Methodisch geordnete Aufgabensammlung

Bardey, Ernst

Leipzig, 1890

XI. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten

44. Zwei Kapitalien A und A_1 stehen gleich lange auf Zinsen. A bringt bei p Pzt. in der Zeit c Mk. Zinsen, A_1 bei p_1 Pzt. in derselben Zeit c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zinsen, 3) die Prozente?

45. Ein Kapital A bringt in n Jahren c Mk. Zinsen, ein anderes A_1 bringt in n_1 Jahren c_1 Mk. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Zinsen, wenn die Prozente gleich sind?

46. Ein Kapital A steht n Jahre lang zu p Pzt. aus, ein anderes n_1 Jahre zu p_1 Pzt. Wie verhalten sich 1) die Kapitalien, 2) die Zeiten, 3) die Prozente, wenn beide Kapitalien gleich viel Zinsen tragen?*)

47. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5. Wie verhalten sich die Seiten? $\left(\frac{1}{h} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2}\right)$.

48. In einem Dreieck verhalten sich die durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises entstehenden Abschnitte der Seiten wie 4 : 5 : 6. Wie verhalten sich die Radien der drei äußeren Berührungskreise?

49. Vier Arbeiter verrichten dieselbe Arbeit bezw. in 6, 8, 9 u. 10 Tagen; wie verhalten sich ihre Leistungen?

XI.

Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

Eine Potenz ist ein Ausdruck von der Form a^n, welcher ein Produkt aus n gleichen Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist. Der Ausdruck a^5 ist demnach gleich aaaaa. Er wird gelesen a in der fünften (Potenz) oder a hoch 5. Nur in der Form a^5 heißt die Größe aaaaa eine Potenz; in der Form aaaaa sollte sie nur ein Produkt heißen. Der wiederholt gesetzte Faktor heißt Basis der Potenz, die Zahl n, welche angiebt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist, heißt der Exponent der Potenz oder der Potenzexponent. Nach dieser Erklärung kann der Exponent nur eine positive ganze Zahl sein. Da nun $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$ ist, so muß $a^1 = a$ sein, d. h. eine Potenz mit dem Exponenten 1 ist gleich der Basis. Umgekehrt kann man jede Größe als eine Potenz mit dem Exponenten 1 darstellen ($a = a^1$).

Die Potenz einer Zahl suchen heißt potenzieren. Das Potenzieren ist die fünfte der Fundamentaloperationen, die erste der drei höheren Operationen. Eine Zahl a mit einer Zahl n potenzieren heißt die Potenz a^n suchen. Beim Potenzieren kommen demnach drei Größen in Betracht: die Basis, der Exponent und die Potenz. Wie sich bei der Addition die Summanden, bei der Multiplikation die Faktoren, so lassen sich beim Potenzieren Basis und Exponent nicht mit einander vertauschen. Mit Ausnahme von $2^4 = 4^2$ ist a^n niemals $= n^a$, wenn a und n von einander verschiedene ganze Zahlen sind. So ist $2^{10} = 1024$, $10^2 = 100$.

*) Alle in 43. — 46. vorkommenden Verhältnisse lassen sich sofort aus der Gleichung $Anpc_1 = A_1n_1p_1c$ ablesen. Wie erhält man diese?

Über die Rechnung mit Potenzen gelten folgende fünf Sätze:

1. $a^3 \cdot a^5 = a^8$, $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^9}{a^4} = a^5$, $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{a^4}{a^9} = \frac{1}{a^5}$, $\qquad \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

3. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$, $\qquad (ab)^n = a^n \; b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$, $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $(a^3)^4 = a^{12}$, $\qquad (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

Wie werden diese Sätze bewiesen, und wie heißen dieselben in Worten?

Auch folgende sehr oft gebrauchte Formeln sind zu merken (und zu beweisen):

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

---

1. $1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + 17^2 + 21^2 + 25^2 + 29^2$
2. $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 + 13^3 + 16^3 + 19^3$
3. $1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4$
4. $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5$
5. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$
6. $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
7. $(-1)^1 - (-2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$
8. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^9 + (-a)^{10} + (-a)^{11} + (-a)^{12}$
9. $4^4 + 3^4$, $\qquad 8^3 - 8^2$, $\qquad 7^5 - 6^5$
10. $3^2 - 2^3$, $\qquad 2^9 - 9^2$, $\qquad 6^5 - 5^6$
11. $(+2)^3 + (-3)^2$, $\qquad (+3)^3 + (-3)^3$, $\qquad (+2)^4 + (-2)^4$
12. $(-7)^2 - (-2)^7$, $\qquad (-3)^4 + (-4)^3$, $\qquad (-5)^2 - (-2)^5$
13. $(+5)^3 - (-3)^5$, $\qquad (-3)^4 - (+5)^3$, $\qquad (+3)^7 - (-3)^7$
14. $2^3 \cdot 3^2$, 72 $\qquad 2^7 \cdot 7^2$, $\qquad 2^{10} \cdot 10^2$
15. $2^3 \cdot 5^4$, $\qquad 4^3 \cdot 5^6$, $\qquad 4^3 \cdot 5^4$
16. $3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3^2$, $\qquad 5 \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^4$, $\qquad 7 \cdot 5^3 - 4 \cdot 3^5$
17. $6 \cdot 2^3 - 5 \cdot 3^2$, $\qquad 8 \cdot 5^2 - 4 \cdot 7^4$, $\qquad 9 \cdot 8^2 - 3 \cdot 2^8$

18. $\frac{4^2 - 3^2}{5^2 - 2^2}$, $\frac{7^2 + 4^2}{6^2 + 3^2}$, $\frac{4^3 + 3^3}{3^4 - 5^2}$

19. $\frac{7^3 + 5^3}{8^4 - 4^4}$, $\frac{3^6 - 2^6}{3^5 + 2^5}$, $\frac{2^7 - 4^3}{5^4 - 3^4}$

20. $\frac{6 \cdot 8^2 - 8 \cdot 6^2}{13^2 - 3^2}$, $\frac{3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^5}{2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^4}$, $\frac{2 \cdot 3^6 + 3 \cdot 2^6}{7 \cdot 3^2 + 3 \cdot 7^2}$

---

21. $a^7 \cdot a^5$, $b^4 \cdot b^3$, $c^8 \cdot c$
22. $x^n \cdot x^3$, $y^n \cdot y$, $z^{n-1} \cdot z$
23. $p^n \cdot p^n$, $q^n \cdot q^{5n}$, $q^{m-n} \cdot q^n$
24. $a^3 \cdot a^{x-4}$, $b^7 \cdot b^{2-x}$, $c^{x-4} \cdot c^5$
25. $p^n \cdot p^{n-1}$, $q^{2n} \cdot q^{3-n}$, $r^x \cdot r^{5-2x}$
26. $a^{3+x} \cdot a^{x-3}$, $b^{n+x} \cdot b^{5-x}$, $c^{x-7} \cdot c^{5+x}$
27. $x^{m-n} \cdot x^{m+n}$, $x^{n+3} \cdot x^{n-4}$, $y^{n-1} \cdot y^{7-n}$
28. $g^{n-x} \cdot g^{m+x}$, $h^{5-n} \cdot h^{n+x}$, $k^{m+n} \cdot k^{1-m}$
29. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$, $x^7 \cdot x^8 \cdot x$, $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n}$
30. $(-a)^3 \cdot (-a)^4$, $(-a)^8 \cdot (+a)^5$, $(-a)^7 \cdot (+a)^4$
31. $(-a)^{2n} \cdot a$, $(-a)^{2n} \cdot (-a)$, $(-a)^{2n} \cdot (-a)^3$
32. $(-a)^{2n+1} \cdot (-a)$, $(-a)^{2n-1} \cdot (+a)^3$, $(-a)^{2n-1} \cdot (-a)^{2m+1}$
33. $2a^4 \cdot 3b^2$, $2a^3 \cdot 3a^2$, $5x^3 \cdot 8x$
34. $2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 7c^4$, $8x^7 \cdot 5x^4 \cdot 9x$, $3a^4 \cdot 2b^3 \cdot 5a^2$
35. $a^3b^5 \cdot a^7b^3$, $a^4b \cdot a^8b^3$, $a^nb^m \cdot a^3b$
36. $a^{n-1}b^{n+1} \cdot ab^2$, $x^2y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-5}$, $x^3y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-4}$
37. $\frac{5}{9}a^2bx \cdot \frac{6}{7}ab^3y^2 \cdot \frac{4}{5}a^nbx^ny$
38. $\frac{3}{4}a^nbx^3 \cdot \frac{4}{5}ab^mx^4 \cdot \frac{5}{6}a^2x^p$
39. $a^{m+n-7} \cdot a^{2m-n+8} \cdot a^{11-3m}$
40. $p^{2x-3y+5} \cdot p^{3x+2y-5} \cdot p^{x+6y}$
41. $(x-y)^{n-2} \cdot (x-y)^{3-m} \cdot (x-y)^{m-1}$
42. $a(a-b)^3 \cdot a^{n-1}b(a-b)^{n-3} \cdot a^2b^{n-1}$
43. $7a^2b^3 \cdot 8a^4c^7 \cdot 25a^{n-5}b^{n-5}c^{n-5}$
44. $a^{m-n}b^pc^{q+1} \cdot a^{n-1}b^{n-p}c^{p-q} \cdot a^{m+1}b^{2-n}c^{p-1}$
45. $(a-x)^{n-1}x^3y^5 \cdot (a-x)^{n-2}x^{n-1}y \cdot (a-x)^3x^{n-2}y^{n-5}$
46. $(-3a^2b^{n-1})(-5a^{n-3}c^{n+1})(-4abc^{x-n})$
47. $(-a)^nb^{3-x}c \cdot (-a)^{2n-3}b^{4+x}c^{n-1} \cdot (-a)^{4-n}b$
48. $a^nb(-x)^3 \cdot a^2b^n(-x)^n \cdot a^{n-2}b^{5-n}(-x)^{5-n}$

49. $\frac{a^5b^3}{13} \cdot \frac{a^8b^4}{7}$, $\frac{x^9y^8}{10} \cdot \frac{xy^2}{10}$

50. $\frac{a^mb^{x-2y}}{m+n} \cdot \frac{a^nb^y}{x-y}$, $\frac{a^{5m-n}b^{7x-3y}}{3m+2n} \cdot \frac{a^{3n-2m}b^{6y-5x}}{2x+3y}$

51. $(a-b)^3 \cdot (b-a)^4$, $(a-b)^4 \cdot (b-a)^3$
52. $(x-y)^n \cdot (y-x)^4$, $(x-y)^7 \cdot (y-x)^n$
53. $(a-b) \cdot (b-a)^{2n-3}$, $(a-b)^5 \cdot (b-a)^{2n-4}$
54. $(a-b-c)^{n-1} \cdot (b+c-a)^{2n+1}$
55. $(2a+3b^2+4c^3) \cdot a^2b^2c^2$
56. $(ab+ac+bc) \cdot a^3b^3c^3$
57. $(3a^3-5a^2b^3+7b^2) \cdot 2ab^2$
58. $(ab^2c^3-a^2b^3c-a^3bc^2) \cdot a^2b^3c^4$
59. $(a^5+a^2)(a^3-a)$, $(p^7-p^4)(p^5+p)$
60. $(x^8+x^3)(x^8-x^3)$, $(y^9+y^4)(y^6-y)$
61. $(a^4+b^3)(a^4-b^3)$, $(a^4+b^4)(a^3-b^3)$
62. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$, $(a^m+b^m)(a^n-b^n)$
63. $(3a^2-2b^3)(3a^2+2b^3)$, $(5a^3+3b^2c)(5a^3-3b^2c)$
64. $(x^2+a)^2$, $(a-2x^2)^2$
65. $(a^7-a^3)^2$, $(a^8-a)^2$
66. $(a^m-a^n)^2$, $(2a^x-3a^y)^2$
67. $(a-b+c)^2$, $(a+b-c)^2$
68. $(2x-3y+4)^2$, $(3x-2y+z)^2$
69. $(5x^2-3x+2)^2$, $(ax^2+bx+c)^2$
70. $(a^2-b)^3$, $(5a-3x^2)^3$
71. $(a+b)^3+(a-b)^3$, $(x+1)^3+(x-1)^3$
72. $(m+n)^3-(m-n)^3$, $(1+t)^3+(1-t)^3$
73. $(a+b)^4$, $(a-b)^4$,
74. $(x+y)^4+(x-y)^4$, $(x+3)^4+(x-3)^4$
75. $(a+x)^4-(a-x)^4$, $(x+5)^4-(x-5)^4$
76. $(a+b)^5$, $(a-b)^5$
77. $(a+t)^5+(a-t)^5$, $(x+2)^5+(x-2)^5$
78. $(x+y)^5-(x-y)^5$, $(2x+3)^5-(2x-3)^5$
78_1. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2$
78_2. $(a+b+c-x)^2+(a+b+x-c)^2+(a+c+x-b)^2$ $+(b+c+x-a)^2$
79. $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+b^2)$
80. $(x^4-x^2y^2+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)$
81. $(x^9+x^6+x^3+1)(x^3-1)$
82. $(x^8-x^6+x^4-x^2+1)(x^2+1)$
83. $(2a^2-3b^3+4c^4)(4a^2+2b^3-3c^4)$
84. $(6a^2-11ab+3b^2)(9a^2-3ab-2b^2)$
85. $(7a^2+ab-6b^2)(6a^2-ab-5b^2)$
86. $(a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8)(a^2-b^2)$

87. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$

88. $(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)(a - b)$

89. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$

90. $(16a^4 - 48a^3b + 108a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4)(4a^2 + 12ab + 9b^2)$

91. $(81a^4 - 54a^3b - 24ab^3 + 16b^4)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

92. $x^5 - 2x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$ zu multiplizieren mit $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$

93. $x^6 + 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^3y^3 + 6x^2y^4 + 3xy^5 + y^6$ zu multiplizieren mit $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

94. $(x^8 + x^7y + x^6y^2 + x^2y^6 + xy^7 + y^8)(x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)$

95. $(a^{3n} + a^{2n}b + a^nb^2 + b^3)(a^n - b)$

96. $(a^n + b^m - c)(a^n - b^m + c)$

97. $(a^{2m-n} + a^m + a^n + a^{2n-m})(a^m - a^n)$

98. $(a^{3m-n} - a^{2m} + a^{m+n} - a^{2n} + a^{3n-m})(a^m + a^n)$

98_1. $(3a^nb^{2-x} - 5a^{n-1}b + 9a^{n-2}b^x)(4a^2b + 7ab^x)$

98_2. $(2a^2b^{x+1} - 3a^nb^3 + 4a^{2n-2}b^{5-x})(5ab^x + 6a^{n-1}b^2)$

99. $(a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 + (b-a-c)^3 + (c-a-b)^3$

100. $(a + b + c)^3 - 3(ab + ac + bc)(a + b + c)$

101. $(ax^3 - (a + b)x^2 + (a + b + c)x - (a + c))(x + 1)$

102. $(ax^4 + (a - b)x^3 + (a - b + c)x^2 + (a - b)x + a)(x - 1)$

103. $(2x^4 - (1-a)x^3 + (1-a+b)x^2 - (1-a)x + 2)(x+1)$

---

104. $\frac{a^8}{a^3}$, $\frac{a^{12}}{a^7}$, $\frac{a^{15}}{a^8}$ 105. $\frac{a^8}{a}$, $\frac{a^n}{a^4}$, $\frac{a^n}{a}$

106. $\frac{a^7}{7}$, $\frac{a^n-1}{n-1}$, $\frac{x^5}{5x}$ 107. $\frac{a^5}{a^{12}}$, $\frac{a^{12}}{a^5}$, $\frac{a}{a^{11}}$

a^n-1

108. $a^5 : a$, $a^7 : a^9$, $a^4 : 4a$ 109. $a^n : a$, $a : a^n$, $a^n : na$

110. $x^3 : x^n$, $x^2 : x^{n+1}$, $x : x^n$ 111. $x^{n+1} : 2x$, $x^{n-1} : x$, $x : x^{n+2}$

112. $\frac{a^{x-1}}{a}$, $\frac{a^{x+1}}{a}$, $\frac{a^3}{a^{x+2}}$ 113. $\frac{x}{x^{n-1}}$, $\frac{x^2}{x^{n-2}}$, $\frac{x^{n+1}}{x^3}$

114. $\frac{a^{x+3}}{a^7}$, $\frac{a^{n-2}}{a^3}$, $\frac{a}{a^{n-5}}$ 115. $\frac{x^3}{x^{n-4}}$, $\frac{x^5}{x^{5-n}}$, $\frac{x^7}{x^{5+n}}$

116. $\frac{b^8}{b^{8-x}}$, $\frac{b^x}{b^{x-1}}$, $\frac{c^x}{c^{x+4}}$ 117. $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$, $\frac{h^{x+n}}{h^{2x}}$, $\frac{k^{x+1}}{k^{x-1}}$

118. $\frac{m^{x-1}}{m^{x-2}}$, $\frac{n^{x-5}}{n^{x+1}}$, $\frac{p^{x-2}}{q^{x+3}}$ 119. $\frac{a^{3+x}}{a^{x-3}}$, $\frac{a^{4+x}}{a^{5+x}}$, $\frac{a^{n-1}}{a^{1-n}}$

120. $\frac{a^{n-1}}{b^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{x-n}}$, $\frac{a^{x+n}}{a^{x-n}}$ 121. $\frac{a^{x+1}}{a^{5-x}}$, $\frac{a^{x+2}}{a^{7-5x}}$, $\frac{a^{5-x}}{a^{3-2x}}$

122. $\frac{a^{8+x}}{a^{13-x}}$, $\frac{a^{x+5}}{a^{5-2x}}$, $\frac{a^{7+2x}}{a^{3x-7}}$ 123. $\frac{a^{m+1}}{a^{1-n}}$, $\frac{a^{1-m}}{a^{n+1}}$, $\frac{a^{n-x}}{a^{n-1}}$

124. $\frac{a^{2x+3y}}{a^{3x+2y}}, \quad \frac{a^{3x-2y}}{a^{2x-3y}}, \quad \frac{a^{2x-y}}{a^{x-n}}$ 125. $\frac{a^8 b^3}{a^3 b^8}, \quad \frac{a^7 b}{a b^2}, \quad \frac{a^6 b}{a^2 b^5}$

126. $\frac{a^9 b^9}{a^4 b^4}, \quad \frac{a^7 b^3}{a^3 b^7}, \quad \frac{a^4 b^4}{a^6 b^6}$ 127. $\frac{a^n b}{a b^m}, \quad \frac{a^n b^3}{a^3 b^m}, \quad \frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-1}}$

128. $\frac{a^{m+1} b^{n+1}}{a^m b^n}, \quad \frac{a^{m-1} b^{n-1}}{a^m b^n}, \quad \frac{a^{m+1} b}{a b^{n+1}}$

129. $\frac{a^{x+1} b^n}{(x+1) b^{n-1}}, \quad \frac{a^{m+n} b^{m-n}}{(m-n) a^n b^m}, \quad \frac{a^m b^{n+1}}{(a+b) a b}$

130. $\frac{(a-1)^3 (x-1)^4}{(a-1)^4 (1-x)^3}, \quad \frac{a^5 (x-y)^2}{a (y-x)^5}, \quad \frac{a^3 (x+y)^2}{a (x-y)}$

131. $\frac{a^n b^n (b-1)}{a^{n-1} b^{n-2} (1-b)^2}, \quad \frac{a^2 b^2 (a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}, \quad \frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$

132. $\frac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2x^2}$ 132_1. $\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3} \cdot \frac{15bc^3}{8a^6d^2} \cdot \frac{2cd}{3ab}$

133. $\frac{2a^2b^3c}{3x^2y^3} \cdot \frac{a^m b^n c^r}{x^m y^n} \cdot \frac{6x^{m-1} y^{n-2}}{a^{m+1} b^{n+2} c^{r+3}}$

134. $\frac{9a^2b^3}{8x^3y^n} \cdot \frac{10a^{n-1} x^{n+2}}{21b^{m+3} y^{m-n}} \cdot \frac{x}{a}$ 135. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1} b^{n+2}}{9a^{n+5} c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$

136. $\frac{a^{x-1} b^{x-2} c^{x-3}}{x^{n-1} y^{n+2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^{n+1} y^{n-2} z^{n+4}}{a^{x-2} b^{x+1} c^{x-1}} \cdot \frac{a^2c^2}{b^2x^2}$

137. $\frac{a^{m-n} b^{n-p} c^{p-m}}{x^{n-p} y^{p-m} z^{m-n}} \cdot \frac{a^{n-p} b^{p-m} c^{m-n}}{x^{p-1} y^{m-2} z^{n-3}} \cdot \frac{x^n y^p z^m}{a^m b^n c^p}$

138. $\frac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^3} : \frac{4a^2b^8c^5}{5xy^5z^4}$ 139. $\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4} : \frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5}$

140. $\frac{5a^n b^{n-1} c^{n-2}}{6x^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1} b c^{n+1}}{2xy^n z^{n+1}}$

141. $\frac{5a^4 b^3 c^{n+1}}{6x^3 y^n z^{n+4}} : \frac{3a^6 b^4 c}{8x^4 y z^{n-1}}$

142. $\frac{a^{2x-3y} a^{3y-5}}{a^{5-3x} a^{7-2y}} : \frac{a^{5x+3y-10}}{a^{x+y+10}}$

143. $\frac{a^{3x-y} b^{2y-3x}}{a^{3y-2x} b^{5x-2y}} : \frac{a^{7x-3y} b^{7y-6x}}{a^{3x+2y} b^{3x+2y}}$

144. $(ax^7 + bx^3) : x^5$ 145. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$

146. $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : x^4$

147. $(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}$

148. $(3a^2b^3 + 2a^3c + 4a^3c^4) : 6a^3b^3c^3$

149. $(10x^4y^3z^5 + 15x^2y^4z - 6xy^2z^4) : 30x^2y^3z^4$

150. $(a^{3x-4y} + a^{2y-3x} + a^{3(x-y)}) : a^{4x-5y}$

151. $(6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (3a + 4b)$ $= 2a^2 - ab - 3b^2$

152. $(15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3) : (5a - 3b)$ $= 3a^2 + 2ab - 5b^2$

153. $(9a^4 - 58a^2b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$
154. $(144a^4 - 289a^2b^2 + 100b^4) : (12a^2 + 7ab - 10b^2)$
155. $(12a^4 - a^3b - 32a^2b^2 + ab^3 + 20b^4) : (4a^2 + ab - 5b^2)$
156. $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$
157. $(a^8 - b^8) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
158. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$
159. $(a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9) : (a^4 - a^3b - ab^3 + b^4)$
160. $(64a^6 + 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 + 12ab + 9b^2)$
161. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$ $\quad (x^{3m} + y^{3n}) : (x^m + y^n)$ [162]
162. $(x^{4m} - y^{4n}) : (x^m + y^n)$ [163] $\quad (x^n - y^n) : (x - y)$
163. $\frac{x^4 - 1}{x - 1}$, $\frac{a^4 - b^4}{a + b}$, $\frac{a^4 + b^4}{a + b}$ $\quad \frac{a^5 + b^5}{a + b}$, $\frac{a^5 - b^5}{a - b}$, $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$
164. $\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2}$, $\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^6 - b^6}{a - b}$ $\quad \frac{x^6 + 1}{x + 1}$, $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$, $\frac{x^6 - 1}{x + 1}$

---

165. $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$*) $\quad x^4 + x^2y^2 + y^4$
165_1. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ $\quad \frac{x^n}{y^p} - \frac{y^p}{x^n}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^n - \left(\frac{y}{x}\right)^n$
165_2. $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}$ $\quad \frac{x^3}{y} + xy + \frac{y^3}{x}$
165_3. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$, $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ $\quad \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$, $\frac{a^3}{b} - \frac{b^3}{a}$
165_4. $a^5 \pm b^5$, $x^5 \pm 1$ $\quad a^6 \pm b^6$, $x^6 \pm 1$
165_5. $ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2}$ $\quad ax^n + bx^{n+p} + cx^{n+r}$
165_6. $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}$ $\quad ax^n + bx^{n-p} + cx^{n-r}$
165_7. $x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}$ $\quad x^{n-p} - x^{n+p}$
165_8. $x^{n+2} + x^n + x^{n-2}$ $\quad 6x^{n+2} - 13x^n + 6x^{n-2}$
165_9. $3x^{p+n} - 10x^p + 3x^{p-n}$ $\quad 2x^{2n} + 5x^{n+p} + 2x^{2p}$

---

166. $\frac{(a^2 - x^2)^2 - (x^2 - b^2)^2}{(a^2 - y^2)^2 - (y^2 - b^2)^2}$**) $\quad \frac{(a^2 + ab)^2 - (ab + b^2)^2}{(a^2 - ab)^2 - (ab - b^2)^2}$
166_1. $\frac{a^5b - ab^5}{a^3b^2 - a^2b^3}$, $\frac{a^6b^2 - a^2b^6}{a^5b^3 + a^3b^5}$ $\quad \frac{a^4b + ab^4}{a^3b^2 + a^2b^3}$, $\frac{a^5b^2 - a^2b^5}{a^4b^3 - a^3b^4}$
166_2. $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x + y)(x^3 + y^3)}$ $\quad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x - y)(x^3 - y^3)}$

*) Nr. 165—165_9 sollen in Faktoren zerlegt werden.
**) Nr. 166—166_9 sollen gehoben werden.

166₃. $\frac{a^4 + ab\,(a^2 + b^2) + b^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad$ $\frac{x^4 - y^4}{(x + y)\,(x^3 - y^3)}$

166₄. $\frac{(a^3 + b^3)\,(a^2 + ab + b^2)}{(a^3 - b^3)\,(a^2 - ab + b^2)}$ $\qquad$ $\frac{(a + b)\,(a^3 - b^3)}{(a - b)\,(a^3 + b^3)}$

166₅. $\frac{a^6 - b^6}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ $\qquad$ $\frac{x^6 + y^6}{x^4 - x^2y^2 + y^4}$

166₆. $\frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a^{p+1} - a^{p-1}}$ $\qquad$ $\frac{a^{x+2} - a^{x-2}}{a^{n+1} - a^{n-1}}$

166₇. $\frac{x^{n+2}y^{n-2} - x^{n-2}y^{n+2}}{x^{n+1}y^{n-1} - x^{n-1}y^{n+1}}$ $\qquad$ $\frac{a^{n+x}b^{n-x} - a^{n-x}b^{n+x}}{a^{p+x}b^{p-x} - a^{p-x}b^{p+x}}$

166₈. $\frac{x^{n+2} + x^n + x^{n-2}}{x^{p+2} - x^{p+1} - x^{p-1} + x^{p-2}}$ $\qquad$ $\frac{x^{n+2} - 2x^n + x^{n-2}}{x^{n+2} - x^{n+1} + x^{n-1} - x^{n-2}}$

166₉. $\frac{x^n + x^{n-1} - 2x^{n-2}}{x^p + 2x^{p-1} - 3x^{p-2}}$ $\qquad$ $\frac{3x^{n+1} - 10x^n + 3x^{n-1}}{3x^{n+1} - 8x^n - 3x^{n-1}}$

---

167. $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x}$ *) $\qquad$ $\frac{1}{x^3} + \frac{1-x}{x^4}$

167₁. $\frac{1-x^3}{x^5} + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{1-x^5}{x^7} + \frac{1}{x^2}$

167₂. $\frac{1-x^2}{x^6} + \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{1-x^2}{x^8} + \frac{1+x}{x^6} - \frac{1}{x^5}$

167₃. $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad$ $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-p}}$

167₄. $\frac{1+x}{x^n} - \frac{1-x}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-2}}$ $\qquad$ $\frac{1-2x^2}{x^p} + \frac{2-3x^2}{x^{p-2}} + \frac{3}{x^{p-4}}$

167₅. $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{n-1}} + \frac{c}{x^{n-2}} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x} + f$

167₆. $\frac{a}{p^{x-m}} + \frac{b}{p^{x-n}} + \frac{c}{p^{x-r}} + \frac{d}{p^x} + e$

167₇. $\frac{y^2}{(x-y)^n} + \frac{x}{(x-y)^{n-1}} - \frac{1}{(x-y)^{n-2}}$

167₈. $\frac{x^n}{(x+y)^n} + \frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}} - \frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$

167₉. $\frac{a^x - b^y}{a^x + b^y} + \frac{a^x + b^y}{a^x - b^y}$, $\frac{x^m + y^n}{x^m - y^n} - \frac{x^m - y^n}{x^m + y^n}$

---

168. $\frac{15^3}{5^3}$, $\frac{24^4}{8^4}$, $\frac{30^2}{6^2}$, $\qquad$ 169. $\frac{20^4}{15^4}$, $\frac{36^3}{60^3}$, $\frac{91^3}{78^3}$,

---

*) Nr. 167—167₉ sollen gleichnamig gemacht werden.

170. $\frac{28^3}{21^2}$, $\frac{32^4}{48^3}$, $\frac{54^5}{72^4}$, 171. $\frac{25^3 \,.\, 72^2}{9^3 \,.\, 20^4}$, $\frac{18^4 \,.\, 30^5}{27^4 \,.\, 15^3}$, $\frac{28^3 \,.\, 45^4}{36^4 \,.\, 35^3}$,

172. $2^6 \,.\, 5^6$, $6^4 \,.\, 5^4$, $8^2 \,.\, 5^2$

173. $25^4 \,.\, 4^4$, $125^2 \,,\, 8^2$, $35^3 \,.\, 8^3$

174. $(1\tfrac{1}{2})^4 \,.\, (6\tfrac{2}{3})^4$, $(1\tfrac{1}{3})^3 \,.\, (1\tfrac{1}{2})^3$, $(7\tfrac{1}{2})^5 \,.\, (1\tfrac{1}{3})^5$

175. $(-ab)^2 \,.\, (ab)^{n-2} \,.\, (-a)^3$

176. $(-ax)^4 \,.\, (-by)^3 \,.\, (abxy)^{n-3}$

177. $(ab)^2 \,.\, \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$

177_1. $\left(\frac{6a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{(3a)^3}$

178. $(-\tfrac{2}{3}ab)^5 \cdot \left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3b}{8a}\right)^3$

179. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^4$ 180. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^n$

181. $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n \cdot \left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n \cdot \left(\frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n$ 182. $\left(\frac{ax}{by}\right)^2 \cdot \left(\frac{bx}{cy}\right)^3 \left(\frac{cy}{ax}\right)^5$

183. $\frac{(3xy)^2 \,.\, (4xz)^3 \,.\, (5yz)^4}{(25xyz)^2 \cdot (6xyz)^3}$ 183_1. $\frac{(6abx)^3 \cdot (10aby)^4}{(4ab)^4 \cdot (3ax)^3 (25by)^2}$

184. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$

185. $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-x^2}\right)^2$

186. $\left(\frac{m-n}{m-p}\right)^4 \cdot \left(\frac{n-p}{n-m}\right)^4 \cdot \left(\frac{p-m}{p-n}\right)^4$

---

187. $(a^2)^3$, $(b^3)^4$, $(x^4)^n$

188. $(a^n)^p$, $(a^3)^{x-1}$, $(x^{n+1})^4$

189. $(-a^3)^2$, $(-a^2)^3$, $(-a^3)^5$

190. $(-a^3)^{2n}$, $(-a^{2n})^3$, $(-a^{2n-1})^{2n}$

191. $(-a^2)^{2n-1}$, $(-a^{2n-1})^2$, $(-a^{2n})^{2n-1}$

192. $(a^4b^2)^5$, $(a^5b^7)^8$, $(x^ny)^3$

193. $(2a^2b^3)^4$, $(3ab^{n-2})^5$, $(7a^2x^{n-1}y^r)^3$

194. $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5$, $\left(\frac{3ab^5}{2x^2y}\right)^4$, $\left(\frac{4a^4b^n}{3x^2y^{n-1}}\right)^5$

195. $\frac{(a^2x^4)^4}{(ax)^{10}}$, $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$, $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^2b^3)^3}$

196. $\frac{(2^3)^5}{4^4}$, $\frac{(3^3)^3}{9^4}$, $\frac{(3^8)^5}{27^{13}}$ 196₁. $\frac{(3.4^2)^3}{12^4}$, $\frac{(6^2)^3}{(4.3^3)^2}$, $\frac{(8^2.5^3)^3}{20^9}$

197. $\left(\frac{2a^3 b^2}{3xy^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3x^2 y}{5a^2 b}\right)^3 \cdot \left(\frac{5ay^2}{2bx^2}\right)^2$

198. $\frac{3(2a^2 b^3)^2}{4(3x^3 y^2)^3} \cdot \frac{7(3x^4 y^3)^2}{5(2ab^2)^3}$ 198$_1$. $\frac{2(4a^3 b^2 c^2)^2}{3(6x^2 y^3 z^4)^3} \cdot \frac{6(3xy^2 z^3)^4}{5(2a^2 bc)^3}$

198$_2$. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$

Untersuche, welchen gemeinschaftlichen Faktor Zähler und Nenner in folgenden Brüchen haben, und hebe durch diesen Faktor.

199$_1$. $\frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{3x^3 - x^2 + 3x + 7}$ 199$_2$. $\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5}$

199$_3$. $\frac{x^4 + x^3 - 2x + 8}{2x^4 + 3x^3 - 9x + 4}$ 199$_4$. $\frac{6x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 1}{4x^4 - 17x^2 - 10x + 3}$

Entwickele folgende Brüche in unendliche Reihen, die sechs ersten nach steigenden, die sechs folgenden nach fallenden Potenzen von x. Dies kann geschehen durch einfache Division, oder durch Anwendung der unbestimmten Koefficienten, oder bei einfachem Nenner auch mit Hülfe der bekannten Entwickelungen von $\frac{1}{1+x}$ und $\frac{1}{1-x}$.

200$_1$. $\frac{a}{b+cx}$ 200$_2$. $\frac{1}{3-2x}$ 200$_3$. $\frac{ax+1}{bx+1}$

200$_4$. $\frac{x}{(1-x)^2}$ 200$_5$. $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ 200$_6$. $\frac{x(1+x)^2}{(1-x)(1+x^2)}$

200$_7$. $\frac{a}{cx-b}$ 200$_8$. $\frac{6}{3x+2}$ 200$_9$. $\frac{x+a}{x+b}$

200$_{10}$. $\frac{5-2x-x^2}{1-x^3}$ 200$_{11}$. $\frac{ax-b}{1+x+x^2}$ 200$_{12}$. $\frac{x}{(x-1)^3}$

Entwickele folgende Quadrate und Kuben unendlicher Reihen bis auf sieben Glieder.

201$_1$. $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot)^2$

201$_2$. $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdot\cdot)^2$

201$_3$. $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \cdot\cdot)^2$

201$_4$. $(a - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + a_4x^4 - a_5x^5 + a_6x^6 - \cdot\cdot)^2$

201$_5$. $(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot)^2$

201$_6$. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot\cdot)^3$

201$_7$. $(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \cdot\cdot)^3$

Verwandle folgende unendliche Reihen in unendliche Produkte.

202_1. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdot\cdot$

202_2. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot$

202_3. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdot\cdot$

202_4. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdot\cdot$

Berechne die Summen folgender unendlichen Reihen für die angegebenen Werte von x, die der ersten sechs auf sieben, die der letzten auf zwölf Decimalen.

203_1. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ für 1) 0,2, 2) 0,3, 3) $\frac{1}{7}$, 4) $\frac{3}{16}$

203_2. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ für 1) $\frac{1}{9}$, 2) $\frac{1}{19}$, 3) $\frac{1}{89}$,

203_3. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \cdots$ für 1) $\frac{1}{51}$, 2) $\frac{1}{46}$

203_4. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdot\cdot$ für 1) 0,1, 2) 1

203_5. $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdot\cdot$ für $\frac{3}{172}$ *)

203_6. $1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$ für $\frac{3}{172}$

203_7. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot$ für 1) $\frac{1}{2}$, 2) $\frac{1}{5}$, 3) $\frac{1}{8}$, 4) $\frac{1}{18}$, 5) $\frac{1}{70}$, 6) $\frac{1}{99}$, 7) $\frac{1}{307}$.

Bezeichnet man die Summen, welche aus der letzten Reihe für die angegebenen Werte von x entstehen, entsprechend mit F_2, F_5, F_8 u. s. w., so hat man

$$\frac{\pi}{4} = F_2 + F_5 + F_8, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12F_{18} + 3F_{70} + 5F_{99} + 8F_{307}.$$

Berechne $\frac{\pi}{4}$ und somit auch π auf diese Weise bis auf 12 Decimalen.

204_1. Wie wird man folgende dekadische Zahlen im heptadischen Zahlensystem schreiben: 12, 21, 37, 49, 70, 87, 100, 700, 8941?

204_2. Wie werden die Zahlen 17, 25, 50, 111, 333, 527 im pentadischen Zahlensystem heißen?

204_3. Wie heißen die Zahlen 7, 9, 27, 40, 100 im triadischen System?

204_4. Wie werden umgekehrt die Zahlen 27, 71, 100, 555, 1574, welche dem oktadischen Zahlensystem entnommen sind, im dekadischen System heißen?

*) Diese und die folgende Reihe liefern für den angegebenen Wert von x den Sinus von 1° bis auf 0,00001, den Cosinus von 1° bis auf 0,0000005 richtig.

204_5. Welche Werte haben die dem tetradischen System angehörigen Zahlen 13, 123, 300, 333, 1023?

204_6. Desgleichen die dem dyadischen System angehörigen Zahlen 11, 111, 1011, 1001001, 1011101?

XII.

Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

Wenn man die Reihen

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaa & aa & a \\ a^4 & a^3 & a^2 & a^1, \end{array}$$

deren entsprechende Glieder einander gleich sind, nach demselben Bildungsgesetz*) weiter führt, so erhält man

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} & \frac{1}{aaaa} & \text{u. s. w.} \\ a^0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & a^{-4} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Hat man daher einmal das Zeichen a^4 für aaaa, das Zeichen a^3 für aaa u. s. w. eingeführt, so wird es jedenfalls vorteilhaft sein, auch die Zeichen a^0, a^{-1}, a^{-2} u. s. w. einzuführen, damit man nicht erst jedesmal zu untersuchen hat, ob der Exponent positiv ist. Dann kann man aber, falls man nicht eine große Konfusion in die Rechnung bringen will, diesen Zeichen konsequenter Weise keine andere Bedeutung beilegen, als a^0 muß 1, a^{-1} muß $\frac{1}{a}$, a^{-2} muß $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$, a^{-3} muß $\frac{1}{aaa}$ oder $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. bedeuten**). Es muß demnach, falls die Rechnung auf den Exponenten 0 oder einen negativen Exponenten führt, sein

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder
3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Drücke diese Formeln in Worten aus.

---

*) In der Reihe oben entsteht das folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Division mit a, in der zweiten dadurch, daß man den Exponenten um 1 vermindert.

**) Von einem Beweise kann hier nicht die Rede sein. Es ist nur eine Ausdehnung der Bezeichnung, welche auf Potenzen mit negativen Exponenten führt, wie man das Zahlensystem über die Einer hinaus fortsetzt und auf Decimalstellen kommt, oder wie man sich die positiven Zahlen über Null hinaus abnehmend denkt und die negativen Zahlen erhält.