-bx^2+7x^2}$, $\sqrt{a^3+2a^2b+a^2c}$
 38₂. $\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$, $\sqrt{5x^3-20x^2+20x}$
 38₃. $\sqrt{3a^2c^3-6abc^3+3b^2c^3}$, $\sqrt{18x^2y-60xy^3+50y^5}$
 38₄. $\sqrt{\frac{a^3-2a^2+a}{ax^2+bx^2}}$, $\sqrt{\frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{9(a-b)}}$
 38₅. $\sqrt{\frac{2a^3-8a^2+8a}{8x-8x^2+2x^3}}$, $\sqrt{\frac{2x^3-12x^2+18x}{50y-20y^2+2y^3}}$

39. Wenn $\sqrt{50} = a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{72}$ und $\sqrt{98}$?

40. Wenn $\sqrt{\frac{3}{5}} = a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{60}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{3\frac{3}{4}}$, $\sqrt{5\frac{3}{2}}$?

41. Wenn $\sqrt[3]{250} = a$ ist, wie groß sind dann $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{1024}$?

3. Addition und Subtraktion der Wurzeln.

1. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$, $8\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$, $9\sqrt{5} - \sqrt{5}$
 2. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$

3. $a\sqrt{x} - \sqrt{x}$, $a\sqrt{x} - b\sqrt{x}$, $a\sqrt{x} - b\sqrt[3]{x}$
4. $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a}$
5. $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2} - 6\sqrt{b}$
6. $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a} - \sqrt[5]{a^2} - 3\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[7]{a^3}$
7. $\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{4x} - \sqrt{8x} + \sqrt{12x}$
8. $2\sqrt{a} + 5\sqrt{b} - x\sqrt{a} - c\sqrt{b} + \sqrt{(x-1)^2a} + \sqrt{bc^2}$
9. $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 4\sqrt{a} - 5\sqrt{b} + \sqrt{4a} + \sqrt{9b}$
10. $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}$
11. $5\sqrt{x} - 7\sqrt{y} + 2\sqrt{2x} + 8\sqrt{y} - \sqrt{4y} - \sqrt{8x}$
12. $6\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{3x} - 2\sqrt{4x} + \sqrt{12x} - \sqrt{18x}$
13. $4\sqrt{a^2x} + 3\sqrt{b^2x} + 2\sqrt{c^2x} + \sqrt{d^2x} - 2\sqrt{(b+d)^2x}$
14. $7\sqrt{4x} + 4\sqrt{9x} + 3\sqrt{45x} - 5\sqrt{36x} - 2\sqrt{80x}$
15. $2\sqrt{81a} - 3\sqrt{24a} + 5\sqrt{36a} + 2\sqrt{54a} - 4\sqrt{100a}$
16. $4\sqrt{3a} - 7\sqrt{12a^2} + 5\sqrt{48a} + 6\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{75a}$
17. $3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{32} - 5\sqrt[3]{50} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{98}$
18. $7\sqrt[3]{12} - 5\sqrt[3]{27} + 8\sqrt[3]{48} - 6\sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{108}$
19. $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{-54} - 6\sqrt[3]{-128} + 7\sqrt[3]{-250} + 2\sqrt[3]{432}$
20. $7\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{-192} + 2\sqrt[3]{-375} - \sqrt[3]{1029}$
21. $\sqrt{(a+b)^2x} + \sqrt{(a-b)^2x} - \sqrt{a^2x} + \sqrt{(1-a)^2x} - \sqrt{x}$
22. $\sqrt{4 + 4x^2} + \sqrt{9 + 9x^2} + \sqrt{a^2 + a^2x^2} - 5\sqrt{1 + x^2}$
23. $\sqrt{a-b} + \sqrt{16a-16b} + \sqrt{ax^2-bx^2} - \sqrt{9(a-b)}$

4. Multiplikation gleichnamiger Wurzeln.

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$, $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$
2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$, $\sqrt{7} \cdot \sqrt{42}$
3. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$, $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$, $\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}$
4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$
5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$, $2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3x}$, $5\sqrt{2a} \cdot 3\sqrt{5x}$
6. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$, $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{x}$, $\sqrt{y} \cdot \sqrt{8y}$

7. $a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{x}$, $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$, $7\sqrt{x} \cdot a\sqrt{x}$
8. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$, $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$, $\sqrt{6x} \cdot \sqrt{8x}$
9. $\sqrt{6x} \cdot \sqrt{10x}$, $\sqrt{3y} \cdot \sqrt{6y}$, $\sqrt{5z} \cdot \sqrt{35z}$
10. $\sqrt{7a} \cdot \sqrt{21a}$, $\sqrt{10b} \cdot \sqrt{15b}$, $\sqrt{14c} \cdot \sqrt{70c}$
11. $\sqrt{d^3} \cdot \sqrt{d^3}$, $\sqrt{b^5} \cdot \sqrt{b^7}$, $\sqrt{c^7} \cdot \sqrt{7c}$
12. $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p^9}$, $\sqrt{5q} \cdot \sqrt{q^5}$, $\sqrt{q^{n+1}} \cdot \sqrt{q^{n-1}}$
13. $\sqrt[3]{2d^2} \cdot \sqrt[3]{4d}$, $\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$, $\sqrt[3]{25y^2} \cdot \sqrt[3]{50y^2}$
14. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^2} \cdot \sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^2} \cdot \sqrt[n]{ax}$
15. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{x}{a}}$, $a \cdot \sqrt{\frac{x}{a^2}}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{x}{a^3}}$
16. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{5x}{4a}}$, $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{\frac{7x}{6a}}$
17. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{\frac{3a}{2x}}$, $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{\frac{10a}{3x}}$, $\sqrt{7a} \cdot \sqrt{\frac{35a}{3x}}$
18. $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}$, $\sqrt{\frac{7}{40}} \cdot \sqrt{\frac{21}{10}}$, $\sqrt{\frac{24}{35}} \cdot \sqrt{\frac{10}{21}}$
19. $\sqrt{\frac{2a}{3b}} \cdot \sqrt{\frac{2b}{3a}}$, $\sqrt{\frac{5a}{6b}} \cdot \sqrt{\frac{10a}{3b}}$, $\sqrt{\frac{8a}{15x}} \cdot \sqrt{\frac{10ax}{3y^2}}$
20. $(3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$
21. $(4\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$
22. $(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48}) \cdot \sqrt{2}$
23. $(5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{54}) \cdot \sqrt{3}$
24. $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}) \cdot 3\sqrt{2}$
25. $(2\sqrt{20} - 7\sqrt{8} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{18}) \cdot 4\sqrt{10}$
26. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 27. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
28. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$ 29. $(5\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{7} + 10\sqrt{5})$
30. $(8 + 3\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$ 31. $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$
32. $(5\sqrt{3} + \sqrt{6})(5\sqrt{2} - 2)$ 33. $(5 - 2\sqrt{3})(6 + 5\sqrt{3})$
34. $(2a + 3\sqrt{x})(3a - 2\sqrt{x})$ 35. $(4\sqrt{a} - \sqrt{3x})(\sqrt{a} + 2\sqrt{3x})$
36. $(2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$
37. $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$
38. $(3 + \sqrt{6} + \sqrt{15})(2 + \sqrt{6} - \sqrt{10})$

39. $(2\sqrt{5} + \sqrt{8} - \sqrt{12})(\frac{1}{3}\sqrt{30} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2})$
 39₁. $(\sqrt{75} + 3\sqrt{162} - 2\sqrt{450})(3\sqrt{147} + \sqrt{98} - \sqrt{675})$
 39₂. $(\sqrt{243} - 3\sqrt{242} + 2\sqrt{968})(2\sqrt{1452} - \sqrt{242} - 5\sqrt{147})$
 39₃. $(5\sqrt{112} + \sqrt{176} - \sqrt{4375})(3\sqrt{396} + \sqrt{175} - 2\sqrt{539})$
 39₄. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{4}), (\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{54})$
 39₅. $(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{375}), (7\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{49})(3\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{7})$
 39₆. $(5\sqrt[3]{500} + \sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{256})(\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{243} - 4\sqrt[3]{576})$
 39₇. $(\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{2000})(\sqrt[3]{500} + \sqrt[3]{448} - \sqrt[3]{32})$
 40. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ 41. $(\sqrt{a} + x)(\sqrt{a} - x)$
 42. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 43. $(\sqrt{3a} + \sqrt{2b})(\sqrt{3a} - \sqrt{2b})$
 44. $(a\sqrt{x} + \sqrt{y})(a\sqrt{x} - \sqrt{y})$ 45. $(a\sqrt{b} + x\sqrt{y})(a\sqrt{b} - x\sqrt{y})$
 46. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 47. $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$
 48. $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11})$ 49. $(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})$
 50. $(\sqrt{x} + y + \sqrt{y})(\sqrt{x} + y - \sqrt{y})$
 51. $(\sqrt{x} + \sqrt{x-y})(\sqrt{x} - \sqrt{x-y})$
 52. $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$
 53. $(\sqrt{9x+5} + 3\sqrt{x})(\sqrt{9x+5} - 3\sqrt{x})$
 54. $(\sqrt{a+b+x} + \sqrt{a+b-x})(\sqrt{a+b+x} - \sqrt{a+b-x})$
 55. $(\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a})(\sqrt{3a-b} - \sqrt{3b-a})$
 56. $(\sqrt{\frac{a+1}{2}} + \sqrt{\frac{a-1}{2}})(\sqrt{\frac{a+1}{2}} - \sqrt{\frac{a-1}{2}})$
 57. $[\sqrt{(x+1)(y+1)} + \sqrt{(x-1)(y-1)}]$
 $[\sqrt{(x+1)(y+1)} - \sqrt{(x-1)(y-1)}]$
 58. $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}}$ 59. $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
 59₁. $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}$ 59₂. $\sqrt{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}}$
 59₃. $\sqrt[3]{8+3\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{8-3\sqrt{7}}$ 59₄. $\sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5}$
 60. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ 61. $(a - b\sqrt{x})^2$
 62. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ 63. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

64. $(1 + \sqrt{2})^2$

65. $(-1 + \sqrt{3})^2$

66. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

67. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

68. $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2$

69. $(\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b})^2$

70. $(a + \sqrt{1-a^2})^2$

71. $(\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax})^2$

72. $(\sqrt{3-x} - \sqrt{2+x})^2$

73. $(\sqrt{7-5x} + \sqrt{4x-5})^2$

74. $(\sqrt{3a-2b} - \sqrt{3b-2a})^2$

75. $(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1+a^2})^2$

76. $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

77. $(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}})^2$

78. $(\sqrt{\frac{2a}{3b}} - \sqrt{\frac{2b}{3a}})^2$

79. $(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} - \sqrt{\frac{x-b}{a-x}})^2$

80. $(\sqrt{a+b-x} + \sqrt{a-b+x})^2$

80₁. $(\sqrt{4a+b-4x} - 2\sqrt{3b-a+x})^2$

80₂. $(\sqrt{3a-2b-5x} - \sqrt{3b-2a+5x})^2$

81. $[\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}]^2$

82. $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

82₁. $(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{10})(\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{10})$

83₁. $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$

83₂. $\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

83₃. $\sqrt[3]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}}$

83₄. $(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}})^2$

83₅. $\sqrt{ax+a} \cdot \sqrt{ax^2+ax}$

83₆. $\sqrt{6a-6b} \cdot \sqrt{2a^2-2b^2}$

83₇. $\sqrt{ax-a} \cdot \sqrt{ax^2-a}$

83₈. $\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^3-x}$

83₉. $\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

83₁₀. $\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{\frac{5a+5b}{ax^2-bx^2}}$

84. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3$

85. $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$

86. $(1 + \sqrt{2})^3$

87. $(2 - \sqrt{3})^3$

88. $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3$

89. $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})^3$

90. $(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 91. $(a + b - \sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
 92. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$
 93. $(a + b + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$
 94. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
 95. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
 96. $(a + \sqrt{x})^3 + (a - \sqrt{x})^3$
 97. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$
 98. $(a + \sqrt{x})^4 - (a - \sqrt{x})^4$
 99. $(a + \sqrt{x})^5 + (a - \sqrt{x})^5$

5. Division gleichnamiger Wurzeln.

Fortsetzung der Wurzeln aus dem Nenner.

- | | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$, | $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, | $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$, | $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$ |
| 2. $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, | $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$, | $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$, | $\frac{\sqrt{48x}}{\sqrt{6x}}$ |
| 3. $\frac{a}{\sqrt{a}}$, | $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$, | $\frac{a}{\sqrt[4]{a}}$, | $\frac{1}{\sqrt{a}}$ |
| 4. $\frac{3}{\sqrt{3}}$, | $\frac{2}{\sqrt{2}}$, | $\frac{8}{\sqrt{6}}$, | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ |
| 5. $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, | $\frac{10}{3\sqrt{5}}$, | $\frac{48}{5\sqrt{32}}$, | $\frac{54}{\sqrt{72}}$ |
| 6. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^3}}$, | $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$, | $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$, | $\frac{a}{\sqrt{a}}$ |
| 7. $\frac{a}{\sqrt[7]{a^3}}$, | $\frac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$, | $\frac{a}{\sqrt[8]{a^3}}$, | $\frac{a}{\sqrt[9]{a^3}}$ |
| 8. $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$, | $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}$, | $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}$, | $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$ |
| ————— | | | |
| 9. $\sqrt{ax} : \sqrt{x}$, | $\sqrt{5x} : \sqrt{5}$, | $\sqrt{a^2b} : \sqrt{b}$, | $\sqrt{ab} : \sqrt{bx}$ |
| 10. $\sqrt{28} : \sqrt{7}$, | $\sqrt{32} : \sqrt{2}$, | $\sqrt{60} : \sqrt{5}$, | $\sqrt{72} : \sqrt{30}$ |
| 11. $3\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$, | $5\sqrt{7} : 2\sqrt{5}$, | $4\sqrt{5} : 5\sqrt{2}$, | $8\sqrt{9} : 3\sqrt{2}$ |

12. $6 : \sqrt{\frac{2}{3}}$, $15 : \sqrt{\frac{5}{7}}$, $18 : \sqrt{\frac{6}{7}}$, $20 : 5\sqrt{\frac{1}{2}}$
 13. $a : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a : \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, $ax : \sqrt{\frac{a}{x}}$, $\frac{a}{x} : \sqrt{ax}$
 14. $\sqrt{\frac{4}{5}} : 2$, $\sqrt{\frac{8}{9}} : 6$, $\sqrt{\frac{25}{27}} : 10$, $\sqrt{\frac{5}{8}} : \frac{5}{4}$
 15. $\sqrt{\frac{a}{b}} : a$, $\sqrt{\frac{a^2}{b}} : a$, $\sqrt{\frac{a^3}{b}} : ab$, $\sqrt{\frac{a}{b}} : \frac{a}{b}$
 16. $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{a}{b} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{a}}$
 17. $\sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}} : \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{7}{\sqrt{8}} : \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}} : \frac{\sqrt{3}}{5}$
 18. $\frac{7}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{7} : \frac{7}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{4}\sqrt{5} : 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{3}{8}\sqrt{8} : \frac{2}{\sqrt{5}}$
 18₁. $(x - y) : (\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $(1 - a) : (1 - \sqrt{a})$
 18₂. $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) : (\sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{\frac{b}{y}})$, $(a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}}) : (\sqrt{ay} + \sqrt{bx})$
 18₃. $(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) : (a\sqrt{b} + b\sqrt{a})$
 18₄. $(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $(\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{b}{a}) : (\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}})$
 18₅. $(x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) : (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})$
 18₆. $(x^2 + y^2) : (x\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{x})$, $(a^5 + b^5) : (a^2\sqrt[3]{b} + b^2\sqrt[3]{a})$
 18₇. $\frac{x+y}{\sqrt[3]{xy}} : (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$, $\frac{x^4 - y^4}{\sqrt[3]{xy}} : (x\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{y})$

19. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $\frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $\frac{3}{3 + \sqrt{6}}$, $\frac{2}{2 - \sqrt{2}}$
 20. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, $\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$
 21. $\frac{13}{7 - \sqrt{10}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $\frac{12}{4 - \sqrt{7}}$, $\frac{11}{5 + \sqrt{3}}$
 22. $\frac{13}{5 + 2\sqrt{3}}$, $\frac{14}{8 - 5\sqrt{2}}$, $\frac{12}{7 - 3\sqrt{5}}$, $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}$
 23. $\frac{7 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{9 - 5\sqrt{3}}{7 - 3\sqrt{3}}$
 24. $\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$, $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

Bardeß, Aufgabenammlung.

25. $\frac{a}{a + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{a - \sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$, $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
26. $\frac{5 + \sqrt{x}}{5 - \sqrt{x}}$, $\frac{3 + 2\sqrt{x}}{5 + 3\sqrt{x}}$, $\frac{a + b\sqrt{x}}{c + d\sqrt{x}}$, $\frac{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}}{c\sqrt{x} - d\sqrt{y}}$
27. $\frac{28}{3 + \sqrt{2} + \sqrt{7}}$
28. $\frac{110}{4 + \sqrt{5} + \sqrt{11}}$
29. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$
30. $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$
31. $\frac{1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$
32. $\frac{60\sqrt{2} + 12\sqrt{3}}{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$
33. $\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$
34. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}$
35. $\frac{2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}$
36. $\frac{2y}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}$
37. $\frac{a+x + \sqrt{a^2+x^2}}{a+x - \sqrt{a^2+x^2}}$
38. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$
39. $\frac{1}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}$
40. $\sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}$
41. $\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$
42. $\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2-1}}{a - \sqrt{a^2-1}}}$
43. $\frac{a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}}$
44. $\frac{x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}}{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}$
45. $\frac{\sqrt{(1+a)(1+b)} - \sqrt{(1-a)(1-b)}}{\sqrt{(1+a)(1+b)} + \sqrt{(1-a)(1-b)}}$
46. $\frac{(a-\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2} - (b-\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}}{(b+\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2} + (a+\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}}$
47. $\frac{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} + \sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1-b}}$
48. $\frac{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} - \sqrt{1+b} + \sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1-b}}$

6. Anwendung der Sätze $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ und $\sqrt[m]{a^{nx}} = \sqrt[m]{a^n}^x$.

Multiplication und Division ungleichnamiger Wurzeln.

1. $\sqrt[3]{25^3}$, $\sqrt[3]{36^3}$, $\sqrt[3]{49^3}$, $\sqrt[3]{16^3}$
2. $\sqrt[3]{64^3}$, $\sqrt[3]{81^3}$, $\sqrt[3]{100^3}$, $\sqrt[3]{196^3}$

3. $\sqrt[3]{8^2}$, $\sqrt[3]{64^2}$, $\sqrt[3]{125^2}$, $\sqrt[3]{343^2}$
 4. $\sqrt[4]{16^3}$, $\sqrt[4]{81^3}$, $\sqrt[4]{256^3}$, $\sqrt[4]{1296^3}$
 5. $\sqrt[5]{32^3}$, $\sqrt[5]{243^3}$, $\sqrt[5]{3125^3}$, $\sqrt[5]{100000^3}$
 6. $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)^3}$, $\sqrt{(x^2 + 2x + 1)^3}$
 7. $\sqrt{(4a^2 - 12ab + 9b^2)^3}$, $\sqrt{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^2}$
 8. $\sqrt[3]{a^{12}}$, $\sqrt[3]{a^9}$, $\sqrt[3]{a^{12}}$, $\sqrt[3]{a^{16}}$ 9. $\sqrt[3]{b^3}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{b^6}$, $\sqrt[3]{b^{10}}$
 10. $\sqrt[3]{c^{10}}$, $\sqrt[3]{c^5}$, $\sqrt[3]{c^{15}}$, $\sqrt[3]{c^5}$ 11. $\sqrt[3]{p^{12}}$, $\sqrt[3]{p^{18}}$, $\sqrt[3]{p^{12}}$, $\sqrt[3]{p^{15}}$
 12. $\sqrt[3]{q^{3n}}$, $\sqrt[3]{q^{3n}}$, $\sqrt[3]{q^{4n}}$, $\sqrt[3]{q^{7n}}$ 13. $\sqrt{x^{6n}}$, $\sqrt{x^{6n}}$, $\sqrt{x^{6n}}$, $\sqrt{x^{6n}}$
 14. $\sqrt{a^{2x} + b^{2x}}$, $\sqrt{(a + b)^{2x}}$, $\sqrt{(a^x + b^x)^2}$, $\sqrt{(a^2 + b^2)^x}$

15. $a\sqrt{b}$ *), $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{0.5}$, $3a\sqrt{x}$
 16. $ab\sqrt{c}$, $(a + b)\sqrt{c}$, $(7 - a)\sqrt{x}$, $7a\sqrt{x}$
 17. $a\sqrt{\frac{x}{a}}$, $5\sqrt{0.6}$, $7\sqrt{\frac{5}{7}}$, $2a\sqrt{\frac{7x}{2a}}$
 18. $a\sqrt[3]{b}$, $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{4}$, $2a\sqrt[3]{5}$
 19. $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $4\sqrt[3]{\frac{3}{80}}$, $5\sqrt[3]{\frac{8}{75}}$
 20. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3c}{a}}$, $ab\sqrt{\frac{c}{ab}}$, $ab^2\sqrt{\frac{3c}{b^3}}$
 21. $\frac{ab^2}{xy^2}\sqrt{\frac{xy^3}{ab^3}}$, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2x}{a^2y}}$, $\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^5x}{a^0y}}$, $\frac{abn}{xy^n}\sqrt{\frac{ay^3}{b^3x}}$
 21₁. $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$, $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 2a^3 + a^2}{x^4 + 2x^3 + x^2}}$
 21₂. $(a-x)\sqrt{\frac{9a+9b}{4a^2-8ax+4x^2}}$, $(a+b)\sqrt{\frac{ax^2-bx^2}{9a^2+18ab+9b^2}}$
 21₃. $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$
 21₄. $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{12+5\sqrt{6}}$

22. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}$, $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
 23. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}$, $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

*) In den Aufgaben 15. — 21₄. soll der Faktor, welcher vor der Wurzel steht, unter die Wurzel gebracht werden.

24. $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{d} \cdot \sqrt[3]{d}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
 25. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{d} \cdot \sqrt[3]{d}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{q}$
 26. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{p} \cdot \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$, $\sqrt{n} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{n}}$
 27. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt[3]{d} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{d}}$,
 28. $\sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$, $\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{q}}$, $\sqrt[4]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{q}}$, $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$
 29. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$
 30. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[2n]{y}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$, $\sqrt[mx]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$
 31. $\sqrt[2n]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, $\sqrt{y} \cdot \sqrt[2n]{y}$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[6n]{d}$

32. $\sqrt[3]{\frac{a}{a}}$, $\sqrt[4]{\frac{b}{b}}$, $\sqrt[5]{\frac{c}{c}}$, $\sqrt[6]{\frac{d}{d}}$ 33. $\sqrt[3]{\frac{x}{x}}$, $\sqrt[4]{\frac{y}{y}}$, $\sqrt[5]{\frac{m}{m}}$, $\sqrt[6]{\frac{n}{n}}$
 33. $\sqrt[3]{\frac{a}{a}}$, $\sqrt[4]{\frac{b}{b}}$, $\sqrt[5]{\frac{c}{c}}$, $\sqrt[6]{\frac{d}{d}}$ 35. $\sqrt[3]{\frac{4}{2}}$, $\sqrt[4]{\frac{36}{6}}$, $\sqrt[5]{\frac{25}{5}}$, $\sqrt[6]{\frac{100}{10}}$
 36. $\sqrt[3]{\frac{8}{2}}$, $\sqrt[4]{\frac{27}{9}}$, $\sqrt[5]{\frac{64}{16}}$, $\sqrt[6]{\frac{125}{25}}$ 37. $\sqrt[3]{\frac{4}{8}}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{64}}$, $\sqrt[5]{\frac{36}{324}}$, $\sqrt[6]{\frac{81}{729}}$

38. Was muß der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ bedeuten, wenn man in der Rechnung nach den bisherigen Sätzen auf einen solchen Ausdruck kommt? Wie werden darnach folgende Ausdrücke sich in ihrer einfachsten Form darstellen ohne negative Exponenten:

39. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}$, $a \cdot \sqrt[4]{a}$, $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[2]{a}$
 40. $\sqrt[3]{\frac{a}{a}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[2]{a}}$, $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$

7. Wurzeln aus Wurzeln.

1. $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{c}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{d}}$
 2. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{y^4}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{15}}}$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{36}}$
4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{216}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$
5. $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[4]{49}$, $\sqrt[4]{64}$
6. $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[4]{81}$
7. $\sqrt[4]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^4 x^2}$, $\sqrt[4]{a^6 x^6}$
8. $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[4]{125}$
9. $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{64}$
10. $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[4]{243}$
11. $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[4]{c^3}$, $\sqrt[4]{d^{12}}$
11. $\sqrt[4]{8x^6}$, $\sqrt[4]{a^4 b^3}$, $\sqrt[4]{9a^2 b^4}$, $\sqrt[4]{16a^{12}}$
12. $\sqrt[4]{a \sqrt[4]{a}}$, *) $\sqrt[4]{x \sqrt[4]{x}}$, $\sqrt[4]{y \sqrt[4]{y}}$, $\sqrt[4]{x \sqrt[4]{y}}$
13. $\sqrt[4]{a \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a}}$, $\sqrt[4]{x \sqrt[4]{x} \sqrt[4]{x}}$, $\sqrt[4]{a \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{c}}$, $\sqrt[4]{x \sqrt[4]{y} \sqrt[4]{z}}$
14. $\sqrt[4]{a^n \sqrt[4]{a}}$, $\sqrt[4]{b^2 \sqrt[4]{b}}$, $\sqrt[4]{c^3 \sqrt[4]{c}}$, $\sqrt[4]{d^5 \sqrt[4]{d^3}}$
15. $\sqrt[4]{m^5 \sqrt[4]{m}}$, $\sqrt[4]{n^5 \sqrt[4]{n^2}}$, $\sqrt[4]{p^2 \sqrt[4]{p}}$, $\sqrt[4]{q + \sqrt[4]{q^2}}$
16. $\sqrt[4]{p^7 \sqrt[4]{p^2}}$, $\sqrt[4]{q^5 \sqrt[4]{q^3}}$, $\sqrt[4]{m + \sqrt[4]{m^3}}$, $\sqrt[4]{n^3 \sqrt[4]{n}}$
17. $x \sqrt[4]{x^{-1} \sqrt[4]{x^{-1}}}$, $y \sqrt[4]{y^{-2} \sqrt[4]{y^{-2}}}$, $a \sqrt[4]{a^{-3} \sqrt[4]{a^{-3}}}$

XIV.

Das Ausziehen der Quadratwurzel.

A. Aus Zahlen.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\sqrt{961}$ | 2. $\sqrt{484}$ | 3. $\sqrt{121}$ |
| 4. $\sqrt{169}$ | 5. $\sqrt{225}$ | 6. $\sqrt{529}$ |
| 7. $\sqrt{441}$ | 8. $\sqrt{900}$ | 9. $\sqrt{625}$ |
| 1. $\sqrt{289}$ | 2. $\sqrt{361}$ | 2. $\sqrt{841}$ |
| 3. $\sqrt{1369}$ | 4. $\sqrt{1681}$ | 5. $\sqrt{3249}$ |

*) Die Ausdrücke in 12.—17. sollen, wenn es möglich ist, so umgeformt werden, daß nur eine Wurzel vorkommt.