Resultate für den Maschinenbau

[Hauptband]

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1848

Zweiter Abschnitt. Festigkeit der Materialien

urn:nbn:de:bsz:31-282867

Zweiter Abschnitt.

Festigkeit der Materialien.

(In diesem Abschnitt sind alle Abmessungeu in Centimetres ausgedrückt.)

38.

Absolute Festigkeit.

Wir nehmen als Maass der absoluten Festigkeit eines Materials die Kraft in Kilogr., welche im Stande ist, einen Stab von einem Quadrat-Centm. Querschnitt zu zerreissen.

Nennt man:

$\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit eines Materials, aus welchem ein Stab von gleichem Querschnitt besteht,

a den Querschnitt des Stabes,

K die Kraft in Kilogr., welche das Abreissen des Stabes zu bewirken vermag,

so ist:

$$K = \mathfrak{A}\,a, \quad a = \frac{K}{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{A} = \frac{K}{a}$$

Die Werthe von $\mathfrak{A}$ für die in der Praxis vorzugsweise angewendeten Materialien sind in der Tabelle Nr. 57 angegeben.

39.

Berechnung der Elasticitätsmomente verschiedener Querschnittsformen. Tafel V.

Das Elasticitätsmoment eines Querschnittes (d. h. die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, die in einem

Querschnitt eines Stabes in Folge einer Biegung desselben entstanden sind) wird gefunden, wenn man die auf 1 Quadrat-Centm. bezogene Spannung der am stärksten ausgedehnten Fasern, mit einem gewissen von den Querschnittsdimensionen abhängigen Ausdruck multiplicirt.

Nennt man:

M das Elasticitätsmoment eines Querschnittes in dem so eben angegebenen Sinn,

$\mathfrak{B}$ die auf einen Quadrat-Centm. bezogene grösste Spannung, welche in dem Querschnitt vorkommt,

E den erwähnten von den Querschnittsdimensionen des Stabes abhängigen Ausdruck,

z die Entfernung der am stärksten gespannten Fasern von der (durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden) neutralen Faser (d. h. von derjenigen Faser, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet),

so ist:

$$M = \mathfrak{B}\,E.$$

Die Werthe von E und z für die verschiedenen Querschnittsformen, welche in der Anwendung gebraucht werden, sind auf Tafel V. zusammengestellt.

40.

Festigkeit stabförmiger Körper gegen das Abbrechen.

In den folgenden Formeln bedeutet:

$\mathfrak{B}$ die auf 1 Quadrat-Centm. bezogene grösste Spannung, welche in dem Stab vorkommt,

$\mathfrak{B}$E das Elasticitätsmoment, welches dem Querschnitt entspricht, in welchem die grösste Spannung stattfindet; wobei für E derjenige von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken zu setzen ist, welcher der Querschnittform des Stabes entspricht,

p das Gewicht des Stabes in Kilogr.

Es ist

a) Wenn der Stab an dem einen Ende festgehalten und am andern Ende belastet ist,

$$\text{Fig. 31.} \quad \mathfrak{B}\,E = P\,l + \frac{1}{2}\,p\,l.$$

b) Wenn der Stab mit beiden Enden aufliegt und in der Mitte belastet ist

$$\text{Fig. 32.} \quad \mathfrak{B}\,E = P\,l. + \frac{1}{4}\,p\,l.$$

c) Wenn die Last 2 P um c und c_1 von den Unterstützungspunkten entfernt ist:

$$\text{Fig. 33.} \quad \mathfrak{B}\,E = \frac{c\,c_1}{l}\left(P + \frac{1}{4}\,p\right)$$

d) Wenn in einer Entfernung c von jedem Unterstützungspunkte eine Last P wirkt:

$$\text{Fig. 34.} \quad \mathfrak{B}\,E = P\,c + \frac{1}{2}\,p\,c\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{c}{e}\right)$$

e) Wenn eine Last 2 P auf eine Länge 2 e auf dem Stab gleichförmig vertheilt ist, und der Schwerpunkt der Last um c und c_1 von den beiden Unterstützungspunkten entfernt ist:

$$\text{Fig. 35.} \quad \mathfrak{B}\,E = P\left(\frac{c\,c_1}{l} - \frac{e}{2}\right) + \frac{p}{4}\,\frac{c\,c_1}{l}.$$

Will man vermittelst dieser Formeln die Last berechnen, bei welcher ein stabförmiger Körper abbricht, so muss in denselben für $\mathfrak{B}$ der Brechungs-Coeffizient gesetzt werden, welcher dem Materiale entspricht, aus welchem der Stab besteht. Will man hingegen die Querschnittsdimensionen berechnen, welche ein stabförmiger Körper erhalten muss, um mit Sicherheit eine gegebene Last tragen zu können, so muss man in jenen Formeln für $\mathfrak{B}$, je nach Umständen, den 5ten, 10ten oder sogar nur den 20ten Theil von dem Brechungs-Coeffizienten in Rechnung bringen.

Für Maschinenconstructionen darf in der Regel nur der 10te Theil dieses Coeffizienten genommen werden. Die Brechungs-Coeffizienten für die verschiedenen Materialien sind auf Tabelle N° 57 in der mit $\mathfrak{B}$ überschriebenen Vertikalcolumne zusammengestellt.

41.

Festigkeit der Körper gegen das Zerdrücken.

Wenn die Dimension eines Körpers nach der Richtung des Druckes klein ist, im Vergleich zu den darauf senkrechten Abmessungen, so ist die Kraft, welche das Zerdrücken des Körpers bewirkt, unabhängig von der Länge und proportional dem Querschnitt. Die Widerstandsfähigkeit der Materialien gegen das Zerdrücken ist aber so gross, dass eine Berechnung der Querschnitte im Maschinenbau nie nothwendig ist.

42.

Rückwirkende Festigkeit langer stabförmiger Körper. Fig. 36.

Nennt man:

l die Länge des Stabes;

P diejenige Belastung, bei welcher der Stab eine bleibende Biegung annimmt;

k die auf die Biegungslinie des Stabes senkrechte Dimension seines Querschnittes;

ε den Modulus der Elasticität des Materials, aus wechem der Stab besteht. Tafel N° 57;

E denjenigen von den auf Tafel V zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht:

$\pi = 3 \cdot 142$ die *Ludolph*'sche Zahl.

So ist für einen Stab, der sich in allen seinen Theilen frei biegen kann, und nach seiner Länge gedrückt wird:

a) für jede Querschnittsform

$$P = \frac{\varepsilon}{2} \pi^2 E \frac{k}{l^2},$$

b) für einen cylindrischen Stab von dem Durchmesser d

$$P = \frac{\varepsilon}{16} \pi^2 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2 \pi}{4}\right),$$

c) für einen hohlen cylindrischen Stab. d der äussere, d_1 der innere Durchmesser:

$$P = \frac{\varepsilon}{16} \cdot \pi^2 \cdot \frac{d^2 + d_1^2}{l^2} \cdot (d^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4} = \frac{\varepsilon}{64} \cdot \pi^3 \frac{d^4 - d_1^4}{l^2}.$$

d) für einen Stab mit rechtwinklichem Querschnitt:

$$P = \frac{\varepsilon}{12} \cdot \pi^2 \cdot \frac{b\, h^3}{l^2},$$

wobei h die kleinere, b die grössere Querschnitts-Dimension des Stabes bezeichnet.

Bei den Maschinen sind die auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommenen Theile so stark gemacht, dass erst bei einer Last, die 10, 20, 50mal grösser ist als diejenige, welcher sie wirklich zu widerstehen haben, eine bleibende Biegung eintreten würde. Wenn man also mit den so eben aufgestellten Formeln mit der Praxis übereinstimmende Dimensionen erhalten will, so muss in denselben für P eine Last in Rechnung gebracht werden, die 10, 20, 50 mal grösser ist, als diejenige, welcher der Körper wirklich ausgesetzt ist.

43.

Festigkeit stabförmiger Körper gegen das Verwinden.

Nennt man:

P die Kraft in Kilogr., welche das Verwinden bewirkt,

R in Centim. die Länge des Hebelarmes, an wechem P wirkt,

T ein von der Natur des Materials, aus welchem der Stab besteht, abhängiger Coeffizient, durch welchen die an der Oberfläche des verwundenen Stabes statt findende grösste Spannung der Fasern gemessen wird, so ist:

a) für cyindrische Stäbe vom Durchmesser d

$$PR = T \cdot \frac{\pi}{16} d^3,$$

b) für quadratische Stäbe, b Seite des Quadrates

$$PR = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}}$$

c) für parallelepipedische Stäbe (b. h. Dimensionen des Querschnittes),

$$PR = T \frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$$

Will man mit diesen Formeln das statische Moment berechnen, welches erforderlich ist, um einen Stab abzuwinden, so muss für T der dem Materiale entsprechende Werth der Tabelle N° 57 in Rechnung gebracht werden. — Will man dagegen vermittelst obiger Formeln die Dimensionen von Axen oder Wellen so bestimmen, dass sie mit Sicherheit einem gegebenen Torsionsmoment zu widerstehen vermögen, so darf man für T nur den 10ten, 20ten oder 30ten Theil der Coeffizienten in Rechnung bringen, welche die Tabelle N° 57 enthält.

44.

Dicke der Gefässwände.

Es sei:

𝔄 die auf einen Quad.-Centm. bezogene Spannung des Materials an der inneren Fläche des Gefässes;

q der Druck, den die im Gefäss enthaltene (tropfbare oder ausdehnsame) Flüssigkeit auf jeden Quad.-Centm. ausübt;

d der innere Durchmesser des cylindrischen oder kugelförmigen Gefässes;

δ die Wanddicke. So ist:

a) für cylindrische Gefässe $\delta = \frac{d\,q}{2\,(\mathfrak{A} - q)}$.

b) für kugelförmige Gefässe $\delta = \frac{d\,q}{4\cancel{(}\mathfrak{A} - 2q\cancel{)}}$.

Um eine Metalldicke so zu bestimmen, dass ein Gefäss mit Sicherheit einem innern Druck zu widerstehen vermag, muss man in diesen Formeln für $\mathfrak{A}$ einen aliquoten Theil von dem Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials in Rechnung bringen. Die innere Pressung q muss kleiner sein als die absolute Festigkeit des Materials, sonst ist es nicht möglich, wie stark man auch die Wanddicke nehmen mag, dass das Gefäss dem innern Druck zu widerstehen vermag. Diess ist vorzugsweise bei hydraulischen Pressen zu berücksichtigen. Für Gusseisen ist z. B. die absolute Festigkeit gleich 1000. Gestattet man, dass der Presscylinder bis zur Hälfte seiner Festigkeit in Anspruch genommen werden dürfe, so ist zu setzen: $\mathfrak{A} = \frac{1000}{2} = 500$. Nimmt man ferner, wie es gewöhnlich bei hydraulischen Pressen der Fall ist, die Wanddicke halb so gross an als den innern Durchmesser des Cylinders, dann ist $\delta = \frac{d}{2}$ und es wird, nach der ersten der obigen Formeln $q = 250$. Die Spannung im innern des Cylinders darf also, wenn $\delta = \frac{d}{2}$ genommen wird, nicht mehr als ungefähr 250 Atmosphären betragen.

45.

Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben.

Nennt man:

l die natürliche Länge eines Stabes;

a den Querschnitt desselben;

P die ausdehnende oder zusammendrückende Kraft in Kilogr.;

e die durch P hervorgebrachte Verlängerung oder Verkürzung des Stabes;

ε den Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem der Stab besteht (Tabelle N° 57), d. h. die Kraft, welche nothwendig wäre, um einen Stab von 1 Quad.-Centm. Querschnitt noch einmal so lang oder noch einmal so kurz zu machen, als er ursprünglich im natürlichen Zustand ist;

so ist, wenigstens für nicht zu starke Ausdehnungen oder Zusammenpressungen,

$$e = \frac{P}{a} \; \frac{l}{\varepsilon}, \quad \frac{P}{a} = \varepsilon \; \frac{e}{l}.$$

Biegung stabförmiger Körper.

46.

Biegung eines Stabes, der an dem einen Ende gehalten und am andern Ende belastet ist. Fig. 37.

Es sei:

P die Belastung am freien Ende des Stabes;

l die ganze Länge des Stabes;

f die Senkung des freien Endes;

α der Winkel, den die an das Ende des Stabes gezogene Tangente mit der ursprünglichen Richtung desselben bildet;

ε der Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem der Stab besteht. Tabelle N° 57;

E derjenige von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht;

$x = Cn$, $y = mn$ die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Belastung krumm gewordenen neutralen Faser;

z die Entfernung der neutralen Faser von der am stärksten ausgedehnten Faser.

Diess vorausgesetzt, ist, wenn das Gewicht des Stabes vernachlässigt wird:

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon E z} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)$$

$$f = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{\varepsilon E z}$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{P l^2}{2 \varepsilon E z} = \frac{3}{2} \frac{f}{l}.$$

47.

Biegung eines auf zwei Stützen liegenden in der Mitte belasteten Stabes. Fig. 38.

Es sei:

$2l$ die ganze Länge des Stabes;
$2P$ die Belastung;
E, ε, z, wie im vorhergehenden Fall;
$f = CD$ die Senkung der neutralen Faser in der Mitte;
$Bn = x$, $mn = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der gebogenen neutralen Faser;
α der Winkel, den die zu A und B gezogenen Tangenten gegen AB bilden.

Diess vorausgesetzt, ist:

$$y = \frac{P}{2\varepsilon E z}\left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)$$

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{P l^3}{\varepsilon E z}$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{P l^2}{2\varepsilon E z} = \frac{3}{2}\,\frac{f}{l}.$$

48.

Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützpunkte gelegt und durch eine Kraft $2P$ *belastet ist, deren Angriffspunkt von den Stützpunkten um* c *und* c_1 *entfernt ist.* Fig. 39.

Es sei:

$2P$ die Last;
$2l$ die Entfernung der Stützpunkte;
c, c_1 die Entfernung der Last von den Stützpunkten;
E, ε, z, wie in N⁰ 46;
$Bn_1 = x_1$, $m_1 n_1 = y_1$. Coordinaten eines Punktes m_1 zwischen B und C;
$An = x$, $mn = y$ Coordinaten eines Punktes m zwischen A und C;
$f = DC$ die Senkung der neutralen Faser bei C;
$\alpha\ \alpha_1$ die Neigungen der neutralen Faser bei A und B gegen AB.

Wenn das eigene Gewicht des Stabes nicht berücksichtigt wird, hat man:

$$y = \frac{P}{E\varepsilon z}\cdot\frac{c_1}{6l}\left\{c\,[2c_1 + c]\,x - x^3\right\}$$

$$y_1 = \frac{P}{E\varepsilon z} \cdot \frac{c}{6\,l} \left\{ c_1 \left[2c + c_1\right] x_1 - x_1^3 \right\}$$

$$f = \frac{P}{E\varepsilon z} \cdot \frac{c^2\, c_1^2}{3\,l}$$

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{P}{E\varepsilon z} \cdot \frac{c\,c_1\,[2c_1 + c]}{6\,l}$$

$$\text{tang.}\ \alpha_1 = \frac{P}{E\varepsilon z}\ \frac{c\,c_1\,[2c + c_1]}{6\,l}$$

Wenn $c > c_1$ ist, wird die Tangente an die Kurve parallel mit AB für

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}\, c\, [2 c_1 + c]}$$

und die entsprechende Senkung ist:

$$y = \frac{P}{E\varepsilon z}\, \frac{c_1}{l} \cdot \frac{1}{9\sqrt{3}} \left\{ c\, [2c_1 + c] \right\}^{\frac{3}{2}}$$

49.

Biegung eines Stabes unter folgenden Umständen. Fig. 40.

Das Ende A frei und mit P belastet. Das Ende B befestiget. Auf der ganzen Länge eine Last P_1 gleichförmig vertheilt.

Bezeichnungen wie in N° 46, $An = x$, $mn = y$.

$$y = \frac{1}{E\varepsilon z} \left\{ \frac{1}{2}\, l^2 \left(P + \frac{1}{3} P_1\right) x - \frac{1}{6} P x^3 - \frac{1}{24} P_1 \frac{x^4}{l} \right\}$$

$$f = \frac{1}{3}\, \frac{l^3 \left(P + \frac{3}{8} P_1\right)}{E\varepsilon z}$$

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{l^2 \left(P + \frac{1}{3} P_1\right)}{2\,\varepsilon E z}$$

50.

Biegung eines Stabes unter folgenden Umständen. Fig. 41.

Der Stab liege bei A und B auf Stützpunkten, in der Mitte hänge eine Last 2 P, und auf seiner ganzen Länge sei eine Last $2P_1$ gleichförmig vertheilt.

Bezeichnungen wie in N° 47, $An = x$, $mn = y$.

$$y = \frac{1}{2 E \varepsilon z} \left\{ l^2 \left(P + \frac{2}{3} P_1 \right) x - \frac{1}{3} \left(P + P_1 \right) x^3 + \frac{1}{12} P_1 \frac{x^4}{l} \right\}$$

$$f = \frac{l^3}{2 E \varepsilon z} \left(\frac{2}{3} P + \frac{5}{12} P_1 \right)$$

$$\text{tang.}\, \alpha = \frac{l^2}{2 E \varepsilon z} \left(P + \frac{2}{3} P_1 \right)$$

51.

Berechnung des Torsionswinkels stabförmiger Körper.

Nennt man:

M das statische Moment der Kraft, durch welche ein Stab gedreht wird (die Kraft in Kilogr., den Hebelarm, an welchem, sie wirkt in Centm. ausgedrückt);

l die Länge des Stabes;

Θ der in Graden ausgedrückte Torsionswinkel;

G das statische Moment der Kraft, welches ein cylindrischer Stab von 1 Quad.-Centim. Querschnitt und von 1 Centim. Länge um 360° zu drehen vermag;

so ist:

a) für cylindrische Stäbe (Durchmesser = d)

$$\Theta^0 = 16 \frac{M}{G} . l . \frac{360^0}{d^4 \pi^2}$$

b) für einen quadratischen Stab (a Seite des Quadrats)

$$\Theta^0 = 6 \frac{M}{G} . l . \frac{180}{a^4 \pi}$$

c) für einen parallelepipedischen Stab (a, b Seiten des Querschnittes)

$$\Theta^0 = 3 \frac{M}{G} . l . \frac{b^2 + a^2}{b^3 a^3} . \frac{180}{\pi} .$$

Die Werthe von G sind gleich $0 \cdot 4\, \varepsilon$ und befinden sich in der Tabelle N° 57 zusammengestellt.

Körperformen von gleicher Festigkeit.

52.

Körper von gleicher absoluter Festigkeit.

Kurze Stäbe, deren Gewicht im Vergleich zu der sie ausdehnenden Kraft nicht gross ist, erhalten nach ihrer ganzen Ausdehnung gleiche

Festigkeit gegen das Abreissen, wenn 1) alle Querschnitte gleiche Grösse haben, 2) wenn die aufeinander folgenden Querschnitte sowohl hinsichtlich ihrer Form als auch hinsichtlich ihrer Stellung stätig in einander übergehen oder vollkommen übereinstimmen. Sehr lange Stäbe, deren Gewicht im Vergleich zu der sie dehnenden Kraft bedeutend gross ist, erhalten in allen Querschnitten gleiche Festigkeit, wenn sie nach folgender Regel geformt werden.

Nennt man (Fig. 42):

P die an den Stab gehängte Last;

γ das Gewicht von 1 Cubikcentim. des Materials, aus welchem der Stab besteht;

$\mathfrak{A}$ die Spannung per 1 Quad.-Centim., welche in der ganzen Ausdehnung des Stabes herrschen soll;

$e = 2 \cdot 718$ die Basis der natürlichen Logarithmen;

Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb seines unteren Endes;

so hat man zur Bestimmung der Form des Stabes die Gleichung:

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x}.$$

53.

Körper von gleicher Festigkeit gegen das Abbrechen.

Bei den folgenden Körperformen von gleicher Festigkeit gegen das Abbrechen wird das eine Ende befestigt, das andere Ende frei und belastet angenommen. Das Gewicht des Körpers wird vernachlässigt.

Fig. 44. Breite des Körpers überall gleich b. Höhe des Körpers an der Befestigungsstelle $B\,C = h$. Zur Bestimmung von h hat man die Gleichung

$$P\,l = \frac{\mathfrak{B}}{6} \cdot b\,h^2.$$

Die Linie C m A ist eine quadratische Parabel, die nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren verzeichnet werden kann, wenn einmal die Dimensionen bekannt sind.

Fig. 45. Breite des Körpers überall gleich b. Zur Bestimmung der Höhe $B\,B_1 = h$ hat man die Gleichung

$$P\,l = \frac{\mathfrak{B}}{6} \cdot b\,h^2.$$

Die krumme Linie $B\,A\,B_1$ ist eine quadratische Parabel, die nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren verzeichnet werden kann.

Fig. 46 und Fig. 47 sind zwei Körper, die annähernd eine gleiche Festigkeit darbieten. Die Breite ist bei jedem derselben überall gleich b. Zur Bestimmung von b und $B B_1 = h$ hat man die Gleichung

$$P l = \frac{\mathfrak{B}}{6} \cdot b h^2.$$

Für den Querschnitt am freien Ende ist zu nehmen:

$$A A_1 = \frac{1}{2} h.$$

$$\text{Breite} = b.$$

Fig. 48. Alle Querschnitte sind geometrisch-ähnliche Rechtecke. Zur Bestimmung der Form des Körpers hat man:

$$P l = \frac{\mathfrak{B}}{6} b h^2, \quad y = h \sqrt[3]{\frac{x}{l}}, \quad z = b \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$$

Die Linien B_1 A B und D A D_1 sind kubische Parabeln.

Fig. 49 ist eine Annäherungsform an den vorhergehenden Körper. Zur Bestimmung von $D D_1 = b$ und $B B_1 = h$ hat man die Gleichung

$$P l = \frac{\mathfrak{B}}{6} b h^2.$$

Die Querschnittsdimensionen des freien Endes sind:

$$A A_1 = \frac{2}{3} h. \quad E E_1 = \frac{2}{3} b.$$

Fig. 50 ist ein Rotationskörper von gleicher Festigkeit. Zur Bestimmung des Durchmessers $B B_1 = d$ hat man die Gleichung

$$P l = \frac{\pi}{32} \mathfrak{B} d^3.$$

Die Linie B A B_1, durch deren Umdrehung die Rotationsfläche entsteht, ist eine kubische Parabel, und es ist:

$$y = d \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$$

Fig. 51 ist ein abgestumpfter Kegel, welcher eine Annäherung an die vorhergehende Form bildet, wenn man nimmt: $A A_1 = \frac{2}{3} B B_1$.

54.

Körper von gleicher rückwirkender Festigkeit.

Fig. 43 werden auf folgende Art erhalten: Man bestimme nach Nr. 42 den mittleren Querschnitt des Körpers. Ist h irgend eine Dimension desselben, so findet man die analoge Dimension in einem beliebigen Querschnitt, welcher von dem Ende des Stabes um x entfernt ist, durch folgenden Ausdruck:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Arc. sin.} \frac{z}{h} - \frac{z}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2} \right\}.$$

Annähernd erhält man Körperformen von gleicher rückwirkender Festigkeit, wenn man an den Enden Querschnitte annimmt, die mit dem mittleren geometrisch ähnlich aber im Verhältniss 7 : 10 linear kleiner sind, und sodann die zusammengehörigen Punkte der drei Querschnitte durch schwach gekrümmte Linien verbindet.

55.

Wirkungsgrössen, welche zur Ausdehnung, Zusammenpressung, Biegung und Drehung von stabförmigen Körpern nothwendig sind.

a. Ausdehnung oder Zusammenpressung. Es sei

V das Volumen des Stabes;

l die Länge des Stabes;

Ω der Querschnitt des Stabes;

ε der Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem der Stab besteht. Tabelle Nr. 57;

λ die Ausdehnung oder Zusammenpressung (Verlängerung oder Verkürzung) des Stabes;

$\mathfrak{A}$ die Spannung per 1 Quadrat-Centm., welche in der ganzen Ausdehnung des Stabes eintritt, wenn derselbe um λ gedehnt worden ist;

W die Wirkungsgrösse in Kilog. Centm., welche dieser Ausdehnung entspricht, so ist:

$$\left.\begin{array}{r} W = \dfrac{\Omega\, \varepsilon}{2} \dfrac{\lambda^2}{l} \\ \text{oder auch} \quad W = \dfrac{1}{2} \cdot V \dfrac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon} \end{array}\right\} \text{Kilog. Centm.}$$

Setzt man in den letzten dieser Ausdrücke für $\mathfrak{A}$ den Coefizienten für die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem der Stab besteht, so erhält man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab bis zum Abreissen auszudehnen. Diese Wirkungsgrösse ist proportional: 1) dem Volumen des Stabes; 2) dem Quadrat der absoluten Festigkeit und 3) umgekehrt proportional dem Modulus der Elasticität.

Die Widerstandsfähigkeit der Materialien gegen Wirkungsgrössen muss nach dem Quotienten $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ beurtheilt werden. Die Werthe desselben sind in Tabelle Nr. 57 enthalten.

b. Biegung der Stäbe.

Nennt man:

E denjenigen von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht;

z den Abstand der neutralen Faser von der am stärksten ausgedehnten Faser;

l die ganze Länge des Stabes:

$\mathfrak{B}$ die auf 1 Quadrat-Centm. bezogene stärkste Spannung, welche in dem Stab vorkommt;

ε den Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

V das Volumen des Stabes;

W die Wirkungsgrösse in Kilog. Centm., welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu biegen, dass die auf 1 Quadrat-Centm. bezogene stärkste Spannung gleich $\mathfrak{B}$ wird, so ist:

$$W = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} \frac{E\,l}{z}$$

und dieser Ausdruck gilt sowohl für den Fall, wenn der Stab an dem einen Ende befestigt ist und die biegende Kraft auf das andere freie Ende einwirkt, als auch dann, wenn der Stab auf zwei Unterstützungspunkten liegt und die biegende Kraft auf irgend einen dazwischenliegenden Punkt wirksam ist.

Für die einfacheren Querschnittsformen wird $\frac{E\,l}{z}$ dem Volumen des Stabes proportional und man findet:

a) Für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V.$$

b) Für einen massiven cylindrischen Stab:

$$W = \frac{1}{24} \cdot \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} \cdot V.$$

c) Für einen ellyptischen Stab:

$$W = \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} \cdot V.$$

d) Für einen dreikantigen Stab:

$$W = \frac{1}{12} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V.$$

Die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$, welche dem Bruch durch Biegung entsprechen, sind in Tabelle Nr. 57 zusammengestellt.

c. Drehung der Stäbe.

Nennt man:

V das Volumen eines quadratischen oder runden Stabes;

G den Modulus der Elasticität für Drehung und für das Material, aus welchem der Stab besteht. Tabelle Nr. (57);

T die auf 1 Quadrat-Centm. bezogene grösste Spannung, welche an der Oberfläche des Stabes in Folge einer Verwindung desselben eintritt. Tabelle Nr. 57,

W die in Kilogr.-Centm. ausgedrückte Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu verwinden, bis die Spannung T eintritt, so ist:

a) für cylindrische Stäbe:

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} \cdot V$$

b) für quadratische oder rechteckige Stäbe:

$$W = \frac{1}{6} \frac{T^2}{G} \cdot V$$

Die Werthe von $\frac{T^2}{G}$, welche dem Reissen der Fasern an der Oberfläche entsprechen, sind in der Tabelle Nr. 57 enthalten.

56.

Bemerkung.

Aus den in vorhergehender Nr. zusammengestellten Resultaten ersieht man, dass die Widerstandsfähigkeit der Körper gegen Wirkungsgrössen, also auch gegen die Einwirkung von lebendigen Kräften, bei allen einfacheren Körperformen dem Volumen proportional ist, dass es also nur auf dieses Letztere und nicht auf die einzelnen Dimensionen ankommt. Zwei Stäbe z. B., die aus einerlei Material bestehen und gleich grosse Volumen haben, gewähren einerlei Widerstandsfähigkeit gegen die Einwirkung von lebendigen Kräften, wie auch sonst die Dimensionen der Stäbe beschaffen sein mögen. Genau ist jedoch dieses Gesetz (welches für den Bau der Maschinen, die lebendigen Kräften zu widerstehen haben, von bedeutender Wichtigkeit ist), nur dann, wenn die Formänderungen der Körper nicht zu rapid erfolgen, so dass die Einwirkung der lebendigen Kraft Zeit findet, sich über den ganzen Körper zu verbreiten.

57.

Coefficienten für die Festigkeit und Elasticität der Materialien.

Die folgende Tabelle enthält die Coefficienten für die Festigkeit und Elasticität derjenigen Materialien, welche im Maschinenbau vorzugsweise verwendet werden.

Columne $\mathfrak{A}$. Coefficienten für die absolute Festigkeit pr. 1 Quadrat-Centm.

Columne $\mathfrak{B}$. Brechungs-Coefficienten pr. 1 Quadrat-Centm.

Columne T. Coefficienten für den Bruch durch Abwinden.

Columne ε. Modulus der Elasticität der Materialien zur Berechnung der Ausdehnung, Zusammenpressung und Biegung der Körper.

Columne G. Modulus der Elasticität der Materialien zur Berechnung der Torsion von Stäben.

Columne $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ Coefficienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abreissen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$ Coefficienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abbrechen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{T^2}{G}$ Coefficienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abwinden von Stäben erforderlich sind.

Die Coefficienten sind sämmtlich die mittleren Werthe der zahlreichen Versuchsresultate über die Festigkeit der Materialien.

Zu Nr. 57.

Zusammenstellung der Coefficienten für die Festigkeit und Elasticität der Materialien.

Material.	𝔄	𝔅	T	ε	G	$\frac{𝔄^2}{\varepsilon}$	$\frac{𝔅^2}{\varepsilon}$	$\frac{T^2}{G}$
Eichenholz . .	720	700	280	120000	48000	4·3	4	1·6
Eschenholz . .	1195	900	478	112000	44800	13	7·2	5·1
Tannenholz . .	854	600	240	100000	40000	7·2	3·6	1·44
Buchenholz . .	803	720	321	93000	37200	6·9	5·6	2·8
Schmiedeeisen (dünn). . . .	4350	7000	7000	2500000	1000000	7·4	20	47
Schmiedeeisen, dickere Stäbe	3300	4000	4500	1500000	600000	7·2	10·6	33·7
Eisendraht . .	7000	—	—	1800000	720000	27		
Gusseisen . . .	1000 1300	3000	3000	1000000	400000	1·0 1·7	9	22·5
Gussstahl . . .	10000	—	10000	2400000	960000	40	—	104
Stahl, mittlere Qual.	7500	—	7500	3000000	1200000	18	—	46·8
Stahl, ordinäre Qual.	3600	—	3600	2000000	800000	6	—	16
Kanonenmetall	2600	—	2300	700000	360000	10	—	14·7
Kupfer, gehämmert	2500	—	—	1310000	—	5	—	—
Kupfer, gegossen	1300	—	2000	—	—	—	—	—
Messing	1300	2270	2100	645000	258000	2·6	7·9	17·1
Zinn.	333	—	658	320000	—	—	—	—
Blei	128	—	458	540000	—	0·03	—	—
Zink	199	—	—		—	—	—	—
Glas	248	—	—	9000	—	7·0	—	—
Kalbleder . . .	129	—	—	391	—	43	—	—
Gegerbtes Schaafleder .	110	—	—	381	—	32	—	—
Weisses Rossleder	272	—	—	748	—	99	—	—
Dünnes Rossleder.	218	—	—	476	—	100	—	—
Corduan Rossleder	114	—	—	252	—	51	—	—
Kuhleder . . .	271	—	—	683	—	108	—	—
Hanfseile . . .	510	—	—	—	—	—	—	—

58.

Vergleichung zwischen verschiedenen Querschnittsformen. Taf. V.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt haben gleiche respektive Festigkeit, wenn:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

für $\frac{h}{b} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
wird $\frac{h}{d} =$	0·581	0·617	0·665	0·732	0·778	0·838	0·905	0·964	1·056	1·139	1·215
und $\frac{b}{d} =$	1·743	1·542	1·330	1·098	0·972	0·838	0·724	0·643	0·528	0·456	0·405

Ein runder und ein ellyptischer Querschnitt haben gleiche respective Festigkeit, wenn

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}$$

für $\frac{h}{b} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
wird $\frac{h}{d} =$	0·693	0·736	0·794	0·873	0·928	1	1·080	1·150	1·260	1·360	1·450
und $\frac{b}{d} =$	2·079	1·840	1·588	1·309	1·160	1	0,864	0.766	0·630	0·544	0,483

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt haben gleiche rückwirkende Festigkeit, wenn

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

für $\frac{h}{b} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
wird $\frac{h}{d} =$	0·586	0·619	0·664	0·737	0·790	0816	0.876
und $\frac{b}{d} =$	3·430	2·476	1·992	1·474	1·185	1·088	0·876

Ein runder und ein ellyptischer Querschnitt haben gleiche rückwirkende Festigkeit, wenn:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$$

für	$\frac{h}{b} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
wird	$\frac{h}{d} =$	0·667	0·707	0·758	0·841	0·903	0·931	1

Ein runder und ein quadratischer Querschnitt haben einerlei Torsions-Festigkeit, wenn:

$$d = b\sqrt[3]{\frac{16}{3.3 \cdot 14\sqrt{2}}} = 1 \cdot 06\,b \qquad b = 0 \cdot 943\,d.$$