Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XII. Potenzen mit ganzen negativen Exponenten

204_5. Welche Werthe haben die dem tetradischen System angehörigen Zahlen 13, 123, 300, 333, 1023?

204_6. Deßgleichen die dem dyadischen System angehörigen Zahlen 11, 111, 1011, 1001001, 1011101?

XII.

Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

Wenn man die Reihen

$$\begin{matrix} aaaa & aaa & aa & a \\ a^4 & a^3 & a^2 & a^1, \end{matrix}$$

deren entsprechende Glieder einander gleich sind, nach demselben Bildungsgesetz*) weiter führt, so erhält man

$$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} & \frac{1}{aaaa} & \text{u. s. w.} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & a^{-4} & \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

Hat man daher einmal das Zeichen a^4 für $aaaa$, das Zeichen a^3 für aaa u. s. w. eingeführt, so wird es jedenfalls vortheilhaft sein, auch die Zeichen a^0, a^{-1}, a^{-2} u. s. w. einzuführen, damit man nicht erst jedesmal zu untersuchen hat, ob der Exponent positiv ist. Dann kann man aber, falls man nicht eine große Confusion in die Rechnung bringen will, diesen Zeichen consequenter Weise keine andere Bedeutung beilegen, als a^0 muß 1, a^{-1} muß $\frac{1}{a}$, a^{-2} muß $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$, a^{-3} muß $\frac{1}{aaa}$ oder $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. bedeuten**). Es muß demnach, falls die Rechnung auf den Exponenten 0 oder einen negativen Exponenten führt, sein

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder
3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Drücke diese Formeln in Worten aus.

---

*) In der Reihe oben entsteht das folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Division mit a, in der zweiten dadurch, daß man den Exponenten um 1 vermindert.

**) Von einem Beweise kann hier nicht die Rede sein. Es ist nur eine Ausdehnung der Bezeichnung, welche auf Potenzen mit negativen Exponenten führt, wie man das Zahlensystem über die Einer hinaus fortsetzt und auf Decimalstellen kommt, oder wie man sich die absoluten Zahlen über Null hinaus abnehmend denkt und die negativen Zahlen erhält.

Für Potenzen mit negativen Exponenten gelten dieselben Sätze wie für die Potenzen mit absoluten oder positiven Exponenten. Der Beweis ist leicht zu führen, im Grunde aber überflüssig, da die Bezeichnung einer Potenz mit negativen Exponenten demselben Bildungsgesetz folgt, wie diejenige einer Potenz mit absoluten Exponenten.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Erklärung der Potenz reicht hier nicht mehr aus. In a^n mußte der Erklärung der Potenz zufolge n eine absolute Zahl sein. Da man nun auch dem Zeichen a^{-n} eine Bedeutung beilegen kann, die aus der für a^n folgt, so treten n und $-n$ in Gegensatz. Daher muß man nach V. 9 den absoluten Exponenten einer Potenz jetzt als positiv auffassen. Man unterscheidet folglich **Potenzen mit positiven Exponenten** und **Potenzen mit negativen Exponenten**. Die Zeichen a^0 und a^{-n}, die jetzt eine bestimmte Bedeutung haben, heißen ebenfalls Potenzen, weil sie denselben Gesetzen unterworfen sind, wie das Zeichen a^n, d. h. wie die Potenzen mit positiven Exponenten.

Bei den folgenden Aufgaben sollen die Resultate stets in ihrer einfachsten Form dargestellt werden. Dahin gehört besonders, daß sie keine Potenzen mit negativen Exponenten oder mit dem Exponenten Null enthalten. Sind Operationen auszuführen, so sollen diese so viel als möglich zuerst ausgeführt und dann erst die Umformung, wenn eine solche nöthig ist, vorgenommen werden.

1. $a^4 \,.\, a^0$, $\quad a^0 \,.\, x^0$, $\quad 3a^0$
2. $4\,(a-b)^0$, $\quad 5^0 \,.\, (x-y)$, $\quad 7^0 \,.\, (x+y)^0$
3. $(a^0)^n$, $\quad (a^n)^0$, $\quad (a^0)^0$.
4. 1^0, $\quad 1^n$, $\quad 1^{-n}$
5. $1^x \,.\, 1^y$, $\quad 1^x \,.\, 1^0$, $\quad 1^n \,.\, a^0$
6. $9 \,.\, 3^{-2}$, $\quad 8 \,.\, 2^{-2}$, $\quad 16 \,.\, 4^{-3}$
7. $9^2 \,.\, 3^{-5}$, $\quad 25^3 \,.\, 5^{-4}$, $\quad 96 \,.\, 2^{-6}$
8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\quad 5 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $\quad 8 \,.\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
9. $\frac{1}{4^{-2}}$, $\quad \frac{1}{3^{-3}}$, $\quad \frac{1}{2^{-5}}$
10. $\frac{5}{2^{-1}}$, $\quad \frac{8}{5^{-3}}$, $\quad \frac{25}{4^{-4}}$
11. $(0{,}2)^{-1}$, $\quad (0{,}5)^{-2}$, $\quad (1{,}5)^{-2}$
12. $(-0{,}1)^{-2}$, $\quad 9 \,.\, (4{,}5)^{-1}$, $\quad 10 \,.\, (2{,}5)^{-1}$
13. x^{-n}, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$, $\quad \left(\frac{a}{x}\right)^{-n}$
14. x^{-1}, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$, $\quad \left(\frac{5}{x}\right)^{-2}$

15. $3\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, $a\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}$, $\frac{1}{x}\left(\frac{m}{x}\right)^{-1}$

16. $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-n}}$, $\frac{a}{b^{-n}}$

17. $\frac{1}{a^0}$, $\frac{a^0}{b^{-n}}$, $\frac{a^{-n}}{x^0}$

18. $ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + ex^0$

19. $\frac{a}{x^{-4}} + \frac{b}{x^{-3}} + \frac{c}{x^{-2}} + \frac{d}{x^{-1}} + \frac{e}{x^0}$

20. $a^5 \cdot a^{-3}$, $b^{-4} \cdot b^{-7}$, $c^7 \cdot c^{-8}$

21. $p^8 \cdot p^{-5}$, $q^{-11} \cdot q^9$, $r^{12} \cdot r^{-10}$

22. $x^m \cdot x^{-n}$, $y^m \cdot y^{-3}$, $z^{n+3}\, z^{-5}$

23. $a^{-3}x \cdot a^{-5}y$, $a^{-7}x \cdot a^5x^{-2}$, $8a^{-4} \cdot 3a^3$

24. $5ax^{-6} \cdot \frac{1}{2}bx^2$ 25. $\frac{3}{2}mx^{-n} \cdot \frac{4}{5}px^{n-4}$

26. $\frac{3}{2}x^3y^4 \cdot \frac{5}{6}x^{-2}y \cdot \frac{4}{3}xy^{-6}$

27. $(-7a^{-3}b^{-2})(-4a^2b^{-1})(-a^2b^2x^{-1})$

28. $(-3\frac{1}{3}a^{-5}b^2c^{-n})(-2\frac{2}{5}a^4b^{-3}c^{n-1})$

29. $3\frac{1}{2}a^{-n}b^{-x}c^y \cdot \frac{5}{7}a^{n-1}b^{x-2}c^{-y}$

30. $(x+y)^{-n}p^3q^2 \cdot (x+y)^{n-2}p^{-1}q^{n-2}$

31. $(a-x)^{-3} \cdot (x-a)^2$, $(1-x)^{-4}(x-1)^5$

32. $\frac{a^8}{a^{-3}}$, $\frac{b^{-4}}{b^{-9}}$, $\frac{c^{-8}}{c^{-5}}$

33. $\frac{a^{-5}}{a^{11}}$, $\frac{b^{-5}}{b^{-11}}$, $\frac{x^5}{x^{-11}}$

34. $\frac{a^m}{a^{-n}}$, $\frac{b^{n-3}}{b^{-5}}$, $\frac{x^{-n}}{x^{n-2}}$

35. $\frac{a^{-2}b^3}{x^4y^{-5}}$, $\frac{ab^{-4}}{x^{-1}y^0}$, $\frac{a^{-3}b^{-m}}{x^{-4}y^{-n}}$

36. $\frac{2a^0b^{-1}c^{-2}}{3x^0y^{-1}z^{-2}}$, $\frac{4a^3b^{-5}c^0}{x^{-4}yz^{-1}}$, $\frac{36a^{-2}b^{-1}c^5}{47x^3y^{-5}z^{-2}}$

37. $\frac{3a^{-2}b^3c^0}{5a^5b^{-4}c^{-2}}$, $\frac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$, $\frac{36a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$

38. $\frac{54x^5y^{-7}z^4}{42x^{-1}y^{-8}z^{-4}}$, $\frac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^3z^{-1}}$, $\frac{21x^{-1}y^5z^{-3}}{35x^{-2}y^6z^{-4}}$

39. $\frac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \frac{a^{-4}b^5}{x^9y^{-3}}$, $\frac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \frac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$

40. $\frac{3a^{-1}b^{-2}}{4x^{-2}y^{-4}} \cdot \frac{6a^2x^{-1}}{5b^{-1}c^2}$, $\quad \frac{15a^3b^{-2}}{16x^5y^{-4}} \cdot \frac{12a^{-4}b}{25x^{-7}y^2}$

41. $\frac{4x^{-n}y^{-3}}{5a^{-4}b^{-m}} \cdot \frac{15a^{-2}b^{3-m}}{14x^ny^{n-3}}$, $\quad \frac{4}{15a^{-4}b^{-n}c} \cdot \frac{9}{8a^2b^{n-1}c^{-n}}$

42. $a^{-8} : -a^8$, $\quad a^{-5} : -5a$

43. $-7a : a^{-7}$, $\quad 3a^3 : -3a^{-3}$

44. $\frac{3}{4}x^{-3} : \frac{1}{8}x^3$, $\quad \frac{2}{3}a^3 : -\frac{5}{6}a^{n+3}$

45. $2a^{-1}x^3 : -3bx^{-5}$, $\quad -4x^{-3}y^2 : -6xy^{-2}$

46. $(x-y)^{-2} : (y-x)^{-1}$, $\quad (x-y)^{-3} : (y-x)^2$

47. $(a-x)^n : (x-a)^{-3}$, $\quad (1-x)^3 : (x-1)^{-n}$

48. $\frac{3}{5}x^{-n}y^nz^{-1} : \frac{6}{7}x^{2-n}y^{n-2}z^{-3}$

49. $\frac{7}{3}a^{-5}b^{n-1}c : \frac{5}{6a^4bc^2}$ $\qquad$ 50. $\frac{1}{6a^{n-1}b^{-2}c^{-3}} : \frac{5}{3}a^{-n}b^{n+2}c^3$

51. $(a^{-2})^{-3}$. $\quad (a^{-3})^2$, $\quad (a^{-3})^0$

52. $(-a^2)^{-5}$, $\quad (-a^5)^{-2}$, $\quad (-a^{-5})^{-2}$

53. $(-a^3)^{-4}$, $\quad (-a^{-3})^4$, $\quad (-a^{-4})^{-3}$

54. $(-a^3)^{-2n}$, $\quad (-a^{2n})^{-3}$, $\quad (-a^{-2n})^{-3}$

55. $(-a^{-2})^{2n-1}$, $\quad (-a^{-3})^{2n-1}$, $\quad (-a^{2n-1})^2$

56. $\left(\frac{a^{-2}b^3}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$, $\quad \left(\frac{a^{-3}b}{x^3y^{-2}}\right)^{-3}$, $\quad \left(\frac{a^{-4}b^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-2}$

57. $\left(\frac{a^0b^{-2}}{xy^3}\right)^3$, $\quad \left(\frac{a^{-2}b^0}{x^4y^{-1}}\right)^{-2}$, $\quad \left(\frac{a^5b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-1}$

58. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a-b}{c+d}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2$

59. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{(x+y)^{-3}} \cdot (x-y)^{-3}$

60. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$

61. $(ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + e) \cdot x^4$

62. $(ax^2 + bx + c + dx^{-1} + ex^{-2}) \cdot x^2$

63. $(x + x^{-1})(x - x^{-1})$ $\qquad$ 64. $(x^3 + x^{-1})(x - x^{-3})$

65. $(2x + 3x^{-1})(2x - 3x^{-1})$ $\qquad$ 66. $(5x^2 + 2x^{-1})(3x - 4x^{-2})$

67. $(x + x^{-1})^2$ $\qquad$ 68. $(x^2 - 2x^{-2})^2$

69. $(x + x^{-1})^3$ $\qquad$ 70. $(x + x^{-1})^4$

71. $(2x + 3x^{-1} + 5)(2x + 3x^{-1} - 5)$

72. $(3x + x^{-1} + 2)(3x + x^{-1} - 2)$
73. $(8x^2 - 5x^{-2} + 3)(3x^2 + 4x^{-2} - 5)$
74. $(9x^2 + 2x^{-2} + 6)(9x^2 + 2x^{-2} - 6)$
75. $(25x^2 + 2x^{-2} + 10)(25x^2 + 2x^{-2} - 10)$
76. $(6x^2 - 3x + 4 - 2x^{-1})(6x^2 + 3x - 4 - 2x^{-1})$

XIII.

Wurzeln oder irrationale Größen.

Unter Wurzel (radix) einer Zahl versteht man eine Zahl, welche wiederholt als Faktor gesetzt jene Zahl giebt. Da $2 . 2 . 2 = 8$ ist, so ist 2 eine Wurzel der Zahl 8. Da $3 . 3 = 9$ ist, so ist 3 eine Wurzel der Zahl 9. Da $aaaa = a^4$ ist, so ist a eine Wurzel von a^4. Bestimmter nennt man in diesem Falle a eine Wurzel des 4. Grades oder die 4. Wurzel aus a^4 und schreibt das $\sqrt[4]{a^4} = a$. Ebenso ist $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2 . 2 . 2$, d. h. $2^3 = 8$ ist; $\sqrt[4]{81} = 3$ weil $3 . 3 . 3 . 3$ oder $3^4 = 81$ ist; $\sqrt[6]{64} = 2$, weil $2^6 = 64$ ist.

Allgemein ist $\sqrt[n]{a} = b$, wenn $b^n = a$ ist. Die Wurzel des n. Grades aus a oder die n. Wurzel aus a bedeutet die Zahl (b), welche nmal als Faktor gesetzt oder mit n potenzirt a giebt.

Das Zeichen $\sqrt{}$ (ursprünglich ein r) nennt man das **Wurzelzeichen**; die Zahl a, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, heißt der **Radikand**; die Zahl n, mit welcher man die Wurzel b potenziren muß, um den Radikanden zu erhalten, heißt **Wurzelexponent**. Die Wurzel aus einer Zahl suchen oder ausziehen heißt **radiziren**.

Da nach dem Obigen

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ und ebenso } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

sein muß, so heben sich Wurzelexponent und Potenzexponent gegenseitig auf; Potenziren und Radiziren sind somit entgegengesetzte Operationen.

Aus der Definition der Wurzel folgt ferner auch, daß

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4, \sqrt[n]{a^{nx}} = a^x$$

sein muß. Aus einer Potenz zieht man demnach die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividirt.

Die Gleichungen $b^n = a$ und $\sqrt[n]{a} = b$ bedingen sich gegenseitig. Wenn die eine gilt, so muß auch die andere gelten. Hat man beim Potenziren $b^n = a$, so sind b und n gegeben, es wird a gesucht. Beim Radiziren verwandelt sich diese Gleichung in $\sqrt[n]{a} = b$; es sind