Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1879

X. Proportionen

75. $\frac{x-4}{2x-1} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}$

76. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+x} + \frac{3x+7}{x^2-1}$

77. $\frac{8}{2x-3} + \frac{5}{3-2x} - \frac{3x-4}{2x^2-x-3}$

78. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+2}$ 79. $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}$

80. $\frac{2}{2x-1} - \frac{9}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$ 81. $\frac{7}{x-a} - \frac{4}{x-b} - \frac{3}{x-c}$

82. $\frac{1}{x+a} + \frac{2}{x+b} - \frac{3}{x+c}$ 83. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x^2}$

84. $\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$

85. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{4}{(x^2-1)^2}$.

X.

Proportionen.

1. Wodurch wird das Verhältniß zweier Größen gemessen?*) Wie wird es bezeichnet? Wie nennt man die Größen, welche das Verhältniß bilden? Was ist Exponent des Verhältnisses? Wann sind zwei Verhältnisse einander gleich? Was ist ein fallendes, was ein steigendes Verhältniß? Was gilt iu dieser Beziehung von zwei gleichen Verhältnissen?

2. Eine Proportion ist der Ausdruck für die Gleichheit zweier Verhältnisse. Unter welcher Bedingung ist zunächst $a : b = c : d$ eine richtige Proportion? Was sind Vorderglieder, was Hinterglieder, was homologe Glieder? was innere, was äußere Glieder einer Proportion?

3. Welches ist die wichtigste Eigenschaft einer Proportion? Woran erkennt man daher am einfachsten, ob eine Proportion richtig ist?

4. Wie bildet man aus den Faktoren zweier gleichen Produkte eine Proportion? Wie aus zwei gleichen Brüchen?

5. Welche Umstellungen kann man mit den Gliedern einer Proportion unbeschadet ihrer Richtigkeit vornehmen?

6. Wie kann man in einer Proportion die inneren und äußeren Glieder durch Multiplikation und Division unbeschadet ihrer Richtigkeit verändern?

7. Wenn in einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied einander gleich sind, was folgt daraus?

---

*) Hier sind nur sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen gemeint, da die arithmetischen von gar keiner Bedeutung sind. — Das Zeichen des Verhältnisses wird am besten für „dividirt durch" genommen.

8. Wie findet man ein unbekanntes (äußeres, inneres) Glied einer Proportion, wenn die andern drei bekannt sind?

9. Was ist eine stetige Proportion? Was ist geometrisches Mittel, was arithmetisches Mittel? Was mittlere Proportionale, was vierte Proportionale, was dritte Proportionale?

10. Wenn $a : b = c : d$, so kann man immer setzen $b = at$, $d = ct$; oder $c = at$, $d = bt$ (Beweis!)

11. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$am + bn : ap + bq = cm + dn : cp + dq$$
$$am + cn : bm + dn = a : b = c : d.$$

Dieser Satz heißt der Satz von der correspondirenden Addition und Subtraktion. Beweise ihn und gieb einige spezielle Fälle desselben an.

12. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$a^n : b^n = c^n : d^n$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

d. h. in Worten? (Beweis!)

13. Ist $a : b = c : d$ und $a : b = x : d$, so ist $x = c$; d. h. in Worten? (Beweis!)

13_1. Wenn $a : b = c : d$

und $a_1 : b_1 = c_1 : d_1$

so ist auch $aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1$

und $\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}$

d. h. in Worten? (Beweis!)

14. Was ist eine fortlaufende Proportion? Wenn $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$, so kann man stets setzen $a_1 = at$, $b_1 = bt$, $c_1 = ct$ und es ist $(a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1) = a : a_1$, d. h. in Worten? (Beweis!). — Ebenso ist, wenn $x : y = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$, auch $x : y = (a + b + c) : (a_1 + b_1 + c_1)$.

15. Wenn zwischen den Größen A, B, C, D u. s. w. so viele Verhältnisse gegeben sind, als Größen vorhanden, wie findet man dann die fortlaufende Proportion $A : B : C : D$?

16. Welches ist die Form einer harmonischen Proportion zwischen den Größen a, b, c u. d? Welches die Form einer stetigen harmonischen Proportion zwischen a, b u. c? Welches ist die Haupteigenschaft einer solchen Proportion, und wie wird daher die stet. harm. Proportion unter den Größen a, b u. c heißen, wenn das erste Verhältniß $a : b$ ist?

---

17. Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

1. $115 : 161$	$231 : 616$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$	$\frac{8}{9} : \frac{4}{15}$
2. $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{4} : 4\frac{5}{6}$	$8\frac{3}{5} : 18\frac{3}{7}$	$14\frac{5}{11} : 26\frac{1}{2}$
3. $0{,}8 : 0{,}6$	$0{,}45 : 1{,}8$	$0{,}078 : 0{,}117$	$2{,}646 : 1{,}47$
4. $18{,}2 : 34\frac{2}{3}$	$26\frac{3}{7} : 9{,}25$	$10{,}6 : 14\frac{5}{11}$	$271{,}25 : 206\frac{2}{3}$

18. Deßgl.

1. $4ab : 6bx$, $\quad 9a^2b : 12ab^2$, $\quad 1\frac{2}{3}x^4y : 1\frac{1}{9}xy^3$, $\quad 2\frac{4}{5}p^4q : 2\frac{1}{3}p^7q^3$

2. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ $\quad \frac{4a}{7b} : \frac{3a}{14x}$ $\quad \frac{15a}{8x} : \frac{5b}{12x}$ $\quad 3\frac{1}{3}x : \frac{5bx}{2a}$

3. $4(a+b)x : 6(a+b)y$ $\quad 6\frac{2}{3}(a-b)y : 4\frac{1}{6}(ay+by)$

4. $7\frac{1}{8}(x-1)p : 4\frac{3}{4}(q-qx)$ $\quad 5\frac{1}{3}(a+b)^2 : 3\frac{1}{5}(a^2-b^2)$

5. $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^3+1}{x^3-1}$ $\quad \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a-b}{a+b}$

19. Drücke folgende Proportionen, ohne das Glied x zu ändern, in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

1. $40 : 15 = 28 : x$ $\quad 10 : 112 = x : 42$

2. $6{,}3 : x = 13\frac{1}{2} : 20$ $\quad 7\frac{7}{8} : 28 = 3{,}75 : x$

3. $6\frac{2}{3} : 26\frac{1}{4} = x : 2\frac{1}{4}$ $\quad x : 1{,}5 = 1\frac{5}{7} : 1{,}8$

20. Deßgl.

1. $\frac{7}{4}ab : \frac{5}{6}bc = x : \frac{10}{3}cd$ $\quad 3\frac{1}{3}a^2b : \frac{5}{6}ac = 1\frac{1}{3}ab^2 : x$

2. $\frac{3a}{5b} : \frac{12a}{7c} = \frac{14c}{15b} : x$ $\quad \frac{4a^2}{9c^2} : \frac{5b^2}{6d^2} = \frac{2ad^2}{5bc^2} : x$

3. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} : \left(1+\frac{a}{b}\right) = \left(1-\frac{b}{a}\right) : x$, $\quad \frac{a^3+b^3}{n} : \frac{a^3-b^3}{p} = \frac{p(a+b)}{n(a-b)} : x$

21. Bestimme x aus folgenden Proportionen:

1. $51 : 15 = 68 : x$ $\quad 20 : 95 = x : 57$

2 $x : 10{,}4 = 115 : 18\frac{2}{5}$ $\quad 4{,}125 : x = 3\frac{1}{7} : 26\frac{2}{3}$

3. $7ab : 5bc = 3\frac{1}{2}a : x$ $\quad 8ab : x = bc : 1\frac{3}{4}ac$

4. $x : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$ $\quad \frac{a}{b} : x = \frac{c}{d} : \frac{b}{d}$

5. $\frac{a}{14b} : x = \frac{3c}{7b} : \frac{2c}{a}$ $\quad \frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{ab} = x : \frac{(a-b)^2}{ac}$

6. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} - ab\right) : \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + ab\right) = 1 : x$

7. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} + ab\right) : \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} - ab\right) = (a+b)^2 : x$

22. Bilde durch Umstellung der Glieder, indem du der ersten Größe zweimal jede der vier möglichen Stellungen giebst, aus den folgenden vier Produkten- und den folgenden vier Quotientengleichungen die je 8 möglichen Proportionen.

1. $4 . 12 = 6 . 8$, $9 . 8 = 3 . 24$, $ab = xy$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{c}$

2. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, $\frac{2a}{3b} = \frac{p}{q}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

23. Suche die vierte Proportionale zu: 1) 3, 4, 6; 2) 6, 21, 22; 3) 2, $4\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{3}$; 4) $3\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$; 5) a, b, c.

24. Suche die dritte Proportionale zu: 1) 9 u. 6; 2) 16 u. 12; 3) 9 u. 15; 4) a u. b.

25. Suche die mittlere Proportionale zwischen: 1) 27 u. 3; 2) 9 u. 16; 3) $\frac{ab}{c}$ u. $\frac{ac}{b}$; 4) $\frac{ax}{b}$ u. $\frac{bx}{a}$; 5) $\frac{(a+b)^2}{p-q}$ u. $\frac{p^2-q^2}{p+q}$.

26. Transformire folgende Proportionen nach dem Satz von der correspondirenden Addition und Subtraktion so, daß ein Glied x heißt, die andern drei aber kein x enthalten:

1.	$a : b = c - x : x$	$a : b = c + x : x$
2.	$a : b = x : c - x$	$a : b = c : x - c$
3.	$a : b = c : c - x$	$a : b = x : x - c$
4.	$a : b = c + x : c - x$	$a : b = x + c : x - c$
5.	$a : b + x = c : b - x$	$a + x : b = a - x : c$
6.	$a + x : b + x = x + c : x - c$	$x + a : x = x + b : x - b$
7.	$a + x : b + x = a - x : c - x$	$x + a : x = x : x - b$

27. Combinire je zwei der folgenden Proportionen so, daß x herausfällt, und gieb der neuen Proportion die einfachste Form.

1.	$a : b = c : x$	$a : b = c : x$	$a : b = x : c$
	$b : p = x : q$	$x : p = c : d$	$p : q = x : a$
2.	$a : b = x : c$	$x : a = b : c$	$a : x = b : c$
	$a : p = x : q$	$p : b = q : x$	$p : q = x : c$

28. Suche die fortlaufende Proportion A : B : C u. s. w., wenn gegeben ist:

1.	$A : B = 3 : 7$	$A : B = 6 : 5$	$A : B = 8 : 7$
	$A : C = 4 : 5$	$A : C = 9 : 7$	$C : A = 11 : 12$
2.	$A : B = 5 : 4$	$A : B = 8 : 9$	$A : C = 8 : 9$
	$B : C = 2 : 3$	$C : B = 7 : 12$	$B : C = 5 : 6$
3.	$A : B = 4 : 3$	$A : B = 4 : 5$	$A : B = 5 : 6$
	$A : C = 6 : 5$	$A : C = 5 : 7$	$B : C = 8 : 3$
	$A : D = 8 : 7$	$A : D = 3 : 2$	$C : D = 6 : 7$
4.	$A : B = 6 : 7$	$A : C = 8 : 3$	$A : D = 9 : 8$
	$B : C = 5 : 4$	$B : C = 7 : 6$	$B : C = 7 : 5$
	$B : D = 10 : 9$	$B : D = 14 : 15$	$C : D = 15 : 16$

29. Weise nach, daß je drei der folgenden Größen eine stetige harmonische Proportion bilden

1. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$ 2. $\frac{1}{a+(n-1)b}$, $\frac{1}{a+nb}$, $\frac{1}{a+(n+1)b}$

30. Beweise, daß das arithmetische Mittel zwischen zwei (ungleichen) Zahlen stets größer ist, als das geometrische Mittel.

---

31. Gieb folgende Verhältnisse benannter Zahlen in den kleinsten ganzen Zahlen an:

1.	3 *m.* 99 *cm.* : 4 *m.* 56 *cm.*	29 *m.* 7 *cm.* : 30 *m.* 78 *cm.*
2.	1 *m.* 2 *mm.* : 2 *m.* 83,9 *cm.*	5 *m.* 25,6 *cm.* : 7 *m.* 22,7 *cm.*
3.	4 Kg. 95 Gr. : 5 Kg. 265 Gr.	13 Kg. 923 Gr. : 14 Kg. 994 Gr.
4.	6 Pfd. 2,4 Lth. : 8 Pfd. 28,4 Lth.	12 Pfd. 16 Gr. : 11 Pfd. 14 Lth.
5.	15 Hl. 12 L. : 23 Hl. 52 L.	10 Hl. 5 L. : 11 Hl. 39 L.

32. Suche das Verhältniß der Preise der Waaren in möglichst kleinen ganzen Zahlen für folgende Fälle:

1. 2 Pfd. der ersten Waare k. 3 Mk. 6 Pf., 5 Pfd. der zweiten $10\frac{1}{5}$ Mk.
2. 7 Pfd. 3 Lth. kosten 14 Mk. 12 Pf., 3 Pfd. 7 Lth. kosten 7 Mk. 85 Pf.
3. 3 *m* 52 *cm* kosten 80 Mk. 80 Pf., 5 *m* 32 *cm* kosten 15 Mk. 96 Pf.
4. 2 Hl. 7 L. kosten 31 Mk. 5 Pf., 3 Hl. 6 L. kosten 48 Mk. 96 Pf.

---

33. Was versteht man unter einem geraden Verhältniß, was unter einem umgekehrten Verhältniß? Gieb Beispiele für beide an. — Was heißt es: ein Verhältniß hängt ab von mehreren andern, es wird aus ihnen zusammengesetzt? Wie geschieht die Zusammensetzung? (Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens!)

34. Von zwei Arbeitern arbeitet A 28 Tage täglich 9 Stunden, B 24 Tage täglich 10 Stunden. Wie ist das Verhältniß ihrer Leistungen und ihres Lohnes?

35. A und B tragen Korn. A trägt 3 Sack, während B deren 2 fortträgt; 5 Sack von A enthalten so viel als 4 Sack von B. Wie verhalten sich die fortgeschafften Kornmengen?

36. Ein Landmann hat 20 Männer und 15 Frauen in Arbeit. Wie ist das Verhältniß der Leistung aller Männer zu der aller Frauen, wenn 4 Männer so viel beschaffen als 5 Frauen?

37. Ein Hase wird von einem Windhund verfolgt. Der Hase macht 5 Sprünge, während der Hund 3 macht; der Hund kommt aber mit 4 Sprüngen so weit, als der Hase mit 11. Wie ist das Verhältniß der Schnelligkeiten?

38. Eine Arbeit wird von 18 Arbeitern beschafft, die täglich 10 Stunden arbeiten. Eine gleiche Arbeit wird von 25 Arbeitern ausgeführt, die täglich 9 Stunden arbeiten. Wie ist das Verhältniß der Tage, welche sie zu der Arbeit gebrauchen?

39. Die langen Seiten zweier gleichen Rechtecke verhalten sich wie 57 : 76; wie die kurzen?

40. Ein Dampfhammer giebt in 7 Minuten 576 Schläge, ein anderer in 5 Minuten 864. Beim ersten schaffen 3 Schläge so viel als 7 beim zweiten. Wie ist das Verhältniß der Wirkungen in einer bestimmten Zeit?

41. Jemand hat zwei Kapitalien ausstehen, eins zu $5\frac{1}{2}$ Pct. $1\frac{3}{4}$ Jahr, das andere zu $5\frac{1}{4}$ Pct. 1 Jahr 10 Monate. Beide bringen in der genannten Zeit gleich viel Zinsen. Wie verhalten sich die Kapitalien?

42. Ein Kapital bringt 828 Mk. Zinsen und steht zu 4,6 Pct.; ein anderes bringt 792 Mk. und steht zu $5\frac{1}{2}$ Pct. Wie verhalten sich die Zeiten, wenn die Kapitalien gleich sind?

43. Zwei gleiche Kapitalien stehen auf Zinsen. Das erste bringt c Mk. Zinsen in n Jahren zu p Pct.; das andere bringt c_1 Mk. in n_1 Jahren zu p_1 Pct. Wie verhalten sich 1) die Zinsen, 2) die Zeiten, 3) die Procente?

44. Zwei Kapitalien A und A_1 stehen gleich lange auf Zinsen. A bringt bei p Pct. in der Zeit c Mk. Zinsen, A_1 bei p_1 Pct. in derselben Zeit c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zinsen, 3) die Procente?

45. Ein Kapital A bringt in n Jahren c Mk. Zinsen, ein anderes A_1 bringt in n_1 Jahren c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Zinsen, wenn die Procente gleich sind?

46. Ein Kapital A steht n Jahre lang zu p Pct. aus, ein anderes n_1 Jahre zu p_1 Pct. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Procente, wenn beide Kapitalien gleich viel Zinsen tragen?*)

47. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5. Wie verhalten sich die Seiten? $\left(\frac{1}{h} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2}\right)$.

48. In einem Dreieck verhalten sich die durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises entstehenden Abschnitte der Seiten wie 4 : 5 : 6. Wie verhalten sich die Radien der drei äußeren Berührungskreise?

49. Vier Arbeiter verrichten dieselbe Arbeit bzw. in 6, 8, 9 u. 10 Tagen; wie verhalten sich ihre Leistungen?

XI.

Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

Eine Potenz ist ein Ausdruck von der Form a^n, welcher ein Produkt aus n gleichen Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist. Der Ausdruck a^5 ist demnach gleich a a a a a. Er wird gelesen a in der fünften (Potenz) oder a hoch 5. Nur in der Form a^5 heißt die Größe a a a a a eine Potenz; in der Form a a a a a sollte sie nur ein Produkt heißen. Der wiederholt gesetzte Faktor heißt Basis der Potenz, die Zahl n, welche angiebt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist, heißt der Exponent der Potenz oder der Potenzexponent. Nach dieser Erklärung kann der Exponent nur eine ganze absolute Zahl sein. Weßhalb man jedoch diese Art von Potenzen Potenzen mit positiven Exponenten und nicht Potenzen mit absoluten Exponenten nennt, wird erst im folgenden Abschnitt seine Erklärung finden.

Die Potenz einer Zahl suchen heißt potenziren. Eine Zahl a mit einer Zahl n potenziren heißt die Potenz a^n suchen. Beim Potenziren kommen demnach drei Größen in Betracht: die Basis, der Exponent und die Potenz. Wie sich bei der Addition die Summanden, bei der Multiplikation die Faktoren, so lassen sich beim Potenziren Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen. Mit Ausnahme von $2^4 = 4^2$ ist a^n niemals $= n^a$, wenn a und n von einander verschiedene ganze Zahlen sind. So ist $2^{10} = 1024$, $10^2 = 100$.

*) Alle in 43. — 46. vorkommenden Verhältnisse lassen sich sofort aus der Gleichung $Anpc_1 = A_1n_1p_1c$ ablesen. Wie erhält man diese?