Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

XI. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten

urn:nbn:de:bsz:31-269430

44. Zwei Kapitalien A und A_1 stehen gleich lange auf Zinsen. A bringt bei p Pct. in der Zeit c Mk. Zinsen, A_1 bei p_1 Pct. in derselben Zeit c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zinsen, 3) die Procente?

45. Ein Kapital A bringt in n Jahren c Mk. Zinsen, ein anderes A_1 bringt in n_1 Jahren c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Zinsen, wenn die Procente gleich sind?

46. Ein Kapital A steht n Jahre lang zu p Pct. aus, ein anderes n_1 Jahre zu p_1 Pct. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Procente, wenn beide Kapitalien gleich viel Zinsen tragen?*)

47. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich wie $3:4:5$. Wie verhalten sich die Seiten? $\left(\frac{1}{h}:\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}\right)$.

48. In einem Dreieck verhalten sich die durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises entstehenden Abschnitte der Seiten wie $4:5:6$. Wie verhalten sich die Radien der drei äußeren Berührungskreise?

49. Vier Arbeiter verrichten dieselbe Arbeit bzw. in 6, 8, 9 u. 10 Tagen; wie verhalten sich ihre Leistungen?

XI.

Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

Eine Potenz ist ein Ausdruck von der Form a^n, welcher ein Produkt aus n gleichen Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist. Der Ausdruck a^5 ist demnach gleich a a a a a. Er wird gelesen a in der fünften (Potenz) oder a hoch 5. Nur in der Form a^5 heißt die Größe a a a a a eine Potenz; in der Form a a a a a sollte sie nur ein Produkt heißen. Der wiederholt gesetzte Faktor heißt Basis der Potenz, die Zahl n, welche angiebt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist, heißt der Exponent der Potenz oder der Potenzexponent. Nach dieser Erklärung kann der Exponent nur eine ganze absolute Zahl sein. Weßhalb man jedoch diese Art von Potenzen Potenzen mit positiven Exponenten und nicht Potenzen mit absoluten Exponenten nennt, wird erst im folgenden Abschnitt seine Erklärung finden.

Die Potenz einer Zahl suchen heißt potenziren. Eine Zahl a mit einer Zahl n potenziren heißt die Potenz a^n suchen. Beim Potenziren kommen demnach drei Größen in Betracht: die Basis, der Exponent und die Potenz. Wie sich bei der Addition die Summanden, bei der Multiplikation die Faktoren, so lassen sich beim Potenziren Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen. Mit Ausnahme von $2^4 = 4^2$ ist a^n niemals $= n^a$, wenn a und n von einander verschiedene ganze Zahlen sind. So ist $2^{10} = 1024$, $10^2 = 100$.

*) Alle in 43. — 46. vorkommenden Verhältnisse lassen sich sofort aus der Gleichung $Anpc_1 = A_1n_1p_1c$ ablesen. Wie erhält man diese?

Ueber die Rechnung mit Potenzen gelten folgende fünf Sätze:

1. $a^3 \,.\, a^5 = a^8, \qquad a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^9}{a^4} = a^5, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

   $\frac{a^4}{a^9} = \frac{1}{a^5}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$
3. $(ab)^4 = a^4 \,.\, b^4, \qquad (ab)^n = a^n \,.\, b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $(a^3)^4 = a^{12}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$

Wie werden diese Sätze bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten?

Auch folgende sehr oft gebrauchte Formeln sind zu merken (und zu beweisen):

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

---

1. $1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + 17^2 + 21^2 + 25^2 + 29^2$
2. $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 + 13^3 + 16^3 + 19^3$
3. $1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4$
4. $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5$
5. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$
6. $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
7. $(-1)^1 - (-2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
8. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^9 + (-a)^{10} + (-a)^{11} + (-a)^{12}$
9. $4^4 + 3^4, \qquad 8^3 - 8^2, \qquad 7^5 - 6^5$
10. $3^2 - 2^3, \qquad 2^9 - 9^2, \qquad 6^5 - 5^6$
11. $(+2)^3 + (-3)^2, \quad (+3)^3 + (-3)^3, \quad (+2)^4 + (-2)^4$
12. $(-7)^2 - (-2)^7, \quad (-3)^4 + (-4)^3, \quad (-5)^2 - (-2)^5$
13. $(+5)^3 - (-3)^5, \quad (-3)^4 - (+5)^3, \quad (+3)^7 - (-3)^7$
14. $2^3 \,.\, 3^2, \qquad 2^7 \,.\, 7^2, \qquad 2^{10} \,.\, 10^2$
15. $2^3 \,.\, 5^4, \qquad 4^3 \,.\, 5^6, \qquad 4^3 \,.\, 5^4$
16. $3 \,.\, 4^2 - 4 \,.\, 3^2, \quad 5 \,.\, 4^3 - 4 \,.\, 3^4, \quad 7 \,.\, 5^3 - 4 \,.\, 3^5$
17. $6 \,.\, 2^3 - 5 \,.\, 3^2, \quad 8 \,.\, 5^2 - 4 \,.\, 7^4, \quad 9 \,.\, 8^2 - 3 \,.\, 2^8$

18. $\frac{4^2 - 3^2}{5^2 - 2^2}$, $\frac{7^2 + 4^2}{6^2 + 3^2}$, $\frac{4^3 + 3^3}{3^4 - 5^2}$

19. $\frac{7^3 + 5^3}{8^4 - 4^4}$, $\frac{3^6 - 2^6}{3^5 + 2^5}$, $\frac{2^7 - 4^3}{5^4 - 3^4}$

20. $\frac{6 \cdot 8^2 - 8 \cdot 6^2}{13^2 - 3^2}$, $\frac{3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^5}{2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^4}$, $\frac{2 \cdot 3^6 + 3 \cdot 2^6}{7 \cdot 3^2 + 3 \cdot 7^2}$

---

21. $a^7 \cdot a^5$, $b^4 \cdot b^3$, $c^8 \cdot c$
22. $x^n \cdot x^3$, $y^n \cdot y$, $z^{n-1} \cdot z$
23. $p^n \cdot p^n$, $q^n \cdot q^{5n}$, $q^{m-n} \cdot q^n$
24. $a^3 \cdot a^{x-4}$, $b^7 \cdot b^{2-x}$, $c^{x-4} \cdot c^5$
25. $p^n \cdot p^{n-1}$, $q^{2n} \cdot q^{3-n}$, $r^x \cdot r^{5-2x}$
26. $a^{3+x} \cdot a^{x-3}$, $b^{n+x} \cdot b^{5-x}$, $c^{x-7} \cdot c^{5+x}$
27. $x^{m-n} \cdot x^{m+n}$, $x^{n+3} \cdot x^{n-4}$, $y^{n-1} \cdot y^{7-n}$
28. $g^{n-x} \cdot g^{m+x}$, $h^{5-n} \cdot h^{n+x}$, $k^{m+n} \cdot k^{1-m}$
29. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$, $x^7 \cdot x^8 \cdot x$, $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n}$
30. $(-a)^3 \cdot (-a)^4$, $(-a)^8 \cdot (+a)^5$, $(-a)^7 \cdot (+a)^4$
31. $(-a)^{2n} \cdot a$, $(-a)^{2n} \cdot (-a)$, $(-a)^{2n} \cdot (-a)^3$
32. $(-a)^{2n+1} \cdot (-a)$, $(-a)^{2n-1} \cdot (+a)^3$, $(-a)^{2n-1} \cdot (-a)^{2m+1}$
33. $2a^4 \cdot 3b^2$, $2a^3 \cdot 3a^2$, $5x^3 \cdot 8x$
34. $2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 7c^4$, $8x^7 \cdot 5x^4 \cdot 9x$, $3a^4 \cdot 2b^3 \cdot 5a^2$
35. $a^3b^5 \cdot a^7b^3$, $a^4b \cdot a^8b^3$, $a^nb^m \cdot a^3b$
36. $a^{n-1}b^{n+1} \cdot ab^2$, $x^2y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-5}$, $x^3y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-4}$
37. $\frac{5}{9}a^2bx \cdot \frac{6}{7}ab^3y^2 \cdot \frac{4}{5}a^nbx^ny$
38. $\frac{3}{4}a^nbx^3 \cdot \frac{4}{5}ab^mx^4 \cdot \frac{5}{6}a^2x^p$
39. $a^{m+n-7} \cdot a^{2m-n+8} \cdot a^{11-3m}$
40. $p^{2x-3y+5} \cdot p^{3x+2y-5} \cdot p^{x+6y}$
41. $(x-y)^{n-2} \cdot (x-y)^{3-m} \cdot (x-y)^{m-1}$
42. $a(a-b)^3 \cdot a^{n-1}b(a-b)^{n-3} \cdot a^2b^{n-1}$
43. $7a^2b^3 \cdot 8a^4c^7 \cdot 25a^{n-5}b^{n-5}c^{n-5}$
44. $a^{m-n}b^pc^{q+1} \cdot a^{n-1}b^{n-p}c^{p-q} \cdot a^{m+1}b^{2-n}c^{p-1}$
45. $(a-x)^{n-1}x^3y^5 \cdot (a-x)^{n-2}x^{n-1}y \cdot (a-x)^3x^{n-2}y^{n-5}$
46. $(-3a^2b^{n-1})(-5a^{n-3}c^{n+1})(-4abc^{x-n})$
47. $(-a)^nb^{3-x}c \cdot (-a)^{2n-3}b^{4+x}c^{n-1} \cdot (-a)^{4-n}b$
48. $a^nb(-x)^3 \cdot a^2b^n(-x)^n \cdot a^{n-2}b^{5-n}(-x)^{5-n}$

49. $\frac{a^5b^3}{13} \cdot \frac{a^8b^4}{7}$, $\frac{x^9y^8}{10} \cdot \frac{xy^2}{10}$

50. $\frac{a^mb^{x-2y}}{m+n} \cdot \frac{a^nb^y}{x-y}$, $\frac{a^{5m-n}b^{7x-3y}}{3m+2n} \cdot \frac{a^{3n-2m}b^{6y-5x}}{2x+3y}$

51. $(a-b)^3 \cdot (b-a)^4$, $(a-b)^4 \cdot (b-a)^3$
52. $(x-y)^n \cdot (y-x)^4$, $(x-y)^7 \cdot (y-x)^n$
53. $(a-b) \cdot (b-a)^{2n-3}$, $(a-b)^5 \cdot (b-a)^{2n-4}$
54. $(a-b-c)^{n-1} \cdot (b+c-a)^{2n+1}$
55. $(2a+3b^2+4c^3) \cdot a^2b^2c^2$
56. $(ab+ac+bc) \cdot a^3b^3c^3$
57. $(3a^3-5a^2b^3+7b^2) \cdot 2ab^2$
58. $(ab^2c^3-a^2b^3c-a^3bc^2) \cdot a^2b^3c^4$
59. $(a^5+a^2)(a^3-a)$, $(p^7-p^4)(p^5+p)$
60. $(x^8+x^3)(x^8-x^3)$, $(y^9+y^4)(y^6-y)$
61. $(a^4+b^3)(a^4-b^3)$, $(a^4+b^4)(a^3-b^3)$
62. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$, $(a^m+b^m)(a^n-b^n)$
63. $(3a^2-2b^3)(3a^2+2b^3)$, $(5a^3+3b^2c)(5a^3-3b^2c)$
64. $(x^2+a)^2$, $(a-2x^2)^2$
65. $(a^7-a^3)^2$, $(a^8-a)^2$
66. $(a^m-a^n)^2$, $(2a^x-3a^y)^2$
67. $(a-b+c)^2$, $(a+b-c)^2$
68. $(2x-3y+4)^2$, $(3x-2y+z)^2$
69. $(5x^2-3x+2)^2$, $(ax^2+bx+c)^2$
70. $(a^2-b)^3$, $(5a-3x^2)^3$
71. $(a+b)^3+(a-b)^3$, $(x+1)^3+(x-1)^3$
72. $(m+n)^3-(m-n)^3$, $(1+t)^3+(1-t)^3$
73. $(a+b)^4$, $(a-b)^4$,
74. $(x+y)^4+(x-y)^4$, $(x+3)^4+(x-3)^4$
75. $(a+x)^4-(a-x)^4$, $(x+5)^4-(x-5)^4$
76. $(a+b)^5$, $(a-b)^5$
77. $(a+t)^5+(a-t)^5$, $(x+2)^5+(x-2)^5$
78. $(x+y)^5-(x-y)^5$, $(2x+3)^5-(2x-3)^5$
78_1. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2$
78_2. $(a+b+c-x)^2+(a+b+x-c)^2+(a+c+x-b)^2$
$+(b+c+x-a)^2$
79. $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+b^2)$
80. $(x^4-x^2y^2+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)$
81. $(x^9+x^6+x^3+1)(x^3-1)$
82. $(x^8-x^6+x^4-x^2+1)(x^2+1)$
83. $(2a^2-3b^3+4c^4)(4a^2+2b^3-3c^4)$
84. $(6a^2-11ab+3b^2)(9a^2-3ab-2b^2)$
85. $(7a^2+ab-6b^2)(6a^2-ab-5b^2)$
86. $(a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8)(a^2-b^2)$

87. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$
88. $(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)(a - b)$
89. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$
90. $(16a^4 - 48a^3b + 108a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4)(4a^2 + 12ab + 9b^2)$
91. $(81a^4 - 54a^3b - 24ab^3 + 16b^4)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$
92. $x^5 - 2x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$ zu multipliciren mit $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$
93. $x^6 + 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^3y^3 + 6x^2y^4 + 3xy^5 + y^6$ zu multipliciren mit $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
94. $(x^8 + x^7y + x^6y^2 + x^2y^6 + xy^7 + y^8)(x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)$
95. $(a^{3n} + a^{2n}b + a^nb^2 + b^3)(a^n - b)$
96. $(a^n + b^m - c)(a^n - b^m + c)$
97. $(a^{2m-n} + a^m + a^n + a^{2n-m})(a^m - a^n)$
98. $(a^{3m-n} - a^{2m} + a^{m+n} - a^{2n} + a^{3n-m})(a^m + a^n)$
98_1. $(3a^nb^{2-x} - 5a^{n-1}b + 9a^{n-2}b^x)(4a^2b + 7ab^x)$
98_2. $(2a^2b^{x+1} - 3a^nb^3 + 4a^{2n-2}b^{5-x})(5ab^x + 6a^{n-1}b^2)$
99. $(a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (b - a - c)^3 + (c - a - b)^3$
100. $(a + b + c)^3 - 3(ab + ac + bc)(a + b + c)$
101. $(ax^3 - (a + b)x^2 + (a + b + c)x - (a + c))(x + 1)$
102. $(ax^4 + (a - b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (a - b)x + a)(x - 1)$
103. $(2x^4 - (1 - a)x^3 + (1 - a + b)x^2 - (1 - a)x + 2)(x + 1)$

---

104. $\frac{a^8}{a^3}$, $\frac{a^{13}}{a^7}$, $\frac{a^{15}}{a^8}$ 105. $\frac{a^8}{a}$, $\frac{a^n}{a^4}$, $\frac{a^n}{a}$
106. $\frac{a^7}{7}$, $\frac{a^{n-1}}{n-1}$, $\frac{x^5}{5x}$ 107. $\frac{a^5}{a^{12}}$, $\frac{a^{12}}{a^5}$, $\frac{a}{a^{11}}$
108. $a^5 : a$, $a^7 : a^9$, $a^4 : 4a$ 109. $a^n : a$, $a : a^n$, $a^n : na$
110. $x^3 : x^n$, $x^2 : x^{n+1}$, $x : x^n$ 111. $x^{n+1} : 2x$, $x^{n-1} : x$, $x : x^{n+2}$
112. $\frac{a^{x-1}}{a}$, $\frac{a^{x+1}}{a}$, $\frac{a^3}{a^{x+2}}$ 113. $\frac{x}{x^{n-1}}$, $\frac{x^2}{x^{n-2}}$, $\frac{x^{n+1}}{x^3}$
114. $\frac{a^{x+3}}{a^7}$, $\frac{a^{n-2}}{a^3}$, $\frac{a}{a^{n-5}}$ 115. $\frac{x^3}{x^{n-4}}$, $\frac{x^5}{x^{5-n}}$, $\frac{x^7}{x^{5+n}}$
116. $\frac{b^9}{b^{8-x}}$, $\frac{b^x}{b^{x-1}}$, $\frac{c^x}{c^{x+4}}$ 117. $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$, $\frac{h^{x+n}}{h^{2x}}$, $\frac{k^{x+1}}{k^{x-1}}$
118. $\frac{m^{x-1}}{m^{x-2}}$, $\frac{n^{x-5}}{n^{x+1}}$, $\frac{p^{x-2}}{q^{x+3}}$ 119. $\frac{a^{3+x}}{a^{x-3}}$, $\frac{a^{4+x}}{a^{5+x}}$, $\frac{a^{n-1}}{a^{1-n}}$
120. $\frac{a^{n-1}}{b^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{x-n}}$, $\frac{a^{x+n}}{a^{x-n}}$ 121. $\frac{a^{x+1}}{a^{5-x}}$, $\frac{a^{x+2}}{a^{7-5x}}$, $\frac{a^{5-x}}{a^{3-2x}}$
122. $\frac{a^{8+x}}{a^{13-x}}$, $\frac{a^{x+5}}{a^{5-2x}}$, $\frac{a^{7+2x}}{a^{3x-7}}$ 123. $\frac{a^{m+1}}{a^{1-n}}$, $\frac{a^{1-m}}{a^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{n-1}}$

124. $\frac{a^{2x+3y}}{a^{3x+2y}}$, $\frac{a^{3x-2y}}{a^{2x-3y}}$, $\frac{a^{2x-y}}{a^{x-n}}$ 125. $\frac{a^8 b^3}{a^3 b^8}$, $\frac{a^7 b}{a b^2}$, $\frac{a^6 b}{a^2 b^5}$

126. $\frac{a^9 b^9}{a^4 b^4}$, $\frac{a^7 b^3}{a^3 b^7}$, $\frac{a^4 b^4}{a^6 b^6}$ 127. $\frac{a^n b}{a b^m}$, $\frac{a^n b^3}{a^3 b^m}$, $\frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-1}}$

128. $\frac{a^{m+1} b^{n+1}}{a^m b^n}$, $\frac{a^{m-1} b^{n-1}}{a^m b^n}$, $\frac{a^{m+1} b}{a b^{n+1}}$

129. $\frac{a^{x+1} b^n}{(x+1) b^{n-1}}$, $\frac{a^{m+n} b^{m-n}}{(m-n) a^n b^m}$, $\frac{a^m b^{n+1}}{(a+b) a b}$

130. $\frac{(a-1)^3 (x-1)^4}{(a-1)^4 (1-x)^3}$, $\frac{a^5 (x-y)^2}{a (y-x)^5}$, $\frac{a^3 (x+y)^2}{a (x-y)}$

131. $\frac{a^n b^n (b-1)}{a^{n-1} b^{n-2} (1-b)^2}$, $\frac{a^2 b^2 (a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}$, $\frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$

132. $\frac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2x^2}$ 132_1. $\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3} \cdot \frac{15bc^3}{8a^6d^2} \cdot \frac{2cd}{3ab}$

133. $\frac{2a^2b^3c}{3x^2y^3} \cdot \frac{a^m b^n c^r}{x^m y^n} \cdot \frac{6x^{m-1} y^{n-2}}{a^{m+1} b^{n+2} c^{r+3}}$

134. $\frac{9a^2b^3}{8x^3y^n} \cdot \frac{10a^{n-1} x^{n+2}}{21b^{m+3} y^{m-n}} \cdot \frac{x}{a}$ 135. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1} b^{n+2}}{9a^{n+5} c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$

136. $\frac{a^{x-1} b^{x-2} c^{x-3}}{x^{n-1} y^{n+2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^{n+1} y^{n-2} z^{n+4}}{a^{x-2} b^{x+1} c^{x-1}} \cdot \frac{a^2c^2}{b^2x^2}$

137. $\frac{a^{m-n} b^{n-p} c^{p-m}}{x^{n-p} y^{p-m} z^{m-n}} \cdot \frac{a^{n-p} b^{p-m} c^{m-n}}{x^{p-1} y^{m-2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^n y^p z^m}{a^m b^n c^p}$

138. $\frac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^3} : \frac{4a^2b^6c^5}{5xy^5z^4}$ 139. $\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4} : \frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5}$

140. $\frac{5a^n b^{n-1} c^{n-2}}{6x^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1} b c^{n+1}}{2xy^n z^{n+1}}$

141. $\frac{5a^5b^3c^{n+1}}{6x^3y^nz^{n+4}} : \frac{3a^6b^4c}{8x^4yz^{n-1}}$

142. $\frac{a^{2x-3y} a^{3y-5}}{a^{5-3x} a^{7-2y}} : \frac{a^{5x+3y-10}}{a^{x+y+10}}$

143. $\frac{a^{3x-y} b^{2y-3x}}{a^{3y-2x} b^{5x-2y}} : \frac{a^{7x-3y} b^{7y-6x}}{a^{3x+2y} b^{3x+2y}}$

144. $(ax^7 + bx^3) : x^5$ 145. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$

146. $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : x^4$

147. $(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}$

148. $(3a^2b^3 + 2a^3c + 4a^3c^4) : 6a^3b^3c^3$

149. $(10x^4y^3z^5 + 15x^2y^4z - 6xy^2z^4) : 30x^2y^3z^4$

150. $(a^{3x-4y} + a^{2y-3x} + a^{3(x-y)}) : a^{4x-5y}$

151. $(6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (3a + 4b)$

152. $(15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3) : (5a - 3b)$

153. $(9a^4 - 58a^2b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$
154. $(144a^4 - 289a^2b^2 + 100b^4) : (12a^2 + 7ab - 10b^2)$
155. $(12a^4 - a^3b - 32a^2b^2 + ab^3 + 20b^4) : (4a^2 + ab - 5b^2)$
156. $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$
157. $(a^8 - b^8) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
158. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$
159. $(a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9) : (a^4 - a^3b - ab^3 + b^4)$
160. $(64a^6 + 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 + 12ab + 9b^2)$
161. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$ $\quad (x^{3m} + y^{3n}) : (x^m + y^n)$ [162]
162. $(x^{4m} - y^{4n}) : (x^m + y^n)$ [163] $\quad (x^n - y^n) : (x - y)$
163. $\frac{x^4 - 1}{x - 1}, \frac{a^4 - b^4}{a + b}, \frac{a^4 + b^4}{a + b} \quad \frac{a^5 + b^5}{a + b}, \frac{a^5 - b^5}{a - b}, \frac{x^5 + 1}{x + 1}$
164. $\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2}, \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}, \frac{a^6 - b^6}{a - b} \quad \frac{x^6 + 1}{x + 1}, \frac{x^6 - 1}{x - 1}, \frac{x^6 - 1}{x + 1}$

---

165. $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$ *) $\quad x^4 + x^2y^2 + y^4$
165_1. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}, \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \quad \frac{x^n}{y^p} - \frac{y^p}{x^n}, \left(\frac{x}{y}\right)^n - \left(\frac{y}{x}\right)^n$
165_2. $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2} \quad \frac{x^3}{y} + xy + \frac{y^3}{x}$
165_3. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}, \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \quad \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}, \frac{a^3}{b} - \frac{b^3}{a}$
165_4. $a^5 \pm b^5,\ x^5 \pm 1 \quad a^6 \pm b^6,\ x^6 \pm 1$
165_5. $ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} \quad ax^n + bx^{n+p} + cx^{n+r}$
165_6. $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \quad ax^n + bx^{n-p} + cx^{n-r}$
165_7. $x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1} \quad x^{n-p} - x^{n+p}$
165_8. $x^{n+2} + x^n + x^{n-2} \quad 6x^{n+2} - 13x^n + 6x^{n-2}$
165_9. $3x^{p+n} - 10x^p + 3x^{p-n} \quad 2x^{2n} + 5x^{n+p} + 2x^{2p}$

---

166. $\frac{(a^2 - x^2)^2 - (x^2 - b^2)^2}{(a^2 - y^2)^2 - (y^2 - b^2)^2}$ **) $\quad \frac{(a^2 + ab)^2 - (ab + b^2)^2}{(a^2 - ab)^2 - (ab - b^2)^2}$
166_1. $\frac{a^5b - ab^5}{a^3b^2 - a^2b^3}, \frac{a^6b^2 - a^2b^6}{a^5b^3 + a^3b^5} \quad \frac{a^4b + ab^4}{a^3b^2 + a^2b^3}, \frac{a^5b^2 - a^2b^5}{a^4b^3 - a^3b^4}$
166_2. $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x + y)(x^3 + y^3)} \quad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x - y)(x^3 - y^3)}$

*) Nr. 165—165_9 sollen in Faktoren zerlegt werden.
**) Nr. 166—166_9 sollen gehoben werden.

$166_3.\ \dfrac{a^4 + ab(a^2 + b^2) + b^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad \dfrac{x^4 - y^4}{(x + y)(x^3 - y^3)}$

$166_4.\ \dfrac{(a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2)}{(a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2)}$ $\qquad \dfrac{(a + b)(a^3 - b^3)}{(a - b)(a^3 + b^3)}$

$166_5.\ \dfrac{a^6 - b^6}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad \dfrac{x^6 + y^6}{x^4 - x^2y^2 + y^4}$

$166_6.\ \dfrac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a^{p+1} - a^{p-1}}$ $\qquad \dfrac{a^{x+2} - a^{x-2}}{a^{n+1} - a^{n-1}}$

$166_7.\ \dfrac{x^{n+2}y^{n-2} - x^{n-2}y^{n+2}}{x^{n+1}y^{n-1} - x^{n-1}y^{n+1}}$ $\qquad \dfrac{a^{n+x}b^{n-x} - a^{n-x}b^{n+x}}{a^{p+x}b^{p-x} - a^{p-x}b^{p+x}}$

$166_8.\ \dfrac{x^{n+2} + x^n + x^{n-2}}{x^{p+2} - x^{p+1} - x^{p-1} + x^{p-2}}$ $\qquad \dfrac{x^{n+2} - 2x^n + x^{n-2}}{x^{n+2} - x^{n+1} + x^{n-1} - x^{n-2}}$

$166_9.\ \dfrac{x^n + x^{n-1} - 2x^{n-2}}{x^p + 2x^{p-1} - 3x^{p-2}}$ $\qquad \dfrac{3x^{n+1} - 10x^n + 3x^{n-1}}{3x^{n+1} - 8x^n - 3x^{n-1}}$

$167.\ \dfrac{1}{x^7} + \dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{x}$ *) $\qquad \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1-x}{x^4}$

$167_1.\ \dfrac{1-x^3}{x^5} + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \dfrac{1-x^5}{x^7} + \dfrac{1}{x^2}$

$167_2.\ \dfrac{1-x^2}{x^6} + \dfrac{1-x^2}{x^4} + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \dfrac{1-x^2}{x^8} + \dfrac{1+x}{x^6} - \dfrac{1}{x^5}$

$167_3.\ \dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad \dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{n-p}}$

$167_4.\ \dfrac{1+x}{x^n} - \dfrac{1-x}{x^{n-1}} - \dfrac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad \dfrac{1-2x^2}{x^p} + \dfrac{2-3x^2}{x^{p-2}} + \dfrac{3}{x^{p-4}}$

$167_5.\ \dfrac{a}{x^n} + \dfrac{b}{x^{n-1}} + \dfrac{c}{x^{n-2}} + \dfrac{d}{x^2} + \dfrac{e}{x} + f$

$167_6.\ \dfrac{a}{p^{x-m}} + \dfrac{b}{p^{x-n}} + \dfrac{c}{p^{x-r}} + \dfrac{d}{p^x} + e$

$167_7.\ \dfrac{y^2}{(x-y)^n} + \dfrac{x}{(x-y)^{n-1}} - \dfrac{1}{(x-y)^{n-2}}$

$167_8.\ \dfrac{x^n}{(x+y)^n} + \dfrac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}} - \dfrac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$

$167_9.\ \dfrac{a^x - b^y}{a^x + b^y} + \dfrac{a^x + b^y}{a^x - b^y}, \quad \dfrac{x^m + y^n}{x^m - y^n} - \dfrac{x^m - y^n}{x^m + y^n}$

$168.\ \dfrac{15^3}{5^3}, \quad \dfrac{24^4}{8^4}, \quad \dfrac{30^2}{6^2},$ $\qquad 169.\ \dfrac{20^4}{15^4}, \quad \dfrac{36^3}{60^3}, \quad \dfrac{91^3}{78^3},$

---

*) Nr. 167—167_9 sollen gleichnamig gemacht werden.

170. $\frac{28^3}{21^2}$, $\frac{32^4}{48^3}$, $\frac{54^5}{72^4}$, 171. $\frac{25^3 \cdot 72^2}{9^3 \cdot 20^4}$, $\frac{18^4 \cdot 30^5}{27^4 \cdot 15^3}$, $\frac{28^3 \cdot 45^4}{36^4 \cdot 35^3}$,

172. $2^6 \cdot 5^6$, $6^4 \cdot 5^4$, $8^2 \cdot 5^2$

173. $25^4 \cdot 4^4$, $125^2, 8^2$, $35^3 \cdot 8^3$

174. $(1\frac{1}{2})^4 \cdot (6\frac{2}{3})^4$, $(1\frac{1}{3})^3 \cdot (1\frac{1}{2})^3$, $(7\frac{1}{2})^5 \cdot (1\frac{1}{3})^5$

175. $(-ab)^2 \cdot (ab)^{n-2} \cdot (-a)^3$

176. $(-ax)^4 \cdot (-by)^3 \cdot (abxy)^{n-3}$

177. $(ab)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$

177_1. $\left(\frac{6a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{(3a)^3}$

178. $(-\frac{2}{3}ab)^5 \cdot \left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3b}{8a}\right)^3$

179. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^4$ 180. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^n$

181. $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n \cdot \left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n \cdot \left(\frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n$ 182. $\left(\frac{ax}{by}\right)^2 \cdot \left(\frac{bx}{cy}\right)^3 \left(\frac{cy}{ax}\right)^5$

183. $\frac{(3xy)^2 \cdot (4xz)^3 \cdot (5yz)^4}{(25xyz)^2 \cdot (6xyz)^3}$ 183_1. $\frac{(6abx)^3 \cdot (10aby)^4}{(4ab)^4 \cdot (3ax)^3 (25by)^2}$

184. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$

185. $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-x^2}\right)^2$

186. $\left(\frac{m-n}{m-p}\right)^4 \cdot \left(\frac{n-p}{n-m}\right)^4 \cdot \left(\frac{p-m}{p-n}\right)^4$

---

187. $(a^2)^3$, $(b^3)^4$, $(x^4)^n$

188. $(a^n)^p$, $(a^3)^{x-1}$, $(x^{n+1})^4$

189. $(-a^3)^2$, $(-a^2)^3$, $(-a^3)^5$

190. $(-a^3)^{2n}$, $(-a^{2n})^3$, $(-a^{2n-1})^{2n}$

191. $(-a^2)^{2n-1}$, $(-a^{2n-1})^2$, $(-a^{2n})^{2n-1}$

192. $(a^4b^2)^5$, $(a^5b^7)^8$, $(x^ny)^3$

193. $(2a^2b^3)^4$, $(3ab^{n-2})^5$, $(7a^2x^{n-1}y^r)^3$

194. $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5$, $\left(\frac{3ab^5}{2x^2y}\right)^4$, $\left(\frac{4a^4b^n}{3x^2y^{n-1}}\right)^5$

195. $\frac{(a^2x^4)^4}{(ax)^{10}}$, $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$, $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^2b^3)^3}$

196. $\frac{(2^3)^5}{4^4}$, $\frac{(3^3)^3}{9^4}$, $\frac{(3^8)^5}{27^{13}}$ 196$_1$. $\frac{(3.4^2)^3}{12^4}$, $\frac{(6^2)^3}{(4.3^3)^2}$, $\frac{(8^2.5^3)^3}{20^9}$

197. $\left(\frac{2a^3 b^2}{3xy^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3x^2 y}{5a^2 b}\right)^3 \cdot \left(\frac{5ay^2}{2bx^2}\right)^2$

198. $\frac{3(2a^2 b^3)^2}{4(3x^3 y^2)^3} \cdot \frac{7(3x^4 y^3)^2}{5(2ab^2)^3}$ 198$_1$. $\frac{2(4a^3b^2c^2)^2}{3(6x^2y^3z^4)^3} \cdot \frac{6(3xy^2z^3)^4}{5(2a^2bc)^3}$

198$_2$. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$

Untersuche, welchen gemeinschaftlichen Faktor Zähler und Nenner in folgenden Brüchen haben, und hebe durch diesen Faktor.

199$_1$. $\frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{3x^3 - x^2 + 3x + 7}$ 199$_2$. $\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5}$

199$_3$. $\frac{x^4 + x^3 - 2x + 8}{2x^4 + 3x^3 - 9x + 4}$ 199$_4$. $\frac{6x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 - 10x + 3}$

Entwickele folgende Brüche in unendliche Reihen, die sechs ersten nach steigenden, die sechs folgenden nach fallenden Potenzen von x. Dies kann geschehen durch einfache Division, oder durch Anwendung der unbestimmten Coefficienten, oder bei einfachem Nenner auch mit Hülfe der bekannten Entwickelungen von $\frac{1}{1+x}$ und $\frac{1}{1-x}$.

200$_1$. $\frac{a}{b + cx}$ 200$_2$. $\frac{1}{3 - 2x}$ 200$_3$. $\frac{ax + 1}{bx + 1}$

200$_4$. $\frac{x}{(1 - x)^2}$ 200$_5$. $\frac{x + x^2}{(1 - x)^3}$ 200$_6$. $\frac{x(1 + x)^2}{(1-x)(1+x^2)}$

200$_7$. $\frac{a}{cx - b}$ 200$_8$. $\frac{6}{3x + 2}$ 200$_9$. $\frac{x + a}{x + b}$

200$_{10}$. $\frac{5 - 2x - x^2}{1 - x^3}$ 200$_{11}$. $\frac{ax - b}{1 + x + x^2}$ 200$_{12}$. $\frac{x}{(x - 1)^3}$

Entwickele folgende Quadrate und Kuben unendlicher Reihen bis auf sieben Glieder.

201$_1$. $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot)^2$

201$_2$. $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdot\cdot)^2$

201$_3$. $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \cdot\cdot)^2$

201$_4$. $(a - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + a_4x^4 - a_5x^5 + a_6x^6 - \cdot\cdot)^2$

201$_5$. $(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot)^2$

201$_6$. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot\cdot)^3$

201$_7$. $(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \cdot\cdot)^3$

Verwandle folgende unendliche Reihen in unendliche Produkte.

202_1. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot \cdot$

202_2. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot \cdot$

202_3. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdot \cdot$

202_4. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdot \cdot$

Berechne die Summen folgender unendlichen Reihen für die angegebenen Werthe von x, die der ersten sechs auf sieben, die der letzten auf zwölf Decimalen.

203_1. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ für 1) 0,2, 2) 0,3, 3) $\frac{1}{7}$, 4) $\frac{3}{16}$

203_2. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ für 1) $\frac{1}{9}$, 2) $\frac{1}{19}$, 3) $\frac{1}{89}$,

203_3. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \cdots$ für 1) $\frac{1}{51}$, 2) $\frac{1}{46}$

203_4. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdot \cdot$ für 1) 0,1, 2) 1

203_5. $x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \cdot \cdot$ für $\frac{3}{172}$ *)

203_6. $1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \cdots$ für $\frac{3}{172}$

203_7. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdot \cdot$ für 1) $\frac{1}{2}$, 2) $\frac{1}{5}$, 3) $\frac{1}{8}$, 4) $\frac{1}{18}$, 5) $\frac{1}{70}$, 6) $\frac{1}{99}$, 7) $\frac{1}{307}$.

Bezeichnet man die Summen, welche aus der letzten Reihe für die angegebenen Werthe von x entstehen, entsprechend mit F_2, F_5, F_8 u. s. w., so hat man

$$\frac{\pi}{4} = F_2 + F_5 + F_8, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12F_{18} + 3F_{70} + 5F_{99} + 8F_{307}.$$

Berechne $\frac{\pi}{4}$ und somit auch π auf diese Weise bis auf 12 Decimalen.

204_1. Wie wird man folgende dekadische Zahlen im heptadischen Zahlensystem schreiben: 12, 21, 37, 49, 70, 87, 100, 700, 8941?

204_2. Wie werden die Zahlen 17, 25, 50, 111, 333, 527 im pentadischen Zahlensystem heißen?

204_3. Wie heißen die Zahlen 7, 9, 27, 40, 100 im triadischen System?

204_4. Wie werden umgekehrt die Zahlen 27, 71, 100, 555, 1574, welche dem oktadischen Zahlensystem entnommen sind, im dekadischen System heißen?

---

*) Diese und die folgende Reihe liefern für den angegebenen Werth von x den Sinus von 1° bis auf 0,00001, den Cosinus von 1° bis auf 0,0000005 richtig.

204_5. Welche Werthe haben die dem tetradischen System angehörigen Zahlen 13, 123, 300, 333, 1023?

204_6. Deßgleichen die dem dyadischen System angehörigen Zahlen 11, 111, 1011, 1001001, 1011101?

XII.

Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

Wenn man die Reihen

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaa & aa & a \\ a^4 & a^3 & a^2 & a^1, \end{array}$$

deren entsprechende Glieder einander gleich sind, nach demselben Bildungsgesetz*) weiter führt, so erhält man

$$\begin{array}{cccccl} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} & \frac{1}{aaaa} & \text{u. s. w.} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & a^{-4} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Hat man daher einmal das Zeichen a^4 für $aaaa$, das Zeichen a^3 für aaa u. s. w. eingeführt, so wird es jedenfalls vortheilhaft sein, auch die Zeichen a^0, a^{-1}, a^{-2} u. s. w. einzuführen, damit man nicht erst jedesmal zu untersuchen hat, ob der Exponent positiv ist. Dann kann man aber, falls man nicht eine große Confusion in die Rechnung bringen will, diesen Zeichen consequenter Weise keine andere Bedeutung beilegen, als a^0 muß 1, a^{-1} muß $\frac{1}{a}$, a^{-2} muß $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$, a^{-3} muß $\frac{1}{aaa}$ oder $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. bedeuten**). Es muß demnach, falls die Rechnung auf den Exponenten 0 oder einen negativen Exponenten führt, sein

1. $a^0 = 1$

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder

3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Drücke diese Formeln in Worten aus.

---

*) In der Reihe oben entsteht das folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Division mit a, in der zweiten dadurch, daß man den Exponenten um 1 vermindert.

**) Von einem Beweise kann hier nicht die Rede sein. Es ist nur eine Ausdehnung der Bezeichnung, welche auf Potenzen mit negativen Exponenten führt, wie man das Zahlensystem über die Einer hinaus fortsetzt und auf Decimalstellen kommt, oder wie man sich die absoluten Zahlen über Null hinaus abnehmend denkt und die negativen Zahlen erhält.