Resultate für den Maschinenbau

[Hauptband]

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1848

Verzahnung

urn:nbn:de:bsz:31-282867

Dreieck O C b um C A und das Dreieck o C b um C a herumgedreht, so entstehen die zwei längs der Linie b C sich berührenden Grundkegel der Räder.

c) Für hyperbolische Räder Fig. 16. Es seien C A und C a die beiden Axen, die mit der Ebene des Papieres parallel sind. Die kürzeste Distanz der Axen geht durch C, ist auf der Ebene des Papieres senkrecht und ihre Länge sei gleich s. Die Anzahl der Umdrehungen, welche C a bei einer Umdrehung von C A machen soll, sei n.

Theile den Winkel A C a der Axen durch eine Linie C q in zwei Theile, so dass A q : q a = n : 1.

Mache $\overline{CD} = \overline{AE} = \frac{n}{n+1}\,s$, $\overline{Cd} = \overline{ae} = \frac{s}{n+1}$

sodann: $\overline{AB} = \overline{AB_1} = \overline{qE}$, $\overline{ab} = \overline{ab_1} = \overline{qe}$.

Verzeichne mit den Halbmessern A B und C D, a b und C d die Kreise K K_1 k k_1. Ziehe q m parallel mit C a, q n parallel mit C A. Theile den Kreis K von n ausgehend in so viele gleiche Theile, als die Anzahl der Zähne beträgt, welche das Rad erhalten soll, und den Kreis k von m ausgehend, in eine n mal kleinere Anzahl gleicher Theile. Ziehe durch die Theilungspunkte die Tangenten T T_1 T_2 .... t t_1 t_2 und suche ihre Projektionen, so bestimmen diese durch ihre wechselseitigen Durchschnitte die Hyperbeln B D B_1 D_1 b d b_1 d_1, welche durch Umdrehung um ihre Axen die Grundformen der beiden Räder erzeugen. Die Linie C q gibt die Richtung an, nach welcher die Zähne der Räder einzuschneiden sind.

Verzahnung.

20.

Anzahl der Zähne.

Zwei in einander greifende Räder erhalten gleich grosse Theilungen. Die Anzahl der Zähne zweier in einander greifender Räder verhalten sich demnach wie die Halbmesser derselben. Die absolute Anzahl der Zähne ist in geometrischer Hinsicht willkührlich, und wird durch die Kraft bestimmt, welche am Umfange der Räder wirkt.

21.

Grundbedingung für die Form der Zähne.

Die Zähne zweier in einander greifender Räder müssen so geformt sein, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder in jedem Augenblicke der Bewegung denselben Werth hat. Es gibt unendlich viele Paare von Zahnformen, welche dieser wesentlichen Grundbedingung entsprechen. Die gebräuchlichsten sind folgende.

22.

Erste epycycloidische Verzahnung. Fig. 17.

n a m Zahn des Rades R. a n eine radiale Linie. a m ein epycycloidischer Bogen. Der Halbmesser des Grundkreises ist R. Der Halbmesser des Wälzungskreises $\frac{1}{2}$ r. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a n_1 eine radiale gerade Linie. a m_1 ein epycycloidischer Bogen. Der Halbmesser des Grundkreises dieser Epycycloide ist r, der Halbmesser des Erzeugungskreises $\frac{1}{2}$ R. Die epycycloidischen Bögen entsprechen der Wälzung auf einem Theilungsbogen.

23.

Zweite epycycloidische Verzahnung. Fig. 18.

n a m Zahn des Rades R. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a m epycycloidischer, a n_1 hypocycloidischer Bogen. Halbmesser des Grundkreises für a m gleich R. Halbmesser des Grundkreises für a n_1 gleich r. Halbmesser der Erzeugungskreise für a m und a n_1 gleich gross und kleiner als $\frac{1}{2}$ r, sonst willkührlich. a m_1 epycycloidischer, a n hypocycloidischer Bogen. Halbmesser des Grundkreises für a m_1 gleich r. Halbmesser des Grundkreises für a n gleich R. Halbmesser der Erzeugungskreise für a n und a m_1 gleich gross aber kleiner als $\frac{1}{2}$ R, sonst willkührlich. Jeder dieser 4 Bögen entspricht der Wälzung auf einem Theilungsbogen. Diese Anordnung ist insbesondere für starke Uebersetzungen geeignet.

24.

Zahnstange mit Getriebe. Fig. 19.

n a m Zahn der Zahnstange. a n gerade auf die Grundlinie der Zahnstange senkrechte Linie. a m cycloidischer Bogen. Halbmesser des Erzeugungskreises gleich $\frac{1}{2}$ r. m_1 a n_1 Zahn des Getriebes. a n_1 gerade radiale Linie. a m_1 Evolvente des Kreises r. Die Bögen a m und a m_1 entsprechen einer Theilung.

25.

Innere cycloidische Verzahnung. Fig. 20.

R r die Theilkreise. n a m Zahn des Rades R. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a m, a n_1 hypocycloidische Bögen, Halbmesser der Grundkreise R und r, Halbmesser der Erzeugungskreise, für beide gleich gross, kleiner als $\frac{1}{2}$ r, sonst willkürlich. a m_1, a n epycycloidische Bögen, Halbmesser der Grundkreise r R, Halbmesser der Erzeugungskreise, für beide gleich gross, sonst beliebig.

26.

Verzahnung mit Kreisbögen.

Man erhält auch brauchbare Zahnformen, wenn man die äusseren Theile der Zähne nach passenden Kreisbögen abrundet, und die inneren Theile geradlinigt und radial macht. Die passenden Abrundungshalbmesser für die äusseren Theile der Zähne findet man vermittelst folgender Formeln:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) = \frac{n+2}{2\,(n+1)}\,t$$

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right) = \frac{2\,n+1}{2\,(n+1)}\,t$$

Dabei bezeichnen:

R r die Halbmesser der Theilkreise beider Räder,

$n = \frac{R}{r}$ die Uebersetzungszahl, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oftmal das kleinere Rad bei einer Umdrehung des grösseren Rades umgehen soll,

t die für beide Räder gleich grosse Zahntheilung,

$\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ die Abrundungshalbmesser für die Zähne der Räder r und R.

Die Resultate, welche diese Formeln liefern, sind in folgender Tabelle enthalten:

n	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	4	6	∞
$\dfrac{\binom{\varrho}{R}}{t}$	0·75	0·77	0·79	0·80	0·83	0·90	0·92	1
$\dfrac{\binom{\varrho}{r}}{t}$	0·75	0·72	0·71	0·70	0·67	0·60	0·57	0·5

$n = \infty$ entspricht der Zahnstange mit Getriebe. — Es verdient bemerkt zu werden, dass

$$\binom{\varrho}{r} + \binom{\varrho}{R} = \frac{3}{2}\,t$$

die Verzeichnung der Zähne vermittelst dieser Abrundungshalbmesser erklärt Fig. 21. R r die Theilkreise der Räder. R_1 r_1 zwei Kreise, deren Halbmesser halb so gross sind als jene von R und r. $\overset{\frown}{aM} = \overset{\frown}{aN} = \overset{\frown}{am} = \overset{\frown}{an} = t$. $\overline{MO} = \overline{NO} = \binom{\varrho}{R}$, $\overline{mo} = \overline{no} = \binom{\varrho}{r}$. Bogen $\overset{\frown}{MNP}$ aus O, Bogen $\overset{\frown}{mnp}$ aus o beschrieben. $\overline{CP}$ Tangente an $\overset{\frown}{MNP}$, $\overline{cp}$ Tangente an $\overset{\frown}{mnp}$.

Wenn sowohl der äussere als auch der innere Theil der Zähne nach Kreisbögen abgerundet werden soll, so findet man die passenden Abrundungshalbmesser nach folgenden Formeln:

Benenaung des Bogens Fig. 18.	*Abrundungs-halbmesser.*
am	$\dfrac{R + r_1}{R + 2r_1}\,t$
an	$\dfrac{R - R_1}{R - 2R_1}\,t$
am_1	$\dfrac{r + R_1}{r + 2R_1}\,t$
an_1	$\dfrac{r - r_1}{r - 2r_1}\,t$

In diesen Formeln bedeutet:

R r die Halbmesser der Theilkreise der beiden Räder,

t die Zahntheilung,

R_I r_I die Halbmesser zweier Hilfskreise, die an die Bedingung geknüpft sind, dass R_I kleiner als $\frac{1}{2}$ R, und r_I kleiner als $\frac{1}{2}$ r sein muss, im Uebrigen aber willkührlich genommen werden können.

27.

Aeussere Evolventen-Verzahnung. Fig. 22.

R r die Theilkreise der Räder. a b gleich einer Zahntheilung. b o eine gerade radiale Linie. g a f senkrecht auf b o. O g senkrecht auf g a f oder parallel zu b o. R_I r_I zwei mit den Halbmessern O g und o f beschriebene Kreise. f h Evolvente, die durch Aufwicklung von g f auf R_I entsteht. a i = a f. i k Evolvente, die durch Aufwicklung von i f auf r_I entsteht. Die Evolventenbögen f h und i k sind die gekrümmten Theile der Zähne. Die geraden radialen Theile h h_I, k k_I müssen so weit gegen die Mittelpunkte O o fortgesetzt werden, dass die äusseren krummlinigen Theile hinreichend Spielraum finden.

Zähne, welche auf die soeben angedeutete Weise construirt werden, können im Ganzen durch zwei Theilungen auf einander wirken, und zwar durch eine Theilung vor, und durch eine Theilung nach der Centrallinie O o. Will man, dass die Zähne um mehr oder weniger als eine Theilung vor und nach der Centrallinie auf einander einwirken sollen, so müssen die Längen a b und a i gerade so lang gemacht werden als die Wege, durch welche die Einwirkung stattfinden soll. Wird z. B. a b gleich $1\frac{1}{2}$ und a i gleich $1\frac{2}{3}$ Theilung gemacht, so erhält man eine Verzahnung, die durch $1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3}$ Theilungen wirkt.

28.

Innere Evolventen-Verzahnung. Fig. 23.

Wenn je zwei Zähne durch zwei Theilungen auf einander einwirken sollen, verfährt man wie folgt. Verzeichne die Theilkreise R und r, und am Mittelpunkt o des Getriebes einen Theilungswinkel a o b, ziehe b o, fälle von a aus das Perpendikel a f und verlängere dasselbe nach beiden Seiten, ziehe O g parallel mit o b und beschreibe mit den Halbmessern o f und O g die Kreise r_I und R_I. Nun mache man a c = a f und verzeichne die Evolventen c d und c e, die durch Aufwicklung von f c und g ~~e~~ c auf r_1 und R_1 entstehen, so sind c d und c e die krummlinigen Theile der Zähne. Für den freien Durchgang der Zähne wird an c d noch ein gerader radialer Theil $d\,d_1$, und an e c eine krummlinige Fortsetzung $c\,c_1$ angebracht. Sollen die Zähne durch einen Weg s vor, und durch einen Weg s_1 nach der Centrallinie auf einander wirken, so muss $c\,a = s$ und $a\,f = s_1$ gemacht werden, im Uebrigen aber das gleiche Verfahren befolgt werden.

29.

Eigenschaften der Evolventen-Verzahnung.

Die Evolventen-Verzahnung hat folgende praktisch-wichtige Eigenschaften:

1) Alle mit Evolventenzähnen versehenen Räder können, wenn sie nur gleiche Theilungen haben, einander richtig bewegen.
2) Die Entfernung der Axen der Räder kann, unbeschadet des richtigen Eingriffes vermindert oder vermehrt werden; die Dauer des richtigen Eingriffs wird jedoch dadurch geändert.
3) Evolventenzähne verursachen die geringste Reibung.
4) Evolventenzähne verändern am wenigsten ihre ~~Zähne~~ Form durch Abnutzung.
5) Räder mit Evolventenzähnen können auch zur Bewegung von Axen, die sich nicht schneiden und einen Winkel bilden, gebraucht werden.
6) Evolventenzähne sind geometrisch ähnlich, und können desshalb am leichtesten durch Maschinen richtig geschnitten werden.
7) Nachtheilige Eigenschaften sind keine bekannt.

Vermöge dieser Eigenschaften sollten die Evolventenzähne allgemein eingeführt werden.

30.

Allgemeine Verzahnung. Fig. 24.

Wenn der Zahn von einem der beiden Räder beliebig angenommen wird, kann die entsprechende Form des Zahnes des anderen Rades auf folgende Art gefunden werden. Es seien R r die Theilkreise, a n b ein beliebiger krummliniger Einschnitt, welcher die Form des Zahnes von r sein soll. Um die entsprechende Form des Zahnes von R zu erhalten, nehme man in a b einen beliebigen Punkt n an, ziehe die Normale n m, mache $\overset{\frown}{a\,m_1} = \overset{\frown}{a\,m}$, ziehe durch m_1 eine gerade Linie welche den Kreis R unter dem gleichen Winkel schneidet, unter welchem r von n m geschnitten wird, und mache endlich $\overline{m_1 n_1} = \overline{m n}$, so ist n_1 ein Punkt der gesuchten Zahnform. Dieses Verfahren auf mehrere Punkte der Kurve a b angewendet, gibt eine Reihe von Punkten der zu verzeichnenden Zahnkurve. Wie man zu verfahren hat, wenn a n_1 gegeben und a n gesucht wird, bedarf keiner Erklärung.

31.

Verzahnung der konischen Räder. Fig. 15.

Es seien C A und C a die Axen, C b e, C b f die Grundkegel, C b ihre gemeinschaftliche Berührungslinie. Errichtet man in b auf b C eine Senkrechte S b s, zieht S e und s f und denkt sich die Dreiecke e S b und b s f um C A und C a herumgedreht, so entstehen zwei neue Kegelflächen, und die Linien, in welchen die richtig geformten Zahnflächen geschnitten werden, stimmen annähernd mit den richtigen Formen der Zähne zweier Stirnräder überein, deren Halbmesser gleich S b und s b sind. Wenn man die Zähne nach Kreisbögen abrunden, demnach das in N° 26 angegebene Verfahren anwenden will, muss in den dort aufgestellten Formeln

$$n = \frac{S\,b}{s\,b} = \frac{i + \mathrm{Cos.}\,\alpha}{i\,\mathrm{Cos.}\,\alpha + 1}\,i$$

gesetzt werden. Hier bedeutet:

$$i = \frac{b\,O}{b\,o} \text{ die Uebersetzungszahl,}$$

$$\alpha = \text{Winkel } A\,C\,a.$$

Stehen die Axen auf einander senkrecht, so ist $\alpha = 90^\circ$, und dann wird:

$$n = i^2.$$

32.

Die Schraube ohne Ende. Fig. 25. 26.

Bei einer Umdrehung der Schraube legt ein Punkt im Theilkreis des Rades einen Weg zurück der gleich ist der Höhe eines Schraubenganges. Die Anzahl der Theilungen, um welche das Rad bei einer Umdrehung der Schraube fortrückt, ist demnach gleich der Anzahl der Schraubengänge. Bei einer eingängigen Schraube rückt das Rad um eine Theilung weiter, wenn das Rad einmal um seine Axe gedreht wird.

Die Uebersetzungszahl ist gleich der Anzahl der Zähne des Rades, dividirt durch die Schraubengänge. Die Stärke der Zähne wird nach der zu übertragenden Kraft bestimmt. Die Form der Zähne des Rades und der Gewinde der Schraube erklären Fig. 25 und 26. Fig. 25 ist ein Schnitt mit einer auf die Axe des Rades senkrecht stehenden und durch die Axe der Schraube gehenden Ebene. Die Schnittlinien $m\,n\,p$, $m_1\,n_1\,p_1$ sind wie bei einer Zahnstange, die durch ein Getriebe bewegt wird, zu verzeichnen. Die Schraube wird sowohl für die Verzeichnung als auch für die Ausführung am einfachsten, wenn man den krummen Theil $\overset{\frown}{n\,m}$ weglässt; in welchem Falle jedoch die Linie $m_1\,n_1$ für mehr als eine Theilung construirt werden muss. Wenn die Anordnung zur Uebertragung einer grösseren Kraft dient, wird das Rad mit den Zähnen gegossen. Bei Schrauben ohne Ende, die zu genauen Führungen dienen, werden die Zähne in den metallenen Radkörper eingeschnitten, und die wahren Zahnformen sind die Einhüllungsflächen, welche die Schraubengewinde durch ihre relative Bewegung gegen das Rad beschreiben.

Gerad-Führungen.

33.

Balancier mit Gegenlenker. Fig. 27.

Wenn der Balancier und das Verbindungsstück gegeben sind, kann man den Gegenlenker auf folgende Art durch Construction finden. — Verzeichne den Balancier in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung, ziehe $a_1\,a_2$, halbire $a\,c$ und ziehe durch m eine auf $a\,C$ senkrechte Linie $y\,x$, so ist diese die Mittellinie der Kolbenstange. Nun zeichne man das Verbindungsstück in der höchsten $a_1\,b_1\,c_1$, mittleren $a\,b\,c$, und tiefsten Stellung $a_2\,b_2\,c_2$, und zwar so, dass $b\,b_1\,b_2$ in $x\,y$ liegen. Sucht man endlich den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die Punkte $c\,c_1\,c_2$ geht, so hat man den Drehungspunkt des Gegenlenkers, und $o\,c = o\,c_1 = o\,c_2$ ist die Länge desselben.

Setzt man $a\,C = a$, $a\,b = b$, $b\,c = c$, $o\,c = r$, $\widehat{a_1\,C\,a} = \alpha$, so findet man die Länge des Gegenlenkers durch folgende Formel:

$$r = \frac{1}{2}\left\{ a\,\frac{b}{c}\,\frac{\sin.^2\alpha}{1-\cos.\alpha} + a\,\frac{c}{b}\,(1-\cos.\alpha) \right\}$$

Wenn r und a gegeben und $\frac{b}{c}$ gesucht werden soll, hat man:

$$\frac{b}{c} = \frac{1-\cos.\alpha}{\sin.^2\alpha}\left\{ \frac{r}{a} + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \sin.^2\alpha} \right\}$$