

**Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

**Methodisch geordnete Aufgabensammlung**

**Bardey, Ernst**

**Leipzig, 1890**

XXXVI. Der binomische Satz

[urn:nbn:de:bsz:31-269467](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-269467)



## XXXVI.

## Der binomische Satz.

1. Was versteht man unter einem Binom? was unter einem Polynom?
2. Schreibe 10 möglichst verschiedene Binome auf.
3. Warum ist die Betrachtung eines Binoms von besonderer Wichtigkeit, wichtiger als die eines Trinoms oder eines Polynoms?
4. Sind sonst schon Operationen mit Binomen vorgekommen und welche? Suche Beispiele im Buche auf, wo Binome vorkommen.
5. Was für einen Satz versteht man unter dem binomischen Satz?
6. Wie weit sind die Formeln für den binomischen Satz schon dagewesen?
7. Entwickle durch Multipl. die Produkte  $(x+a)(x+b)(x+c)$  und  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ , und gieb das Gesetz an, wie die Koeffizienten der Potenzen von  $x$  gebildet sind.
8. Gieb darnach ohne Rechnung die Entwicklung des Produkts  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$  an.
9. Wie werden die Entwicklungen von  $(x-a)(x-b)(x-c)$  und  $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$  heißen?
10. Wie heißen sie von  $(x+a)(x-b)(x-c)$  und von  $(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$ ?
11. Entwickle nach dem aufgefundenen Gesetze direkt ohne Multiplikation  $(x+1)(x+2)(x+3)$ ,  $(x+2)(x+4)(x+6)$ ,  $(x-1)(x-5)(x-9)$ .
12. Entwickle ebenso  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$  und  $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ .
13. Führe ohne Rechnung aus  $(x-1)(x-2)(x+3)$  und  $(x+1)(x+4)(x-5)$ .
14. Was giebt desgleichen  $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$  und  $(x+1)(x-3)(x-5)(x+8)$ ?
15. Entwickle durch Multiplikation  $(ax+1)(bx+1)(cx+1)$  und  $(ax+1)(bx+1)(cx+1)(dx+1)$ , und gieb das Gesetz für die Bildung der Koeffizienten an.
16. Entwickle darnach ohne Multipl.  $(3x+1)(2x+1)(5x+1)$  und  $(7x+1)(4x-1)(3x-1)$ .
17. Was wird aus d. Prod.  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$  und seiner Entwicklung, wenn  $a=b=c=d$  wird?
18. Was aus  $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)$ , wenn  $a=b=c$  u. f. w. ist?
19. Der binomische Satz heißt, wenn  $n$  eine ganze Zahl ist,

$$(a+b)^n$$

$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots b^n$$

Wie läßt sich dieser Satz nach dem Obigen beweisen?



20. Welches Gesetz findet statt für die Exponenten der Potenzen von  $a$  und  $b$  in der Entwicklung von  $(a + b)^n$  hinsichtlich ihres Abnehmens und Wachstums, und wie groß muß ihre Summe in jedem Gliede stets sein?

21. Wenn daher  $Na^p b^q$  ein Glied der Entwicklung von  $(a + b)^n$  ist, welcher Bedingung müssen  $p$  und  $q$  dann stets genügen, und wie groß muß  $q$  sein, wenn z. B.  $p = 7$  ist?

22. Wie viel Glieder hat die Entwicklung von  $(a + b)^{20}$ , von  $(a + b)^{85}$ , von  $(a + b)^{2n-1}$ ?

23. Entwickle nach dem binomischen Satze  $(x + a)^6$ ,  $(y + b)^8$ ,  $(p + q)^{10}$ .

24. Desgleichen  $(r + t)^5$ ,  $(x + y)^7$ ,  $(u + v)^9$ .

25. Wie heißt die Entwicklung für  $(a - b)^n$ , und wie unterscheidet sich diese von derjenigen für  $(a + b)^n$ ?

26. Was ist demnach  $(a - x)^5$ , was  $(t - x)^7$ ?

27. Was ist  $(1 + x)^6$ ,  $(1 - x)^7$ ,  $(1 + t)^8$ ,  $(t - 1)^9$ ?

28. Was ist  $(a + x)^6 + (a - x)^6$ ,  $(1 + t)^6 - (1 - t)^6$ ?

29. Welche Glieder müssen in der Summe und Differenz von  $(a + b)^n$  und  $(a - b)^n$  bei der Entwicklung fortfallen und welche sich verdoppeln?

30. Schreibe hiernach die Summen  $(1 + x)^7 + (1 - x)^7$ ,  $(x + 1)^7 + (x - 1)^7$ ,  $(1 + x)^8 + (1 - x)^8$ ,  $(x + 1)^8 + (x - 1)^8$  hin, ohne die ganze Entwicklung zu machen.

31. Desgleichen die Differenzen  $(1 + x)^7 - (1 - x)^7$ ,  $(x + 1)^9 - (x - 1)^9$ ,  $(1 + x)^8 - (1 - x)^8$ ,  $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$ .

32. Wie heißt das 7. Glied der Entwicklung von  $(a + b)^{10}$ , das 11. Glied von  $(x - y)^{15}$ , das 8. Glied von  $(p - q)^{20}$ ?

33. Was versteht man unter Binominalkoeffizienten? Wie heißen der 4. und der 7. Binominalkoeffizient (1 nicht gerechnet) in der Entwicklung von  $(a + b)^n$ ?

34. Wie heißt der 6. und wie der 10. Binominalkoeffizient in der 14. Potenz eines Binoms? wie der 8. und der 18. Koeffizient der 20. Potenz?

35. Wie heißt der  $r$ . Koeffizient in den Entwicklungen von  $(a + b)^n$ ,  $(a - b)^n$ ,  $(a - b)^{2r}$ ,  $(a - b)^{2r-1}$ ?

36. Wie heißen die Koeffizienten von  $a^4 b^5$  und von  $a^2 b^7$  in der Entwicklung von  $(a + b)^9$ ?

37. Wie die von  $a^{10} b^5$  und  $a^3 b^{12}$  für  $(a - b)^{15}$ ?

38. Wie die von  $a^7 b^3$ ,  $a^5 b^5$  und  $a^2 b^8$  für  $(a + b)^{10}$ ? wie die von  $x^5 y^6$  und  $x^6 y^5$  für  $(x - y)^{11}$ ?

39. Die Koeffizienten der Entwicklung von  $(a + b)^n$  müssen nach rechts und links symmetrisch sein. Weshalb?

40. Welche Glieder haben in der Entwicklung von  $(a + b)^n$  dieselben Koeffizienten wie das 5., das 7. und das  $r$ . Glied, und wie heißen diese Glieder?

41. Welche Glieder haben in der 31. Potenz eines Binoms dieselben Koeffizienten wie das 7., das 12., das 27. Glied und wie heißen sie?



42. Welche Potenzenprodukte haben in der Entwicklung von  $(a + b)^9$  gleiche Koeffizienten mit  $a^2b^7$  und  $a^4b^5$ ? welche in der Entwicklung von  $(a + b)^{16}$  mit  $a^5b^{11}$ ,  $a^7b^9$  und  $a^8b^8$ , und wie heißen die zugehörigen Koeffizienten?

43. Welche Potenz von  $x$  hat in der Entwicklung von  $(1 + x)^{12}$  mit  $x^4$  und welche mit  $x^6$  gleichen Koeffizienten? welche in  $(1 + x)^{17}$  mit  $x^5$  und mit  $x^8$ , und wie heißen die zugehörigen Koeffizienten?

44. Wenn  $A$  der 9. Binomialkoeffizient der Entwicklung von  $(a + b)^n$  ist, wie heißt dann der 10. Koeffizient?

45. Wenn  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  bezüglich der 7ten, der 13ten, der 20ten, der 29ten Koeffizient der 16ten, der 20sten, der 50sten, der 58sten Potenz eines Binoms sind, wie heißt dann in jedem Falle der nächstfolgende Koeffizient?

46. Welches Gesetz gilt für die Koeffizienten in der Entwicklung der  $n$ ten Potenz eines Binoms, so lange  $n$  eine positive ganze Zahl?

47. Bei einer ungeraden Potenz des Binoms kommen alle Koeffizienten paarweise vor, bei einer geraden Potenz der mittlere nur einmal. Weshalb?

48. Die wievielten Koeffizienten sind die beiden größten in den Entwicklungen von  $(a + b)^9$  und  $(a + b)^{13}$ , und wie heißen dieselben?

49. Die wievielten Koeffizienten sind in den Entwicklungen von  $(a + b)^{10}$  und  $(a + b)^{14}$  die größten, und wie heißen dieselben?

50. Die wievielten Koeffizienten sind die mittleren in den Entwicklungen von  $(a + b)^{2n-1}$ ,  $(a + b)^{2n+1}$ ,  $(a + b)^{2n}$  und  $(a + b)^{2n-2}$ , und wie heißen dieselben?

51. Wenn  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  u. s. w. die Binomialkoeffizienten für die  $n$ te Potenz eines Binoms sind, so ist immer bei einer ähnlichen Bezeichnung für die  $(n + 1)$ te Potenz:  $n_r + n_{r-1} = (n + 1)_r$ . Wie heißt dieser Satz in Worten, und wie wird er bewiesen?

52. Wie groß ist demnach die Summe des 7. und 8. Binomialkoeffizienten der 13. Potenz und wie groß ist die des 5. und 6. der 16. Potenz?

53. Wie groß ist die Summe aller Koeffizienten in den Entwicklungen von  $(a + b)^7$ ,  $(a + b)^{10}$ ,  $(a + b)^n$ ?

54. Desgleichen von  $(a - b)^8$ ,  $(a - b)^{11}$ ,  $(a - b)^n$ ?

54<sub>1</sub>. Was folgt aus 53. und 54. für die Summe der geraden und die der ungeraden Binomialkoeffizienten irgend einer Potenz, und wie groß ist darnach die Summe aller geraden und die aller ungeraden Kombinationen für  $n$  Elemente?

55. Entwickle  $(x - 2y)^7$ ,  $(3x + y)^8$ ,  $(2x + 3y)^5$ ,  $(5 - 2t)^6$ .

56. Desgleichen  $(1 + x^2)^6$ ,  $(1 - x^3)^7$ ,  $(1 + x^2)^5$ ,  $(x^2 - y^3)^6$ .

57. Desgleichen  $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^5$ ,  $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)^6$ ,  $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x\right)^7$ .

58. Desgleichen  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ ,  $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^7$ ,  $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{2c}\right)^6$ .



59. Wie heißt das 7. Glied in der Entwicklung von  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ .

das 10. Glied in der von  $\left(\frac{m}{2n} - \frac{2x}{m}\right)^{15}$ ?

60. Wie heißt das 5. Glied in der Entwicklung von  $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{2a}{x^3}\right)^9$ , wie das 9. Glied in der Entwicklung von  $\left(\frac{2a^2}{3x} - \frac{3x^2}{2a}\right)^{14}$ , und welche Glieder haben in jedem Falle denselben Koeffizienten, wie die verlangten und wie heißen sie?

61. Wie heißen der Koeffizient von  $x^4$  in der Entwicklung von  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$ , die Glieder mit  $x$  und  $x^{16}$  in  $\left(\frac{a}{2x^2} - \frac{2x^3}{a}\right)^{12}$ , das Glied mit  $x$  in  $\left(\frac{x}{2m} - \frac{2a}{x}\right)^{13}$ ?

62. Wie heißt das Glied mit  $a^{-2}$  in  $\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a^2}\right)^7$ , das Glied mit  $x^{-5}$  in  $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x^3}\right)^{11}$ ?

Entwickle und berechne (auf 6 Decimalstellen) folgende Ausdrücke mit Hilfe des binomischen Satzes:

- |   |   |
|---|---|
| 63. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^6$ , | $(1 + \sqrt{x})^7 - (1 - \sqrt{x})^7$   |
| 64. $(a + bi)^5 + (a - bi)^5$ ,                           | $(a + bi)^6 - (a - bi)^6$   |
| 65. $(1 + i)^8 + (1 - i)^8$ ,                             | $(1 + i)^9 + (1 - i)^9$   |
| 66. $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$ ,                       | $(1 + i)^{11} - (1 - i)^{11}$   |
| 67. $(3 + i\sqrt{5})^7 + (3 - i\sqrt{5})^7$ ,             | $(3 + i\sqrt{5})^7 - (3 - i\sqrt{5})^7$   |
| 68. $(1 + i\sqrt{3})^9 + (1 - i\sqrt{3})^9$ ,             | $(1 + i\sqrt{3})^9 - (1 - i\sqrt{3})^9$   |
| 69. $(2 + 3i)^6 + (2 - 3i)^6$ ,                           | $(2i + 3)^6 + (2 + 3i)^6$   |
| 70. $(3 + 2i)^7 + (3 - 2i)^7$ ,                           | $(3 + 2i)^7 - (3 - 2i)^7$   |
| 71. $(4 + 3i)^8 + (4 - 3i)^8$ ,                           | $(4 + 3i)^8 - (4 - 3i)^8$   |
| 72. $1,1^{10}$  | $1,02^{20}$ $1,003^{22}$ $1,0007^{27}$  |
| 73. $0,9^9$   | $0,98^{15}$ $0,997^{24}$ $0,9995^{30}$  |
| 74. $\left(\frac{91}{90}\right)^{10}$                     | $\left(\frac{79}{80}\right)^{11}$ $\left(\frac{51}{50}\right)^{12}$ $\left(\frac{29}{30}\right)^{13}$ |
| 75. $\left(\frac{48}{47}\right)^6$                        | $\left(\frac{83}{84}\right)^7$ $\left(\frac{565}{563}\right)^8$ $\left(\frac{872}{875}\right)^9$      |

76. Beweise, daß der binomische Satz auch für  $(1 + x)^0$  gilt.

77. Desgleichen für  $(1 + x)^{-1}$  und  $(1 + x)^{-2}$ .

78. Wie unterscheiden sich diese Entwicklungen wesentlich von den vorhergehenden?

79. Wie beweist man allgemein, daß der binomische Satz auch für ganze negative Exponenten anwendbar ist?



80. Wie gestaltet sich der binomische Satz in der Entwicklung von  $(a + b)^{-n}$ , und wie in der von  $(a - b)^{-n}$ ?

81. Welches Gesetz gilt hier für die Koeffizienten hinsichtlich ihrer Größe und ihrer Wiederholung?

82. Was haben die Koeffizienten in der Entwicklung von  $(a + b)^{-n}$  zu bedeuten und wie ist diese Bedeutung zu erklären?

83. Welches Gesetz gilt auch in der Entwicklung von  $(a + b)^{-n}$  für die Exponenten der Potenzen von  $a$  und  $b$ ?

84. Was muß bei der Entwicklung von  $(a + b)^{-n}$  vorausgesetzt werden, wenn die Entwicklung Anwendung finden soll? Wie die Bedingung für die Konvergenz an.

85. Entwickle  $(a + b)^{-3}$ ,  $(a - b)^{-5}$ ,  $(1 + x)^{-6}$ ,  $(1 + x^2)^{-4}$ .

86. Desgleichen  $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^{-7}$ ,  $\left(\frac{3a^2}{x} - \frac{x^2}{3}\right)^{-8}$ .

87. Wie heißt das 5. Glied der Entwicklung von  $\left(\frac{2a^2}{b} - \frac{x}{6a^2}\right)^{-3}$ , das 6. Glied von  $\left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3y^2}{2x}\right)^{-4}$ ?

88. Wie heißt das  $r$ . Glied in der Entwicklung von  $(a - b)^{-2r}$ , von  $(a + b)^{1-2r}$ , von  $(a - b)^{2-2r}$ ?

89. Wie heißt der 4. und wie der 7. Koeffizient in der Entwicklung von  $(a - b)^{-5}$ ?

90. Wie heißt der 6. Koeffizient in der Entwicklung von  $(a - b)^{5-n}$ ?

91. Wie heißt der  $r$ . Koeffizient in der Entwicklung von  $(a + b)^{r-n}$ ?

92. Wie heißt in der Entwicklung von  $(a + b)^{7-n}$  der Faktor von  $a^{-n}b^7$ ? wie der von  $x^{20}$  in  $\left(\frac{2a^2}{x} - \frac{x^2}{2a}\right)^{-5}$ ?

93. Wenn  $p_1, p_2, p_3$  u. f. w. die Binomialkoeffizienten der  $p$ . Potenz,  $q_1, q_2, q_3$  u. f. w. die der  $q$ . Potenz,  $(p + q)_1, (p + q)_2, (p + q)_3$  u. f. w. die der  $(p + q)$ ten Potenz sind, so ist, was auch  $p$  und  $q$  für Zahlen sein mögen, immer

$$p_2 + p_1 q_1 + q_2 = (p + q)_2$$

$$p_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_3 = (p + q)_3$$

$$p_4 + p_3 q_1 + p_2 q_2 + p_1 q_3 + q_4 = (p + q)_4.$$

Beweise das.

94. Beweise, daß allgemein für jedes  $p$  und  $q$  immer sein muß:

$$p_r + p_{r-1}q + p_{r-2}q^2 + p_{r-3}q^3 + \dots + q_r = (p + q)_r$$

Dies geschieht durch den Schluß von  $r$  auf  $r + 1$ . Man setzt in der Reihe für  $(p + q)_r$  erst  $p - 1$  statt  $q$ , dann  $q - 1$  statt  $q$ , multipliziert die so erhaltenen Reihen bezüglich mit  $p$  und mit  $q$ , addiert sie und dividiert ihre Summe durch  $r + 1$ .

95. Beweise hieraus: Das Produkt zweier Binomialreihen für die Exponenten  $p$  und  $q$  giebt stets wieder eine Binomialreihe für den Exponenten  $p + q$ .



96. Wie folgt daraus: Die  $n$ . Potenz einer Binomialreihe für den Exponenten  $p$  giebt eine Binomialreihe für den Exponenten  $np$ ?

97. Wie folgt hieraus der allgemeine Beweis des binomischen Satzes auch für Bruchexponenten?

Entwickle und berechne (6 Decimalen) folgende Ausdrücke mit Hülfe des binomischen Satzes:

98. $\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1-x}$	$\sqrt{a^2+1}$	$\sqrt{x^2+y^2}$
99. $\sqrt[3]{1+x}$	$\sqrt[3]{1-x}$	$\sqrt[3]{a^3+1}$	$\sqrt[3]{a^3+b^3}$
100. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
101. $\sqrt{1,0001}$	$\sqrt{1,001}$	$\sqrt{1,01}$	$\sqrt{1,1}$
102. $\sqrt{0,9999}$	$\sqrt{0,999}$	$\sqrt{0,99}$	$\sqrt{0,9}$
103. $\sqrt[3]{1,0004}$	$\sqrt[3]{1,003}$	$\sqrt[3]{1,02}$	$\sqrt[3]{1,1}$
104. $\sqrt[3]{0,9996}$	$\sqrt[3]{0,997}$	$\sqrt[3]{0,98}$	$\sqrt[3]{0,9}$
105. $\sqrt{10}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{102}$	$\sqrt{905}$
106. $\sqrt{8}$	$\sqrt{143}$	$\sqrt{253}$	$\sqrt{959}$
107. $\sqrt[3]{65}$	$\sqrt[3]{511}$	$\sqrt[3]{731}$	$\sqrt[3]{1003}$
108. $\sqrt{2^*}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$
109. $\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{19}$
110. $\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$
111. $\sqrt[5]{244}$	$\sqrt[5]{727}$	$\sqrt[5]{131}$	$\sqrt[5]{2190}$

112. Welches ist in der Entwicklung von  $(1-x^2)\sqrt{1+x^2}$  der Koeffizient von  $x^6$  für  $x < 1$  und der von  $x^{-5}$  für  $x > 1$ ?

113. Welches ist der Koeffizient von  $x^5$  in der Entwicklung von  $(1+x^2)^{-1}\sqrt[3]{1-x}$  für  $x < 1$ ?

114. Wie heißen die Faktoren von  $x^7$  und  $x^{-7}$  in der Entwicklung von  $(a-x)^{-1}\sqrt[3]{a^3+x^3}$ , wenn bezüglich  $x < a$  und  $x > a$  ist?

\*) Von 108.—111. sind die Radikanden erst umzuformen, ehe man entwickelt. Man hat z. B.  $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{25 \cdot 2} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$ ;  $\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{16 \cdot 3} = \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}$ ;  $\sqrt[3]{2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{512 \cdot 2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{1024} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1,024}$  u. s. w.



Setze in folgenden Ausdrücken  $x + h$  statt  $x$ , entwickle nach  $h$  und gieb den Factor von  $h$  an.

$$115. x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$116. ax^n + bx^p$$

$$117. \frac{4}{7}x^7 - \frac{3}{4}x^8 - \frac{1}{5}x^{10}$$

$$118. \frac{3}{5x^5} - \frac{4}{3x^6} - \frac{5}{6x^{12}}$$

$$119. \frac{m}{nx^n} - \frac{n}{mx^m}$$

$$120. (a + x)^5 - (b - x)^7$$

$$121. (3 - 2x)^5$$

$$122. \frac{5}{7-3x}$$

$$123. \frac{1+x}{1-x}$$

$$124. \frac{3-2x+x^2}{1-2x+3x^2}$$

$$125. \sqrt[5]{1-x^3}$$

$$x^{10} - x^9 + x^8 - x^7$$

$$ax^{n+1} - bx^{n-1}$$

$$\frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{8}x^8 + \frac{5}{6}x^{12}$$

$$\frac{7}{3x^9} - \frac{8}{5x^{10}} - \frac{3}{4x^{12}}$$

$$\frac{ax^{n+1}}{n+1} - \frac{b}{(m-1)x^{m-1}}$$

$$(ax+1)^m - (a-x)^n$$

$$(a-bx)^{n+1}$$

$$\frac{1}{(3-4x)^5}$$

$$\frac{5+3x}{5-3x}$$

$$\frac{(x^3+2)^2}{6(3-5x^2)^3}$$

$$\sqrt[5]{1-x+x^2}$$

Ausdrücke, welche  $x$  enthalten, erscheinen bisweilen für einen Wert von  $x$  unter der Form  $\frac{0}{0}$ . Dieser Quotient ist unbestimmt. Um den wahren Wert desselben zu ermitteln, setzt man, wenn  $a$  der fragliche Wert von  $x$  ist,  $a + h$  statt  $x$ , entwickelt Zähler und Nenner nach Potenzen von  $h$  und läßt die Glieder mit  $h^2$  fort. Folgende Quotienten erscheinen für den in Klammern beigesezten Wert von  $x$  in unbestimmter Form; suche auf dem angegebenen Wege den wahren Wert derselben.

$$126. \frac{x^4-1}{x^3-1} [1]$$

$$127. \frac{a^5-x^5}{a^3-x^3} [a]$$

$$128. \frac{2x^3-x+1}{3x^3-x+2} [-1]$$

$$129. \frac{a^7-(a-x)^7}{b^7-(b-x)^7} [0]$$

$$130. \frac{x^4-\sqrt[5]{x}}{x^2-\sqrt[5]{x}} [1]$$

$$131. \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{5}} [2]$$

$$\frac{x^6-64}{x^5-32} [2]$$

$$\frac{x^5-x^4}{x^6-1} [1]$$

$$\frac{x^5-4x^3+3x-6}{3x^5-6x^4+x^2-4} [2]$$

$$\frac{(a+x)^5-(a+b)^5}{(a-b)^5-(a-x)^5} [b]$$

$$\frac{\sqrt{5x+3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}} [1]$$

$$\frac{\sqrt[5]{3-x}-1}{\sqrt[5]{3-x}-1} [2]$$



Wenn man in einem von  $x$  abhängigen Ausdruck  $x + h$  für  $x$  substituirt, nach Potenzen von  $h$  entwickelt, den Koeffizienten von  $h = 0$  setzt, aus der so erhaltenen Gleichung den Wert von  $x$  bestimmt, so wird für diesen der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum. Was von beiden eintritt, überfieht man in den meisten Fällen leicht. \*) — Sieh hiernach an, für welche Werte von  $x$  die folgenden Ausdrücke ein Maximum oder ein Minimum werden, was von beiden eintritt, und wie groß das Maximum oder Minimum des gegebenen Ausdruckes für den gefundenen Wert von  $x$  wird.

132.  $x^4 - 108x + 244$

133.  $x^6 - 6a^5x + 4a^6$

134.  $(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)$

135.  $(a - x^3)(b - x^3)$

136.  $5 + 12x - x^3$

137.  $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

138.  $\frac{4}{x} + \frac{x}{4}$

139.  $\frac{7-x}{x-3} + \frac{x-3}{7-x}$

140.  $x + \sqrt{1-x}$

141.  $x - \sqrt{3x-2}$

## XXXVII.

## Von den Gleichungen höheren Grades im allgemeinen.

1. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 3. Grades?
2. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des 4. Grades?
3. Welches ist die allgemeine Form einer Gleichung des  $n$ . Grades?
4. Wonach ist der Grad einer Gleichung zu beurteilen?
5. Schreibe sechs möglichst verschiedene Gleichungen des 3. Grades auf.
6. Desgleichen acht möglichst verschiedene Gleichungen des 4. Grades.
7. Wie nennt man die Werte der Unbekannten, welche der Gleichung genügen?
8. Welchen Faktor muß die linke Seite einer geordneten auf 0 gebrachten Gleichung haben, wenn  $m$  eine Wurzel der Gleichung ist? (Beweis!)

9. Wie muß demnach eine Gleichung in ihrer einfachsten Form heißen, welche die Wurzeln  $m$ ,  $n$  und  $p$  hat?

10. Wie heißen die Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben?

1) 1, 2, 3

2) 1, 1, -2

3) 2, 3, -5

4) 3, -4, -7

5) 7,  $+\sqrt{5}$ ,  $-\sqrt{5}$

6) 2,  $+\sqrt{-3}$ ,  $-\sqrt{-3}$

\*) Will man das durch Rechnung darthun, so muß man auch den Koeffizienten von  $h^2$  suchen. Ist dieser für den gefundenen Wert von  $x$  negativ, so wird der Ausdruck ein Maximum, ist er positiv, ein Minimum. Verschwindet der Koeffizient von  $h^2$  ebenfalls, so muß auch der von  $h^3$  verschwinden und es kommt auf das Zeichen des Koeffizienten von  $h^4$  an.