

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das württembergische Präzisionsnivellement

Werkmeister, Paul

Stuttgart, 1912

Das württembergische Präzisionsnivellement

[urn:nbn:de:bsz:31-274009](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-274009)

Das württembergische Präzisionsnivellement.

Von Dipl.-Ing. P. Werkmeister in Straßburg i. E.

Mit 11 Textfiguren.

I. Ausführung und Bearbeitung der Messung.

1. Einleitung.

Das württembergische Präzisionsnivellement wurde seitens der Kgl. Württ. Kommission für Europäische Gradmessung unter der besonderen Leitung von Professor Dr. v. SCHODER in den Jahren 1868 bis 1881 ausgeführt; es folgt in der Hauptsache den Eisenbahnlinien, so daß die Bedürfnisse der Kgl. Eisenbahnbau-Kommission, welche den größten Teil der Kosten übernommen hatte, in erster Linie mitberücksichtigt werden konnten. Für die Ausführung des Nivellements diente als Vorbild das Präzisionsnivellement der Schweiz.

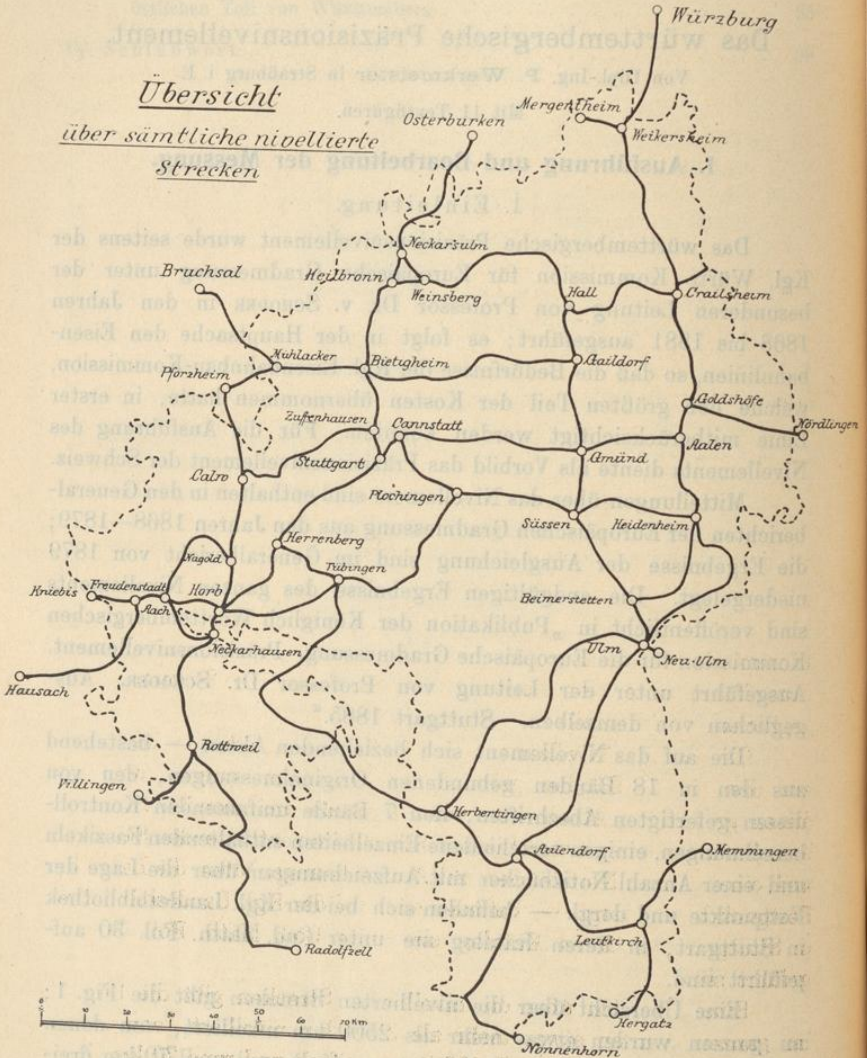
Mitteilungen über das Nivellement sind enthalten in den Generalberichten der Europäischen Gradmessung aus den Jahren 1868—1879; die Ergebnisse der Ausgleichung sind im Generalbericht von 1879 niedergelegt. Die endgültigen Ergebnisse des ganzen Nivellements sind veröffentlicht in „Publikation der Königlich Württembergischen Kommission für die Europäische Gradmessung. Präzisionsnivellement. Ausgeführt unter der Leitung von Professor Dr. SCHODER. Ausgeglichen von demselben. Stuttgart 1885.“

Die auf das Nivellement sich beziehenden Akten — bestehend aus den in 18 Bänden gebundenen Originalmessungen, den von diesen gefertigten Abschriften, den 7 Bände umfassenden Kontrollberechnungen, einigen verschiedene Einzelheiten enthaltenden Faszikeln und einer Anzahl Notizbücher mit Aufzeichnungen über die Lage der Festpunkte und dergl. — befinden sich bei der Kgl. Landesbibliothek in Stuttgart, in deren Katalog sie unter Cod. Math. Fol. 30 aufgeführt sind.

Eine Übersicht über die nivellierten Strecken gibt die Fig. 1; im ganzen wurden etwas mehr als 2500 km nivelliert, von denen rund 1380 km einfach, rund 450 km zweifach und rund 70 km dreifach gemessen wurden. Die Verteilung der ganzen Messung auf die

einzelnen Jahre zeigt die folgende Zusammenstellung, in der auch die jeweiligen Beobachter angegeben sind, deren Namen — weil in den Feldaufzeichnungen nicht enthalten — aus den bei der Berechnung gemachten Notizen zu ermitteln versucht wurde.

Übersicht
über sämtliche nivellierte
Strecken



Figur 1.

Strecke	Gemessen im		Beobachter
	Jahr	Monat	
Cannstatt—Gmünd—Aalen—Goldshöfe—Crailsheim	1868	Juli-Okt.	Weissert
Zuffenhausen—Bietigheim—Heilbronn—Hall—Crailsheim	1868	Juli-Okt.	Diem
Zuffenhausen—Stuttgart—Cannstatt	1868	Oktober	„
Bietigheim—Mühlacker—Bruchsal .	1869	Juni	Fecht
Stuttgart—Bietigheim	1869	Juli	„
Beimerstetten—Süßen—Eislingen .	1869	Aug.-Sept.	„
Eislingen—Plochingen—Cannstatt .	1869	Okt.-Nov.	Groß
Goldshöfe—Nördlingen	1869	Mai-Juni	Sattler
Beimerstetten—Ulm—Aulendorf—Friedrichshafen—Kreßbronn—Nonnenhorn	1869	Juni-Sept.	„
Beimerstetten—Heidenheim—Aalen .	1869	Sept.-Nov.	„
Plochingen—Tübingen—Horb—Rottweil—Villingen	1870	Juni-Okt.	Fetscher
Crailsheim—Niederstetten	1870	Juni-Juli	Sattler
Stuttgart—Herrenberg—Horb	1871	Juli-Aug.	Bürkle
Neckarhausen—Aach	1871	Aug.-Sept.	„
Tübingen—Herrenberg	1871	Juli	Sattler
Horb—Aach—Freudenstadt	1871	August	„
Niederstetten—Mergentheim—Würzburg	1871	September	„
Aulendorf—Herbertingen—Ulm . . .	1872	Juni-Aug.	Dreher
Aulendorf—Leutkirch—Memmingen; Leutkirch—Isny	1872	Aug.-Sept.	„
Hall—Gaildorf—Bietigheim	1873	Juni-Juli	Bechtle
Gmünd—Gaildorf	1873	August	„
Gmünd—Süßen	1873	Aug.-Sept.	„
Süßen—Heidenheim	1873	September	„
Heidenheim—Ulm	1874	Juli-Aug.	„
Aulendorf—Herbertingen—Sigmaringen—Tübingen	1874	Aug.-Okt.	„
Rottweil—Singen—Radolfzell	1874	Okt.-Nov.	„
Isny—Rötenbach—Hergatz	1874	Okt.-Nov.	Groß
Crailsheim—Ellrichshausen	1875	Mai	Bechtle
Horb—Nagold—Pfalzgrafenweiler—Freudenstadt—Hausach	1875	Mai-Juli	„
Nagold—Calw—Pforzheim	1875	Juli-Aug.	„
Calw—Zuffenhausen	1875	August	„
Weinsberg—Neckarsulm—Osterburken	1875	September	„
Pforzheim—Mühlacker	1875	Oktober	„
Stuttgart—Cannstatt—Gmünd—Aalen—Goldshöfe—Ellwangen . . .	1875	Okt.-Nov.	„

Strecke	Gemessen im		Beobachter
	Jahr	Monat	
Goldshöfe—Aalen	1875	Dezember	Bechtle
Bietigheim Heilbronn Hall Crails- heim—Goldshöfe	1877	Juni-Sept.	„
Aalen—Gmünd	1877	September	„
Bietigheim—Mühlacker—Bruchsal	1877	November	„
Kirchheim—Heilbronn—Jagstfeld	1877	Oktober	Groß
Mühlacker—Bruchsal	1878	Mai	Stahl
Goldshöfe—Nördlingen	1878	Juni-Juli	„
Aulendorf—Leutkirch—Rötenbach	1878	Juli-Aug.	„
Horb—Calw—Pforzheim—Mühlacker	1878	Sept.-Okt.	„
Horb—Eutingen—Freudenstadt— Kniebis	1881	Aug.-Sept.	Groß

2. Die Bezeichnung der Festpunkte.

Die in die Messung einbezogenen Festpunkte wurden in der Hauptsache auf drei verschiedene Arten bezeichnet; nämlich durch:

a) Gußeiserne Tafeln mit der Aufschrift Höhenmarke, die an vertikalen Mauerflächen vor einem in die Mauer horizontal eingelassenen Messingbolzen befestigt sind; der eigentliche Höhenpunkt ist durch ein in den Bolzen gebohrtes Loch bezeichnet, dem ein solches in der Tafel entspricht. Die Fig. 2 zeigt die Abbildung einer solchen Höhenmarke (H.M.).

b) Glasprismen — sog. Glaspunkte —, die in horizontale oder vertikale Mauerflächen eingelassen wurden; als eigentlicher Höhenpunkt gilt im ersten Fall die obere Fläche, im zweiten Fall

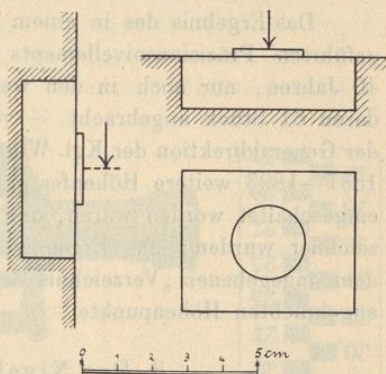


Figur 2.

die Achse eines zylindrischen Ansatzes. In der Fig. 3 ist ein solcher Glaspunkt (G.P.) gezeichnet.

c) Geometrische Figuren, die mit Hilfe des Meisels oder Pinsels auf horizontalen Mauerflächen (Tritten, Deckschichten und dergl.) angebracht wurden.

In den ersten Jahren der Messung wurde die Bezeichnung der Festpunkte nur mit Hilfe von Glasprismen und geometrischen Figuren vorgenommen; erst im Jahr 1877 wurden — hauptsächlich an den Stationsgebäuden größerer Bahnhöfe — Höhenmarken angebracht, die in demselben Jahre durch besondere Nivellements zwischen den nächstgelegenen, in den vorausgegangenen Nivellements bestimmten Festpunkten festgelegt wurden.



Figur 3.

Die Bezeichnung der Festpunkte durch Glasprismen ist eine ungenügende; von den rund 600 seinerzeit eingelassenen Glasprismen sind weitaus die meisten auf natürliche Weise oder in böswilliger Absicht zerstört worden. In den Jahren 1887—1893 — also rund 20 Jahre nach Ausführung des Präzisionsnivellements — wurden anlässlich der seitens der Kgl. Generaldirektion der Württembergischen Staatseisenbahnen ausgeführten Ergänzungsnivellements von den 508 an Bahnlinien angebrachten Glaspunkten nur noch 137 — also rund ein Viertel — als unveränderlich befunden¹. Wenn man bedenkt, daß die entlang der Bahnlinien angebrachten Festpunkte im allgemeinen mehr geschützt sind als solche, die abseits der Bahn angebracht sind, so wird man annehmen dürfen, daß im Jahre 1893 nicht mehr als rund 150 Glaspunkte unverändert vorhanden waren. Heute gehört es zu den größten Seltenheiten, wenn man einen Glaspunkt noch unverändert antrifft; im besten Falle zeigen Glastrümmer die Stelle an, wo der Glaspunkt eingelassen worden war.

¹ Kgl. Generaldirektion der Württembergischen Staatseisenbahnen. Verzeichnis der an den Württembergischen Staatseisenbahnen angebrachten Höhenpunkte mit Angaben der Höhen über Normal-Null. Aufgestellt und berechnet von dem bautechnischen Bureau der Kgl. Generaldirektion der Württ. Staatseisenbahnen nach den in den Jahren 1887/1894 ausgeführten Nivellements. Stuttgart 1895.

Daß die Bezeichnung der Festpunkte eines Präzisionsnivelements durch eingehauene oder aufgemalte geometrische Zeichen eine vollständig ungenügende ist, steht heute außer allem Zweifel; tatsächlich wird heute von den zahlreich seinerzeit so festgelegten Punkten kaum einer mehr aufzufinden sein.

Das Ergebnis des in einem Zeitraum von rund 10 Jahren ausgeführten Präzisionsnivelements würde also heute, nach etwa 40 Jahren, nur noch in den wenigen Höhenmarken — es wurden deren 61 Stück angebracht — vorhanden sein, wenn nicht seitens der Generaldirektion der Kgl. Württ. Staatseisenbahnen in den Jahren 1887—1893 weitere Höhenfestpunkte in Abständen von etwa 1 km eingeschaltet worden wären, die in zweckentsprechender Weise bezeichnet wurden; das Ergebnis dieser Arbeit ist veröffentlicht in dem angegebenen „Verzeichnis der an den Württ. Staatseisenbahnen angebrachten Höhenpunkte.“

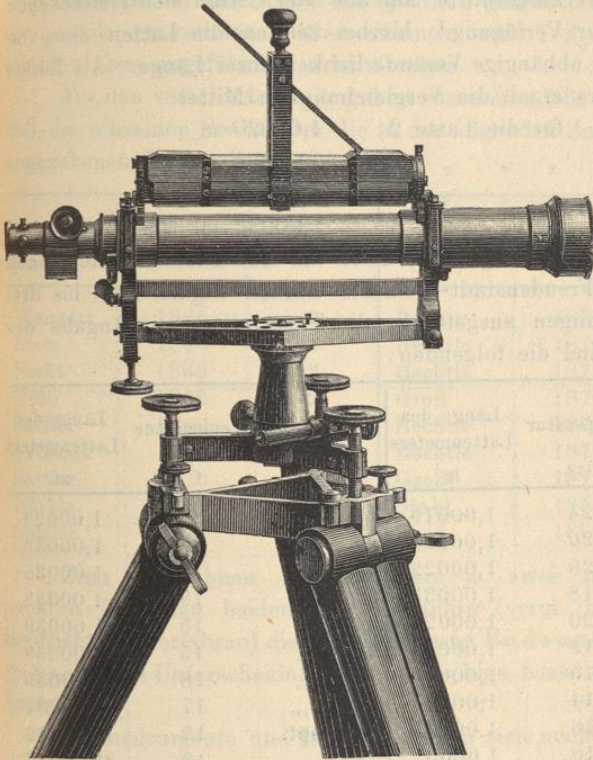
3. Der Nivellierapparat.

Das für die Zwecke des Präzisionsnivelements im Jahre 1868 in zwei Exemplaren angeschaffte Nivellierinstrument (Fig. 4) stammt aus der Werkstätte von J. KERN in Aarau; es besitzt ein um seine Längsachse in seinen Lagern drehbares und umlegbares Fernrohr mit 35facher Vergrößerung und einer Objektivöffnung von 35 mm. Die zum Schutz gegen Wärmestrahlung in ein mit Spiegelglas überdecktes Holzgehäuse eingeschlossene Libelle, deren Empfindlichkeit 3,5 Sekunden für die Pariser Linie betrug, läßt sich auf dem Fernrohr umsetzen. Um die Libelle bequem zum Einspielen bringen zu können, besitzt das Instrument außer den drei Fußschrauben eine Elevationsschraube.

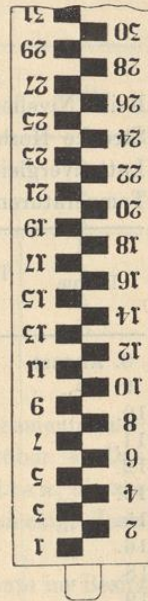
Ein zu Beginn der Messung vorhandenes Okularfadenmikrometer wurde bereits nach den Erfahrungen vom Sommer 1868 umgebaut, so daß vom Jahr 1869 an die Instrumente mit einem gewöhnlichen Diaphragma mit drei festen Horizontalfäden versehen waren.

An Nivellierlatten, die ebenfalls von J. KERN in Aarau geliefert wurden, kamen vier zur Verwendung, von denen zwei — mit 2 und 3 bezeichnet — bis zum Jahr 1872 und von da an zwei andere — mit A und B bezeichnete — in Benützung waren. Die Latten sind 3 m lang und endigen nach unten in einen eisernen Stollen; das Vertikalhalten durch den Meßgehilfen geschah mit Hilfe eines angehängten Senkels. Die Teilung der Latten — vergl.

Fig. 5¹ — ist eine schachbrettartige Zentimeterteilung, die von Zentimeter zu Zentimeter nach solchen beziffert ist. Bei sämtlichen Latten fällt der Nullpunkt der Teilung nicht mit ihrem Aufstellungspunkt (Stollenende) zusammen; der Abstand zwischen beiden, der



Figur 4.



Figur 5.

bei Benützung von zwei Latten oder einer Latte und eines gewöhnlichen, z. B. Taschenmaßstabs, zu berücksichtigen ist, betrug

bei Latte 2	25 mm
" " 3	27 mm
" " A	41 mm
" " B	44 mm.

Messungen zur Feststellung der Länge der Lattenmeter der verschiedenen Latten — sogen. Lattenvergleichen — wurden

¹ Die Fig. 5 verdankt der Verfasser Herrn Rechnungsrat FETZER bei der Generaldirektion der Kgl. Württ. Staatseisenbahnen.

während der Feldarbeit nur ausgeführt bei der im Jahre 1881 nivellierten Strecke Horb—Eutingen—Freudenstadt—Kniebis; für die sämtlichen anderen Strecken, die von 1868 bis 1878 nivelliert wurden, steht nur eine im Winter 1878/79 — also am Schluß der ganzen Arbeit — ausgeführte, auf alle vier Latten sich erstreckende Vergleichung zur Verfügung¹; hierbei zeigten die Latten eine von der Temperatur abhängige Veränderlichkeit ihrer Länge. Als Länge des Lattenmeters ergab die Vergleichung im Mittel

für die Latte 2	1,00020 m
„ „ „ 3	1,00025 m
„ „ „ A	1,00017 m
„ „ „ B	1,00033 m.

Beim Nivellement der im Jahre 1881 mit der Latte B gemessenen Strecke Horb—Freudenstadt—Kniebis wurden täglich zwei bis drei Lattenvergleichen ausgeführt; die Tagesmittel mit Angabe der Temperaturen sind die folgenden:

Datum	Temperatur C°	Länge des Lattenmeters m	Datum	Temperatur C°	Länge des Lattenmeters m
8. August	24	1,00019	23. August	22	1,00029
9. „	20	1,00020	24. „	17	1,00033
10. „	20	1,00022	25. „	17	1,00035
11. „	18	1,00033	26. „	19	1,00033
12. „	20	1,00025	27. „	15	1,00039
13. „	18	1,00031	29. „	15	1,00039
15. „	15	1,00034	30. „	18	1,00035
16. „	14	1,00035	31. „	17	1,00034
18. „	16	1,00034	1. Sept.	12	1,00042
19. „	18	1,00031	3. „	13	1,00046
22. „	20	1,00029	5. „	13	1,00050

Als mittlere Länge des Lattenmeters findet man 1,00033 m.

Eine Angabe darüber, welche Latte zu der jeweiligen Strecke verwendet wurde, findet sich in den Feldheften — mit Ausnahme bei den im Jahre 1881 geführten — nicht. Die von Professor SCHODER bei der Ausgleichung² gemachten Angaben stehen zum Teil

¹ Die im Jahre 1872 in Bern vorgenommene Vergleichung, deren Ergebnis im Generalbericht der Europäischen Gradmessung für das Jahr 1872, S. 73, mitgeteilt ist, kommt nicht in Betracht, da a. a. O. nur von der „Württembergischen Latte“ die Rede ist.

² Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Jahre 1879.

unter sich im Widerspruch; z. B. findet sich a. a. O. für die im Jahre 1869 nivellierten Strecken Ulm—Stuttgart und Ulm—Friedrichshafen die Latte 2 angegeben, obwohl beide Strecken zu gleicher Zeit und von zwei verschiedenen Beobachtern bearbeitet wurden.

Auch die in den Akten gelegentlich gemachten Angaben über die jeweils verwandten Latten stimmen zum Teil unter sich und mit den eben angeführten nicht überein.

Aus den verschiedenen Angaben zusammen läßt sich annehmen, daß die einzelnen Beobachter die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Latten benützt haben:

Beobachter	Jahr der Messung	Latte	Beobachter	Jahr der Messung	Latte
Weissert	1868	2	Dreher	1872	3
Diem	1868	3	Bechtle	1873	A
Fecht	1869	2	Bechtle	1874	A
Groß	1869	2	Groß	1874	B
Sattler	1869	3	Bechtle	1875	A
Fetscher	1870	3	Bechtle	1877	A
Sattler	1870	2	Groß	1877	B
Bürkle	1871	2	Stahl	1878	A
Sattler	1871	3	Groß	1881	B

Zum Bezeichnen der zwischen je zwei Instrumentstandpunkten liegenden beiden Wechsellpunkte (vergl. hierüber 4. Das Beobachtungsverfahren) dienten gußeiserne Bodenplatten, die zur gegenseitigen Unterscheidung eine viereckige bzw. dreieckige Form hatten.

Die Instrumente und Latten befinden sich noch heute im Besitz der Kgl. Generaldirektion der Württembergischen Staatseisenbahnen.

4. Das Beobachtungsverfahren und die Berechnung der Messungsergebnisse.

Das Verfahren bei der Messung war auf sämtlichen Strecken derart, daß von einem Beobachter mit einem Instrument und einer Latte zwei Nivellements gleichzeitig ausgeführt wurden; die beiden Nivellements, für welche die Instrumentstandpunkte dieselben sind, unterscheiden sich also nur in den Wechsellpunkten. Die beiden zwischen je zwei Standpunkten liegenden Wechsellpunkte wurden zur Unterscheidung — wie schon angedeutet — durch eine viereckige und eine dreieckige Bodenplatte bezeichnet.

Mit Ausnahme der im Jahre 1868 nivellierten Strecken wurde das Verfahren des Nivellierens aus der Mitte festgehalten; die Zielweite, die im allgemeinen rund 70 m betrug, wurde dabei mit Hilfe der beiden äußeren Horizontalfäden kontrolliert.

Die Untersuchung des Instruments in bezug auf die Parallelität zwischen Ziellinie und Libellenachse wurde täglich mindestens einmal vorgenommen, und ein unter Umständen vorhandener Ziellinienfehler seiner Größe nach bestimmt, so daß er bei den nicht mit entsprechender Zielweite nivellierten Zwischenpunkten berücksichtigt werden konnte.

Die Lattenablesungen, die mit Rücksicht auf die zeitraubenden Reduktionsrechnungen stets bei einspielender Libelle gemacht wurden, wurden für das auf die viereckige Bodenplatte sich beziehende Nivellement stets in zwei Fernrohrlagen ausgeführt, wobei die neue Fernrohrlage aus der vorhergehenden durch Drehen des Fernrohrs um seine Längsachse um 180 Grad hergestellt wurde. Bei dem auf die dreieckige Bodenplatte sich beziehenden Nivellement wurde nur in den Jahren 1868 und 1869 in zwei Fernrohrlagen gemessen. Abgelesen wurde an der Latte an allen drei Horizontalfäden, wobei jedoch die an den äußeren Fäden gemachten Ablesungen nur zur Kontrolle der Zielweite verwendet wurden, die einzelnen Höhenunterschiede also nur aus den Ablesungen am Mittelfaden abgeleitet wurden.

Das bei der Messung zur Verwendung gekommene Formular ist mit einem beliebig herausgegriffenen Beispiel das folgende:

Station Dornstetten—Freudenstadt. Dat. 25. Aug. 81. Nach mitt. Bltt. 125.

Instr.	Latte	M. unt.	Diff.	M. ob.	Diff.	Mittel	Höhe □	Höhe △	Bemerk.
267	561	38 0					646 32 10	646 32 40	
		71 6 33 6				71 60		645 60 80	△
		106 0 34 4							
	562	38 3		37 6					
		71 9 33 6		72 0 34 4		71 95	645 60 15		□
		106 3 34 4		105 6 33 6					
	562	87 3		86 6					
		120 3 33 0		120 4 33 8		120 35	646 80 50		□
		154 1 33 8		153 4 33 0					
	561	87 1							
		120 1 33 0				120 10		646 80 90	△
		153 9 33 8							

Die Berechnung der beiden, zu gleicher Zeit ausgeführten Nivellements wurde — wie das Formular andeutet — getrennt durchgeführt. Die Ermittlung der Höhenunterschiede aus den beiden Nivellements wurde derart vorgenommen, daß bei Messung des einen Nivellements in zwei und des andern in einer Fernrohrlage jenem das Gewicht 2 und diesem das Gewicht 1 beigelegt wurde; die Höhenunterschiede wurden demnach für die von 1869 an gemessenen Strecken aus $\frac{2 \square + \triangle}{3}$ abgeleitet.

Zur Kontrolle wurden die Höhen außer in den Feldebüchern noch getrennt in besonderen Heften berechnet; in beiden Fällen wurden die für die Kontrolle der Rechnung wertvollen Summenproben mit Hilfe der Rück- und Vorblicke nicht vorgenommen.

5. Die Ausgleichung des Nivellements.

Die Ausgleichung des Nivellements ist, wie schon in der Einleitung angegeben wurde, von Professor Dr. SCHODER vorgenommen worden und wurde im „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Jahre 1879“ veröffentlicht.

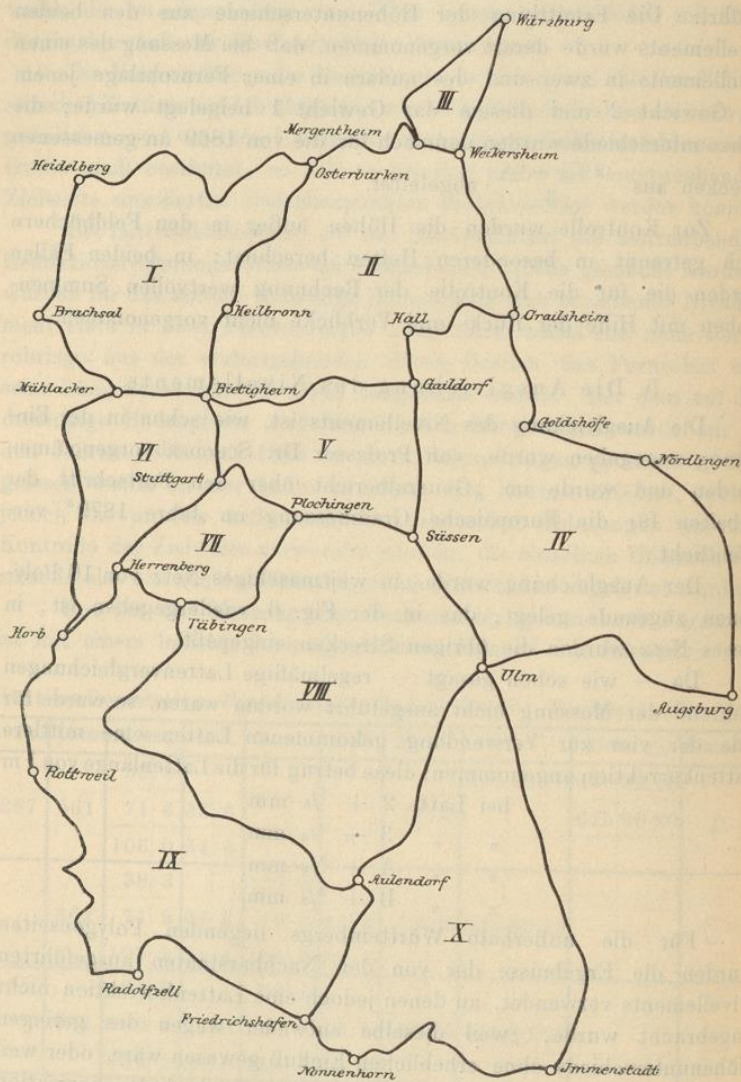
Der Ausgleichung wurde ein weitmaschiges Netz von 10 Polygonen zugrunde gelegt, das in der Fig. 6 wiedergegeben ist; in dieses Netz wurden die übrigen Strecken eingepaßt.

Da — wie schon gesagt — regelmäßige Lattenvergleichen während der Messung nicht ausgeführt worden waren, so wurde für jede der vier zur Verwendung gekommenen Latten eine mittlere Lattenkorrektur angenommen; diese betrug für die Lattenlänge von 1 m

bei Latte 2	+	$\frac{1}{5}$ mm
„ „ 3	+	$\frac{1}{4}$ mm
„ „ A	+	$\frac{1}{6}$ mm
„ „ B	+	$\frac{1}{3}$ mm.

Für die außerhalb Württembergs liegenden Polygonseiten wurden die Ergebnisse der von den Nachbarstaaten ausgeführten Nivellements verwendet, an denen jedoch eine Lattenkorrektur nicht angebracht wurde, „weil dieselbe entweder wegen des geringen Höhenunterschieds ohne erheblichen Einfluß gewesen wäre, oder weil bei der Berner Vergleichung 1872 die betreffende Lattenkorrektur (Bayern) = 0 gefunden worden war.“ Diese Begründung der Nichtanbringung einer Lattenkorrektur an den von den Präzisionsnivellements der Nachbarstaaten übernommenen Höhenunterschieden

ist nicht ganz einwandfrei; z. B. beträgt der Höhenunterschied der in der Hauptsache ¹ von Baden nivellierten Strecke Bruchsal—Heidel-



Figur 6.

¹ Die Strecke Bruchsal—Heidelberg, die einen Höhenunterschied von nur 2,5 m aufweist, wurde seitens des Geodätischen Instituts nivelliert.

berg—Osterburken — die Strecke trägt bei der Ausgleichung (s. u.) die Nummer 1 — rund 133,5 m, was einen in bezug auf Lattenkorrektion nicht eben geringen Höhenunterschied vorstellt. Der eigentliche Grund dieser Nichtanbringung einer Lattenkorrektion wird wohl besser darin zu suchen sein, daß bei den bis dahin badischer- und bayrischerseits ausgeführten Nivellements ebensowenig wie bei den württembergischen Nivellements Lattenvergleichen während der Messung ausgeführt worden waren. Wie weit die bei der württembergischen Ausgleichung von Baden und Bayern übernommenen Höhenunterschiede mit den bei den endgültigen Ausgleichungen dieser Staaten benützten Werten übereinstimmen, wird später im Zusammenhang bei der Besprechung der Messung gezeigt werden.

Die Ausgleichung des Netzes wurde nach der Art sogen. bedingter Beobachtungen vorgenommen, wobei entsprechend den 10 Polygonen 10 voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen zur Verfügung standen. Die Gewichte wurden gleich den Reziproken der Längen der nivellierten Strecken gesetzt.

Der Vollständigkeit halber und zum Vergleich mit denjenigen Werten, die bei der unten vorgenommenen Neuausgleichung Verwendung fanden, sind die der SCHODER'schen Ausgleichung zugrunde gelegten Werte hier angegeben (s. Tabellen S. 18—22).

Der aus der Ausgleichung sich ergebende mittlere Fehler für die Strecke von einem Kilometer ist $\pm 3,09$ mm.

Mit den bei der Ausgleichung gefundenen Verbesserungen wurden die folgenden verbesserten Werte der einzelnen Höhenunterschiede berechnet:

1. Bruchsal—Osterburken	133,4370
2. Osterburken—Bietigheim	27,4359
3. Bietigheim—Mühlacker	20,1822
4. Mühlacker—Bruchsal	126,1833
5. Osterburken—Mergentheim	43,0661
6. Mergentheim—Weikersheim	29,2667
7. Weikersheim—Crailsheim	175,5450
8. Crailsheim—Gaildorf	81,8706
9. Gaildorf—Bietigheim	107,3109
10. Mergentheim—Würzburg	12,1672
11. Würzburg—Weikersheim	41,4339
12. Nördlingen—Augsburg—Ulm	48,1245
13. Ulm—Süßen	111,9573
14. Süßen—Gaildorf	37,1387

(Fortsetzung S. 23.)

I. Bruchsal—Osterburken.

No.	Länge km	Latte	Strecke	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h +	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h m
1	114	bad.	Bruchsal—Osterburken	133,4649	—	133,4649	—	—	—
2	49	A	Osterburken—Heilbronn	—	—	—	90,2107	15,0	90,2257
3	29	2	Heilbronn—Bietigheim	62,7678	12,5	62,7803	—	—	—
4	23	A	Bietigheim—Mühlacker	20,1743	3,4	20,1777	—	—	—
5	32	A	Mühlacker—Bruchsal	—	—	—	126,1545	21,0	126,1755
6	247	km		—	—	216,4229	—	—	216,4012

Widerspruch: 216,4229 — 216,4012 = 217 dmm.

II. Bietigheim—Crailsheim.

2	29	2	Bietigheim—Heilbronn	—	—	—	62,7678	12,5	62,7803
3	49	A	Heilbronn—Osterburken	—	—	—	—	—	—
4	39	bad.	Osterburken—Mergentheim	90,2107	15,0	90,2257	43,0517	—	43,0517
5	11	2	Mergentheim—Weikersheim	29,2645	5,8	29,2703	—	—	—
6	48	2	Weikersheim—Crailsheim	175,5275	35,1	175,5626	—	—	—
7	34	2	Crailsheim—Hall	—	—	—	103,6113	20,7	103,6320
8	17	A	Hall—Gaildorf	21,7697	3,6	21,7733	—	—	—
9	60	A	Gaildorf—Bietigheim	—	—	—	107,3068	17,9	107,3247
10	287	km		—	—	316,8319	—	—	316,7887

Widerspruch: 316,8319 — 316,7887 = 432 dmm.

III. Mergentheim — Würzburg.

No.	Länge km	Latte	Strecke	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h +	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h
10	52	bad.	Mergentheim—Würzburg	—	—	—	12,1651	—	12,1651
11	41	2	Würzburg—Weikersheim	41,4272	8,3	41,4355	—	—	—
6	11	2	Weikersheim—Mergentheim	—	—	—	29,2645	5,8	29,2703
	104	km		—	—	41,4355	—	—	41,4354

Widerspruch: 41,4355 — 41,4354 = 1 dmm.

IV. Crailsheim — Ulm.

8	17	A	Gaildorf—Hall	—	—	—	21,7697	3,6	21,7733
30	34	2	Hall—Crailsheim	103,6113	20,7	103,6320	—	—	—
31	30	2	Crailsheim—Goldshöfe	59,5463	11,9	59,5582	—	—	—
32	33	2	Goldshöfe—Nördlingen	—	—	—	40,4407	8,1	40,4488
12	155	bayr.	Nördlingen—Augsburg—Ulm	48,1451	—	48,1451	—	—	—
13	44	2	Ulm—Süßen	—	—	—	111,9445	22,4	111,9669
14	48	A	Süßen—Gaildorf	—	—	—	37,1548	6,2	37,1610
	361	km		—	—	211,3353	—	—	211,3500

Widerspruch: 211,3353 — 211,3500 = — 147 dmm.

2*

V. Stuttgart—Gaildorf.

No.	Länge km	Latte	Strecke	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h +	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h
9	60	A	Bietigheim—Gaildorf	107,3068	17,9	107,3247	—	—	—
14	48	A	Gaildorf—Süßen	37,1548	6,2	37,1610	—	—	—
15	27	2	Süßen—Plochingen	—	—	—	111,2682	22,5	111,2907
16	23	2	Plochingen—Stuttgart	—	—	—	3,8850	0,8	3,8858
17	23	2	Stuttgart—Bietigheim	—	—	—	29,2565	5,8	29,2623
	181 km			—	—	144,4857	—	—	144,4388

Widerspruch: 144,4857 — 144,4388 = 469 dmm.

VL. Mühlacker—Horb.

3	23	A	Mühlacker—Bietigheim	—	—	—	20,1743	3,4	20,1777
17	23	2	Bietigheim—Stuttgart	—	—	29,2623	—	—	—
18	34	2	Stuttgart—Herrenberg	29,2565	5,8	178,6519	—	—	—
19	25	2	Herrenberg—Horb	178,6162	35,7	—	—	—	—
20	82	A	Horb—Mühlacker	—	—	—	36,9518	7,4	36,9592
	187 km			—	—	207,9142	150,7140	25,1	150,7391
				—	—	—	—	—	207,8760

Widerspruch: 207,9142 — 207,8760 = 382 dmm.

VII. Stuttgart—Tübingen.

No.	Länge km	Latte	Strecke	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h +	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h
						m			m
16	23	2	Stuttgart—Plochingen	3,8850	0,8	3,8858	—	—	—
21	49	3	Plochingen—Tübingen	68,4617	17,1	68,4788	—	—	—
22	20	3	Tübingen—Herrenberg	106,2837	26,6	106,3103	—	—	—
18	34	2	Herrenberg—Stuttgart	—	—	—	178,6162	35,7	178,6519
	126	km		—	—	178,6749	—	—	178,6519

Widerspruch: 178,6749 — 178,6519 = 230 dmm.

VIII. Tübingen—Ulm.

21	49	3	Tübingen—Plochingen	—	—	—	68,4617	17,1	68,4788
15	27	2	Plochingen—Süßen	111,2682	22,5	111,2907	—	—	—
13	44	2	Süßen—Ulm	111,9445	23,4	111,9669	—	—	—
23	62	2	Ulm—Aulendorf	70,4358	14,1	70,4499	—	—	—
24	131	A	Aulendorf—Tübingen	—	—	—	225,1525	37,5	225,1900
	313	km		—	—	293,7075	—	—	293,6688

Widerspruch: 293,7075 — 293,6688 = 387 dmm.

IX. Tübingen—Friedrichshafen.

No.	Länge km	Latte	Strecke	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h +	Gemessener Höhen- unterschied m	Latten- korr. in mm	h m
19	25	2	Horb—Herrenberg	36,9518	7,4	36,9592	—	—	—
22	20	3	Herrenberg—Tübingen	—	—	—	106,2837	26,6	106,3103
24	131	A	Tübingen—Aulendorf	225,1525	37,5	225,1900	—	—	—
25	41	2	Aulendorf—Friedrichshafen	—	—	—	143,3628	28,7	143,3915
26	64	preuß.	Friedrichshafen—Radolfzell	—	—	—	6,0121	—	6,0121
27	77	B	Radolfzell—Rottweil	159,6530	53,2	159,7062	—	—	—
27	43	3	Rottweil—Horb	—	—	—	166,0902	41,5	166,1317
	401	km		—	—	421,8554	—	—	421,8456

Widerspruch: 421,8554 — 421,8456 = 98 dmm.

X. Ulm—Friedrichshafen.

28	186	bayr.	Ulm—Nonnenhorn	—	—	—	58,2719	—	58,2719
29	17	2	Nonnenhorn—Friedrichshafen	—	—	—	14,7150	2,9	14,7179
25	41	2	Friedrichshafen—Aulendorf	143,3628	28,7	143,3915	—	—	—
23	62	2	Aulendorf—Ulm	—	—	—	70,4358	14,1	70,4499
	306	km		—	—	143,3915	—	—	143,4397

Widerspruch: 143,3915 — 143,4397 = — 482 dmm.

(Fortsetzung von S. 17.)

15. Süßen—Plochingen	111,2973
16. Plochingen—Stuttgart	3,8863
17. Bietigheim—Stuttgart	29,2660
18. Stuttgart—Herrenberg	178,6567
19. Herrenberg—Horb	36,9654
20. Horb—Mühlacker	150,7751
21. Plochingen—Tübingen	68,4678
22. Tübingen—Herrenberg	106,3026
23. Ulm—Aulendorf	70,4244
24. Aulendorf—Tübingen	225,2112
25. Aulendorf—Friedrichshafen	143,4017
26. Friedrichshafen—Radolfzell	6,0242
27. Radolfzell—Horb	6,4481
28. Ulm—Nonnenhorn	58,2604
29. Nonnenhorn—Friedrichshafen	14,7169
30. Crailsheim—Goldshöfe	59,5542
31. Goldshöfe—Nördlingen	40,4533

6. Der Anschluß an Normal-Null.

Die ersten absoluten Höhen wurden von Professor SCHODER im Anschluß an die Ausgleichung berechnet; als Ausgangspunkte dienten dabei die Anschlußpunkte an das bayrische Präzisionsnivellement in Ulm, Nördlingen und Nonnenhorn. Die bayrischen Höhen für diese drei Punkte, die sich infolge Anschlusses in Koburg an ein vom Geodätischen Institut ausgeführtes Nivellement auf Normal-Null bezogen, waren¹:

Ulm H.M. am Münster	478,5434
Nonnenhorn G.P. am Zollhaus	420,2772
Nördlingen H.M. am Bahnhof	430,3934

Legt man für einen dieser drei Punkte, z. B. Ulm, die bayrische Höhe zugrunde, und bestimmt mit den ausgeglichenen württembergischen Höhenunterschieden die Höhen der beiden andern, so erhält man:

	Bayern	Württ.	Diff.
Ulm	478,5434	478,5434	+ 0,0000
Nonnenhorn	420,2772	420,2830	— 0,0058
Nördlingen	430,3934	430,4189	— 0,0255

Die entstehenden Differenzen wurden gemittelt und damit für die drei Punkte die Höhen berechnet, für welche sich ergab:

	Bayern	Württ.	Diff.
Ulm	478,5434	478,5330	+ 0,0104
Nonnenhorn	420,2772	420,2726	+ 0,0046
Nördlingen	430,3934	430,4085	— 0,0151

¹ Vergl. Bauernfeind, Das bayrische Präzisionsnivellement. I.—V. Mittheilung.

Unter Zugrundelegung der so ermittelten Höhen dieser drei Punkte wurden die Höhen der Eckpunkte der 10 Polygone berechnet und gefunden:

Aulendorf H.M. . . .	548,9574	Nördlingen H.M. . .	430,4085
Bietigheim H.M. . . .	222,1261	Nonnenhorn G.P. . .	420,2726
Bruchsal H.M. . . .	116,1250	Osterburken H.M. . .	249,5620
Crailsheim H.M. . . .	411,3076	Plochingen H.M. . .	255,2784
Friedrichshafen H.M.	405,5557	Radolfzell H.M. . .	399,5315
Gaildorf G.P. . . .	329,4370	Stuttgart H.M. . . .	251,3921
Goldshöfe H.M. . . .	470,8618	Süßen H.M.	366,5757
Herrenberg G.P. . . .	430,0488	Tübingen H.M. . . .	323,7462
Horb H.M.	393,0834	Ulm H.M.	478,5330
Mergentheim H.M. . .	206,4959	Weikersheim G.P. . .	235,7626
Mühlacker H.M. . . .	242,3083	Würzburg H.M. . . .	194,3287

Nachdem im Jahre 1879 von der Kgl. Preußischen Landesaufnahme der „Normal-Höhenpunkt für das Königreich Preußen“ festgelegt worden war, und die von dieser Behörde beabsichtigten Nivellements im südwestlichen Teile Deutschlands — besonders in Elsaß-Lothringen — in den Jahren 1877, 1878 und 1881 ausgeführt worden waren, mußte es das Bestreben sein, das Netz des württembergischen Präzisionsnivellements an dasjenige der Kgl. Preußischen Landesaufnahme anzuschließen. Zu diesem Zweck lag ein unmittelbarer Anschluß vor, indem preußischerseits durch das im Jahre 1881 ausgeführte Nivellement der Strecke Germersheim—Bruchsal—Bretten an Württemberg angeschlossen wurde. Ein weiterer Anschluß wurde dadurch erreicht, daß von Württemberg im Jahre 1881 das Nivellement Horb—Freudenstadt—Kniebis—Alexanderschanze ausgeführt wurde, das in dem letzteren Punkte mit dem von der Preuß. Landesaufnahme in demselben Jahr und zu demselben Zweck gefertigten Nivellement der Linie Straßburg—Appenweier—Alexanderschanze verbunden wurde.

Der Höhenunterschied Horb—Alexanderschanze wurde gemessen zu 574,706 m; nach Berücksichtigung der Lattenkorrektur¹ findet man dafür 574,896 m; damit und mit der Höhe von Horb 393,083 m erhält man für Alexanderschanze 967,979 m, und es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

	Preußen	Württ.	Diff.
Bruchsal H.M. am Bahnhof	116,224	116,125	+ 0,099
Alexanderschanze Niv. Bolzen 6649 . .	968,254	967,979	+ 0,275

Mit Rücksicht auf den großen Unterschied von 0,176 m zwischen den beiden Anschlußdifferenzen entschloß sich Professor SCHODER, den

¹ Die Länge des Lattenmeters betrug (vergl. S. 12) 1,00033 m.

Punkt Alexanderschanze als Anschlußpunkt aufzugeben, und indirekt mit Benützung des von Bayern bestimmten Höhenunterschieds Würzburg—Kahl in letzterem Punkt nochmals an das Netz der Preuß. Landesaufnahme anzuschließen. Die so ermittelte Anschlußdifferenz in Kahl betrug $+ 0,111$ m. Das Mittel der beiden Anschlußdifferenzen in Bruchsal und Kahl beträgt $+ 0,105$ m; diese Korrektur wurde an den früher ermittelten Höhen des württembergischen Nivellements angebracht und so die endgültigen Höhen über Normal-Null erhalten. Es sind dies die Höhen, die der schon erwähnten „Publikation der Kgl. Württ. Kommission für Europäische Gradmessung“ zugrunde gelegt sind. Zum Vergleich mit den weiter unten gefundenen Werten werden die Höhen der Polygoneckpunkte hier angegeben:

Aulendorf H.M. . . .	549,062	Nördlingen H.M. . . .	430,514
Bietigheim H.M. . . .	222,231	Nonnenhorn G.P. . . .	420,378
Bruchsal H.M. . . .	116,230	Osterburken H.M. . . .	249,667
Crailsheim H.M. . . .	411,413	Plochingen H.M. . . .	255,383
Friedrichshafen H.M. . . .	405,661	Radolfzell H.M. . . .	399,637
Gaildorf G.P. . . .	329,542	Stuttgart H.M. . . .	251,497
Goldshöfe H.M. . . .	470,967	Süßen H.M. . . .	366,681
Herrenberg G.P. . . .	430,154	Tübingen H.M. . . .	323,851
Horb H.M. . . .	393,188	Ulm H.M. . . .	478,638
Mergentheim H.M. . . .	206,601	Weikersheim G.P. . . .	235,868
Mühlacker H.M. . . .	242,413	Würzburg H.M. . . .	194,434

Mit den Netzen der badischen und bayrischen Präzisionsnivelements hat das Netz des württembergischen Präzisionsnivelements zunächst 9 bzw. 6, zusammen 15 Punkte gemeinsam. In der folgenden Zusammenstellung sind für diese Punkte die endgültigen württembergischen und badischen bzw. bayrischen Höhen angegeben; die ersteren sind der „Publikation der Kgl. Württ. Kommission für Europäische Gradmessung“ entnommen; die badischen Höhen sind enthalten in „Die Großh. Badischen Hauptnivelements mit den Anschlüssen an die Nachbarstaaten. Herausgegeben von der Großh. Oberdirektion des Wasser- und Straßenbaues. Karlsruhe 1885“; die bayrischen Höhen sind niedergelegt in „Veröffentlichung der Kgl. Bayrischen Kommission für die internationale Erdmessung. Das Präzisionsnivelement in Bayern rechts des Rheins. Ausgeführt unter Leitung von Dr. KARL MAX v. BAUERNFEIND. Endgültig bearbeitet von Dr. KARL OERTEL. München 1893.“

	Württ.	Baden	Bayern	Diff. mm
Jagstfeld G.P.	155,506	155,520	—	+ 14
Mühlacker H.M.	242,413	242,474	—	+ 61

	Württ.	Baden	Bayern	Diff. mm
Pforzheim H.M.	282,257	282,328	—	+ 71
Alexanderschanze (Kniebis) H.M.	968,087	968,222	—	+ 135
Hausach H.M.	243,392	243,473	—	+ 81
Villingen G.P.	704,582	704,692	—	+ 110
Immendingen G.P.	658,001	658,188	—	+ 187
Sigmaringen H.M.	574,102	574,284	—	+ 182
Mengen H.M.	561,689	561,866	—	+ 177
Kreßbronn G.P.	398,152	—	398,319	+ 167
Rötenbach H.M.	699,573	—	699,850	+ 277
Memmingen H.M.	599,082	—	599,218	+ 136
Ulm H.M.	478,638	—	478,777	+ 139
Nördlingen H.M.	430,514	—	430,618	+ 104
Crailsheim H.M.	411,413	—	411,570	+ 157

Zu diesen Zahlen ist noch zu bemerken, daß bei der Bearbeitung des bayrischen Netzes die sogen. orthometrische Korrektion berücksichtigt wurde, bei Baden und Württemberg dagegen nicht.

Der Unterschied zwischen den Differenzen ist sowohl bei den badi- schen als auch bei den bayrischen Anschlußpunkten teilweise erheblich.

II. Untersuchung der Beobachtungsfehler und der Genauigkeit der Messung.

1. Einleitung.

Eine eingehende Untersuchung der Beobachtungsfehler und der Genauigkeit des württembergischen Präzisionsnivelements wurde offenbar seitens des Bearbeiters nicht angestellt; man findet darüber weder in den Akten, noch in der schon angegebenen „Publikation der Kgl. Württ. Kommission für die Europäische Gradmessung“, noch in der im Jahre 1879 veröffentlichten Ausgleichung irgendwelche Angaben. Bei der Ausgleichung wurde nur der mittlere Fehler für die Strecke von 1 km berechnet; der dabei gefundene Wert beträgt $\pm 3,09$ mm. Dieser — im Verhältnis zu den in den Nachbarländern gefundenen Werten — große mittlere Fehler wird allgemein mit den Terrainverhältnissen Württembergs und mit der in den Latten liegenden Unsicherheit entschuldigt.

Die bei weitaus den meisten Strecken fast vollständige Unkenntnis der wirklichen Länge des Lattenmeters — es läßt sich, wie schon oben bemerkt wurde, nicht einmal für jede Strecke sicher feststellen, mit welcher Latte sie nivelliert wurde —, der vielfache Wechsel im Beobachterpersonal und eine erste Durchsicht des zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials lassen vermuten, daß

die Genauigkeit des Nivellements keine einheitliche ist. Bei der im folgenden gegebenen Untersuchung soll deshalb der Versuch gemacht werden, die Beobachtungsfehler und die Genauigkeit für jede Strecke für sich zu ermitteln.

Der beabsichtigten Untersuchung möge eine Besprechung der bei der im Jahre 1879 ausgeführten Ausgleichung zur Verwendung gekommenen Werte vorausgehen.

2. Untersuchung der bei der Ausgleichung zur Verwendung gekommenen Werte.

Zunächst möge in bezug auf die an den unmittelbar gemessenen Höhenunterschieden angebrachten Lattenkorrekturen nochmals festgestellt sein, daß einerseits die für die vier Latten benützten Längen der Lattenmeter nur genäherte Mittelwerte vorstellen, und daß andererseits die Angaben über die jeweils benützte Latte nicht vollständig einwandfrei sind, sich auch nicht auf Grund urkundlicher Aufzeichnungen prüfen lassen.

Was die in der Spalte „Gemessener Höhenunterschied“ (vergl. S. 18 und ff.) angegebenen Zahlenwerte betrifft, so mögen hier diejenigen der von den Nachbarstaaten benützten Strecken mit den in den endgültigen Veröffentlichungen dieser Staaten¹ — Baden und Bayern — angegebenen unausgeglichenen Werten verglichen werden; dabei möge daran erinnert werden, daß bei diesen württembergischerseits benützten Werten keine Lattenkorrektur angebracht wurde. Die betreffenden Strecken sind:

	Württ. 1879	Baden 1885 ²	Diff.
Bruchsal—Osterburken . . .	133,465	133,457	— 8 mm
Osterburken—Mergentheim . .	43,052	—	—
Mergentheim—Würzburg . . .	12,165	—	—
Friedrichshafen—Radolfzell . .	6,012	6,016 ³	+ 4 mm

¹ An Veröffentlichungen dieser Art kommen die beiden folgenden in Betracht:

1. Die Großh. Badischen Hauptnivellements mit den Anschlüssen an die Nachbarstaaten. Herausgegeben von der Großh. Oberdirektion des Wasser- und Straßenbaues. Karlsruhe 1885.

2. Veröffentlichung der Kgl. Bayrischen Kommission für die internationale Erdmessung. Das Präzisionsnivellement in Bayern rechts des Rheins. Ausgeführt unter Leitung von Dr. Carl Max v. Bauernfeind. Endgültig bearbeitet von Dr. Carl Oertel. München 1893.

² Die Höhenunterschiede Osterburken—Mergentheim und Mergentheim—Würzburg sind in dem badischen „Hauptnivellement“ nicht enthalten.

³ Dieser Höhenunterschied wurde durch das Geod. Institut bestimmt; siehe badisches „Hauptnivellement“ S. 24.

	Württ. 1879	Bayern 1893	Diff.
Nördlingen—Ulm	48,145	48,144	— 1 mm
Ulm—Nonnenhorn	58,272	58,281	+ 9 mm

Von den so gefundenen Differenzen würde diejenige von 8 mm bei der Strecke Bruchsal—Osterburken den im Polygon I auftretenden Widerspruch (vergl. S. 18) verkleinern; diejenige von 4 mm bei der Strecke Friedrichshafen—Radolfzell würde den Widerspruch von Polygon IX ebenfalls verkleinern; diejenige endlich von 9 mm bei der Strecke Ulm—Nonnenhorn würde den Widerspruch des Polygons X vergrößern.

Wie schon erwähnt, wurden bei dem württembergischen Nivellement rund 450 km doppelt und rund 70 km dreifach nivelliert; aus den bei der Ausgleichung gemachten Angaben ist nicht ohne weiteres ersichtlich, welche der Messungen verwendet worden ist, oder ob das Mittel aus diesen als endgültiger Wert angenommen wurde. In der folgenden Zusammenstellung, in der hauptsächlich diejenigen Strecken aufgenommen sind, die bei der nachfolgenden Neuausgleichung benützt werden, sind die bei der Ausgleichung benützten unausgeglichenen Höhenunterschiede h und die den Feld- und Berechnungsheften entnommenen h' nebeneinander gestellt.

Strecke	Bei der Ausgleichung verwendet		Gemessen im Jahr	Den Feldheften entnommen	
	Latte	h		Latte	h'
Heilbronn—Bietigheim	2	62,768	1868	2	—
Bietigheim—Mühlacker	A	20,174	1877	A	62,824
Mühlacker—Bruchsal	A	126,155	1869	2	20,171
			1877	A	20,172
			1869	2	126,159
			1877	A	126,118
Crailsheim—Hall	2	103,611	1878	A	126,155
			1868	2	—
Hall—Gaildorf	A	21,770	1877	A	103,658
Gaildorf—Bietigheim	A	107,307	1873	A	21,770
Crailsheim—Goldshöfe	2	59,546	1873	A	107,301
			1868	3	—
Goldshöfe—Nördlingen	2	40,441	1877	A	59,533
			1869	3	40,441
			1878	A	40,453
Ulm—Süßen	2	111,945	1869	2 u. 3	111,945
Süßen—Gaildorf	A	37,155	1873	A	37,163
Süßen—Plochingen	2	111,268	1869	2	111,262

Strecke	Bei der Ausgleichung verwendet		Ge- messen im Jahr	Den Feldheften entnommen	
	Latte	b		Latte	h'
Plochingen—Stuttgart	2	3,885	1869	2	3,885
Stuttgart—Bietigheim	2	29,257	1869	2	29,257
			1868	2	—
Stuttgart—Herrenberg	2	178,616	1871	2	178,616
Herrenberg—Horb	2	36,952	1871	2	36,950
Horb—Mühlacker	A	150,714	1875	A	150,714
			1878	A	150,705
Plochingen—Tübingen	3	68,462	1870	3	68,462
Tübingen—Herrenberg	3	106,284	1871	3	106,276
Ulm—Aulendorf	2	70,436	1869	3	70,438
Aulendorf—Tübingen	A	225,153	1874	A	225,166
Aulendorf—Friedrichshafen . .	2	143,363	1869	3	143,363
Radolfzell—Rottweil	B	159,653	1874	A	—
Rottweil—Horb	3	166,090	1870	3	166,090
Nonnenhorn—Friedrichshafen .	2	14,715	1869	3	14,715

In dieser Zusammenstellung sind die im Jahre 1868 gemessenen Höhenunterschiede und der Höhenunterschied der Strecke Radolfzell—Rottweil nicht angegeben; es lassen sich diese nicht mit genügender Sicherheit den Aufzeichnungen entnehmen. Der Grund hierfür liegt bei den im Jahre 1868 ausgeführten Messungen darin, daß zu dieser Zeit die Anschlußpunkte nicht genügend beschrieben sind; die Glaspunkte wurden zum Teil erst im Jahre 1869 und die eisernen Höhenmarken erst im Jahre 1877 angebracht. Bei der Strecke Radolfzell—Rottweil ist der Anschluß an die badische Höhenmarke in Radolfzell aus den Aufzeichnungen nicht ersichtlich.

Die Zusammenstellung zeigt, daß bei den Strecken Heilbronn—Bietigheim, Crailsheim—Hall, Crailsheim—Goldshöfe, Goldshöfe—Nördlingen und Horb—Mühlacker die in späteren Jahren ausgeführten Wiederholungsmessungen zur Ausgleichung offenbar nicht benützt wurden; es geht dies einerseits aus den Höhenunterschieden, andererseits aus den Lattenangaben hervor. Bei der Strecke Mühlacker—Bruchsal wurde offenbar nur die Messung von 1878 benützt.

Läßt man bei den vier Strecken Heilbronn—Bietigheim, Crailsheim—Hall, Crailsheim—Goldshöfe und Goldshöfe—Nördlingen die in den Jahren 1868 und 1869 ausgeführten Messungen¹ fallen und verwendet nur die in späteren Jahren ausgeführten, so findet man,

¹ Die 1868 ausgeführten Nivellements müssen wohl mehr oder weniger als Versuchsmessungen angesehen werden.

wenn man noch bei der Strecke Mühlacker—Bruchsal das Mittel aus den Messungen von 1877 und 1878 und ebenso bei der Strecke Horb—Mühlacker das Mittel aus denen von 1875 und 1878 annimmt, für die Widersprüche in den Polygonen I, II und IV

$$w_1 = +91 \text{ mm } (+22) \quad w_2 = -54 \text{ mm } (+43) \quad w_4 = +2 \text{ mm } (-15).$$

Vergleicht man die so gefundenen Widersprüche mit den in Klammer beigesetzten Werten der SCHODER'schen Ausgleichung, so zeigt sich, daß in zwei Fällen eine Vergrößerung und in einem Fall eine Verkleinerung der absoluten Werte stattfindet.

Die bei der Ausgleichung zweifellos unrichtige Angabe der Latte — Latte 2 statt 3 — für die Strecken Ulm—Aulendorf und Aulendorf—Friedrichshafen ruft keine wesentliche Änderung der betroffenen Polygonwidersprüche hervor, da die für die Ausgleichung angenommenen Lattenkorrekturen¹ für die Latten 2 und 3 nahezu übereinstimmen.

Nimmt man, im Gegensatz zu der Ausgleichung für die Strecke Radolfzell—Rottweil, statt der Latte B die Latte A an (vergl. die Zusammenstellung Seite 13), so erhält man infolge des Unterschieds in den angenommenen Lattenkorrekturen¹ beim Polygon IX an Stelle des Widerspruchs von +10 mm bei der Ausgleichung den neuen Widerspruch von —17 mm.

Die Gewichte wurden bei der Ausgleichung kurzweg umgekehrt proportional der Länge der nivellierten Strecke gesetzt; es ist dies unverständlich, nachdem Professor SCHODER selbst auf die „in den Latten liegende Unsicherheit“ hingewiesen hat, und nachdem von anderer Seite² mit Erfolg der Versuch gemacht worden war, bei der Gewichtsbestimmung außer dem unregelmäßigen Nivellierfehler auch den besonders durch eine unrichtige Lattenlänge hervorgerufenen regelmäßigen Fehler zu berücksichtigen.

Wie im vorstehenden mehrfach angedeutet wurde, ist es nicht möglich die Lattenkorrekturen für die einzelnen Strecken einwandfrei anzugeben; im folgenden wird deshalb auf das Anbringen von Lattenkorrekturen ganz verzichtet werden; die Hauptaufgabe wird daher zunächst in der Ermittlung von Gewichten bestehen, bei denen insbesondere der durch eine unrichtige Lattenlänge hervorgerufene Fehler zu berücksichtigen sein wird.

¹ Die Lattenkorrekturen für 1 m Länge sind

Latte 2	0,20 mm	Latte A	0,17 mm
„ 3	0,25 mm	„ B	0,33 mm

² Vergl. Ch. A. Vogler, Zur Untersuchung der Beobachtungsfehler geometrischer Nivellements usw. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1877, S. 81.

3. Einfluß der normalen Änderung der Schwerkraft auf das württembergische Präzisionsnivellement.

Infolge der Veränderung der Schwerkraft mit der geographischen Breite hat man an den durch Nivellement bestimmten Höhenunterschieden die sogenannte sphäroidische oder orthometrische Korrektur σ anzubringen, die man berechnen kann auf Grund der Gleichung

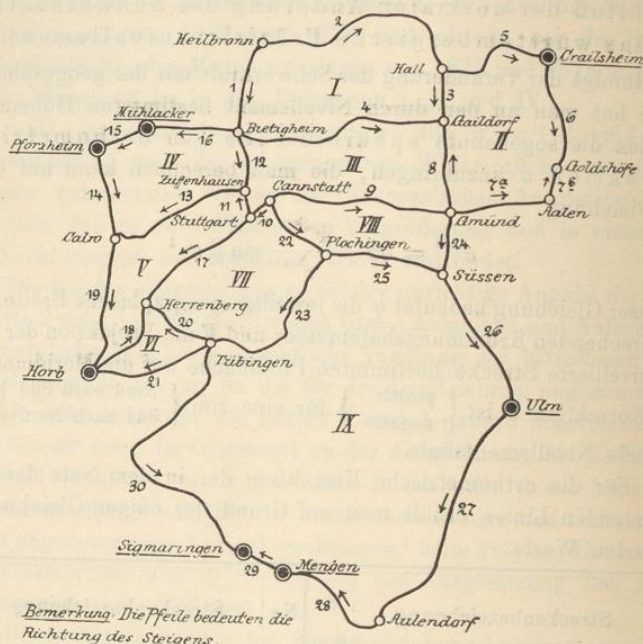
$$\sigma^{\text{mm}} = 5310 \frac{F^{\text{qkm}}}{r^{\text{km}}} \sin 2\varphi.^1$$

In dieser Gleichung bedeutet φ die jeweilige geographische Breite, r den entsprechenden Krümmungshalbmesser und F die Projektion der durch die nivellierte Strecke bestimmten Profilfläche auf die Meridianebene. Die Korrektur σ ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ für eine von $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nord nach Süd} \\ \text{Süd nach Nord} \end{array} \right\}$ verlaufende Nivellementsline.

Für die orthometrische Korrektur der in dem Netz der Fig. 7 auftretenden Linien erhält man auf Grund der obigen Gleichung die folgenden Werte:

No.	Streckenbezeichnung	σ mm	No.	Streckenbezeichnung	σ mm
1	Bietigheim—Heilbronn . .	3	16	Bietigheim—Mühlacker .	0
2	Hall—Heilbronn	1	17	Herrenberg—Stuttgart .	7
3	Gaildorf—Hall	3	18	Horb—Herrenberg	6
4	Bietigheim—Gaildorf . .	1	19	Horb—Calw	10
5	Hall—Crailsheim	1	20	Tübingen—Herrenberg .	3
6	Goldshöfe—Crailsheim . .	10	21	Horb—Tübingen	2
7	Gmünd—Goldshöfe	4	22	Plochingen—Cannstatt .	2
8	Gmünd—Gaildorf	8	23	Tübingen—Plochingen .	6
9	Cannstatt—Gmünd	0	24	Süßen—Gmünd	5
10	Stuttgart—Cannstatt . .	0	25	Süßen—Plochingen . . .	1
11	Stuttgart—Zuffenhausen .	1	26	Ulm—Süßen	12
12	Zuffenhausen—Bietigheim	3	27	Aulendorf—Ulm	21
13	Calw—Zuffenhausen . . .	4	28	Aulendorf—Mengen . . .	5
14	Calw—Pforzheim	5	29	Mengen—Sigmaringen . .	2
15	Pforzheim—Mühlacker . .	1	30	Sigmaringen—Tübingen .	21

¹ Vergl. F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. II. Teil. 7. Kapitel. Leipzig 1884.



Figur 7.

Mit diesen Werten findet man für die sphäroidischen Schlußfehler der neun Polygone des Nivellementsnetzes der Fig. 7

Polygon	Schlußfehler mm	Polygon	Schlußfehler mm
I	+ 2	VI	— 1
II	+ 2	VII	— 2
III	+ 3	VIII	+ 2
IV	+ 1	IX	± 0
V	± 0		

Es sind dies durchweg kleine Größen, die mit Rücksicht auf die Unsicherheit bei der Ermittlung der gemessenen Höhenunterschiede aus den Feldaufzeichnungen und die Unkenntnis der jeweiligen Länge des Lattenmeters keine Rolle spielen. Die orthometrische Korrektur wurde deshalb im folgenden nicht berücksichtigt; es erscheint dies auch gerechtfertigt, wenn man beachtet,

daß das vorliegende Nivellement durchaus nicht als Präzisions-nivellement angesprochen werden kann.

4. Allgemeines über die bei geometrischen Nivellements auftretenden Fehler.

Bei der Betrachtung der bei einem Präzisionsnivellement auftretenden Fehler kann man von den Instrumentalfehlern absehen, weil einerseits diese Fehler — insbesondere der Ziellinienfehler — durch z. B. täglich ausgeführte Untersuchungen bezw. Berichtigungen des Instruments möglichst klein gehalten werden, und weil andererseits mit genügender Sorgfalt stets aus der Mitte nivelliert wird, so daß ein unter Umständen während der Messung sich einstellender Fehler — Ziellinienfehler — oder ein nicht wegzuschaffender Fehler des Instruments — z. B. von einer schlechten Führung des Okulars herrührend — ohne Einfluß auf das Messungsergebnis sind.

Die beiden wichtigsten bei geometrischen Nivellements auftretenden und besonders bei dem württembergischen Präzisions-nivellement in Betracht kommenden Fehler sind der Ablesungsfehler, d. i. der einer einzelnen Lattenablesung zukommende mittlere Fehler, und der Lattenfehler, d. i. diejenige Größe, um die die tatsächliche Länge eines Lattenmeters von ihrer Solllänge — also von 1,000 m — abweicht.

Der Ablesungsfehler ist ein unregelmäßiger Fehler und stellt die Summe verschiedener Fehlerursachen vor; er enthält insbesondere den von Unregelmäßigkeiten der Libelle und ihrer Beobachtung herrührenden Libellenfehler, den bei Ausführung der Lattenablesungen möglichen Schätzungsfehler, und noch den von ungleichmäßiger Temperatur der von den Zielungen bei Rück- und Vorblick durchschnittenen Luftschichten herrührenden Refraktionsfehler, der bei Einhalten des Nivellierens aus der Mitte unter Umständen ohne Einfluß auf das Messungsergebnis sein kann.

Der Lattenfehler ist ein regelmäßiger oder einseitig wirkender Fehler, der von den durch Temperatur- und Feuchtigkeitseinflüssen hervorgerufenen Änderungen der Lattenlänge herrührt; er läßt sich — wie dies bei den heute ausgeführten Präzisionsnivellements geschieht — durch genügend viele unmittelbare Messungen des Lattenmeters, durch sogen. Lattenvergleichen, seiner Größe nach bestimmen und berücksichtigen.

Der Einfluß des Ablesungsfehlers auf einen gemessenen Höhenunterschied ist abhängig von der Anzahl von Instrumentaufstel-

lungen, die zu dessen Messung erforderlich sind. Bezeichnet man den Ablesungsfehler mit μ , die Anzahl der Aufstellungen mit n und den mittleren Fehler des Höhenunterschiedes h mit m' , so ist — gleiche Zielweiten vorausgesetzt —

$$m' = \mu \sqrt{2n} \quad (1)$$

Der Einfluß eines Lattenfehlers λ auf einen gemessenen Höhenunterschied h ist abhängig von diesem; er beträgt λh . Für den mittleren Fehler m eines mit n Instrumentaufstellungen nivellierten Höhenunterschiedes h findet man daher, wenn ein Ablesungsfehler μ und ein Lattenfehler λ angenommen werden

$$m = \sqrt{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2} \quad (2)$$

Hiemit erhält man für das Gewicht p desselben Höhenunterschieds

$$p = \frac{\text{Const.}}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2} \quad (3)$$

Um auf Grund dieser Gleichung die Gewichte berechnen zu können, muß man zuvor den Ablesungsfehler μ und den Lattenfehler λ getrennt bestimmen; man kann dabei für das ganze auszugleichende Netz einen mittleren Ablesungsfehler μ und einen mittleren Lattenfehler λ bestimmen, oder man kann — falls die Anordnung der Messung dies gestattet — den Ablesungsfehler und den Lattenfehler getrennt für jede einzelne Strecke bestimmen. Diese beiden Wege sollen im folgenden bei dem Netz des württembergischen Präzisionsnivelements eingeschlagen werden. Eine indirekte Untersuchung der der Gewichtsbestimmung nach Gleichung (3) zugrunde gelegten Werte von μ und λ läßt sich nach der Ausgleichung auf Grund der auf dasselbe Gewicht reduzierten übrig bleibenden Fehler und der mittleren Fehler der ausgeglichenen Höhenunterschiede vornehmen.

Gewichtsbestimmungen mit Benützung eines zuvor bestimmten mittleren Ablesungs- bzw. Lattenfehlers wurden schon verschiedenfach vorgenommen; u. a. bei einem vom Geodätischen Institut in Norddeutschland gemessenen Netz durch CH. A. VÖGLER¹, beim bayrischen Präzisionsnivelement durch M. HAID², J. BISCHOFF³ und bei dessen endgültiger Bearbeitung durch C. OERTEL⁴, und beim badischen Präzisionsnivelement durch W. JORDAN⁵.

¹ Zeitschr. für Vermessungswesen 1877.

² Untersuchung der Beobachtungsfehler und Genauigkeit des bayrischen Präzisionsnivelements. Inaug.-Diss. München 1880.

³ Beitrag zu den Untersuchungen über die Genauigkeit des bayrischen Präzisionsnivelements. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1885.

⁴ Das Präzisionsnivelement in Bayern rechts des Rheins. München 1893.

⁵ Die Groß. Badischen Hauptnivelements. Karlsruhe 1885.

5. Bestimmung eines mittleren Ablesungsfehlers und eines mittleren Lattenfehlers für das ganze Netz.

Für den Ablesungsfehler und den Lattenfehler lassen sich Mittelwerte μ und λ mit Hilfe der in den einzelnen Polygonen auftretenden Widersprüche $w_1, w_2, \dots$ bestimmen. Bezeichnet man, entsprechend den einzelnen Polygonen und den einzelnen Teilstrecken in ihnen die Anzahl der Instrumentaufstellungen mit $n_1', n_2', n_3', \dots; n_1'', n_2'', n_3'', \dots$ usw.; und die Höhenunterschiede mit $h_1', h_2', h_3', \dots; h_1'', h_2'', h_3'', \dots$ usw.; so bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2n_1'\mu^2 + 2n_2'\mu^2 + 2n_3'\mu^2 + \dots + h_1'^2\lambda^2 + h_2'^2\lambda^2 + h_3'^2\lambda^2 + \dots &= w_1^2 \\ 2n_1''\mu^2 + 2n_2''\mu^2 + 2n_3''\mu^2 + \dots + h_1''^2\lambda^2 + h_2''^2\lambda^2 + h_3''^2\lambda^2 + \dots &= w_2^2 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} 2[n']\mu^2 + [h'^2]\lambda^2 &= w_1^2 \\ 2[n'']\mu^2 + [h''^2]\lambda^2 &= w_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Setzt man hier der Einfachheit halber

$$\begin{aligned} [n'] &= N_1, \quad [n''] = N_2 \quad \dots \quad \text{und} \\ [h'^2] &= H_1^2, \quad [h''^2] = H_2^2 \quad \dots \end{aligned}$$

so findet man

$$\left. \begin{aligned} 2N_1\mu^2 + H_1^2\lambda^2 - w_1^2 &= 0 \\ 2N_2\mu^2 + H_2^2\lambda^2 - w_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Betrachtet man die w als gegebene Werte zur Bestimmung von μ und λ , so erhält man die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 4[NN]\mu^2 + 2[NH^2]\lambda^2 - 2[Nw^2] &= 0 \\ 2[NH^2]\mu^2 + [H^2H^2]\lambda^2 - [H^2w^2] &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Nimmt man noch an, daß den Quadraten $w_1^2, w_2^2, \dots$ der Polygonwidersprüche verschiedene Gewichte $p_1, p_2, \dots$ zukommen, so lauten die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 4[pNN]\mu^2 + 2[pNH^2]\lambda^2 - 2[pNw^2] &= 0 \\ 2[pNH^2]\mu^2 + [pH^2H^2]\lambda^2 - [pH^2w^2] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Die Gewichte bestimmt man nach dem Vorgange HELMERT's¹ aus:

$$P_r = \frac{\text{Const.}}{(2N_r\mu^2 + H_r^2\lambda^2)^2} \quad (5)$$

Um die Gewichte nach dieser Gleichung ermitteln zu können, muß man für die Unbekannten μ und λ Annahmen machen, oder sie zunächst genähert mit Hilfe der Gleichungen (3) bestimmen.

¹ Vergl. Helmert, Astronomische Nachrichten 1877. Auszugsweise in Jordan. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1885. S. 46.

Das der folgenden Ausgleich zugrunde gelegte Netz ist — abgesehen von den Anschlußstrecken an die Nachbarstaaten — in der Fig. 7 dargestellt. Dieses Netz enthält nicht die sämtlichen nivellierten Strecken; es mußten insbesondere die Strecken Aalen—Heidenheim—Ulm und Ulm—Riedlingen—Herbertingen weggelassen werden. Die Messungsergebnisse dieser beiden Strecken sind zweifellos je durch Fehler in der Größe von 1 dem entsteht¹, die sich aber durch Nachrechnen nicht feststellen lassen. Ein bei dem Punkt Riedlingen Bahnhof H.M. durch die Nivellements der Kgl. Generaldirektion der Württ. Staatseisenbahnen aufgefundener Fehler², hat mit demjenigen der ganzen Strecke nichts zu tun; er konnte in den Berechnungsheften des Präzisionsnivellements als Rechenfehler bei der Berechnung des besagten Punktes festgestellt werden.

Die Weglassung der beiden genannten Strecken bedingt für den südlichen Teil des Netzes eine wenig günstige Form, die jedoch bei der zum Schluß beabsichtigten Ausgleich zwischen den Netzen von Baden und Bayern weniger in Betracht kommt; immerhin wäre aber eine Teilung des im Verhältnis zu den andern Polygonen sehr großen Polygons Plochingen—Ulm—Sigmaringen—Tübingen—Plochingen erwünscht, die allerdings weniger durch die Strecke Ulm—Riedlingen—Herbertingen, als durch die — jedoch nicht nivellierte — Strecke Reutlingen—Münsingen—Schelklingen zu erreichen wäre. Die gemessenen, für die weiteren Untersuchungen in Betracht kommenden Höhenunterschiede sind in der folgenden Tabelle angegeben³, deren letzte Spalte die bei mehrfacher Messung sich ergebenden Mittelwerte enthält.

No.	Streckenbezeichnung	Jahr der Messung	Anzahl <i>n</i> der In- strument- auf- stellungen	Gemessener Höhen- unterschied m	Mittel bei mehr- facher Messung m
1	Bietigheim—Heilbronn	1877	225	62,824	
2	Heilbronn—Hall	1877	430	148,374	
3	Hall—Gaildorf	1873	235	21,770	
4	Gaildorf—Bietigheim	1873	680	107,301	
5	Hall—Crailsheim	1877	265	103,658	

¹ Der Fehler bei der ersten der beiden Strecken befindet sich auf der Teilstrecke Aalen—Heidenheim.

² Vergl. das „Verzeichnis“ usw. S. VIII.

³ Über ihre Ermittlung aus der Messung siehe Seite 50.

No.	Streckenbezeichnung	Jahr der Messung	Anzahl n der In- strument- auf- stellungen	Gemessener Höhen- unterschied m	Mittel bei mehr- facher Messung m
6	Crailsheim—Goldshöfe . . .	1877	235	59,533	
7 a	Goldshöfe—Aalen	1875	50	38,357	38,367
		1875	50	38,377	
7 b	Aalen—Gmünd	1875	170	111,384	111,410
		1877	170	111,437	
8	Gaildorf—Gmünd	1873	490	8,415	
9	Gmünd—Cannstatt	1875	340	97,084	
10	Cannstatt—Stuttgart	1875	40	27,431	
11	Stuttgart—Zuffenhausen . . .	1869	670	31,409	
12	Zuffenhausen—Bietigheim . .	1869	120	60,666	
13	Zuffenhausen—Calw	1875	365	67,204	
14	Calw—Pforzheim	1875	210	67,803	67,792
		1878	210	67,780	
15	Pforzheim—Mühlacker	1875	100	39,837	39,830
		1878	100	39,824	
16	Mühlacker—Bietigheim	1869	180	20,171	20,171
		1877	180	20,172	
17	Stuttgart—Herrenberg	1871	380	178,616	
18	Herrenberg—Horb	1871	335	36,950	
19	Horb—Calw	1875	350	43,074	43,087
		1878	237	43,101	
20	Herrenberg—Tübingen	1871	237	106,276	
21	Tübingen—Horb	1870	220	69,354	
22	Cannstatt—Plochingen	1869	140	31,314	
23	Plochingen—Tübingen	1870	340	68,463	
24	Gmünd—Süßen	1873	390	45,578	
25	Süßen—Plochingen	1869	200	111,262	
26	Süßen—Ulm	1869	360	111,945	
27	Ulm—Aulendorf	1869	420	70,438	
28	Aulendorf—Mengen	1874	250	12,625	
29	Mengen—Sigmaringen	1874	70	12,412	
30	Sigmaringen—Tübingen	1874	1010	250,203	
31	Heilbronn—Jagstfeld	1877	80	3,939	
32	Goldshöfe—Nördlingen	1869	250	40,441	40,447
		1878	250	40,453	
33	Aulendorf—Leutkirch	1872	280	104,888	104,895
		1878	280	104,902	
34	Leutkirch—Memmingen	1872	130	54,878	
35	Leutkirch—Rötenbach	1874	370	45,600	45,600
		1878	370	45,601	
36	Aulendorf—Kreßbronn	1869	400	150,869	

Zu den Strecken Goldshöfe—Aalen—Gmünd, Calw—Pforzheim—Mühlacker und Horb—Calw möge mit Rücksicht auf die teilweise großen Unterschiede zwischen den beiden Messungsergebnissen bemerkt sein, daß für beide Messungen je dieselbe Latte verwendet wurde.

Das Netz der Fig. 7 enthält zunächst 9 Polygone, für deren Widersprüche $w_1, w_2 \dots w_9$ man findet:

$w_1 = + 19 \text{ mm}$	$w_2 = + 59 \text{ mm}$	$w_3 = - 24 \text{ mm}$
$w_4 = + 77 \text{ mm}$	$w_5 = - 34 \text{ mm}$	$w_6 = + 28 \text{ mm}$
$w_7 = + 6 \text{ mm}$	$w_8 = + 86 \text{ mm}$	$w_9 = + 16 \text{ mm}$

Bei der Bestimmung der beiden Fehler μ und λ wurden im folgenden entsprechend den Gleichungen (3) und (4) zwei Wege eingeschlagen, indem für die Quadrate der Widersprüche $w_1, w_2 \dots w_9$ zunächst gleiche Gewichte angenommen, und sodann Gewichte auf Grund der Gleichung (5) eingeführt wurden.

a) Die Gewichte der Quadrate der Widersprüche $w_1, w_2 \dots w_9$ werden je gleich 1 gesetzt. Bei der Bestimmung der Größen $N_1, N_2 \dots N_9$ und $H_1^2, H_2^2 \dots H_9^2$ [vergl. die Gleichungen (2)] läßt sich bei einzelnen Polygonen eine gewisse Willkür nicht umgehen. Mit Rücksicht auf die später beabsichtigte Ausgleichung des württembergischen Netzes zwischen den Netzen der Nachbarstaaten wurden die Strecken Bietigheim—Heilbronn—Hall, Hall—Crailsheim—Goldshöfe, Calw—Pforzheim—Mühlacker, Süßen—Ulm—Aulendorf und Aulendorf—Mengen—Sigmaringen—Tübingen durch die angegebenen Zwischenpunkte in verschiedene Teilstrecken geteilt, obwohl diese Strecken bei der Messung zusammen als Ganzes nivelliert wurden.

Benützt man zur Bestimmung der Koeffizienten der Fehlergleichungen (2) die in der Fig. 7 durch die Numerierung angedeuteten Teilstrecken, so erhält man die folgenden Werte, bei denen als Einheit für die Anzahl der Instrumentstandpunkte 1000, für die Höhenunterschiede 100 m und für die Widersprüche 1 cm angenommen wurde.

Polygon	N	H^2	w^2	NN	NH^2	Nw^2	H^2H^2	H^2w^2	w^2w^2
I	1,57	3,79	3,61	2,46	5,95	5,67	14,36	13,68	13,03
II	1,45	2,87	34,81	2,10	4,16	50,47	8,24	99,89	1211,74
III	1,74	2,64	5,76	3,03	4,59	10,02	6,97	15,21	33,18
IV	0,98	1,48	59,29	0,96	1,45	58,10	2,19	87,75	3515,30
V	1,50	4,06	11,56	2,25	6,09	17,34	16,48	46,93	133,63
VI	0,79	1,75	7,84	0,62	1,38	6,19	3,06	13,72	61,47
VII	1,14	4,96	0,36	1,30	5,65	0,41	24,60	1,79	0,13
VIII	1,07	2,49	73,96	1,14	2,66	79,14	6,20	184,16	5470,08
IX	2,65	9,74	2,56	6,55	25,81	6,78	94,87	24,93	6,55

Benützt man alle 9 Polygone zur Bestimmung der Koeffizienten der Normalgleichungen (3), so findet man für diese

$$\begin{aligned} 40,82 \mu^2 + 57,74 \lambda^2 - 234,12 &= 0 \\ 57,74 \mu^2 + 88,48 \lambda^2 - 244,03 &= 0 \end{aligned}$$

Die hieraus sich ergebenden Werte für μ und λ sind infolge eines imaginären Wertes für λ unbenützbar. Um trotzdem zu Werten für die Größen μ und λ zu gelangen, kann man entweder die Polygone I, VII und IX, von denen anzunehmen ist, daß sie infolge der auffallend geringen Widersprüche von 19 bzw. 6 bzw. 16 mm hauptsächlich Schuld an dem imaginären Wert von λ sind, vollständig weglassen, oder sie mit einem der anstoßenden Polygone zusammenfassen.

Läßt man die Polygone I, VII und IX ganz weg, so erhält man die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 20,20 \mu^2 + 20,33 \lambda^2 - 221,26 &= 0 \\ 20,33 \mu^2 + 21,57 \lambda^2 - 223,83 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus findet man als mittleren Ablesungsfehler μ und mittleren Lattenfehler λ :

$$\mu = \pm 1,00 \text{ mm und } \lambda_{10} = \pm 1,01 \text{ mm}$$

letzterer bezogen auf den Höhenunterschied von 10 m.

Faßt man die Polygone I und II, VI und VII, und VIII und IX zusammen, so erhält man mit denselben Einheiten wie oben — für die Koeffizienten der Fehlergleichungen (2) — folgende Werte:

Polygon	N	H ²	w ²	NN	NH ²	Nw ²	H ² H ²	H ² w ²
I, II	2,55	6,57	60,84	6,50	16,75	155,14	43,16	399,72
III	1,74	2,64	5,76	3,03	4,59	10,02	6,97	15,21
IV	0,98	1,48	59,29	0,96	1,45	58,10	2,19	87,75
V	1,50	4,06	11,56	2,25	6,09	17,34	16,48	46,93
VI, VII	1,46	4,45	11,56	2,13	6,50	16,88	19,80	51,44
VIII, IX	3,32	9,76	104,04	11,02	32,40	345,41	95,26	1015,43

und damit die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 51,78 \mu^2 + 67,78 \lambda^2 - 602,89 &= 0 \\ 67,78 \mu^2 + 91,93 \lambda^2 - 808,24 &= 0 \end{aligned}$$

Die hieraus sich ergebenden Werte für μ und λ_{10} sind

$$\mu = \pm 0,62 \text{ mm und } \lambda_{10} = \pm 2,44 \text{ mm.}$$

Faßt man zur Bestimmung der Koeffizienten der Fehlergleichungen diejenigen Strecken der Fig. 7 zusammen, die im Zusammenhang nivelliert wurden — es sind dies

in Polygon I die Strecken 1 und 2, und 3 und 4; in Polygon II die Strecken 5 und 6, und 7a und 7b; in Polygon III die Strecken 9 und 10, und 11 und 12; in Polygon IV die Strecken 14 und 15 und endlich in Polygon IX die Strecken 28, 29 und 30 — so erhält man:

Polygon	N	H ²	w ²	NN	NH ²	Nw ²	H ² H ²	H ² w ²
I	1,57	1,46	3,61	2,46	2,29	5,67	2,13	5,27
II	1,45	4,96	34,81	2,10	7,19	50,47	24,60	172,66
III	1,74	1,73	5,76	3,03	3,01	10,02	2,99	9,96
IV	0,98	2,02	59,29	0,96	1,97	58,10	4,08	119,77
V	1,50	2,74	11,56	2,25	4,11	17,34	7,51	31,67
VI	0,79	1,75	7,84	0,62	1,38	6,19	3,06	13,72
VII	1,14	4,96	0,36	1,30	5,65	0,41	24,60	1,79
VIII	1,07	2,49	73,96	1,14	2,66	79,14	6,20	184,16
IX	2,65	8,53	2,56	6,55	22,60	6,78	72,76	21,84

Benützt man zunächst wieder alle 9 Polygone zur Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen, so erhält man daraus nicht verwendbare Werte, weil der Wert für λ imaginär wird.

Läßt man die Polygone I, VII und IX weg, so findet man zwei Normalgleichungen, die wieder ein unverwertbares Ergebnis liefern, indem man für μ einen imaginären Wert erhält.

Faßt man endlich die Polygone I und II, VI und VII, und VIII und IX zusammen, so erhält man, wenn man noch bei der Berechnung der Koeffizienten der Fehlergleichungen in den Polygonen I und II die im Zusammenhang nivellierten Strecken 1, 2, 5 und 6, und bei den Polygonen VI und VII die Strecken 17 und 18 bzw. 21 und 23 zusammenfaßt:

Polygon	N	H ²	w ²	NN	NH ²	Nw ²	H ² H ²	H ² w ²
I, II	2,55	13,10	60,84	6,50	33,41	155,14	171,61	797,00
III	1,74	1,73	5,76	3,03	3,01	10,02	2,99	9,96
IV	0,98	2,02	59,29	0,96	1,97	58,10	4,08	119,77
V	1,50	2,74	11,56	2,25	4,11	17,34	7,51	31,67
VI, VII	1,46	4,08	11,56	2,13	5,96	16,88	16,65	47,16
VIII, IX	3,32	8,54	104,04	11,02	28,35	345,41	72,93	888,50

Die hiermit sich ergebenden Normalgleichungen sind:

$$\begin{aligned} 51,78 \mu^2 + 76,81 \lambda^2 - 602,89 &= 0 \\ 76,81 \mu^2 + 137,88 \lambda^2 - 947,03 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\mu = \pm 0,92 \text{ mm und } \lambda_{10} = \pm 1,49 \text{ mm}$$

Die im vorstehenden gefundenen Werte für den mittleren Ablesungsfehler und den mittleren Lattenfehler für den Höhenunterschied von 10 m sind:

	Ohne Zusammenfassung einzelner Strecken	Mit Zusammenfassung einzelner Strecken
Bei Benützung aller 9 Polygone	λ imaginär	λ imaginär
Bei Weglassung der Polygone I, VII u. IX	$\mu = \pm 1,00 \text{ mm}$ $\lambda_{10} = \pm 1,01 \text{ mm}$	μ imaginär
Bei Zusammenfassung der Polygone I, VII und IX mit II, VI und VIII	$\mu = \pm 0,62 \text{ mm}$ $\lambda_{10} = \pm 2,44 \text{ mm}$	$\mu = \pm 0,92 \text{ mm}$ $\lambda_{10} = \pm 1,49 \text{ mm}$

Wie diese Zusammenstellung zeigt, ist die Bestimmung der genannten Fehler ziemlich unsicher; die Abweichungen infolge der Willkürlichkeit bei der Benützung bestimmter Polygone, bei der Zusammenfassung einzelner Polygone und einzelner Teilstrecken sind erheblich. Als Mittelwerte aus den drei gefundenen Wertepaaren erhält man:

$$\mu = \pm 0,86 \text{ mm und } \lambda_{10} = \pm 1,75 \text{ mm.}$$

Mit Hilfe dieser Mittelwerte sollen nun b) Gewichte $p_1, p_2 \dots p_9$ für die Quadrate der Widersprüche $w_1, w_2 \dots w_9$ eingeführt werden.

Setzt man die gefundenen Werte in die auf Seite 35 angegebene Gleichung

$$P_r = \frac{\text{Const.}}{(2 N_r \mu^2 + H_r^2 \lambda^2)^2} \quad (5)$$

ein, so geht diese — wenn man für N_r als Einheit 1000 Aufstellungen und für H_r 100 m wählt — über in

$$P_r = \frac{\text{Const.}}{(1487,2 N_r + 306,5 H_r^2)^2}$$

Für die Gewichtskonstante kann man bei der vorliegenden Aufgabe eine beliebige Größe annehmen; wählt man mit Rücksicht auf bequeme Zahlenwerte z. B. 5000², so erhält man zur Berechnung der Gewichte die Gleichung

$$P_r = \frac{1}{(0,297 N_r + 0,061 H_r^2)^2} \quad (6)$$

Benützt man zur Bestimmung der Koeffizienten der Fehlergleichungen (2) alle 9 Polygone oder läßt man, wie oben, die 3 Polygone I, VII und IX weg, so erhält man in allen Fällen — wenn man alle in der Fig. 7 angedeuteten Teilstrecken benützt, oder wenn man einzelne davon, wie oben, zusammenfaßt — unbrauchbare Werte für die Größen μ und λ .

Faßt man wieder die Polygone I und II, VI und VII, und VIII und IX zusammen, so erhält man brauchbare Werte nur für den Fall, daß man verschiedene Teilstrecken der Fig. 7 vereinigt; man findet dabei folgende Werte:

Polygon	p	p NN	p NH ²	p N w ²	p H ² H ²	p H ² w ²
I, II	0,40	2,60	13,36	62,06	68,64	318,80
III	2,57	7,79	7,74	25,75	7,68	25,60
IV	5,78	5,55	11,39	335,82	23,58	692,27
V	2,66	5,99	10,93	46,12	19,98	84,24
VI, VII	2,14	4,56	12,75	36,12	35,63	100,92
VIII, IX	0,44	4,85	12,47	151,98	32,09	390,94

Hieraus ergeben sich die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 62,68 \mu^2 + 68,64 \lambda^2 - 657,85 &= 0 \\ 68,64 \mu^2 + 93,80 \lambda^2 - 806,38 &= 0 \end{aligned}$$

aus denen man findet

$$\mu = \pm 0,74 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \lambda_{10} = \pm 2,15 \text{ mm}$$

wo λ_{10} sich wieder auf den Höhenunterschied von 10 m bezieht.

Mit den gefundenen Werten erhält man für den mittleren Fehler m einer 1 km langen, mit n = 10 Aufstellungen des Instruments nivellierten Strecke mit einem Höhenunterschied von 10 m

$$m = \sqrt{2n\mu^2 + \lambda_{10}^2} = \pm 3,9 \text{ mm.}$$

Nimmt man an, daß kein Lattenfehler vorhanden ist, so erhält man für den mittleren Fehler m' derselben Strecke

$$m' = \mu \sqrt{2n} = \pm 3,3 \text{ mm.}$$

Von den gefundenen Werten für μ und λ dürfte derjenige für μ ziemlich zu groß sein.

Die Unsicherheit in der Bestimmung von μ und λ , die insbesondere auch durch das Auftreten von imaginären Werten zum Ausdruck kommt, dürfte darauf hinweisen, daß die Messungen z. T. auch noch durch andere Fehler — z. B. infolge nicht genügender Übung der Beobachter — als die beiden behandelten entsteht sind.

6. Untersuchung der gefundenen Werte für einen mittleren Ablesungsfehler und einen mittleren Lattenfehler.

Infolge der verschiedenen Willkür bei der Bestimmung der Mittelwerte für die beiden Fehler μ und λ ist zunächst anzunehmen, daß ihnen keine große Genauigkeit zukommt. Eine erste Möglichkeit zur Untersuchung der gefundenen Werte besteht darin, daß man sie zur Gewichtsbestimmung bei einer Ausgleichung des in der Fig. 7 gezeichneten Netzes benützt, und die Ergebnisse dieser Ausgleichung, insbesondere die übrigbleibenden Fehler mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz vergleicht. Eine weitere Möglichkeit der Untersuchung erhält man dadurch, daß man bei der angedeuteten Ausgleichung die mittleren Fehler der ausgeglichenen Höhenunterschiede berechnet und diese mit den entsprechenden Fehlern einer mit Benützung von anderen Gewichten ausgeführten Ausgleichung vergleicht; man wird dann denjenigen Gewichten den Vorzug geben, die die kleineren mittleren Fehler für die ausgeglichenen Höhenunterschiede ergeben.

Setzt man in der Gewichtsformel

$$p = \frac{\text{Const.}}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2} \quad (1)$$

die Werte $\mu = \pm 0,74$ mm und $\lambda_{10} = \pm 2,15$ mm ein, so erhält man

$$p = \frac{\text{Const.}}{10,95 n_{10} + 4,63 h_{10}^2}$$

wobei für die Anzahl n_{10} der Instrumentaufstellungen als Einheit 10 und für den Höhenunterschied h_{10} als Einheit 10 m gewählt wurde.

Zur Bestimmung der Gewichtskonstanten möge festgesetzt werden, daß das Gewicht $p = 1$ sich auf eine Strecke bezieht, die bei einem Höhenunterschied von 50 m mit 50 Aufstellungen, also mit $h_{10} = 5$ m und $n_{10} = 5$ nivelliert wurde; man findet dann für die Konstante den Wert 170,5, womit man für die Berechnung der Gewichte die Gleichung erhält

$$p = \frac{170,5}{10,95 n_{10} + 4,63 h_{10}^2} = \frac{1}{0,0642 n_{10} + 0,0272 h_{10}^2} \quad (2)$$

In dem in der Fig. 7 gezeichneten Netz sind durch die 30 nivellierten Strecken 22 Punkte verbunden, zu deren gegenseitiger Festlegung 21 Strecken notwendig sind; man hat demnach zur Ausgleichung des Netzes nach „bedingten Beobachtungen“ 9 Bedingungengleichungen. Bedeuten $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ die ausgeglichenen Höhen-

unterschiede, $h_1, h_2 \dots h_{30}$ die gemessenen, und $v_1, v_2 \dots v_{30}$ die an diesen anzubringenden Verbesserungen, so bestehen zwischen den letzteren, wenn noch $w_1, w_2 \dots w_9$ die Polygonwidersprüche bedeuten, die folgenden von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen, die man mit Hilfe der 9 Polygone erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{I} & -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + w_1 & = 0 \\
 \text{II} & -v_3 + v_5 + v_6 - v_7 + v_8 + w_2 & = 0 \\
 \text{III} & +v_4 - v_8 - v_9 + v_{10} + v_{11} - v_{12} + w_3 & = 0 \\
 \text{IV} & +v_{12} + v_{13} - v_{14} - v_{15} - v_{16} + w_4 & = 0 \\
 \text{V} & -v_{11} + v_{17} - v_{18} - v_{19} - v_{13} + w_5 & = 0 \\
 \text{VI} & +v_{18} - v_{20} + v_{21} + w_6 & = 0 \\
 \text{VII} & -v_{17} - v_{10} + v_{22} + v_{23} + v_{20} + w_7 & = 0 \\
 \text{VIII} & +v_9 + v_{24} - v_{25} - v_{22} + w_8 & = 0 \\
 \text{IX} & -v_{23} + v_{25} + v_{26} + v_{27} + v_{28} + v_{29} - v_{30} + w_9 & = 0
 \end{aligned}$$

Die bei der folgenden Ausgleichung benützten Zahlenwerte sind in der untenstehenden Tabelle angegeben; diese enthält in der 1. Spalte die Nummern der Strecken entsprechend der Fig. 7, in der 2. Spalte die gemessenen Höhenunterschiede $h_1, h_2 \dots h_{30}$, in der 3. Spalte die Anzahl n der Instrumentaufstellungen, in der 4. Spalte die Reziproken $\frac{1}{p}$ der nach Gleichung (2) berechneten Gewichte, in der 5. Spalte die mittleren Fehler m der einzelnen Höhenunterschiede vor der Ausgleichung und in der 6. Spalte die nach der Ausgleichung benötigten Quadratwurzeln aus den Gewichten, also $\sqrt{p}$.

Strecke	h	n	$\frac{1}{p}$	m	$\sqrt{p}$
	m			mm	
1	62,824	225	2,51	20,7	0,632
2	148,374	430	8,75	38,6	0,338
3	21,770	235	1,64	16,7	0,782
4	107,301	680	7,49	35,7	0,366
5	103,658	265	4,62	28,1	0,466
6	59,533	235	2,47	20,5	0,647
7	149,777	220	7,51	35,8	0,365
8	8,415	490	3,17	23,2	0,562
9	97,084	340	4,74	28,4	0,460
10	27,431	40	0,45	8,8	1,492

Strecke	h	n	$\frac{1}{p}$	m	$\sqrt{p}$
	m			mm	
11	31,409	70	0,72	11,1	1,180
12	60,666	120	1,77	17,4	0,752
13	67,204	365	3,57	24,7	0,530
14	67,792	210	2,60	21,0	0,620
15	39,830	100	1,07	13,5	0,967
16	20,171	180	1,27	14,7	0,887
17	178,616	380	11,12	43,5	0,300
18	36,950	335	2,52	20,7	0,631
19	43,087	350	2,76	21,7	0,602
20	106,276	237	4,59	28,0	0,467
21	69,354	220	2,72	21,5	0,607
22	31,314	140	1,17	14,1	0,925
23	68,463	340	3,46	24,3	0,538
24	45,578	390	3,06	22,8	0,572
25	111,262	200	4,65	28,1	0,464
26	111,945	360	5,71	31,2	0,418
27	70,438	420	4,05	26,2	0,497
28	12,625	250	1,64	16,7	0,782
29	12,412	70	0,49	9,1	1,430
30	250,203	1010	23,50	63,2	0,206

Mit diesen Werten erhält man an Hand der in der folgenden Übersicht angedeuteten Korrelatengleichungen:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
$v_1 p_1$	= -1	.	.	.	.	.	.	.	.
$v_2 p_2$	= +1	.	.	.	.	.	.	.	.
$v_3 p_3$	= +1	-1	.	.	.	.	.	.	.
$v_4 p_4$	= -1	.	+1	.	.	.	.	.	.
$v_5 p_5$	= .	+1	.	.	.	.	.	.	.
$v_6 p_6$	= .	+1	.	.	.	.	.	.	.
$v_7 p_7$	= .	-1	.	.	.	.	.	.	.
$v_8 p_8$	= .	+1	-1	.	.	.	.	.	.
$v_9 p_9$	= .	.	-1	.	.	.	.	+1	.
$v_{10} p_{10}$	= .	.	+1	.	.	.	-1	.	.

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
$v_{11} p_{11} =$	.	.	+1	.	-1	.	.	.	.
$v_{12} p_{12} =$	.	.	-1	+1	.	.	.	.	.
$v_{13} p_{13} =$	.	.	.	+1	-1	.	.	.	.
$v_{14} p_{14} =$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.
$v_{15} p_{15} =$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.
$v_{16} p_{16} =$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.
$v_{17} p_{17} =$	.	.	.	.	+1	.	-1	.	.
$v_{18} p_{18} =$	.	.	.	.	-1	+1	.	.	.
$v_{19} p_{19} =$	.	.	.	.	-1	.	.	.	.
$v_{20} p_{20} =$	.	.	.	.	.	-1	+1	.	.
$v_{21} p_{21} =$	.	.	.	.	.	+1	.	.	.
$v_{22} p_{22} =$	.	.	.	.	.	.	+1	-1	.
$v_{23} p_{23} =$	.	.	.	.	.	.	+1	.	-1
$v_{24} p_{24} =$	.	.	.	.	.	.	.	+1	.
$v_{25} p_{25} =$	.	.	.	.	.	.	.	-1	+1
$v_{26} p_{26} =$	.	.	.	.	.	.	.	.	+1
$v_{27} p_{27} =$	.	.	.	.	.	.	.	.	+1
$v_{28} p_{28} =$	.	.	.	.	.	.	.	.	+1
$v_{29} p_{29} =$	.	.	.	.	.	.	.	.	+1
$v_{30} p_{30} =$	.	.	.	.	.	.	.	.	-1

die Normalgleichungen

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	w
+ 20,39	-1,64	-7,49	.	.	.	.	.	.	.	+ 19,00 = 0
. . .	+ 19,41	-3,17	.	.	.	.	.	.	.	+ 59,00 = 0
. . .	.	+ 18,34	-1,77	-0,72	.	-0,45	-4,74	.	.	- 24,00 = 0
. . .	.	.	+ 10,28	-3,57	.	.	.	.	.	+ 77,00 = 0
. . .	.	.	.	+ 20,69	-2,52	-11,12	.	.	.	- 34,00 = 0
. . .	.	.	.	.	+ 9,83	-4,59	.	.	.	+ 28,00 = 0
. . .	.	.	.	.	.	+ 20,79	-1,17	-3,46	+ 6,00 = 0	
. . .	.	.	.	.	.	.	+ 13,62	-4,65	+ 86,00 = 0	
. . .	.	.	.	.	.	.	.	+ 43,50	+ 16,00 = 0	

Aus diesen ergeben sich für die Korrelaten die Werte

$$\begin{aligned} k_1 &= -2,588 & k_2 &= -3,857 & k_3 &= -3,663 \\ k_4 &= -9,030 & k_5 &= -2,644 & k_6 &= -5,188 \\ k_7 &= -3,690 & k_8 &= -8,440 & k_9 &= -1,564 \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Verbesserungen v , die $p v v$ und für die weiter unten erforderlichen $v \sqrt{p}$ die folgenden Werte:

Strecke	v	p v v	v $\sqrt{p}$	Strecke	v	p v v	v $\sqrt{p}$
	mm		mm		mm		mm
1	+ 6,4	16,8	+ 4,1	16	+ 11,5	103,6	+ 10,2
2	— 22,6	58,6	— 7,7	17	+ 11,6	12,2	+ 3,5
3	+ 2,1	2,6	+ 1,6	18	— 6,4	16,3	— 4,0
4	— 8,1	8,7	— 2,9	19	+ 7,3	19,3	+ 4,4
5	— 17,8	68,7	— 8,3	20	+ 6,9	10,3	+ 3,2
6	— 9,6	37,0	— 6,1	21	— 14,1	73,3	— 8,6
7	+ 29,1	112,7	+ 10,6	22	+ 5,6	26,4	+ 5,1
8	— 0,6	0,1	— 0,3	23	— 7,4	15,7	— 4,0
9	— 22,6	108,1	— 10,4	24	— 25,8	218,0	— 14,8
10	$\pm$ 0,0	0,0	$\pm$ 0,0	25	+ 32,0	219,8	+ 14,8
11	— 0,7	0,7	— 0,8	26	— 8,9	14,0	— 3,7
12	— 9,5	51,0	— 7,1	27	— 6,3	9,9	— 3,1
13	— 22,8	145,6	— 12,1	28	— 2,6	4,0	— 2,0
14	+ 23,5	211,9	+ 14,5	29	— 0,8	1,3	— 1,1
15	+ 9,7	87,2	+ 9,3	30	+ 36,8	57,5	+ 7,6

Für die Summe der p v v erhält man

$$[p v v] = 1711,3$$

im Gegensatz zu

$$-[w k] = 1712,5.$$

Hiermit ergibt sich für den mittleren Fehler m_0 der Gewichtseinheit, die sich auf $n = 50$ Instrumentaufstellungen und einen Höhenunterschied $h = 50$ m bezieht

$$m_0 = \sqrt{\frac{1712}{9}} = \pm 13,8 \text{ mm.}$$

Mit Benützung der Gewichtsgleichung (2) auf S. 43 findet man für das Gewicht p einer 1 km langen, mit 10 Aufstellungen, also bei einer Zielweite von 50 m nivellierten Strecke mit einem Höhenunterschied von $h = 10$ m

$$p = 10,88$$

und damit für ihren mittleren Fehler m

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{p}} = \frac{13,8}{\sqrt{10,88}} = \pm 4,2 \text{ mm}$$

im Gegensatz zu $\pm 3,9$ mm auf S. 42, dem aus den Einzelfehlern ermittelten Wert. Um eine Untersuchung der übrigbleibenden

Fehler v anstellen zu können, muß man sie durch Multiplikation mit $\sqrt{p}$ auf gleiches Gewicht reduzieren.

Bei den übrigbleibenden Fehlern überwiegen die negativen; es kommen 13 positive und 17 negative vor.

Für die Summen der positiven und negativen Fehler findet man

$$[+v\sqrt{p}] = 88,9 \text{ und } [-v\sqrt{p}] = 97,0$$

und für die Summen ihrer Quadrate

$$[+p v v] = 880,3 \text{ und } [-p v v] = 831,0.$$

Als mittleren Fehler m_v erhält man

$$m_v = \sqrt{\frac{[p v v]}{30}} = \sqrt{\frac{1712}{30}} = \pm 7,57 \text{ mm,}$$

der durchschnittliche Fehler d_v ergibt sich aus

$$d_v = \frac{[v\sqrt{p}]}{30} = \frac{185,9}{30} = \pm 6,20 \text{ mm,}$$

damit hat man für das Verhältnis des mittleren und des durchschnittlichen Fehlers

$$\frac{m_v}{d_v} = \frac{7,57}{6,20} = 1,22$$

während dieses Verhältnis nach dem GAUSS'schen Fehlergesetz 1,25 sein soll.

Ordnet man die $v\sqrt{p}$ nach ihrem absoluten Wert, so erhält man das Folgende

+ 0,0	— 2,9	— 4,0	+ 7,6	— 10,4
— 0,3	— 3,1	+ 4,1	— 7,7	+ 10,6
— 0,8	+ 3,2	+ 4,4	— 8,3	— 12,1
— 1,1	+ 3,5	+ 5,1	— 8,6	+ 14,5
+ 1,6	— 3,7	— 6,1	+ 9,3	+ 14,8
— 2,0	— 4,0	— 7,1	+ 10,2	— 14,8

Für den wahrscheinlichen Fehler w_v erhält man unter Zugrundlegung des GAUSS'schen Fehlergesetzes

$$w_v = 0,674 m_v = \pm 5,1 \text{ mm.}$$

Es soll demnach zwischen den Grenzen + 5,1 und — 5,1 die Hälfte aller Fehler, also 15, liegen, was auch in Wirklichkeit der Fall ist.

Eine eingehendere Vergleichung der übrigbleibenden Fehler mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz¹ ist an Hand der folgenden Zusammenstellung möglich:

¹ Vergl. F. R. Helmert: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. S. 348.

Zwischen den Grenzen	sollen liegen	Tatsächlich liegen		
		zusammen	positive	negative
$\pm 0,1 \text{ m}_v = \pm 0,76$	2,4	2	1	1
0,2	1,51	4	1	3
0,3	2,28	6	2	4
0,4	3,02	7	2	5
0,5	3,78	11,5	4	7
0,6	4,54	13,5	6	9
0,7	5,29	15,5	7	9
0,8	6,05	17,3	7	10
0,9	6,80	17	7	10
1,0	7,57	19	8	11
1,5	11,34	26,0	11	15
2,0	15,12	30	13	17
2,5	18,90	30	13	17
3,0	22,68	30	13	17

Abgesehen von dem Überwiegen der negativen Fehler entsprechen die übrigbleibenden, auf das gleiche Gewicht reduzierten Fehler, dem GAUSS'schen Fehlergesetz ziemlich gut; die der Ausgleichung zugrunde gelegten Gewichte dürften demnach trotz des großen Wertes von μ der Wahrscheinlichkeit sehr nahe kommen.

Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Höhenunterschiede können in bequemer Weise nach dem von HELMERT a. a. O. S. 246 angegebenen Verfahren ermittelt werden.

Für die mittleren Fehler m' der ausgeglichenen Höhenunterschiede, die in der folgenden Übersicht zusammen mit den vor der Ausgleichung für die Zwecke der Gewichtsermittlung bestimmten mittleren Fehlern m — je auf 0,5 mm abgerundet — angegeben sind, findet man:

Mittlerer Fehler				Mittlerer Fehler			
Strecke	m vor der Ausgl.	m' nach der Ausgl.	$\frac{m}{m'}$	Strecke	m vor der Ausgl.	m' nach der Ausgl.	$\frac{m}{m'}$
	mm	mm			mm	mm	
1	$\pm 20,5$	$\pm 20,0$	1,0	16	$\pm 14,5$	$\pm 14,5$	1,0
2	38,5	28,0	1,4	17	43,5	24,0	1,8
3	16,5	16,0	1,0	18	20,5	18,0	1,1
4	35,5	27,5	1,3	19	21,5	19,5	1,1
5	28,0	25,5	1,1	20	28,0	20,0	1,4

Strecke	Mittlerer Fehler			Strecke	Mittlerer Fehler		
	m	m'	$\frac{m}{m'}$		m	m'	$\frac{m}{m'}$
	vor der Ausgl.	nach der Ausgl.			vor der Ausgl.	nach der Ausgl.	
	mm	mm			mm	mm	
6	20,5	20,0	1,0	21	21,5	17,5	1,2
7	36,0	29,0	1,2	22	14,0	13,5	1,0
8	23,0	20,0	1,2	23	24,5	19,5	1,2
9	28,5	21,0	1,4	24	23,0	20,5	1,1
10	9,0	9,0	1,0	25	28,0	22,5	1,2
11	11,0	11,0	1,0	26	31,0	30,5	1,0
12	17,5	15,5	1,1	27	26,0	26,0	1,0
13	24,5	18,5	1,3	28	16,5	17,5	1,0
14	21,0	18,5	1,1	29	9,0	9,5	1,0
15	13,5	13,5	1,0	30	63,0	43,0	1,5

Wie diese Zusammenstellung zeigt, werden die zum voraus berechneten mittleren Fehler — mit Ausnahme derjenigen der Strecken 15, 16, 27, 28 und 29 — durch die Ausgleichung verkleinert.

7. Bestimmung des Ablesungsfehlers für jede einzelne Strecke.

Wie bereits erwähnt wurde, gewinnt man schon bei einer ersten Durchsicht des württembergischen Präzisionsnivelements den Eindruck, daß die Genauigkeit der Messung nicht bei sämtlichen Strecken dieselbe ist; es wird deshalb im folgenden versucht, den Ablesungsfehler für jede einzelne Strecke zu ermitteln.

Die Anordnung der Messung — es wurden gleichzeitig zwei Nivellements ausgeführt, für welche die Instrumentstandpunkte dieselben, die Wechsellpunkte jedoch verschieden sind — ermöglicht, den Ablesungsfehler auf zweierlei Weise zu bestimmen; nämlich aus dem Unterschied zwischen den beiden, den zwei Nivellements entsprechenden Höhenunterschieden zwischen je zwei aufeinanderfolgenden und zwischen je zwei durch eine bestimmte Anzahl von Aufstellungen getrennten Instrumenthorizonten.

Die bei der nachfolgenden Neuausgleichung benützten Werte der Höhenunterschiede der verschiedenen Strecken wurden mit Rücksicht darauf, daß von 1869 an — die Messungsergebnisse des Jahres 1868 werden nicht benützt werden — bei dem Nivellement □

Rücksicht auf die Messung in einer Fernrohrlage gleich 1, so erhält man die Koeffizienten der zur Bestimmung der Korrelaten $k_1, k_2, \dots, k_n$ nötigen Normalgleichungen und diese selbst in der üblichen Weise:

	$\triangle v_1$	$\triangle r_2$	$\triangle v_1'$	$\triangle r_2'$	$\triangle v_2$	$\triangle r_3$	$\triangle v_2'$	$\triangle r_3'$	...
a	+1	-1	-1	+1	—	—	—	—	
b	—	—	—	—	+1	-1	-1	+1	
c	—	—	—	—	—	—	—	—	
...									
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
p	2	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
aa	1	1	1	1	—	—	—	—	
p	2	2	1	1	—	—	—	—	
bb	—	—	—	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
p	—	—	—	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
...									

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} aa \\ p \end{smallmatrix} \right] &= 3 & \left[\begin{smallmatrix} bb \\ p \end{smallmatrix} \right] &= 3 & \left[\begin{smallmatrix} cc \\ p \end{smallmatrix} \right] &= 3 \dots \\ & & & & \left. \begin{aligned} 3 k_1 + d_1 &= 0 \\ 3 k_2 + d_2 &= 0 \\ &\dots \\ 3 k_n + d_n &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Aus den Normalgleichungen (3) ergibt sich unmittelbar für die Korrelaten

$$k_1 = -\frac{d_1}{3} \quad k_2 = -\frac{d_2}{3} \dots k_n = -\frac{d_n}{3}$$

Damit findet man für

$$[p \triangle \triangle] = -[dk] = \frac{1}{3} [dd]$$

und für den mittleren Fehler m der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{3n}}$$

Der Ablesungsfehler μ_a bezieht sich auf das Gewicht 3; man hat deshalb

$$\mu_a = \frac{m}{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad \mu_a = \sqrt{\frac{[dd]}{9n}} \quad (4)$$

Die auf diese Weise für die einzelnen Strecken berechneten Ablesungsfehler μ_a sind in der folgenden Tabelle angegeben; es sind dabei diejenigen Strecken aufgenommen, die bei der später vorgenommenen Neuausgleichung benützt werden. Die Tabelle enthält in Spalte 1 die Bezeichnung der Strecke, in Spalte 2 das Jahr, in dem die zur Bestimmung von μ_a benützte Messung ausgeführt wurde, in Spalte 3 die Anzahl n der benützten Wechselpaare und in Spalte 4 den Ablesungsfehler μ_a .

Strecke	Jahr der Messung	Anzahl der Wechsel n	μ_a mm
Bietigheim—Heilbronn—Hall—Crailsheim— Goldshöfe	1877	150	$\pm 0,23$
Hall—Gaildorf—Bietigheim	1873	60	0,25
Aalen—Gmünd	1877	30	0,20
Süßen—Gmünd—Gaildorf	1873	110	0,21
Goldshöfe—Aalen—Gmünd—Cannstatt— Stuttgart	1875	110	0,17
Goldshöfe—Aalen (Kontrollmessung)	1875	40	0,17
Stuttgart—Bietigheim	1869	60	0,24
Zuffenhausen—Calw	1875	30	0,25
Horb—Calw—Pforzheim—Mühlacker . . .	1875	140	0,23
	1878	100	0,15
Bietigheim—Mühlacker—Bruchsal	1869	50	0,10
	1877	90	0,21
Mühlacker—Bruchsal	1878	90	0,20
Stuttgart—Herrenberg—Horb	1871	96	0,26
Tübingen—Herrenberg	1871	70	0,13
Plochingen—Tübingen—Horb—Rottweil— Villingen	1870	1046	0,28
Süßen—Plochingen—Cannstatt	1869	50	0,16
Süßen—Ulm	1869	110	0,19
Ulm—Aulendorf—Friedrichshafen—Kreß- bronn—Nonnenhorn	1869	811	0,13
Aulendorf—Sigmaringen—Tübingen . . .	1874	100	0,22
Heilbronn—Jagstfeld	1877	78	0,11
Horb—Freudenstadt—Kniebis	1881	60	0,14
Rottweil—Immendingen	1874	80	0,26
Aulendorf—Leutkirch	1872	100	0,11
	1878	90	0,37
Leutkirch—Rötenbach	1872/4	50	0,17
	1878	—	0,37
Rötenbach—Hergatz	1874	—	0,17
Leutkirch—Memmingen	1872	—	0,11
Goldshöfe—Nördlingen	1869	30	0,19
	1878	177	0,52

Bei den im Jahre 1869 nivellierten Strecken, bei denen für beide Nivellements in 2 Fernrohrlagen beobachtet wurde, ist μ_a nicht nach Gleichung (4), sondern nach

$$\mu_a = \sqrt{\frac{[d d]}{8n}}$$

berechnet worden.

Im ganzen wurden zur Bestimmung der einzelnen μ_a rund 4000 Instrumentstandpunkte benützt. Nachdem ein vorausgegangener Versuch gezeigt hat, daß eine Abhängigkeit des Ablesungsfehlers von der Zielweite sich nicht mit Sicherheit feststellen läßt, wurden die Standpunkte — abgesehen von drei Strecken, bei denen sämtliche Standpunkte benützt wurden — in Gruppen zu je 25 oder 30 an verschiedenen, gleichmäßig verteilten, aber sonst beliebigen Stellen dem Nivellement entnommen, so daß die gefundenen Ablesungsfehler für jede Strecke Mittelwerte vorstellen.

Wie die Zusammenstellung zeigt, weichen die Ablesungsfehler μ_a der einzelnen Strecken teilweise stark voneinander ab; besonders auffallend sind die hohen Beträge bei den im Jahre 1878 nivellierten Strecken Goldshöfe—Nördlingen und Aulendorf—Leutkirch.

Bestimmt man aus den Ablesungsfehlern sämtlicher Strecken einen mittleren Ablesungsfehler μ_a' , für das ganze Nivellement nach der Formel

$$\mu_a' = \sqrt{\frac{n \mu_a^2}{n}}$$

so findet man $\mu_a' = \pm 0,24$ mm.

Als mittlere Abweichung eines der 28 Ablesungsfehler findet man $\pm 0,09$ mm.

Benützt man zur Bildung eines mittleren Ablesungsfehlers den für die Strecke Goldshöfe—Nördlingen (1878) gefundenen Wert für μ_a nicht, so erhält man

$$\mu_a'' = \pm 0,22$$
 mm

und als mittlere Abweichung für einen der 27 benützten Ablesungsfehler $\pm 0,07$ mm.

Läßt man auch noch die Strecke Aulendorf—Leutkirch (1878) weg, so findet man

$$\mu_a''' = \pm 0,21$$
 mm

Die mittlere Abweichung eines der 26 Ablesungsfehler ergibt sich dann zu $\pm 0,06$ mm.

b) Bestimmung des Ablesungsfehlers aus den Horizontunterschieden von je zwei durch 50 Wechselpunkte getrennten Instrumentstandpunkten.

Bezeichnet man die Anzahl der Gruppen zu je 50 Wechselpunkten mit n , die in den einzelnen Gruppen sich zeigenden Differenzen mit $d_1, d_2, d_3 \dots d_n$, so erhält man eine mittlere Differenz d_m aus

$$d_m = \sqrt{\frac{[d d]}{n}} \quad (1)$$

Bezeichnet man ferner den mittleren Fehler einer einzigen — als Gewichtseinheit angenommenen — Lattenablesung mit m , und bedenkt, daß den 100 Ablesungen des einen Nivellements je das Gewicht 2, und denen des andern je das Gewicht 1 zukommt, so findet man in einer gedachten Gruppe mit der Differenz d_m für diese

$$d_m^2 = 100 \frac{m^2}{2} + 100 m^2 = 150 m^2$$

oder

$$d_m = m \sqrt{150}$$

und hieraus

$$m = \frac{d_m}{\sqrt{150}}$$

oder mit Benützung von Gleichung (1)

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{150n}} \quad (2)$$

Bezeichnet man noch den Ablesungsfehler, der sich auf das Mittel aus den beiden Nivellements bezieht, dem also das Gewicht 3 zukommt, mit μ_b , so findet man

$$\mu_b = \frac{m}{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad \mu_b = \sqrt{\frac{[dd]}{450n}} \quad (3)$$

Nach dieser Gleichung wurde der Ablesungsfehler μ_b für dieselben Strecken wie oben ermittelt. Die gefundenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; bei dieser enthält die Spalte 1 die nähere Bezeichnung der Strecke, Spalte 2 das Jahr der Messung, Spalte 3 die Anzahl n der benützten Gruppen und Spalte 4 den Ablesungsfehler μ_b :

Strecke	Jahr der Messung	Anzahl der Gruppen n	μ_b mm
Bietigheim—Heilbronn—Hall—Crailsheim— Goldshöfe	1877	23	$\pm 0,18$
Hall—Gaildorf—Bietigheim	1873	19	0,19
Aalen—Gmünd	1877	4	0,31
Süßen—Gmünd—Gaildorf	1873	16	0,19
Goldshöfe—Aalen—Gmünd—Cannstatt— Stuttgart	1875	12	0,23
Goldshöfe—Aalen (Kontrollmessung) . . .	1875	3	0,07
Stuttgart—Bietigheim	1869	4	0,10
Zuffenhausen—Calw	1875	7	0,21

Strecke	Jahr der Messung	Anzahl der Gruppen n	μ_b mm
Horb—Calw—Pforzheim—Mühlacker . . .	1875	11	$\pm 0,22$
	1878	13	0,15
Bietigheim—Mühlacker—Bruchsal	1869	8	0,07
	1877	8	0,21
Mühlacker—Bruchsal	1878	5	0,23
Stuttgart—Herrenberg—Horb	1871	13	0,18
Tübingen—Herrenberg	1871	4	0,08
Plochingen—Tübingen—Horb—Rottweil— Villingen	1870	21	0,24
Süßen—Plochingen—Cannstatt	1869	6	0,10
Süßen—Ulm	1869	7	0,21
Ulm—Aulendorf—Friedrichshafen—Kreß- bronn—Nonnenhorn	1869	16	0,04
Aulendorf—Sigmaringen—Tübingen . . .	1874	26	0,24
Heilbronn—Jagstfeld	1877	4	0,11
Horb—Freudenstadt—Kniebis	1881	10	0,14
Rottweil—Immendingen	1874	6	0,21
Aulendorf—Leutkirch	1872	9	0,11
	1878	11	0,40
Leutkirch—Rötenbach	1872/4	6	0,23
	1878	—	0,40
Rötenbach—Hergatz	1874	—	0,23
Leutkirch—Memmingen	1872	—	0,11
Goldshöfe—Nördlingen	1869	5	0,07
	1878	5	0,54

Für die im Jahre 1869 gemessenen Strecken wurde mit Rücksicht auf das gleiche Gewicht der beiden gleichzeitig ausgeführten Nivellements — ähnlich wie bei der Bestimmung von μ_a — nicht die Gleichung (3) benützt, sondern

$$\mu_b = \sqrt{\frac{[d d]}{400 n}}$$

Im ganzen wurden zur Bestimmung der einzelnen μ_b 282 Gruppen zu je 50 Wechsellpunkten benützt.

Bestimmt man aus den Ablesungsfehlern sämtlicher Strecken einen mittleren Ablesungsfehler μ_b' für das ganze Nivellement, so erhält man für diesen

$$\mu_b' = \sqrt{\frac{[n \mu_b^2]}{[n]}} = \pm 0,21 \text{ mm}$$

und als mittleren Fehler für einen der 28 Ablesungsfehler $\pm 0,11$ mm.

Läßt man wieder zur Bildung von μ_b' den für die Strecke Goldshöfe—Nördlingen (1878) gefundenen Wert für μ_b weg, so erhält man

$$\mu_b'' = \pm 0,20 \text{ mm}$$

und als mittleren Fehler für einen der 27 benützten Ablesungsfehler $\pm 0,08$ mm. Läßt man endlich auch noch — wie bei μ_a''' — die Strecke Aulendorf—Leutkirch (1878) weg, so findet man

$$\mu_b''' = \pm 0,19 \text{ mm}$$

und als mittleren Fehler einer Bestimmung $\pm 0,07$ mm.

Aus den gefundenen Werten μ_a und μ_b für die Ablesungsfehler der einzelnen Strecken wurden die endgültigen Ablesungsfehler μ nach der Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_a^2 + \mu_b^2}{2}}$$

abgeleitet. Die folgende Zusammenstellung enthält für jede Strecke die drei Werte μ_a , μ_b und μ .

Strecke	Jahr der Messung	μ_a mm	μ_b mm	μ mm
Bietigheim — Heilbronn — Hall — Crailsheim—Goldshöfe	1877	0,23	0,18	0,21
Hall—Gaildorf—Bietigheim	1873	0,25	0,19	0,22
Aalen—Gmünd	1877	0,20	0,31	0,26
Süßen—Gmünd—Gaildorf	1873	0,21	0,19	0,20
Goldshöfe—Aalen—Gmünd—Cannstatt—Stuttgart	1875	0,17	0,23	0,20
Goldshöfe—Aalen (Kontrollmessung) . .	1875	0,17	0,07	0,13
Stuttgart—Bietigheim	1869	0,24	0,10	0,18
Zuffenhausen—Calw	1875	0,25	0,21	0,23
Horb—Calw—Pforzheim—Mühlacker . .	1875	0,23	0,22	0,23
	1878	0,15	0,15	0,15
Bietigheim—Mühlacker—Bruchsal . . .	1869	0,10	0,07	0,09
	1877	0,21	0,21	0,21
Mühlacker—Bruchsal	1878	0,20	0,23	0,22
Stuttgart—Herrenberg—Horb	1871	0,26	0,18	0,22
Tübingen—Herrenberg	1871	0,13	0,08	0,11
Plochingen—Tübingen—Horb—Rottweil—Villingen	1870	0,28	0,24	0,26
Süßen—Plochingen—Cannstatt	1869	0,16	0,10	0,13
Süßen—Ulm	1869	0,19	0,21	0,20
Ulm—Aulendorf—Friedrichshafen—Kreßbronn—Nonnenhorn	1869	0,13	0,04	0,10
Aulendorf—Sigmaringen—Tübingen . .	1874	0,22	0,24	0,23
Heilbronn—Jagstfeld	1877	0,11	0,11	0,11

Strecke	Jahr der Messung	μ_a mm	μ_b mm	μ mm
Horb—Freudenstadt—Kniebis	1881	0,14	0,14	0,14
Rottweil—Immendingen	1874	0,26	0,21	0,24
Aulendorf—Leutkirch	1872	0,11	0,11	0,11
	1878	0,37	0,40	0,39
Leutkirch—Rötenbach	1872/4	0,17	0,23	0,20
	1878	0,37	0,40	(0,39)
Rötenbach—Hergatz	1874	0,17	0,23	(0,20)
Leutkirch—Memmingen	1872	0,11	0,11	(0,11)
Goldshöfe—Nördlingen	1869	0,19	0,07	0,14
	1878	0,52	0,54	0,53

Wie ein Vergleich der zusammengehörigen Werte von μ_a und μ_b zeigt, passen diese im allgemeinen — besonders bei den durch auffallend hohe Beträge sich auszeichnenden Strecken Goldshöfe—Nördlingen (1878) und Aulendorf—Leutkirch (1878) — gut zusammen; merkliche Abweichungen ergeben sich hauptsächlich bei kürzeren Strecken, bei denen zur Bestimmung von μ_b nur wenige Gruppen zu je 50 Wechsellpunkten zur Verfügung stehen.

Aus den 28 verschiedenen Werten¹ für μ wurden wieder in ähnlicher Weise wie aus den Werten für μ_a und μ_b mittlere Ablesungsfehler μ' , μ'' und μ''' gebildet; zum Vergleich seien alle diese Mittelwerte hier nebeneinandergestellt:

- Mit Benützung sämtlicher Strecken:
 $\mu_a' = 0,24$ mm $\mu_b' = 0,21$ mm $\mu' = 0,22$ mm.
- Mit Weglassung der Strecke Goldshöfe—Nördlingen (1878):
 $\mu_a'' = 0,22$ mm $\mu_b'' = 0,20$ mm $\mu'' = 0,20$ mm.
- Mit Weglassung der Strecken Goldshöfe—Nördlingen (1878) und Aulendorf—Leutkirch (1878):
 $\mu_a''' = 0,21$ mm $\mu_b''' = 0,19$ mm $\mu''' = 0,19$ mm.

Als mittleren Fehler für einen der zur Bestimmung der mittleren Ablesungsfehler benützten Ablesungsfehler findet man

- Mit Benützung sämtlicher Strecken:
 $\pm 0,09$ mm $\pm 0,11$ mm $\pm 0,09$ mm.
- Mit Weglassung der Strecke Goldshöfe—Nördlingen (1878):
 $\pm 0,07$ mm $\pm 0,08$ mm $\pm 0,07$ mm.

¹ Die in Klammern gesetzten Werte wurden, weil von andern Strecken übernommen, nicht benutzt.

c) Mit Weglassung der Strecken Goldshöfe—Nördlingen (1878) und Aulendorf—Leutkirch (1878):

$$\pm 0,06 \text{ mm} \pm 0,07 \text{ mm} \pm 0,05 \text{ mm}.$$

Die in jedem Fall hohen Beträge, die der mittlere Fehler einer Bestimmung des Ablesungsfehlers erreicht, deuten darauf hin, daß das durch das württembergische Präzisionsnivelement gewonnene Material kein in sich gleichwertiges ist. Um zu zeigen, wie weit hieran der oftmalige Wechsel im Beobachterpersonal schuld ist, sind die den einzelnen Beobachtern zukommenden Werte μ in der folgenden Zusammenstellung angegeben:

Beobachter	Jahr der Messung	Ablesungsfehler μ	
		einzelne mm	im Mittel mm
Sattler	1869	—	0,15
Fecht	1869	—	0,14
Fetscher	1870	—	0,26
Bürkle	1870	—	0,22
Dreher	1872	—	0,11
Bechtle	1873	0,21	} 0,23
„	1874	0,24	
„	1875	0,22	
„	1877	0,23	
Stahl	1878	—	0,40
Groß	1881	—	0,14

Wie diese Zusammenstellung zeigt, schwanken die den einzelnen Beobachtern zukommenden Werte des Ablesungsfehlers μ teilweise sehr.

Vergleicht man den bei Benützung von sämtlichen Strecken gefundenen Mittelwert von 0,24 mm mit demjenigen Wert für den Ablesungsfehler μ , der anlässlich der gemeinsamen Bestimmung von Ablesungsfehler und Lattenfehler (siehe S. 42) gefunden wurde, so zeigt sich, daß der letztere Wert dreimal so groß ist als der erstere, nämlich 0,74 mm. Daß der Wert 0,74 mm für den Ablesungsfehler zu groß ist, dürfte sehr wahrscheinlich sein.

8. Bestimmung des Lattenfehlers für jede einzelne Strecke.

Nachdem der Ablesungsfehler für jede Strecke einzeln ermittelt ist, kann man mit Hilfe der Polygonwidersprüche w' , w'' für jede Strecke den ihr zukommenden Lattenfehler bestimmen.

Bezeichnet man, entsprechend den einzelnen Polygonen und den einzelnen Teilstrecken in ihnen die von Lattenfehlern, nicht aber von Ablesungsfehlern freien Höhenunterschiede mit $l_1', l_2', l_3', \dots; l_1'', l_2'', l_3'' \dots$ usw.; die Ablesungsfehler mit $\mu_1', \mu_2', \mu_3' \dots; \mu_1'', \mu_2'', \mu_3'' \dots$ usw.; und die Anzahl der Instrumentenaufstellungen mit $n_1', n_2', n_3' \dots; n_1'', n_2'', n_3'' \dots$ usw., so bestehen zwischen diesen Größen die folgenden, aus den Polygon-schlüssen sich ergebenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} l_1' + l_2' + l_3' + \dots \pm \mu_1' \sqrt{2n_1'} \pm \mu_2' \sqrt{2n_2'} \\ \pm \mu_3' \sqrt{2n_3'} \pm \dots = 0 \\ l_1'' + l_2'' + l_3'' + \dots \pm \mu_1'' \sqrt{2n_1''} \pm \mu_2'' \sqrt{2n_2''} \\ \pm \mu_3'' \sqrt{2n_3''} \pm \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

Bezeichnet man ferner die gemessenen Höhenunterschiede mit $h_1', h_2', h_3' \dots; h_1'', h_2'', h_3'' \dots$ usw.; die an diesen anzubringen-den Verbesserungen wegen der Lattenfehler $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3' \dots; \lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'' \dots$ usw. mit $v_1', v_2', v_3' \dots; v_1'', v_2'', v_3'' \dots$ usw., so erhält man, wenn man noch setzt

$$\begin{aligned} h_1' + h_2' + h_3' + \dots &= w' \\ h_1'' + h_2'' + h_3'' + \dots &= w'' \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

an Stelle der Gleichungen (1) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v_1' + v_2' + v_3' + \dots \pm \mu_1' \sqrt{2n_1'} \pm \mu_2' \sqrt{2n_2'} \\ \pm \mu_3' \sqrt{2n_3'} \pm \dots + w' = 0 \\ v_1'' + v_2'' + v_3'' + \dots \pm \mu_1'' \sqrt{2n_1''} \pm \mu_2'' \sqrt{2n_2''} \\ \pm \mu_3'' \sqrt{2n_3''} \pm \dots + w'' = 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (2)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \lambda_1' h_1' & v_2' &= \lambda_2' h_2' & v_3' &= \lambda_3' h_3' \dots \\ v_1'' &= \lambda_1'' h_1'' & v_2'' &= \lambda_2'' h_2'' & v_3'' &= \lambda_3'' h_3'' \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

Setzt man in den Gleichungen (2) auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\left. \begin{aligned} w_{\lambda'} &= \sqrt{w'^2 - 2 [\mu'^2 n']} \\ w_{\lambda''} &= \sqrt{w''^2 - 2 [\mu''^2 n'']} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} 2[\mu'^2 n'] &= 2\mu_1'^2 n_1' + 2\mu_2'^2 n_2' + 2\mu_3'^2 n_3' + \dots \\ 2[\mu''^2 n''] &= 2\mu_1''^2 n_1'' + 2\mu_2''^2 n_2'' + 2\mu_3''^2 n_3'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

so gehen sie über in

$$\left. \begin{aligned} v_1' + v_2' + v_3' + \dots + w_\lambda' &= 0 \\ v_1'' + v_2'' + v_3'' + \dots + w_\lambda'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Betrachtet man nun die Gleichungen (6) als die Bedingungen einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen, so kann man in der üblichen Weise die Verbesserungen v und damit die Lattenfehler λ bestimmen.

Benützt man wieder das in Fig. 7 gezeichnete Netz, so findet man bei der Bestimmung der — nur durch die Lattenfehler λ hervorgerufenen — Widersprüche w_λ die folgenden Werte:

Polygon	w	w ²	2[μ ² n]	w ² _λ	w _λ
	mm				mm
I	+ 19	361	146	+ 215	+ 15
II	+ 59	3481	129	+ 3352	+ 58
III	— 24	576	148	+ 428	— 21
IV	+ 77	5929	77	+ 5852	+ 76
V	— 34	1156	138	+ 1018	— 32
VI	+ 28	784	78	+ 706	+ 27
VII	+ 6	36	96	— 60	.
VIII	+ 86	7396	70	+ 7326	+ 86
IX	+ 16	256	231	+ 25	+ 5

Für die Widersprüche w_λ erhält man mit Ausnahme von dem Polygon VII reelle Werte, die dieselben Vorzeichen wie die Widersprüche w haben.

Die zwischen den zu bestimmenden Größen $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{30}$ bestehenden 8 Bedingungsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 &+ 15 = 0 \\ -v_3 + v_5 + v_6 - v_7 + v_8 &+ 58 = 0 \\ +v_4 - v_8 - v_9 + v_{10} + v_{11} - v_{12} &- 21 = 0 \\ +v_{12} + v_{13} - v_{14} - v_{15} - v_{16} &+ 76 = 0 \\ -v_{13} - v_{11} + v_{17} - v_{18} - v_{19} &- 32 = 0 \\ +v_{18} - v_{20} + v_{21} &+ 27 = 0 \\ +v_9 + v_{24} - v_{25} - v_{22} &+ 86 = 0 \\ -v_{23} + v_{25} + v_{26} + v_{27} + v_{28} + v_{29} - v_{30} &+ 5 = 0 \end{aligned}$$

Um zu einer Gewichtsbestimmung zu gelangen, muß man annehmen, daß der Lattenfehler für alle Strecken derselbe ist; es läßt sich dann zeigen, daß man setzen kann

$$\frac{1}{p} = h^2$$

Die Normalgleichungen zur Bestimmung der 8 Korrelaten $k_1, k_2, \dots, k_9$ erhält man in der üblichen Weise aus den in der folgenden Übersicht angedeuteten Korrelatengleichungen; die Gewichtseinheit bezieht sich auf $h = 100$ m.

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_8	k_9	$\frac{1}{p}$
$v_1 P_1 = -1$	.	.	.	.	.	.	.	.	0,395
$v_2 P_2 = +1$	.	.	.	.	.	.	.	.	2,200
$v_3 P_3 = +1$	-1	.	.	.	.	.	.	.	0,047
$v_4 P_4 = -1$	.	+1	.	.	.	.	.	.	1,151
$v_5 P_5 = .$	+1	.	.	.	.	.	.	.	1,074
$v_6 P_6 = .$	+1	.	.	.	.	.	.	.	0,354
$v_7 P_7 = .$	-1	.	.	.	.	.	.	.	2,243
$v_8 P_8 = .$	+1	-1	.	.	.	.	.	.	0,007
$v_9 P_9 = .$	.	-1	.	.	.	.	+1	.	0,942
$v_{10} P_{10} = .$	.	+1	.	.	.	.	.	.	0,075
$v_{11} P_{11} = .$	.	+1	.	-1	.	.	.	.	0,099
$v_{12} P_{12} = .$	.	-1	+1	.	.	.	.	.	0,368
$v_{13} P_{13} = .$	.	.	+1	-1	.	.	.	.	0,452
$v_{14} P_{14} = .$	.	.	-1	.	.	.	.	.	0,460
$v_{15} P_{15} = .$	.	.	-1	.	.	.	.	.	0,159
$v_{16} P_{16} = .$	.	.	-1	.	.	.	.	.	0,041
$v_{17} P_{17} = .$	.	.	.	+1	.	.	.	.	3,191
$v_{18} P_{18} = .$	.	.	.	-1	+1	.	.	.	0,137
$v_{19} P_{19} = .$	.	.	.	-1	.	.	.	.	0,186
$v_{20} P_{20} = .$	.	.	.	.	-1	.	.	.	1,130
$v_{21} P_{21} = .$	.	.	.	.	+1	.	.	.	0,481
$v_{22} P_{22} = .$	.	.	.	.	.	-1	.	.	0,098
$v_{23} P_{23} = .$	.	.	.	.	.	.	-1	.	0,469
$v_{24} P_{24} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,208
$v_{25} P_{25} = .$	.	.	.	.	.	-1	+1	.	1,238
$v_{26} P_{26} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	1,253
$v_{27} P_{27} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,496
$v_{28} P_{28} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,016
$v_{29} P_{29} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,015
$v_{30} P_{30} = .$	.	.	.	.	.	.	.	-1	6,260

Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_8 & k_9 & w_\lambda \\
 + 3,793 & - 0,047 & - 1,151 & . & . & . & . & . & + 15 = 0 \\
 . & . & + 3,725 & - 0,007 & . & . & . & . & + 58 = 0 \\
 . & . & . & + 2,642 & - 0,368 & - 0,099 & . & - 0,942 & - 21 = 0 \\
 . & . & . & . & + 1,480 & - 0,452 & . & . & + 76 = 0 \\
 . & . & . & . & . & + 4,065 & - 0,137 & . & - 32 = 0 \\
 . & . & . & . & . & . & + 1,748 & . & + 27 = 0 \\
 . & . & . & . & . & . & + 2,486 & - 1,238 & + 86 = 0 \\
 . & . & . & . & . & . & . & + 9,747 & + 5 = 0
 \end{array}$$

Hieraus ergeben sich für die Korrelaten die folgenden Werte:

$$\begin{array}{l}
 k_1 = -10,43 \quad k_2 = -15,74 \quad k_3 = -20,69 \quad k_4 = -56,29 \\
 k_5 = +0,58 \quad k_6 = -15,40 \quad k_8 = -45,56 \quad k_9 = -6,30
 \end{array}$$

Damit findet man mit Benützung der Korrelatengleichungen und der Gleichungen (3) für die v und λ die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Werte, wobei die λ_{10} sich auf einen Höhenunterschied von 10 m beziehen.

Strecke	v	λ_{10}	Strecke	v	λ_{10}	Strecke	v	λ_{10}
	mm	mm		mm	mm		mm	mm
1	+ 4,1	+ 0,66	11	- 2,1	- 0,67	21	- 7,4	- 1,07
2	- 23,0	- 1,55	12	- 13,1	- 2,16	22	+ 4,5	+ 1,42
3	+ 0,3	+ 0,11	13	- 25,7	- 3,82	23	+ 3,0	+ 0,43
4	- 11,8	- 1,10	14	+ 25,9	+ 3,82	24	- 9,5	- 2,08
5	- 16,9	- 1,63	15	+ 9,0	+ 2,25	25	+ 48,6	+ 4,37
6	- 5,8	- 0,97	16	+ 2,3	+ 1,15	26	- 7,9	- 0,71
7	+ 35,3	+ 2,35	17	+ 1,9	+ 0,10	27	- 3,1	- 0,44
8	+ 0,0	+ 0,04	18	- 2,2	- 0,59	28	- 0,1	- 0,08
9	- 23,4	- 2,40	19	- 0,1	- 0,03	29	- 0,1	- 0,08
10	- 1,6	- 0,57	20	+ 17,4	+ 1,64	30	+ 39,4	+ 1,58

Als mittleren Lattenfehler λ_{10} bezogen auf den Höhenunterschied 10 m erhält man

$$\lambda_{10} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{30}} = \sqrt{\frac{93,0}{30}} = \pm 1,76 \text{ mm.}$$

Mit diesem Wert und dem für den Ablesungsfehler gefundenen Mittelwert $\mu = \pm 0,24$ mm findet man für den mittleren Fehler m einer 1 km langen, mit $n = 10$ Standpunkten nivellierten Strecke mit dem Höhenunterschied 10 m

$$m = \sqrt{2n\mu^2 + \lambda_{10}^2} = \pm 2,04 \text{ mm}$$

Unter der Annahme, daß kein Lattenfehler vorhanden ist, findet man für den mittleren Fehler m' einer 1 km langen, mit $n = 10$ Aufstellungen nivellierten Strecke

$$m' = \mu \sqrt{2n} = \pm 1,07 \text{ mm}$$

Die entsprechenden Werte bei gemeinsamer Bestimmung von Lattenfehler und Ablesungsfehler waren

$$\mu = \pm 0,74 \text{ mm} \quad \lambda_{10} = \pm 2,15 \text{ mm} \quad m = \pm 3,9 \text{ mm} \quad m' = \pm 3,3 \text{ mm}$$

Die zur Bestimmung der Lattenfehler benützten Messungen wurden mit verschiedenen Latten, in verschiedenen Jahren und zu verschiedenen Jahreszeiten ausgeführt; es läßt sich daher nicht beurteilen, wie weit die gefundenen Einzelwerte der Wirklichkeit entsprechen.

9. Untersuchung der für die einzelnen Strecken ermittelten Werte für den Ablesungsfehler und den Lattenfehler.

Eine Untersuchung der im vorstehenden ermittelten Werte für den Ablesungsfehler und den Lattenfehler der einzelnen Strecken läßt sich indirekt vornehmen mit Hilfe der übrigbleibenden Fehler und der mittleren Fehler der ausgeglichenen Höhenunterschiede, die sich bei der Ausgleichung des Netzes der Fig. 7 ergeben, wenn man den Gewichtsbestimmungen die gefundenen Werte für μ und λ zugrunde legt.

Die Gleichung zur Bestimmung der Gewichte ist die schon oben angegebene

$$p = \frac{\text{Const.}}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2}$$

Die Gewichtskonstante möge so bestimmt werden, daß das Gewicht $p = 1$ sich wieder auf eine Strecke bezieht, die bei einem Höhenunterschied von $h = 50$ m mit $n = 50$ Standpunkten nivelliert wurde. Ferner möge festgesetzt werden, daß das Gewicht $p = 1$ sich auf eine gedachte Strecke bezieht, welche mit einem Ablesungsfehler $\mu = \pm 0,24$ mm und einem Lattenfehler $\lambda = \pm 1,76$ mm nivelliert wurde; es sind dies die bei der Einzelbestimmung der beiden Fehler gefundenen Mittelwerte.

Auf Grund dieser Festsetzungen ergibt sich für die Gewichtskonstante der Wert 83,3 und man erhält zur Bestimmung der Gewichte die Gleichung

$$p = \frac{83,3}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2}$$

Die bei der Gewichtsrechnung benutzten, und die aus diesen sich ergebenden Werte sind in der folgenden Zusammenstellung angegeben, die außerdem die mittleren Fehler m der Strecken vor der Ausgleichung enthält.

Strecke	n	μ mm	h 10 m	λ_{10} mm	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$	m mm
1	225	0,21	6,282	0,66	0,44	1,50	6,1
2	430	0,21	14,837	1,55	6,78	0,39	23,8
3	235	0,22	2,177	0,11	0,27	1,91	4,8
4	680	0,22	10,730	1,10	2,47	0,64	14,3
5	265	0,21	10,366	1,63	3,71	0,52	17,6
6	235	0,21	5,953	0,97	0,65	1,24	7,4
7	220	0,23	14,978	2,35	15,25	0,25	35,7
8	490	0,20	0,842	0,04	0,47	1,46	6,3
9	340	0,20	9,708	2,40	6,87	0,38	24,0
10	40	0,20	2,743	0,57	0,07	3,86	2,4
11	70	0,18	3,141	0,67	0,11	3,05	3,0
12	120	0,18	6,067	2,16	2,15	0,68	13,4
13	365	0,23	6,720	3,82	8,38	0,35	26,4
14	210	0,19	6,779	3,82	8,24	0,35	26,2
15	100	0,19	3,983	2,25	1,05	0,97	9,3
16	180	0,15	2,017	1,15	0,16	2,49	3,7
17	380	0,22	17,862	0,10	0,48	1,44	6,3
18	335	0,22	3,695	0,59	0,45	1,49	6,1
19	350	0,19	4,309	0,03	0,30	1,82	5,0
20	237	0,11	10,628	1,64	3,70	0,52	17,6
21	220	0,26	6,935	1,07	1,02	0,99	9,2
22	140	0,13	3,131	1,42	0,30	1,84	5,0
23	340	0,26	6,846	0,43	0,66	1,24	7,4
24	390	0,20	4,558	2,08	1,45	0,83	11,0
25	200	0,13	11,126	4,37	28,43	0,19	48,6
26	360	0,20	11,195	0,71	1,10	0,95	9,6
27	420	0,10	7,044	0,44	0,22	2,15	4,3
28	250	0,23	1,263	0,08	0,32	1,78	5,1
29	70	0,23	1,241	0,08	0,09	3,36	2,7
30	1010	0,23	25,020	1,58	19,96	0,22	40,8

Die Bedingungsgleichungen und die Korrelatengleichungen — diese abgesehen von den Gewichten — sind dieselben wie bei der unter 6 vorgenommenen Ausgleichung. Als Normalgleichungen erhält man die folgenden:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	w
+ 9,96	— 0,27	— 2,47	.	.	.	.	.	.	+ 19 = 0
.	+ 20,35	— 0,47	.	.	.	.	.	.	+ 59 = 0
.	.	+ 12,14	— 2,15	— 0,11	.	— 0,07	— 6,87	.	— 24 = 0
.	.	.	+ 19,98	— 8,38	.	.	.	.	+ 77 = 0
.	.	.	.	+ 9,72	— 0,45	— 0,48	.	.	— 34 = 0
.	.	.	.	.	+ 5,17	— 3,70	.	.	+ 28 = 0
.	.	.	.	.	.	+ 5,21	— 0,30	— 0,66	+ 6 = 0
.	.	.	.	.	.	.	+ 37,05	— 28,43	+ 86 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	+ 50,78	+ 16 = 0

Hieraus findet man für die Korrelaten:

$$\begin{aligned} k_1 &= -2,738 & k_2 &= -3,016 & k_3 &= -3,021 \\ k_4 &= -5,111 & k_5 &= -2,263 & k_6 &= -14,643 \\ k_7 &= -12,593 & k_8 &= -5,871 & k_9 &= -3,767 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für die Verbesserungen v , die $p \ v \ v$ und die $v \sqrt{p}$ die folgenden Werte:

Strecke	v mm	$p \ v \ v$	$v \sqrt{p}$ mm	Strecke	v mm	$p \ v \ v$	$v \sqrt{p}$ mm
1	+ 1,2	3,3	+ 1,8	16	+ 0,8	4,2	+ 2,0
2	— 18,7	51,3	— 7,2	17	+ 5,0	51,6	+ 7,2
3	+ 0,1	0,0	+ 0,2	18	— 5,5	68,8	— 8,3
4	— 0,7	0,2	— 0,4	19	+ 0,7	1,5	+ 1,3
5	— 11,2	33,6	— 5,8	20	+ 7,6	15,5	+ 3,9
6	— 1,9	5,8	— 2,4	21	— 14,9	218,4	— 14,8
7	+ 45,8	137,8	+ 11,8	22	— 2,0	13,3	— 3,7
8	± 0,0	0,0	± 0,0	23	— 5,8	51,3	— 7,2
9	— 19,6	55,8	— 7,5	24	— 8,5	50,1	— 7,1
10	+ 0,6	6,2	+ 2,5	25	+ 59,8	126,0	+ 11,3
11	— 0,1	0,1	— 0,3	26	— 4,1	15,5	— 3,9
12	— 4,5	9,4	— 3,1	27	— 0,8	3,1	— 1,8
13	— 23,9	68,1	— 8,3	28	— 1,2	4,5	— 2,1
14	+ 42,1	215,1	+ 14,7	29	— 0,3	1,3	— 1,1
15	+ 5,4	27,4	+ 5,2	30	+ 75,2	283,2	+ 16,8

Für die Summe der $p v v$ erhält man einerseits
 $[p v v] = 1522$
 und andererseits

$$[p v v] = -[w k] = 1524.$$

Damit findet man für den mittleren Fehler m_0 der Gewichtseinheit, die sich auf $n = 50$ Instrumentaufstellungen, einen Höhenunterschied $h = 50$ m, einen Ablesungsfehler $\mu = \pm 0,24$ mm und einen Lattenfehler $\lambda_{10} = \pm 1,76$ mm bezieht

$$m_0 = \sqrt{\frac{1523}{9}} = \pm 13,0 \text{ mm.}$$

Dieser mittlere Fehler ist mit dem auf S. 47 gefundenen nicht unmittelbar vergleichbar, da der letztere sich auf $\mu = \pm 0,74$ mm und $\lambda = \pm 2,15$ mm bezieht; für das Gewicht p_0' eines mittleren Fehlers m_0' , der sich ebenfalls auf diese Werte von μ und λ bezieht, findet man

$$p_0' = \frac{83,3}{170,3} = 0,49$$

und damit für den mittleren Fehler m_0' selbst

$$m_0' = \frac{13,0}{\sqrt{0,49}} = \pm 18,6 \text{ mm}$$

im Gegensatz zu $\pm 13,8$ mm auf S. 47.

Für den mittleren Fehler m einer 1 km langen mit 10 Aufstellungen, also mit einer Zielweite von 50 m nivellierten Strecke mit einem Höhenunterschied von 10 m findet man

$$m = \frac{13,0}{\sqrt{19,6}} = \pm 2,58 \text{ mm.}$$

Für denselben Fehler wurde vor der Ausgleichung $\pm 2,04$ mm gefunden.

Bei den übrigbleibenden Fehlern überwiegen die negativen Werte; es kommen 13 positive und 17 negative vor.

Für die Summen der positiven und negativen, auf gleiches Gewicht reduzierten Fehler findet man

$$[+v\sqrt{p}] = 78,9 \text{ und } [-v\sqrt{p}] = 84,8.$$

Die Summen ihrer Quadrate sind

$$[+p v v] = 872 \text{ und } [-p v v] = 650.$$

Für den mittleren Fehler m_v und den durchschnittlichen Fehler d_v erhält man

$$m_v = \sqrt{\frac{1523}{30}} = \pm 7,12 \text{ mm und } d_v = \frac{163,7}{30} = \pm 5,46 \text{ mm.}$$

Hieraus findet man für das Verhältnis der beiden Fehler m_v und d_v , das nach dem GAUSS'schen Fehlergesetz gleich 1,25 sein soll,

$$\frac{m_v}{d_v} = \frac{7,12}{5,46} = 1,30.$$

Für den wahrscheinlichen Fehler w_v erhält man:

$$w_v = 0,674 m_v = \pm 4,8 \text{ mm.}$$

Zwischen den Grenzen $+4,8$ und $-4,8$ soll demnach die Hälfte aller Fehler — nämlich 15 — liegen; während in Wirklichkeit 16 zwischen diesen Grenzen liegen.

Ordnet man die $\sqrt{v}$ nach ihren absoluten Werten und vergleicht sie mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz, so erhält man folgende Zahlen:

Zwischen den Grenzen	sollen liegen	Tatsächlich liegen		
		zusammen	positive	negative
$\pm 0,1 m_v = \pm 0,71$	2,4	4	2	2
0,2 1,42	4,8	6	3	3
0,3 2,14	7,1	10	5	5
0,4 2,85	9,3	12	6	6
0,5 3,56	11,5	13	6	7
0,6 4,27	13,5	16	7	9
0,7 4,98	15,5	16	7	9
0,8 5,70	17,3	17	8	9
0,9 6,41	19,0	18	8	10
1,0 7,12 ¹	20,5	20	8	12
1,5 10,68	26,0	25	9	16
2,0 14,24	28,6	27	11	16
2,5 17,80	29,6	30	13	17
3,0 21,36	29,9	30	13	17

Wie die vorstehenden Untersuchungen zeigen, entsprechen die übrigbleibenden Fehler dem GAUSS'schen Fehlergesetz ziemlich gut.

Berechnet man die mittleren Fehler m' der ausgeglichenen Höhenunterschiede, so erhält man die in der folgenden Übersicht angegebenen Werte. Die Übersicht enthält außerdem die vor der Ausgleichung für die Zwecke der Gewichtsbestimmung ermittelten mittleren Fehler m der einzelnen Höhenunterschiede. Die Werte von m' und m sind auf 0,5 mm abgerundet.

Strecke	Mittlerer Fehler			Strecke	Mittlerer Fehler		
	m vor der Ausgl.	m' nach der Ausgl.	$\frac{m}{m'}$		m vor der Ausgl.	m' nach der Ausgl.	$\frac{m}{m'}$
	mm	mm			mm	mm	
1	$\pm 6,0$	$\pm 8,5$	0,7	16	$\pm 3,5$	$\pm 5,0$	0,7
2	24,0	17,5	1,4	17	6,5	8,0	0,8
3	5,0	6,5	0,8	18	6,0	7,5	0,8
4	14,5	15,5	0,9	19	5,0	7,0	0,7
5	17,5	22,5	0,8	20	17,5	10,0	1,8
6	7,5	10,5	0,7	21	9,0	9,5	1,0
7	35,5	25,5	1,4	22	5,0	6,5	0,8
8	6,5	8,5	0,8	23	7,5	9,0	0,8
9	24,0	19,0	1,3	24	11,0	15,5	0,7
10	2,5	3,5	0,7	25	48,5	23,5	2,1
11	3,0	4,5	0,7	26	9,5	13,5	0,7
12	13,5	15,5	0,9	27	4,5	6,0	0,8
13	26,5	12,0	2,2	28	5,0	7,5	0,7
14	26,0	21,0	1,2	29	2,5	4,0	0,6
15	9,5	12,5	0,8	30	41,0	27,5	1,5

Wie diese Zusammenstellung zeigt, werden die mittleren Fehler durch die Ausgleichung zum Teil vergrößert und zum Teil verkleinert, und zwar derart, daß die kleineren Werte eine Vergrößerung, und die größeren Werte eine Verkleinerung erfahren.

10. Vergleichung der Ergebnisse der beiden, unter Zugrundlegung von verschiedenen Gewichtsannahmen ausgeführten Ausgleichungen.

Im folgenden möge die Ausgleichung, bei deren Gewichtsbestimmungen Mittelwerte für den Ablesungsfehler und für den Lattenfehler benützt wurden, als Ausgleichung A, und diejenige, bei der Einzelwerte der beiden Fehler verwendet wurden, als Ausgleichung B bezeichnet werden.

Als mittlerer Fehler m_0 der Gewichtseinheit bezogen auf $n = 50$ Instrumentaufstellungen, $h = 50$ m Höhenunterschied, $\mu = \pm 0,74$ mm Ablesungsfehler und $\lambda_{10} = \pm 2,15$ mm Lattenfehler¹ wurde gefunden bei der Ausgleichung A:

$$m_0 = \pm 13,8 \text{ mm}$$

¹ Die Werte für μ und λ sind die Mittelwerte der Ausgleichung A.

und bei der Ausgleichung B:

$$m_0 = \pm 18,6 \text{ mm}$$

Für den mittleren Fehler m einer 1 km langen mit 10 Aufstellungen nivellierten Strecke mit einem Höhenunterschied von 10 m ergibt

die Ausgleichung A:

vor der Ausgleichung

nach der Ausgleichung

$$m = \pm 3,9 \text{ mm}$$

$$m = \pm 4,2 \text{ mm}$$

wobei beide Werte sich auf $\mu = \pm 0,74 \text{ mm}$ und $\lambda_{10} = \pm 2,15 \text{ mm}$ beziehen;

die Ausgleichung B:

vor der Ausgleichung

nach der Ausgleichung

$$m = \pm 2,0 \text{ mm}$$

$$m = \pm 2,6 \text{ mm}$$

beide Werte bezogen auf $\mu = \pm 0,24 \text{ mm}$ und $\lambda_{10} = \pm 1,76 \text{ mm}$.

Durch die Ausgleichung wird demnach der mittlere 1 km Fehler m vergrößert:

bei der Ausgleichung A 1,1 mal

bei der Ausgleichung B 1,3 mal.

Unter den übrigbleibenden Fehlern sind

bei Ausgleichung A:

13 positive und 17 negative,

bei Ausgleichung B:

13 positive und 17 negative.

Das Verhältnis der Anzahl der positiven und negativen Fehler ist also in beiden Fällen dasselbe.

Bei den auf dasselbe Gewicht reduzierten übrigbleibenden Fehlern erhält man für die Summen der positiven bzw. negativen Werte und für die Summen der Quadrate dieser Werte

bei der Ausgleichung A:

$$[+v\sqrt{p}] = 88,9 \text{ und } [-v\sqrt{p}] = 97,0$$

$$[+p\sqrt{v}] = 880 \text{ und } [-p\sqrt{v}] = 831,$$

bei der Ausgleichung B:

$$[+v\sqrt{p}] = 78,9 \text{ und } [-v\sqrt{p}] = 84,8$$

$$[+p\sqrt{v}] = 872 \text{ und } [-p\sqrt{v}] = 650.$$

Das Verhältnis dieser Summen ist demnach bei beiden Ausgleichungen ungefähr gleich günstig.

Für das Verhältnis des mittleren Fehlers m_v und des durchschnittlichen Fehlers d_v , das nach dem GAUSS'schen Fehlergesetz gleich 1,253 sein soll, findet man

bei der Ausgleichung A:

$$\frac{m_v}{d_v} = 122$$

bei der Ausgleichung B:

$$\frac{m_v}{d_v} = 1,30.$$

Bei der Untersuchung der übrigbleibenden Fehler in Bezug auf ihr Vorkommen zwischen bestimmten Grenzen zeigt die Ausgleichung B einen kleinen Vorteil; die Abweichungen von den Sollwerten weisen bei ihr auf ein Vorherrschen von kleineren Fehlerwerten hin.

Das Verhältnis der mittleren Fehler der einzelnen Strecken vor und nach der Ausgleichung ist derart, daß bei der Ausgleichung A für nahezu sämtliche Strecken eine Verkleinerung der mittleren Fehler durch die Ausgleichung stattfindet; bei der Ausgleichung B dagegen findet bei den kleineren Werten eine Vergrößerung, und bei den größeren Werten eine Verkleinerung statt.

Die aus den beiden Ausgleichungen sich ergebenden mittleren Fehler der ausgeglichenen Strecken sind in der folgenden Übersicht nebeneinander gestellt:

Strecke	Ausgleichung		Strecke	Ausgleichung	
	A	B		A	B
	mm	mm		mm	mm
1	± 20,0	± 8,5	16	± 14,5	± 5,0
2	28,0	17,5	17	24,0	8,0
3	16,0	6,5	18	18,0	7,5
4	27,5	15,5	19	19,5	7,0
5	25,5	22,5	20	20,0	10,0
6	20,0	10,5	21	17,5	9,5
7	29,0	25,5	22	13,5	6,5
8	20,0	8,5	23	19,5	9,0
9	21,0	19,0	24	20,5	15,5
10	9,0	3,5	25	22,5	23,5
11	11,0	4,5	26	30,5	13,5
12	15,5	15,5	27	26,0	6,0
13	18,5	12,0	28	17,5	7,5
14	18,5	21,0	29	9,5	4,0
15	13,5	12,5	30	43,0	27,5

Wie diese Zusammenstellung zeigt, sind nur bei den 3 Strecken 12, 14 und 25 die aus der Ausgleichung B sich ergebenden mittleren Fehler gleich oder größer als diejenigen der Ausgleichung A; bei den übrigen 27 Strecken dagegen sind die aus der Ausgleichung B hervorgegangenen mittleren Fehler kleiner als diejenigen aus der Ausgleichung A, und zwar teilweise um recht erhebliche Beträge; bei 16 Strecken z. B. betragen die mittleren Fehler der Ausgleichung B die Hälfte oder weniger als die Hälfte der entsprechenden Werte der Ausgleichung A.

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert bekanntlich nicht nur die wahrscheinlichsten Werte der auszugleichenden Größen, sondern ergibt auch diejenigen Werte, denen kleinste mittlere Fehler zukommen; dies gilt aber nur für den Fall, daß die Gewichte richtig bzw. unzweideutig gegeben sind. Lassen sich die Gewichte, wie im vorliegenden Fall, nicht unzweideutig bestimmen, so wird man unter mehreren mit verschiedenen Gewichtsannahmen ausgeführten Ausgleichungen derjenigen den Vorzug geben, die die kleineren mittleren Fehler für die ausgeglichenen Beobachtungsgrößen ergibt; im vorliegenden Fall ist dies die Ausgleichung B.

III. Ermittlung von neuen Normalnullhöhen.

1. Einleitung.

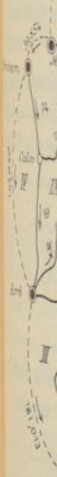
Das Netz des württembergischen Präzisionsnivelements hat mit den Netzen der Nachbarstaaten nicht nur einen, sondern mehrere Punkte gemeinsam; man kann deshalb bei der Ermittlung von N.N.-Höhen für das württembergische Netz zwei verschiedene Wege einschlagen.

Der eine Weg besteht darin, daß man das württembergische Netz zwangsweise zwischen den Netzen der Nachbarstaaten ausgleicht, wobei deren N.N.-Höhen als fehlerfrei anzunehmen sind.

Der andere Weg ergibt sich dadurch, daß man auf einen vollständigen, differenzlosen Anschluß an die Nachbarstaaten verzichtet, indem man das württembergische Netz zuerst in sich ausgleicht, und die ausgeglichenen Höhenunterschiede einer solchen Ausgleichung der Berechnung der N.N.-Höhen zugrunde legt.

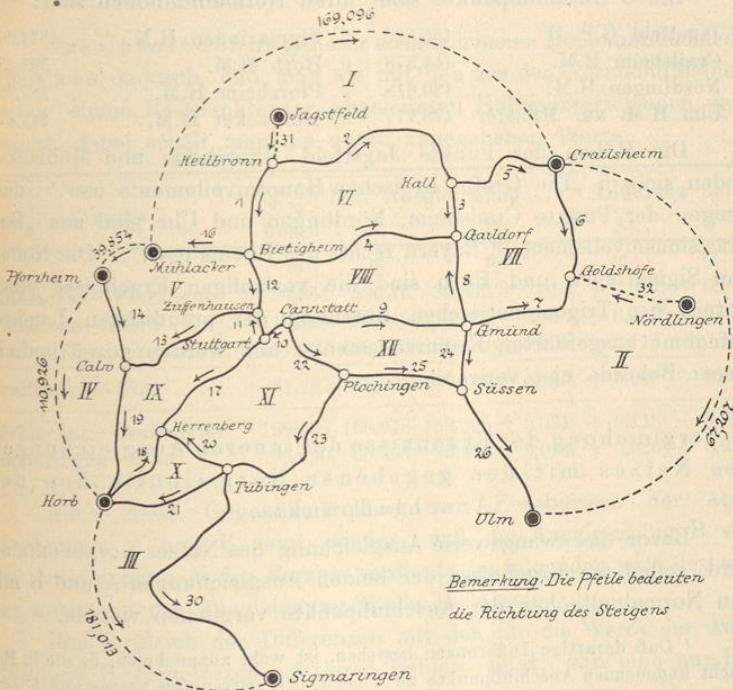
Eine der Hauptfragen bei einer zwangsweisen Ausgleichung zwischen den Netzen von Baden und Bayern betrifft die Gewichte, deren Ermittlung man in der Hauptsache auf zwei verschiedene Arten vornehmen kann. Man kann die Gewichte so bestimmen, daß sie auf die zwischen den — als fehlerfrei anzunehmenden — Anschlußpunkten bestehenden Differenzen Rücksicht nehmen oder nicht.

Kannt man
sind, die
Verhän
geben war
dadurch
nahmen au
die Ergebni
schen den
einer in d
darauf,
nicht feh
werden be
aufträte
im vorliege
Fig. 9 ange
in sich at



Nimmt man an, daß die Normalnullhöhen der Anschlußpunkte fehlerfrei sind, daß also gedachte, fehlerfrei zwischen ihnen ausgeführte Verbindungsnivellements je eine Anschlußdifferenz gleich null ergeben würden, so kann man die Gewichte für die Neuausgleichung dadurch ermitteln, daß man das zwischen den festen Anschlußpunkten auszugleichende Netz zunächst in sich ausgleicht, und die Ergebnisse einer solchen Ausgleichung der Ausgleichung zwischen den Festpunkten zugrunde legt. Die übrigbleibenden Fehler einer in dieser Weise ausgeführten Ausgleichung werden mit Rücksicht darauf, daß die Normalnullhöhen der Anschlußpunkte tatsächlich nicht fehlerfrei sind, keinem Fehlergesetz folgen; die größten Fehler werden bei den die Anschlußpunkte unmittelbar verbindenden Strecken auftreten.

Im vorliegenden Fall handelt es sich um die zwangsweise, in der Fig. 9 angedeutete Ausgleichung des auf Grund der Fig. 7 bereits in sich ausgeglichenen Netzes.



Figur 9.

Nimmt man bei der Gewichtsbestimmung für die zwangsweise Ausgleichung Rücksicht auf die zwischen den Normalnullhöhen der Anschlußpunkte bestehenden Differenzen¹, so kann man die Gewichte mit Hilfe der Widersprüche in den unter Zuziehung der Anschlußpunkte gegebenen Polygonen ermitteln. Eine Untersuchung der so bestimmten Gewichte läßt sich dann wieder indirekt dadurch vornehmen, daß man die übrigbleibenden Fehler der nachfolgenden Ausgleichung, die dem GAUSS'schen Fehlergesetz folgen sollten, mit diesem vergleicht.

Für die zwangsweise Ausgleichung des auf Grund der Fig. 7 bereits in sich ausgeglichenen Hauptnetzes² kommen im ganzen 8 Anschlußpunkte in Betracht; 6 dieser Punkte — vergl. die Fig. 7 und 9 — liegen unmittelbar in dem bereits in sich ausgeglichenen Netze, 2 Punkte — Jagstfeld und Nördlingen — liegen außerhalb dieses Netzes und sind mit ihm durch die Strecken 31 (Heilbronn—Jagstfeld) und 32 (Goldshöfe—Nördlingen) verbunden.

Die 8 Anschlußpunkte samt ihren Normalnullhöhen sind:

1. Jagstfeld G.P. II . . .	155,520	5. Sigmaringen H.M. . . .	574,267
2. Crailsheim H.M. . . .	411,570	6. Horb H.M.	393,254
3. Nördlingen H.M. . . .	430,618	7. Pforzheim H.M. . . .	282,328
4. Ulm H.M. am Münster	478,777	8. Mühlacker H.M. . . .	242,474

Die Höhen der Punkte Jagstfeld, Pforzheim und Mühlacker finden sich in „Die Großh. badischen Hauptnivellements usw.“; diejenigen der Punkte Crailsheim, Nördlingen und Ulm sind aus „Das Präzisionsnivellement in Bayern rechts des Rheins usw.“. Die Höhen von Sigmaringen und Horb sind die vorläufigen Ergebnisse eines seitens der Trigonometrischen Abteilung der preußischen Landesaufnahme ausgeführten Feinnivellements, und werden mit Erlaubnis dieser Behörde hier verwendet.

2. Vergleichung der Ergebnisse der inneren Ausgleichungen des Netzes mit den gegebenen Normalnullhöhen der Anschlußpunkte.

Bevor die zwangsweise Ausgleichung des Netzes vorgenommen wird, sollen die Ergebnisse der beiden Ausgleichungen A und B mit den Normalnullhöhen der Anschlußpunkte verglichen werden.

¹ Daß derartige Differenzen bestehen, ist wohl anzunehmen, da die in Betracht kommenden Anschlußpunkte zwei bzw. drei getrennten Netzen angehören.

² Außer diesem Hauptnetz wird später noch ein kleines, über den südöstlichen Teil von Württemberg sich erstreckendes Netz auszugleichen sein.

Die aus den beiden Ausgleichungen sich ergebenden ausgeglichenen Höhenunterschiede sind die folgenden:

Strecke	Ausgleichung		Strecke	Ausgleichung		Strecke	Ausgleichung	
	A	B		A	B		A	B
	m	m		m	m		m	m
1	62,830	62,825	11	31,408	31,409	21	69,340	69,339
2	148,351	148,355	12	60,656	60,661	22	31,320	31,312
3	22,772	21,770	13	67,181	67,180	23	68,456	68,457
4	107,293	107,300	14	67,816	67,834	24	45,552	45,569
5	103,640	103,647	15	39,840	39,835	25	111,294	111,322
6	59,523	59,531	16	20,183	20,172	26	111,936	111,941
7	149,806	149,823	17	178,628	178,621	27	70,432	70,437
8	8,414	8,415	18	36,944	36,944	28	12,622	12,624
9	97,061	97,064	19	43,094	43,088	29	12,411	12,412
10	27,431	27,432	20	106,283	106,284	30	250,240	250,278

Eine Untersuchung dieser ausgeglichenen Höhenunterschiede erhält man dadurch, daß man sie mit den aus den Normalnullhöhen von je einem Festpunktpaar abgeleiteten Höhenunterschieden vergleicht; dabei erhält man die unten angegebenen Werte.

Strecke	aus den N.N.- Höhen	Ausgleichung		Differenz bei	
		A	B	A	B
	m	m	m	m	m
Mühlacker—Pforzheim .	39,854	39,840	39,835 $\pm$ 0,014	+ 0,014	+ 0,019
Pforzheim—Horb . . .	110,926	110,910	110,922 $\pm$ 0,022	+ 0,016	+ 0,004
Horb—Sigmaringen . .	181,013	180,900	180,939 $\pm$ 0,030	+ 0,113	+ 0,074
Crailsheim—Ulm . . .	67,207	67,205	67,218 $\pm$ 0,033	+ 0,002	— 0,011
Mühlacker—Crailsheim .	169,096	168,978	169,005 $\pm$ 0,031	+ 0,118	+ 0,091
Sigmaringen—Ulm . .	95,490	95,465	95,473 $\pm$ 0,011	+ 0,025	+ 0,017

Auch diese Gegenüberstellung von Ergebnissen der Ausgleichungen A und B zeigt wieder, daß die Ausgleichung B vor der Ausgleichung A den Vorzug verdient; im folgenden wird deshalb nur noch von der Ausgleichung B die Rede sein.

Ein Vergleich der Differenzen mit den für die Werte der Ausgleichung B beigesetzten mittleren Fehlern zeigt, daß jene nur bei zwei Strecken außergewöhnlich hohe Beträge erreichen. Die eine Strecke, Horb—Sigmaringen, zeigt eine Differenz von rund 8 cm

gegenüber einem mittleren Fehler von rund ± 3 cm; diese Strecke wurde erst in den letzten Jahren seitens der trigonometrischen Abteilung der preußischen Landesaufnahme nivelliert und dürfte mit einem mittleren Fehler von jedenfalls nicht mehr als ± 3 cm behaftet sein. Es darf demnach angenommen werden, daß der aus der Ausgleichung B hervorgegangene Höhenunterschied der Strecke Horb—Sigmaringen um mindestens 3 cm zu klein ist.

Die zweite, eine große Differenz aufweisende Strecke — Mühlacker—Crailsheim — verbindet einen badischen mit einem bayrischen Festpunkt; wenn auch anzunehmen ist, daß zwischen den Höhen dieser Punkte eine Differenz vorhanden ist, so dürfte doch die große, oben gefundene Differenz von 9 cm darauf hinweisen, daß die Ausgleichung B einen um mehrere Zentimeter zu kleinen Wert für den Höhenunterschied Mühlacker—Crailsheim ergeben hat.

Die bei der Ausgleichung des badischen Netzes für den Punkt Sigmaringen gefundene Höhe beträgt 574,284¹; mit diesem Wert erhält man für die Differenz zwischen Sigmaringen und Ulm + 0,034 m. Diese Differenz ist zu derjenigen zwischen Mühlacker und Crailsheim entgegengesetzt; eine bestimmte, zwischen den Netzen von Baden und Bayern bestehende Differenz läßt sich demnach nicht nachweisen.

3. Zwangsweise Ausgleichung des württembergischen Netzes zwischen den Netzen von Baden und Bayern mit Benützung der Ergebnisse der inneren Netzausgleichung.

Das auszugleichende Netz, das in Fig. 9 gezeichnet ist, enthält die schon angegebenen 8 Anschlußpunkte, von denen 6 unmittelbar dem in der Ausgleichung B bearbeiteten Netz angehören. Mit Rücksicht darauf, daß die beiden Strecken 31 und 32 in der Ausgleichung B nicht mit ausgeglichen wurden, sollen sie auch in die folgende Ausgleichung nicht hereingezogen werden, so daß es sich also um die Ausgleichung des Netzes zwischen den 6 Anschlußpunkten: Crailsheim, Ulm, Sigmaringen, Horb, Pforzheim und Mühlacker handelt.

In dem auszugleichenden Netz sind 14 Punkte festzulegen, die durch 26 nivellierte Strecken verbunden sind; da zu ihrer Festlegung in bezug auf die Anschlußpunkte nur 14 Höhenunterschiede erforderlich sind, so bestehen $26 - 14 = 12$ Bedingungsgleichungen, die sich aus den verschiedenen Polygonschlußgleichungen ergeben.

¹ Vergl. „Die Großh. badischen Hauptnivellements.“ S. 79.

Bezeichnet man die aus der Ausgleichung B hervorgegangenen Höhenunterschiede mit $h_1, h_2, \dots$, die an ihnen anzubringenden Verbesserungen mit $v_1, v_2, \dots$, und die auftretenden Polygonwidersprüche mit $w_1, w_2, \dots, w_{12}$, so hat man die Bedingungsbedingungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -v_5 - v_2 + v_1 + v_{16} \quad + w_1 = 0 \\ \text{II} & -v_{26} - v_{24} + v_7 - v_6 \quad + w_2 = 0 \\ \text{III} & -v_{21} + v_{30} \quad + w_3 = 0 \\ \text{IV} & +v_{14} + v_{19} \quad + w_4 = 0 \\ \text{V} & -v_{16} + v_{12} + v_{13} - v_{14} \quad + w_5 = 0 \\ \text{VI} & -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 \quad + w_6 = 0 \\ \text{VII} & -v_3 + v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \quad + w_7 = 0 \\ \text{VIII} & +v_4 - v_8 - v_9 + v_{10} + v_{11} - v_{12} \quad + w_8 = 0 \\ \text{IX} & -v_{11} + v_{17} - v_{18} - v_{19} - v_{13} \quad + w_9 = 0 \\ \text{X} & +v_{18} - v_{20} + v_{21} \quad + w_{10} = 0 \\ \text{XI} & -v_{10} + v_{22} + v_{23} + v_{20} - v_{11} \quad + w_{11} = 0 \\ \text{XII} & +v_9 + v_{24} - v_{25} - v_{22} \quad + w_{12} = 0 \end{array}$$

Für die Widersprüche w findet man:

$$\begin{array}{lll} w_1 = +91 \text{ mm} & w_5 = -19 \text{ mm} & w_9 = \pm 0 \text{ mm} \\ w_2 = -11 \text{ mm} & w_6 = \pm 0 \text{ mm} & w_{10} = \pm 0 \text{ mm} \\ w_3 = -74 \text{ mm} & w_7 = \pm 0 \text{ mm} & w_{11} = \pm 0 \text{ mm} \\ w_4 = -4 \text{ mm} & w_8 = \pm 0 \text{ mm} & w_{12} = \pm 0 \text{ mm} \end{array}$$

Die Gewichte p erhält man mit Benützung der mittleren Fehler m' der ausgeglichenen Höhenunterschiede der Ausgleichung B aus

$$p = \frac{\text{Const.}}{m'^2}.$$

Setzt man die Gewichtskonstante gleich 100, so erhält man zur Berechnung der Gewichte die Gleichung

$$p = \frac{100}{m'^2}.$$

Damit ergeben sich die folgenden Werte:

Strecke	p	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$	Strecke	p	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$	Strecke	p	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$
1	1,39	0,72	1,18	11	4,95	0,20	2,22	21	1,11	0,90	1,05
2	0,33	3,06	0,57	12	0,42	2,40	0,65	22	2,37	0,42	1,54
3	2,37	0,42	1,54	13	0,70	1,44	0,83	23	1,23	0,81	1,11
4	0,42	2,40	0,65	14	0,23	4,41	0,48	24	0,42	2,40	0,65
5	0,20	5,05	0,45	15	—	—	—	25	0,18	5,50	0,43
6	0,91	1,10	0,95	16	4,00	0,25	2,00	26	0,55	1,82	0,74
7	0,15	6,50	0,39	17	1,56	0,64	1,25	27	—	—	—
8	1,39	0,72	1,18	18	1,78	0,56	1,33	28	—	—	—
9	0,28	3,61	0,53	19	2,04	0,49	1,43	29	—	—	—
10	8,18	0,12	2,86	20	1,00	1,00	1,00	30	0,13	7,55	0,36

Die Korrelatengleichungen lauten :

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}
$v_1 p_1$	$= +1$	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.
$v_2 p_2$	$= -1$	.	.	.	.	$+1$	.	.	.	.	.	.
$v_3 p_3$	$=$	.	.	.	.	$+1$	-1	.	.	.	.	.
$v_4 p_4$	$=$	.	.	.	.	-1	.	$+1$	.	.	.	.
$v_5 p_5$	$= -1$	.	.	.	.	.	$+1$	.	.	.	.	.
$v_6 p_6$	$=$	.	-1	.	.	.	$+1$	.	.	.	.	.
$v_7 p_7$	$=$	.	$+1$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.
$v_8 p_8$	$=$	.	.	.	.	.	$+1$	-1	.	.	.	.
$v_9 p_9$	$=$	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	$+1$
$v_{10} p_{10}$	$=$	.	.	.	.	.	.	$+1$	.	.	-1	.
$v_{11} p_{11}$	$=$	.	.	.	.	.	.	$+1$	-1	.	.	.
$v_{12} p_{12}$	$=$	.	.	.	$+1$	.	.	-1	.	.	.	.
$v_{13} p_{13}$	$=$	.	.	.	$+1$	.	.	.	-1	.	.	.
$v_{14} p_{14}$	$=$	.	.	$+1$	-1	.	.	.	.	.	.	.
$v_{16} p_{16}$	$= +1$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.
$v_{17} p_{17}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	$+1$	.	-1	.
$v_{18} p_{18}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	-1	$+1$	.	.
$v_{19} p_{19}$	$=$	.	.	$+1$	.	.	.	.	-1	.	.	.
$v_{20} p_{20}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	$+1$	.
$v_{21} p_{21}$	$=$	.	.	-1	.	.	.	.	.	$+1$	.	.
$v_{22} p_{22}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+1$	-1
$v_{23} p_{23}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+1$	.
$v_{24} p_{24}$	$=$	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+1$
$v_{25} p_{25}$	$=$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1
$v_{26} p_{26}$	$=$	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$v_{30} p_{30}$	$=$	.	.	$+1$	.	.	.	.	.	.	.	.

Als Normalgleichungen erhält man :

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	w
$+9,08$	.	.	.	$-0,25$	$-3,78$	$-5,05$	.	.	.	.	.	$+91$
$+11,82$	.	.	.	.	.	$-7,60$	.	.	.	.	$-2,40$	-11
.	$+8,45$	.	.	.	.	.	.	.	$-0,90$	.	.	-74
.	.	$+4,90$	$-4,41$	.	.	.	.	$-0,49$	.	.	.	-4
.	.	.	$+8,50$	.	.	$-2,40$	$-1,44$	.	.	.	-19	.
.	.	.	.	$+6,60$	$-0,42$	$-2,40$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	$+13,79$	$-0,72$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	$+9,45$	$-0,20$	.	$-0,12$	$-3,61$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	$+3,33$	$-0,56$	$-0,64$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	$+2,46$	$-1,00$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+2,99$	$-0,42$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+11,93$	.	.

Für die Korrelaten findet man:

$$\begin{array}{lll} k_1 = -29,29 & k_5 = -2,14 & k_9 = -1,28 \\ k_2 = -12,04 & k_6 = -21,37 & k_{10} = +2,84 \\ k_3 = +9,06 & k_7 = -18,48 & k_{11} = -0,45 \\ k_4 = -1,23 & k_8 = -9,44 & k_{12} = -5,29 \end{array}$$

Für die Verbesserungen v , die $p v v$ und die $v \sqrt{p}$ ergeben sich die folgenden Werte:

Strecke	v	$p v v$	$v \sqrt{p}$	Strecke	v	$p v v$	$v \sqrt{p}$
	mm		mm		mm		mm
1	— 5,7	45	— 6,7	16	— 6,8	184	— 13,6
2	+ 24,2	191	+ 13,8	17	— 0,5	0	— 0,6
3	— 1,2	4	— 1,9	18	+ 2,3	10	+ 3,1
4	+ 28,7	342	+ 18,5	19	$\pm 0,0$	0	+ 0,1
5	+ 54,5	590	+ 24,3	20	— 3,3	11	— 3,2
6	— 7,1	46	— 6,8	21	— 5,5	35	— 5,9
7	+ 41,8	270	+ 16,4	22	+ 2,0	10	+ 3,1
8	— 6,5	59	— 7,7	23	— 0,4	0	— 0,4
9	+ 14,9	62	+ 7,9	24	+ 16,2	109	+ 10,4
10	— 1,1	10	— 3,1	25	+ 29,1	154	+ 12,4
11	— 1,6	13	— 3,6	26	+ 21,9	264	+ 16,2
12	+ 17,5	128	+ 11,3	30	+ 68,3	620	+ 24,9
13	— 1,2	1	— 1,1				
14	+ 4,0	4	+ 1,9				

Für die Summe der $p v v$ findet man:

$$[p v v] = 3162$$

im Gegensatz zu

$$-[w k] = 3160.$$

Für den mittleren Fehler m_o der Gewichtseinheit erhält man:

$$m_o = \sqrt{\frac{3162}{12}} = \pm 16,2 \text{ mm.}$$

Dieser mittlere Fehler ist von keinem weiteren Interesse, da der vorstehenden Ausgleichung die aus der Ausgleichung B hervorgegangenen ausgeglichenen Höhenunterschiede zugrund gelegt wurden.

Unter den — auf gleiches Gewicht reduzierten — übrigen Fehlern sind 14 positive und 12 negative; für deren Summen findet man:

$$[+ v \sqrt{p}] = 164,3 \text{ und } [- v \sqrt{p}] = 54,6.$$

Für den mittleren Fehler m_v und den durchschnittlichen Fehler d_v findet man:

$$m_v = \sqrt{\frac{3162}{26}} = \pm 11,02 \text{ mm}$$

$$d_v = \frac{218,9}{26} = \pm 8,43 \text{ mm.}$$

Damit ergibt sich für das Verhältnis dieser beiden Fehler:

$$\frac{m_v}{d_v} = \frac{11,02}{8,43} = 1,31$$

im Gegensatz zu 1,25 nach dem GAUSS'schen Fehlergesetz.

Für den wahrscheinlichen Fehler w_v erhält man:

$$w_v = 0,674 m_v = \pm 7,4 \text{ mm}$$

Zwischen den Grenzen $\pm 7,4$ und $-7,4$ sollen demnach 13 Fehler liegen, während tatsächlich 14 liegen.

Vergleicht man die nach ihren absoluten Werten geordneten $v\sqrt{p}$ mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz, so erhält man die folgende Übersicht:

Zwischen den Grenzen	sollen liegen	Tatsächlich liegen		
		zusammen	positive	negative
$\pm 0,1 m_v = \pm 1,10$	2,1	4	1	3
0,2 2,20	4,1	6	2	4
0,3 3,31	6,1	10	4	6
0,4 4,41	8,1	11	4	7
0,5 5,51	10,0	11	4	7
0,6 6,61	11,7	12	4	8
0,7 7,71	13,4	15	4	11
0,8 8,82	15,0	16	5	11
0,9 9,92	16,4	16	5	11
1,0 11,02	17,8	17	6	11
1,5 16,73	22,5	23	10	12
2,0 22,04	24,8	24	12	12
2,5 27,55	25,7	26	14	12
3,0 33,06	25,9	26	14	12

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß — wie zu erwarten war — die übrigbleibenden Fehler dem GAUSS'schen Fehlergesetz nicht gut folgen; besonders auffallend ist die Verteilung der positiven und negativen Fehler. Die absolut größten Fehler treten bei den äußeren, die Anschlußpunkte unmittelbar verbindenden Netzseiten auf.

Um die Einwirkung der Ausgleichung auf die ursprünglich gemessenen Höhenunterschiede zu zeigen, sind in der folgenden Übersicht die gemessenen und die ausgeglichenen Höhenunterschiede, die letzteren mit ihren aus der Ausgleichung hervorgegangenen mittleren Fehlern¹ angegeben; der Unterschied d zwischen beiden Werten ist ebenfalls beigesetzt.

Strecke	Höhenunterschied		Unterschied d
	gemessen	ausgeglichen	
	m	m mm	mm
1	62,824	62,819 $\pm$ 12	+ 5
2	148,374	148,379 $\pm$ 19	— 5
3	21,770	21,769 $\pm$ 10	+ 1
4	107,301	107,329 $\pm$ 15	— 28
5	103,658	103,702 $\pm$ 17	— 44
6	59,533	59,524 $\pm$ 15	+ 9
7	149,777	149,865 $\pm$ 21	— 88
8	8,415	8,408 $\pm$ 12	+ 7
9	97,084	97,079 $\pm$ 17	+ 5
10	27,431	27,431 $\pm$ 5	$\pm$ 0
11	31,409	31,407 $\pm$ 6	+ 2
12	60,666	60,679 $\pm$ 12	— 13
13	67,204	67,179 $\pm$ 11	+ 25
14	67,792	67,838 $\pm$ 9	— 46
16	20,171	20,165 $\pm$ 7	+ 6
17	178,616	178,620 $\pm$ 9	— 4
18	36,950	36,946 $\pm$ 9	+ 4
19	43,087	43,088 $\pm$ 9	— 1
20	106,276	106,281 $\pm$ 11	— 5
21	69,354	69,333 $\pm$ 10	+ 21
22	31,314	31,314 $\pm$ 9	$\pm$ 0
23	68,463	68,457 $\pm$ 11	+ 6
24	45,578	45,585 $\pm$ 19	— 7
25	111,262	111,351 $\pm$ 18	— 89
26	111,945	111,963 $\pm$ 16	— 18
30	250,203	250,346 $\pm$ 10	— 143

Für die Normalnullhöhen der Knotenpunkte des ausgeglichenen Netzes und deren mittlere Fehler¹ erhält man:

¹ Da der vorstehenden zwangsweisen Ausgleichung nicht die gemessenen Höhenunterschiede, sondern die ausgeglichenen Höhenunterschiede der inneren Netzausgleichung zugrunde gelegt wurden, so geben die beigesetzten mittleren Fehler kein Bild von der Genauigkeit der Messung.

Bietigheim	222,309	m ± 7 mm
Heilbronn	159,490	m ± 14 mm
Hall	307,868	m ± 17 mm
Gaildorf	329,637	m ± 16 mm
Goldshöfe	471,094	m ± 15 mm
Gmünd	321,229	m ± 15 mm
Cannstatt	224,150	m ± 10 mm
Stuttgart	251,581	m ± 10 mm
Zuffenhausen	282,988	m ± 10 mm
Calw	350,166	m ± 9 mm
Herrenberg	430,200	m ± 9 mm
Plochingen	255,462	m ± 12 mm
Tübingen	323,919	m ± 10 mm
Süßen	366,813	m ± 16 mm

Aus den Normalnullhöhen von Heilbronn und Jagstfeld (vergl. S. 74) erhält man für den Höhenunterschied der beiden Punkte 3,970 m, während der gemessene Höhenunterschied 3,939 m ist.

In ähnlicher Weise erhält man aus den Normalnullhöhen von Goldshöfe und Nördlingen 40,476 m im Gegensatz zu 40,447 m.

4. Ermittlung von besonderen Gewichten zu einer zwangsweisen Ausgleichung des württembergischen Netzes.

Nimmt man auch für das angeschlossene Netz an, daß die auftretenden Fehler zweierlei Art sind, nämlich ein unregelmäßiger, mit der Anzahl der Instrumentaufstellungen zunehmender Fehler und ein regelmäßiger, mit dem Höhenunterschied zunehmender Fehler, und bezeichnet man diese beiden wieder als Ablesungsfehler μ und Lattenfehler λ , so hat man zur Berechnung des Gewichtes p einer mit n Instrumentaufstellungen nivellierten Strecke mit dem Höhenunterschied h die schon oben benützte Gleichung:

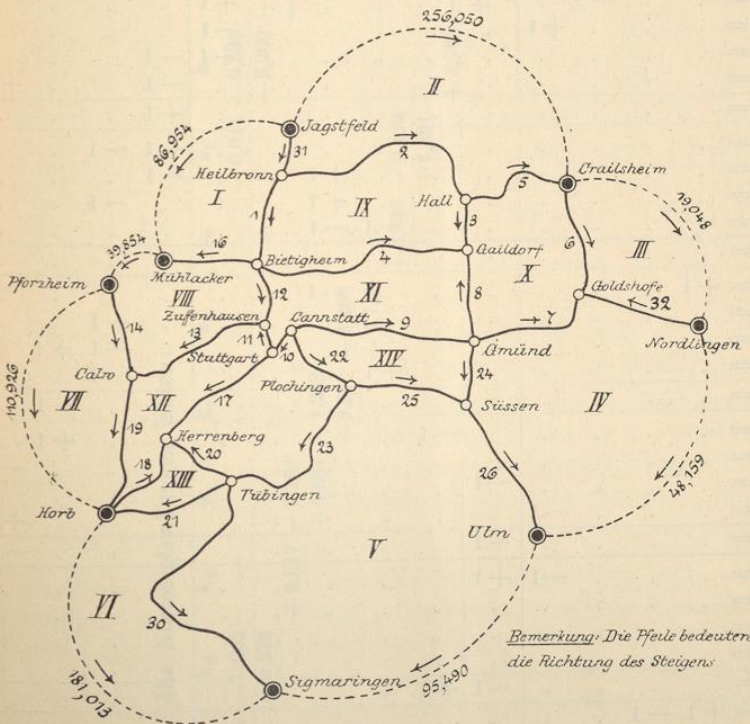
$$p = \frac{\text{Const.}}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2} \quad (1)$$

Wie die Ausgleichung des Netzes in sich gezeigt hat, führt man bei der Gewichtsrechnung am besten Einzelwerte für μ und λ für jede Strecke ein.

Die Einzelwerte des Ablesungsfehlers μ wurden für jede Strecke oben ermittelt; die Einzelwerte für λ erhält man für das zwangsweise auszugleichende — in der Fig. 10 gezeichnete — Netz in der schon oben angewandten Weise.

Für die Widersprüche w_λ der 14 in Betracht kommenden Polygone findet man die folgenden Werte:

Polygon	w	w ²	2 [n u ²]	w _λ ²	w _λ
	mm				mm
I	— 20	400	30	+ 370	— 19
II	+ 79	6 241	63	+ 6 178	+ 79
III	— 38	1 444	96	+ 1 348	— 37
IV	— 34	1 156	158	+ 998	— 32
V	+ 31	961	188	+ 773	+ 28
VI	— 164	26 896	137	+ 26 759	— 164
VII	— 47	2 209	40	+ 2 169	— 47
VIII	+ 53	2 809	70	+ 2 739	+ 52
IX	+ 19	361	146	+ 215	+ 15
X	+ 59	3 481	129	+ 3 352	+ 58
XI	— 24	576	148	+ 428	— 21
XII	— 34	1 156	138	+ 1 018	— 32
XIII	+ 28	784	78	+ 706	+ 27
XIV	+ 86	7 396	70	+ 7 326	+ 86



Figur 10.

Zwischen den zu bestimmenden Größen $v_1, v_2 \dots v_{32}$ bestehen die folgenden 14 Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{rclcl}
 +v_{31} + v_1 + v_{16} & - & 19 & = & 0 & -v_{16} + v_{12} + v_{13} - v_{14} & + & 52 & = \\
 -v_5 - v_2 - v_{31} & + & 79 & = & 0 & -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 & + & 15 & = \\
 +v_{32} - v_6 & - & 37 & = & 0 & -v_3 + v_5 + v_6 - v_7 + v_8 & + & 58 & = \\
 -v_{26} - v_{24} + v_7 - v_{32} & - & 32 & = & 0 & +v_4 - v_8 - v_9 + v_{10} + v_{11} - v_{12} & - & 21 & = \\
 -v_{30} - v_{23} + v_{25} + v_{26} + & 28 & = & 0 & -v_{13} - v_{11} + v_{17} - v_{18} - v_{19} & - & 32 & = \\
 -v_{21} + v_{30} & - & 164 & = & 0 & +v_{18} - v_{20} + v_{21} & + & 27 & = \\
 +v_{14} + v_{19} & - & 47 & = & 0 & +v_9 + v_{24} - v_{25} - v_{22} & + & 86 & =
 \end{array}$$

Die Korrelatengleichungen samt den nach der Gleichung $\frac{1}{p} = h^2$ berechneten Gewichtsreziproken — die Gewichtseinheit bezogen auf $h = 100$ m — sind:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	$\frac{1}{p}$
$v_1 P_1 = +1$	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	0,39
$v_2 P_2 = .$	.	+1	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	2,20
$v_3 P_3 = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	-1	.	.	.	.	0,04
$v_4 P_4 = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	+1	.	.	.	1,15
$v_5 P_5 = .$	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	1,07
$v_6 P_6 = .$	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	0,35
$v_7 P_7 = .$	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	2,24
$v_8 P_8 = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	-1	.	.	.	0,007
$v_9 P_9 = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	+1	0,94
$v_{10} P_{10} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	0,075
$v_{11} P_{11} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	-1	.	.	0,099
$v_{12} P_{12} = .$	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	-1	.	.	.	0,368
$v_{13} P_{13} = .$	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	-1	.	.	0,452
$v_{14} P_{14} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	-1	.	.	.	.	.	.	0,460
$v_{15} P_{15} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,159
$v_{16} P_{16} = +1$	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	0,041
$v_{17} P_{17} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	3,191
$v_{18} P_{18} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	+1	.	0,137
$v_{19} P_{19} = .$	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	-1	.	.	0,186
$v_{20} P_{20} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	1,130
$v_{21} P_{21} = .$	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,481
$v_{22} P_{22} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	0,098
$v_{23} P_{23} = .$	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,469
$v_{24} P_{24} = .$	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	0,208
$v_{25} P_{25} = .$	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	1,238
$v_{26} P_{26} = .$	.	.	.	-1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,253
$v_{27} P_{27} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,496
$v_{28} P_{28} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,016
$v_{29} P_{29} = .$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,015
$v_{30} P_{30} = .$	.	.	.	.	-1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	6,260
$v_{31} P_{31} = +1$	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,002
$v_{32} P_{32} = .$	.	+1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,163

Die Normalgleichungen lauten:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	w_2
+ 0,438	- 0,002	.	.	.	.	.	- 0,041	- 0,395	-	.	.	.	.	- 19 = 0
+ 3,276	.	.	.	.	.	.	.	- 2,200	- 1,074	.	.	.	.	+ 79 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,354	.	.	.	.	- 37 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 2,243	.	.	.	- 0,208	- 32 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 1,238	- 28 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,481	.	- 164 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,186	.	.	- 47 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,368	- 0,452	.	.	+ 52 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 1,151	.	.	.	+ 15 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,007	.	.	.	+ 58 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	- 0,099	.	- 0,942	- 21 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 4,065	- 0,137	.	- 32 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1,748	.	+ 27 = 0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 2,486	+ 86 = 0

Für die Korrelaten findet man:

$$\begin{aligned} k_1 &= -26,80 & k_2 &= -90,55 & k_3 &= +30,43 \\ k_4 &= -19,08 & k_5 &= +11,25 & k_6 &= +34,43 \\ k_7 &= +50,18 & k_8 &= -33,77 & k_9 &= -73,85 \\ k_{10} &= -51,29 & k_{11} &= -46,00 & k_{12} &= +5,11 \\ k_{13} &= -5,56 & k_{14} &= -48,01. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für die v und λ_{10} , letztere bezogen auf einen Höhenunterschied von 10 m, die folgenden Werte:

Strecke	v	λ_{10}	Strecke	v	λ_{10}
	mm	mm		mm	mm
1	+ 18,6	+ 2,97	16	+ 0,3	+ 0,15
2	+ 36,7	+ 2,47	17	+ 16,3	+ 0,91
3	— 1,1	— 0,52	18	— 1,5	— 0,41
4	+ 32,1	+ 2,99	19	+ 8,4	+ 1,95
5	+ 42,2	+ 4,07	20	+ 6,3	+ 0,59
6	— 28,9	— 4,87	21	— 19,2	— 2,77
7	+ 72,3	+ 4,83	22	+ 4,7	+ 1,50
8	$\pm$ 0,0	— 0,04	23	— 5,3	— 0,78
9	— 1,9	— 0,20	24	— 6,0	— 1,32
10	— 3,5	— 1,30	25	+ 73,3	+ 6,58
11	— 5,1	— 1,62	26	+ 38,0	+ 3,40
12	+ 4,5	+ 0,74	30	+ 145,1	+ 5,80
13	— 17,6	— 2,62	31	+ 0,1	+ 0,32
14	+ 38,6	+ 5,70	32	+ 8,1	+ 2,01

Für einen mittleren Lattenfehler λ_{10} , bezogen auf einen Höhenunterschied von 10 m findet man

$$\lambda_{10} = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{28}} = \pm 2,94 \text{ mm.}$$

Für denselben Fehler wurde ohne Benützung der badischen und bayrischen Anschlußpunkte gefunden (vergl. S. 63)

$$\lambda_{10} = \pm 1,76 \text{ mm.}$$

Um die Gewichte auf Grund der Gleichung (1) berechnen zu können, möge festgesetzt werden, daß das Gewicht $p = 1$ sich auf eine Strecke bezieht, die bei einem Höhenunterschied von $h = 50$ m und $n = 50$ Standpunkten mit einem Ablesungsfehler $\mu = \pm 0,24$ mm (vergl. S. 58) und einem Lattenfehler $\lambda = \pm 2,94$ mm nivelliert wurde. Diese Festsetzungen ergeben für die Gewichtskonstante den

Wert 221,9; die Gleichung zur Bestimmung der Gewichte lautet somit

$$p = \frac{221,9}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2}$$

Auf Grund dieser Gleichung erhält man die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Werte für die $\frac{1}{p}$, die $\sqrt{p}$ und die mittleren Fehler m .

Strecke	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$	m	Strecke	$\frac{1}{p}$	$\sqrt{p}$	m
			mm				mm
1	1,648	0,78	$\pm 19,0$	16	0,038	5,17	$\pm 3,0$
2	6,241	0,40	37,0	17	1,363	0,85	17,5
3	0,109	3,04	5,0	18	0,156	2,53	6,0
4	4,941	0,45	33,0	19	0,432	1,52	10,0
5	8,130	0,35	42,5	20	0,206	2,20	6,5
6	3,856	0,51	29,5	21	1,796	0,75	20,0
7	23,663	0,21	72,5	22	0,121	2,88	5,0
8	0,176	2,38	6,5	23	0,334	1,73	8,5
9	0,138	2,69	5,5	24	0,303	1,82	8,0
10	0,069	3,81	4,0	25	24,243	0,21	73,5
11	0,138	2,69	5,5	26	6,638	0,39	38,5
12	0,126	2,82	5,5	30	95,362	0,10	145,5
13	1,571	0,80	18,5	31	0,010	10,63	1,5
14	6,782	0,38	39,0	32	0,635	1,26	12,0

5. Zwangsweise Ausgleichung mit Benützung der für diesen Zweck besonders ermittelten Gewichte.

Das auszugleichende Netz ist das der Fig. 10; die Bedingungs-
gleichungen und die Korrelatengleichungen — letztere, abgesehen
von den Gewichten — sind dieselben wie bei der oben vorge-
nommenen Ausgleichung zur Bestimmung der Lattenfehler.

Aus den auf der folgenden Seite angegebenen Normalgleich-
ungen ergeben sich für die Korrelaten die Werte:

$$\begin{aligned} k_1 &= -7,37 & k_2 &= -24,74 & k_3 &= -10,01 \\ k_4 &= -15,88 & k_5 &= -10,90 & k_6 &= -9,36 \\ k_7 &= +12,95 & k_8 &= +6,08 & k_9 &= -19,71 \\ k_{10} &= -18,90 & k_{11} &= -13,62 & k_{12} &= +12,06 \\ k_{13} &= -19,90 & k_{14} &= -14,42. \end{aligned}$$

Die Normalgleichungen sind:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	w
+1,696	-0,010	...	...	...	...	...	-0,038	-1,648	-8,130	...	...	...	...	-20 = 0
...	+14,381	...	...	...	...	...	...	-6,241	-3,856	...	...	...	...	+79 = 0
...	...	+4,491	-0,635	...	...	...	...	...	-23,663	...	...	...	...	-38 = 0
...	...	...	+31,239	-6,638	...	...	...	...	...	...	...	...	...	-34 = 0
...	...	...	...	+126,577	-95,362	...	...	...	...	...	...	...	...	-24,243 + 31 = 0
...	...	...	...	...	+97,158	...	...	...	...	...	...	...	...	-164 = 0
...	...	...	...	...	...	+7,214	-6,782	...	...	...	...	...	...	-47 = 0
...	...	...	...	...	...	...	+8,517	...	...	...	...	...	...	+53 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	+12,939	-0,109	-0,126	-1,571	...	...	+19 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	+35,934	-4,941	...	...	...	+59 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	+5,588	-0,176	...	...	-24 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	+3,660	-0,138	...	-34 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	-0,156	...	+28 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	+2,158	...	+86 = 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	+24,805	

Damit findet
mm
+ 30
+ 31
+ 0
+ 30
+ 47
- 34
+ 71
- 1
+ 0
- 1
- 4
+ 3
- 9
+ 47
für die Su
andererseits
Damit ergibt
aufn = 5
= 0,24 mm
Für das Ge
demselbe
Strecke
Damit für il
Vor der A
Bei den ü
es sind 1
Dmgt ma
nicht, so fin
der.

Damit findet man für die Verbesserungen v , die $p v v$ und die $v \sqrt{p}$:

Strecke	v	$p v v$	$v \sqrt{p}$	Strecke	v	$p v v$	$v \sqrt{p}$
	mm		mm		mm		mm
1	+ 20	251	+ 15,8	16	— 1	7	— 2,6
2	+ 31	157	+ 12,5	17	+ 16	198	+ 14,1
3	$\pm$ 0	0	— 0,3	18	— 5	159	— 12,6
4	+ 30	184	+ 13,5	19	$\pm$ 0	1	+ 0,6
5	+ 47	277	+ 16,6	20	+ 4	81	+ 9,0
6	— 34	305	— 17,4	21	— 19	199	— 14,1
7	+ 71	215	+ 14,7	22	+ 2	25	+ 5,0
8	— 1	5	— 2,2	23	+ 4	40	+ 6,3
9	$\pm$ 0	0	— 0,3	24	$\pm$ 0	1	+ 0,8
10	— 1	13	— 3,6	25	+ 85	299	+ 17,3
11	— 4	91	— 9,5	26	+ 33	165	+ 12,8
12	+ 3	49	+ 7,0	30	+ 146	226	+ 15,0
13	— 9	56	— 7,5	31	$\pm$ 0	3	+ 1,7
14	+ 47	320	+ 17,9	32	+ 4	22	+ 4,7

Für die Summe der $p v v$ erhält man einerseits

$$[p v v] = 3349$$

und andererseits

$$[p v v] = -[w k] = 3344.$$

Damit ergibt sich für den mittleren Fehler m_0 der Gewichtseinheit, bezogen auf $n=50$ Instrumentaufstellungen, $h=50$ m Höhenunterschied, $\mu = \pm 0,24$ mm Ablesungsfehler und $\lambda_{10} = \pm 2,94$ mm Lattenfehler

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p v v]}{14}} = \pm 15,5 \text{ mm.}$$

Für das Gewicht p einer 1 km langen mit demselben Ablesungsfehler, demselben Lattenfehler und mit $n=10$ Aufstellungen nivelierten Strecke mit dem Höhenunterschied $h=10$ m erhält man:

$$p = \frac{221,9}{9,80} = 22,6$$

und somit für ihren mittleren Fehler m :

$$m = \frac{15,5}{\sqrt{22,6}} = \pm 3,3 \text{ mm.}$$

Vor der Ausgleichung beträgt dieser mittlere Fehler $\pm 3,1$ mm.

Bei den übrigbleibenden Fehlern überwiegen die positiven; es sind 18 positive und 10 negative vorhanden.

Bringt man die Fehler durch Multiplikation mit $\sqrt{p}$ auf gleiches Gewicht, so findet man für die Summen der positiven und negativen Fehler:

$$[+ v \sqrt{p}] = 185 \text{ und } [- v \sqrt{p}] = 70.$$

Das starke Überwiegen der positiven Werte kommt auch in den Summen der Quadrate der reduzierten Fehler zum Ausdruck; man findet:
 $[+p \ v \ v] = 2513$ und $[-p \ v \ v] = 836$.

Für den mittleren Fehler m_v und den durchschnittlichen Fehler d_v erhält man:

$$m_v = \sqrt{\frac{3349}{28}} = \pm 10,9 \text{ mm}$$

und

$$d_v = \frac{255}{28} = \pm 9,10 \text{ mm.}$$

Das Verhältnis dieser beiden Fehler, das nach dem GAUSS'schen Fehlergesetz gleich 1,25 sein soll, ist:

$$\frac{m_v}{d_v} = 1,20.$$

Für den wahrscheinlichen Fehler w_v erhält man:

$$w_v = 0,674 \ m_v = \pm 7,35 \text{ mm.}$$

Es soll also zwischen den Grenzen $+7,35$ und $-7,35$ mm die Hälfte aller Fehler — nämlich 14 — liegen; in Wirklichkeit liegen nur 12 zwischen diesen Grenzen.

Ordnet man die $v\sqrt{p}$ nach ihren absoluten Werten und vergleicht sie mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz, so ergeben sich folgende Zahlen:

Zwischen den Grenzen	sollen liegen	Tatsächlich liegen		
		zusammen	positive	negative
$\pm 0,1 \ m_v = \pm 1,1$	2,2	4	2	2
0,2 2,2	4,5	5	3	2
0,3 3,3	6,6	7	3	4
0,4 4,4	8,7	8	3	5
0,5 5,5	10,7	10	5	5
0,6 6,6	12,6	11	6	5
0,7 7,7	14,4	13	7	6
0,8 8,8	16,1	13	7	6
0,9 9,9	17,7	15	8	7
1,0 10,9	19,1	15	8	7
1,5 16,4	24,2	24	15	9
2,0 21,8	26,7	28	18	10
2,5 27,3	27,7	28	18	10
3,0 32,7	27,9	28	18	10

Der Vergleich der übrigbleibenden Fehler mit dem GAUSS'schen Fehlergesetz zeigt, daß die Fehler — abgesehen von dem Überwiegen der positiven Werte — dieses Gesetz in ziemlich günstiger Weise befolgen.

Für die ausgeglichenen Höhenunterschiede und deren mittlere Fehler ergeben sich die folgenden Werte, denen die vor der Ausgleichung für die Zwecke der Gewichtsbestimmung ermittelten mittleren Fehler¹ beigelegt sind:

Strecke	Ausgeglichener Höhenunterschied	Mittlerer Fehler		Strecke	Ausgeglichener Höhenunterschied	Mittlerer Fehler	
		nach der Ausgl.	vor der Ausgl.			nach der Ausgl.	vor der Ausgl.
	m	mm	mm		m	mm	mm
1	62,844	± 3	± 19	16	20,170	± 3	± 3
2	148,405	11	37	17	178,632	7	18
3	21,770	5	5	18	36,945	5	6
4	107,331	11	33	19	43,087	9	10
5	103,705	12	43	20	106,280	6	7
6	59,499	12	30	21	69,335	7	20
7	149,848	16	73	22	31,316	5	5
8	8,414	6	7	23	68,467	7	9
9	97,084	6	6	24	45,578	8	8
10	27,430	4	4	25	111,347	11	74
11	31,405	5	6	26	111,978	12	39
12	60,669	5	6	30	250,349	7	146
13	67,195	10	19	31	3,939	2	2
14	67,839	9	39	32	40,451	12	12

Ein Vergleich der mittleren Fehler vor und nach der Ausgleichung zeigt, daß die ersteren durch die Ausgleichung bei keiner Strecke eine Vergrößerung erfahren.

Ausgehend von den N.N.-Höhen der 8 Anschlußpunkte erhält man mit Benützung der ausgeglichenen Höhenunterschiede für die Netzknotenpunkte der Fig. 10 die folgenden N.N.-Höhen samt deren mittleren Fehlern¹:

¹ Einen Maßstab für die Genauigkeit der Messung bilden diese mittleren Fehler nicht.

Bietigheim	222,304	m ± 3	mm
Heilbronn	159,459	m ± 2	mm
Hall	307,865	m ± 12	mm
Gaildorf	329,635	m ± 11	mm
Goldshöfe	471,069	m ± 12	mm
Gmünd	321,221	m ± 10	mm
Cannstatt	224,137	m ± 9	mm
Stuttgart	251,567	m ± 9	mm
Zuffenhausen	282,972	m ± 8	mm
Calw	350,167	m ± 9	mm
Herrenberg	430,199	m ± 5	mm
Plochingen	255,452	m ± 10	mm
Tübingen	323,919	m ± 7	mm
Süßen	366,799	m ± 12	mm

6. Ermittlung von Normalnullhöhen mit Benützung der Ergebnisse des zuvor in sich ausgeglichenen Netzes.

Von den beiden Ausgleichungen A und B, welche eine Ausgleichung des Netzes in sich bezweckten, werden im folgenden wieder die Ergebnisse von B Verwendung finden.

Geht man z. B. von der bayrischen Höhe für Ulm aus, so erhält man mit Benützung der ausgeglichenen Höhenunterschiede der Ausgleichung B für die Höhen der 6 in Betracht kommenden Anschlußpunkte die folgenden Werte:

Punkt	Badische bzw. bayrische Höhe	Von Ulm aus berechnete Höhe	Differenz
	m	m	mm
Ulm	478,777	478,777	± 0
Sigmaringen	574,267	574,250	+ 17
Horb	393,254	393,311	— 57
Pforzheim	282,328	282,389	— 61
Mühlacker	242,474	242,554	— 80
Crailsheim	411,570	411,559	+ 11

Die durch die Annahme der Höhe von Ulm bestimmte Meereshöhe wird man noch derart verschieben, daß [d d] ein Minimum wird. Für die notwendige Verschiebung v findet man bei Annahme von gleichen Gewichten:

$$v = \frac{[d]}{6} = -28 \text{ mm.}$$

Damit erhält man für die Anschlußpunkte die folgenden N.N.-Höhen:

Punkt	N.N.-Höhe		Differenz
	badische bzw. bayrische	württem- bergische	
	m	m	mm
Ulm	478,777	478,749	+ 28
Sigmaringen	574,267	574,222	+ 45
Horb	393,254	393,283	— 29
Pforzheim	282,328	282,361	— 33
Mühlacker	242,474	242,526	— 52
Crailsheim	411,570	411,531	+ 39

Mit diesen N.N.-Höhen der 6 Anschlußpunkte erhält man für diejenigen der übrigen Netzknoten die folgenden:

Bietigheim	222,354 m $\pm$ 27 mm
Heilbronn	159,529 m $\pm$ 28 mm
Hall	307,884 m $\pm$ 24 mm
Gaibsdorf	329,654 m $\pm$ 23 mm
Goldshöfe	471,062 m $\pm$ 34 mm
Gmünd	321,239 m $\pm$ 21 mm
Cannstatt	224,175 m $\pm$ 28 mm
Stuttgart	251,607 m $\pm$ 28 mm
Zuffenhausen	283,016 m $\pm$ 28 mm
Calw	350,196 m $\pm$ 29 mm
Herrenberg	430,227 m $\pm$ 29 mm
Plochingen	255,486 m $\pm$ 28 mm
Tübingen	323,943 m $\pm$ 28 mm
Süßen	366,808 m $\pm$ 15 mm

Die beigesetzten mittleren Fehler wurden derart berechnet, daß die N.N.-Höhe von nur einem Anschlußpunkt — Ulm — als fehlerfrei angenommen wurde.

Aus den gefundenen Höhen von Heilbronn und Goldshöfe einerseits und der badischen bzw. bayrischen Höhe von Jagstfeld und Nördlingen (vergl. S. 74) andererseits erhält man für die Strecken 31 und 32 die Höhenunterschiede 4,009 m und 40,444 m, im Gegensatz zu den Messungswerten mit 3,939 m und 40,447 m.

7. Zusammenstellung der verschiedenen ermittelten Normalnullhöhen.

In der folgenden Übersicht sind die verschiedenen Werte für die N.N.-Höhen der 8 Anschlußpunkte und der 14 Netzknotenpunkte, samt den jeweiligen mittleren Fehlern zusammengestellt:

Punkt	1.	2.		3.
	Höhen der Württ. Comm. f. d. Europ. Gradmessung (Höhen nach Schoder)	Höhen erhalten durch zwangs- weise Ausgleichung zwischen Baden und Bayern		Höhen erhalten durch innere Netzaus- gleichung und möglichste Anpassung an die Anschluß- punkte
		a Gewichte auf Grund einer Ausgleichung des Netzes in sich	b Gewichte besonders ermittelt	
	m	m mm	m mm	m mm
Jagstfeld . . .	155,506	—	155,520 ± 0	—
Crailsheim . . .	411,413	411,570 ± 0	411,570 ± 0	411,531 ± 33
Nördlingen . . .	430,514	—	430,618 ± 0	—
Ulm	478,638	478,777 ± 0	478,777 ± 0	478,749 ± 0
Sigmaringen . . .	574,102	574,267 ± 0	574,267 ± 0	574,222 ± 11
Horb	393,188	393,254 ± 0	393,254 ± 0	393,283 ± 29
Pforzheim . . .	282,257	282,328 ± 0	282,328 ± 0	282,361 ± 30
Mühlacker . . .	242,413	242,474 ± 0	242,474 ± 0	242,526 ± 27
Bietigheim . . .	222,231	222,309 ± 7	222,304 ± 3	222,354 ± 27
Heilbronn . . .	159,447	159,490 ± 14	159,459 ± 2	159,529 ± 28
Hall	307,773	307,868 ± 17	307,865 ± 12	307,884 ± 24
Gaildorf	329,542	329,637 ± 16	329,635 ± 11	329,654 ± 23
Goldshöfe . . .	470,967	471,094 ± 15	471,069 ± 12	471,062 ± 34
Gmünd	321,112	321,229 ± 15	321,221 ± 10	321,239 ± 21
Cannstatt . . .	224,073	224,150 ± 10	224,137 ± 9	224,175 ± 28
Stuttgart	251,497	251,581 ± 10	251,567 ± 9	251,607 ± 28
Zuffenhausen . .	282,911	282,988 ± 10	282,972 ± 8	283,016 ± 28
Calw	350,082	350,166 ± 9	350,167 ± 9	350,196 ± 29
Herrenberg . . .	430,154	430,200 ± 9	430,199 ± 5	430,227 ± 29
Plochingen . . .	255,383	255,462 ± 12	255,452 ± 10	255,486 ± 28
Tübingen	323,851	323,919 ± 10	323,919 ± 7	323,943 ± 28
Süßen	366,681	366,813 ± 16	366,799 ± 12	366,808 ± 15

Ein Vergleich der in Württemberg benützten, in der Spalte 1 aufgeführten N.N.-Höhen (enthalten in der schon angeführten Publikation der Württ. Kommission für die Europäische Gradmessung) mit den neu ermittelten N.N.-Höhen zeigt, daß die ersteren um 5—10 cm zu klein sind.

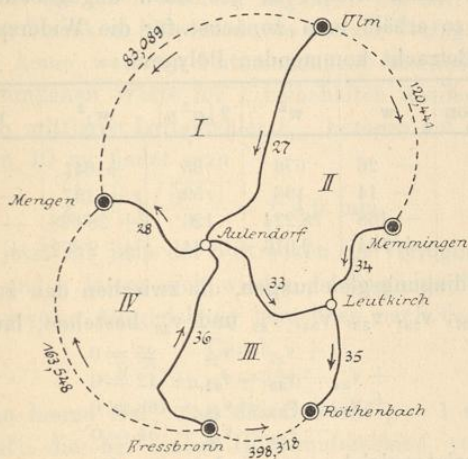
Die aus den beiden zwangsweisen Ausgleichungen hervorgegangenen N.N.-Höhen stimmen gut überein; wie ihre mittleren Fehler zeigen, ist es möglich, mit Benützung der Ergebnisse des württembergischen Präzisionsnivelements N.N.-Höhen zu ermitteln, deren mittlere zu befürchtende Fehler 1—2 cm betragen.

Die mittleren Fehler der aus einer Ausgleichung des württem-

bergischen Netzes in sich hervorgegangenen N.N.-Höhen zeigen, daß das württembergische Präzisionsnivellement ohne Rücksicht auf die Nachbarstaaten N.N.-Höhen zu berechnen ermöglicht, bei denen mittlere Fehler von nicht mehr als 3—4 cm zu befürchten sind.

8. Ermittlung von Normalnullhöhen für das Nivellementsnetz im südöstlichen Teil von Württemberg.

Von den übrigen, in den vorstehenden Ausgleichungen nicht behandelten Teilen des württembergischen Präzisionsnivellementnetzes bietet noch einiges Interesse das Netz im südöstlichen Teil von Württemberg. Eine Ausgleichung dieses Netzes in sich ist ohne



Figur 11.

Zuziehung von Netzteilen der Nachbarstaaten nicht möglich, und soll deshalb nicht ausgeführt werden. Da das Netz jedoch 5 Punkte mit den Netzen von Baden und Bayern gemeinsam hat, so läßt sich zwischen diesen eine zwangsweise Ausgleichung vornehmen.

Die 5 Anschlußpunkte (Fig. 11) samt ihren N.N.-Höhen, die den schon mehrfach angeführten Veröffentlichungen entnommen wurden, sind:

Ulm H.M. am Münster	478,777
Memmingen H.M.	599,218
Rötenbach H.M.	699,850
Kreßbronn G.P.	398,318
Mengen H.M.	561,866

Die gemessenen Höhenunterschiede h , die Anzahl der Instrumentaufstellungen n und die oben ermittelten Ablesungsfehler μ sind für die in Betracht kommenden Strecken die folgenden:

Strecke	h	n	μ
	m		mm
27	70,438	420	0,10
28	12,625	250	0,23
33	104,895	280	0,29
34	54,878	130	0,11
35	45,600	370	0,31
36	150,869	400	0,10

Bestimmt man wieder in der oben angegebenen Weise die Lattenfehler, so erhält man zunächst für die Widersprüche w und w_λ der 4 in Betracht kommenden Polygone:

Polygon	w	w^2	$2 [\mu^2 n]$	w_λ^2	w_λ
I	— 26	676	35	+ 641	— 25
II	— 14	196	59	+ 137	— 12
III	— 168	28 224	126	+ 28 098	— 168
IV	+ 54	2 916	34	+ 2 882	+ 54

Die 4 Bedingungsgleichungen, die zwischen den zu bestimmenden Größen v_{27} , v_{28} , v_{33} , v_{34} , v_{35} und v_{36} bestehen, lauten:

$$\begin{aligned} + v_{27} + v_{28} - 25 &= 0 \\ + v_{34} - v_{33} - v_{27} - 12 &= 0 \\ + v_{36} + v_{33} + v_{35} - 168 &= 0 \\ - v_{28} - v_{36} + 54 &= 0 \end{aligned}$$

Die Korrelatengleichungen sind in der folgenden Übersicht angedeutet; die Gewichtseinheit bezieht sich wieder auf $h = 100$ m.

	k_1	k_2	k_3	k_4	$\frac{1}{p}$
$v_{27} P_{27} = + 1$	— 1	.	.	.	0,496
$v_{28} P_{28} = + 1$	.	.	.	— 1	0,016
$v_{33} P_{33} = .$	— 1	+ 1	.	.	1,100
$v_{34} P_{34} = .$	+ 1	.	.	.	0,301
$v_{35} P_{35} = .$	.	.	+ 1	.	0,208
$v_{36} P_{36} = .$	.	.	+ 1	— 1	2,276

Die Normalgleichungen sind:

k_1	k_2	k_3	k_4	w_λ
+ 0,512	- 0,496	.	- 0,016	- 25 = 0
. . .	+ 1,897	- 1,100	.	- 12 = 0
.	.	+ 3,584	- 2,276	- 168 = 0
.	.	.	+ 2,292	+ 54 = 0

Für die Korrelaten findet man :

$$k_1 = +328,3 \quad k_2 = +278,6 \quad k_3 = +323,0 \quad k_4 = +299,3.$$

Damit ergeben sich für die λ_{10} , bezogen auf $h = 10$ m, die folgenden Werte :

Strecke	λ_{10}	Strecke	λ_{10}
	mm		mm
27	+ 3,5	34	+ 15,3
28	+ 0,2	35	+ 14,7
33	+ 4,6	36	+ 3,6

Die auffallend großen Werte für λ bei den Strecken 34 und 35 dürften wohl auf einen Fehler, begangen bei der Messung der einen der beiden Strecken, hinweisen; da das zur Verfügung stehende Zahlenmaterial keine weiteren Untersuchungen hierüber zuläßt, so müssen die gefundenen Werte für λ beibehalten werden.

Für einen mittleren Lattenfehler λ_{10} , bezogen auf einen Höhenunterschied von 10 m, findet man

$$\lambda_{10} = \sqrt{\frac{[p v v]}{6}} = \pm 4,6 \text{ mm.}$$

Mit den jetzt für jede der 6 Strecken zur Verfügung stehenden Werten für μ und λ lassen sich wieder die Gewichte für die nachfolgende zwangsweise Ausgleichung berechnen nach der Formel

$$p = \frac{\text{Const.}}{2n\mu^2 + \lambda^2 h^2}.$$

Setzt man hierzu fest, daß das Gewicht $p = 1$ sich auf eine Strecke bezieht, die bei einem Höhenunterschied von $h = 50$ m und $n = 50$ Standpunkten mit einem mittleren Ablesungsfehler $\mu = \pm 0,21$ mm und einem mittleren Lattenfehler $\lambda = \pm 4,6$ mm nivelliert wurde, so erhält man für die Gewichtskonstante den Wert

533,4. Die Werte von $\frac{1}{p}$ sind die folgenden:

Strecke	$\frac{1}{p}$
27	1,16
28	0,05
33	4,55
34	13,17
35	8,60
36	5,46

Nimmt man die zwangsweise Ausgleichung des Netzes nach bedingten Beobachtungen vor, so erhält man als Korrelatengleichungen — abgesehen von den Gewichtsreziproken — dieselben wie bei der Ermittlung der einzelnen Lattenfehler.

Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{rcccccc}
 k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & w & \\
 + 1,21 & - 1,16 & . & - 0,05 & - 26 = 0 \\
 . & + 18,83 & - 4,55 & . & - 14 = 0 \\
 . & . & + 18,61 & - 5,46 & - 168 = 0 \\
 . & . & . & + 5,51 & + 54 = 0
 \end{array}$$

Hieraus findet man für die Korrelaten

$$k_1 = +26,62 \quad k_2 = +4,91 \quad k_3 = +10,46 \quad k_4 = +0,80$$

Mit diesen erhält man für die Verbesserungen v

Strecke	v
	mm
27	+ 25
28	+ 1
33	+ 25
34	+ 64
35	+ 90
36	+ 53

Für die Summe der $p v v$ findet man

$$[p v v] = 2486$$

und damit für den mittleren Fehler m_0 der Gewichtseinheit, bezogen auf $n = 50$ Aufstellungen, $h = 50$ m Höhenunterschied, $\mu = \pm 0,21$ mm Ablesungsfehler und $\lambda = \pm 4,6$ mm Lattenfehler

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p v v]}{4}} = \pm 24,9 \text{ mm.}$$

Für das Gewicht p einer 1 km langen mit demselben Ablesungsfehler, demselben Lattenfehler und mit $n = 10$ Aufstellungen nivellierten Strecke mit dem Höhenunterschied $h = 10$ m erhält man

$$p = \frac{533,4}{22,0} = 24,2$$

und somit für ihren mittleren Fehler m

$$m = \frac{24,9}{\sqrt{24,2}} = \pm 5,1 \text{ mm.}$$

Eine Untersuchung der übrigbleibenden Fehler auf Grund des GAUSS'schen Fehlergesetzes ist mit Rücksicht auf die geringe Anzahl von Fehlern wertlos.

Für die ausgeglichenen Höhenunterschiede samt ihren mittleren Fehlern findet man:

Strecke	h	
	m	mm
27	70,463	± 5
28	12,626	± 5
33	104,920	± 38
34	54,942	± 38
35	45,690	± 38
36	150,922	± 5

Mit diesen Werten findet man für die Normalnullhöhen der beiden Knotenpunkte

Aulendorf 549,240 m ± 5 mm
 Leutkirch 654,160 m ± 38 mm.

Die entsprechenden Höhen der württ. Kommission für die europäische Gradmessung sind:

Aulendorf 549,062 m
 Leutkirch 653,967 m.

IV. Schlußwort.

Da einerseits aus den vorstehenden Untersuchungen hervorgeht, daß das württembergische Präzisionsnivellement durchaus nicht den Ansprüchen genügt, die man nach heutigen Begriffen an ein Präzisionsnivellement stellt, und da andererseits die Möglichkeit, daß in Württemberg ein vollständig neues Präzisionsnivellement in absehbarer Zeit ausgeführt wird, aus verschiedenen Gründen soviel als ausgeschlossen ist, so tritt die Frage auf, welche Genauigkeit kommt dem württembergischen Präzisionsnivellement zu und wie weit genügt es den Zwecken, für die es bestimmt ist. Zur Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen dürften die Ergebnisse der angestellten Untersuchungen einen Beitrag liefern.

Ein Bild von der Genauigkeit des Nivellements gibt am besten eine Zusammenstellung der für den Ablesungsfehler μ , den Lattenfehler λ und den mittleren Fehler m einer 1 km langen Strecke mit 10 m Höhenunterschied gefundenen Werte; diese sind — abgesehen von den gemeinsam für das ganze Netz bestimmten — die folgenden:

- a) Ablesungsfehler (mittlerer Fehler des Mittels aus drei von einem Standpunkt ausgeführten Lattenablesungen). Mittelwert aus den für die einzelnen Strecken getrennt ermittelten Werten.

$$\mu = \pm 0,24 \text{ mm.}$$

- b) Lattenfehler (mittlerer Fehler pro 10 m Höhenunterschied). Mittelwert bei Ausgleichung des Netzes in sich

$$\lambda_{10} = \pm 1,76 \text{ mm.}$$

Mittelwert bei zwangsweiser Ausgleichung des Netzes zwischen den Netzen von Baden und Bayern

$$\lambda_{10} = \pm 2,94 \text{ mm (Hauptnetz)}$$

$$\lambda_{10} = \pm 4,6 \text{ mm (kleines Netz).}$$

- c) Mittlerer Fehler einer 1 km langen mit 10 Instrumentaufstellungen, also einer mittleren Zielweite von 50 m nivellierten Strecke mit einem Höhenunterschied von 10 m.

Bei Ausgleichung des Netzes in sich

$$m = \pm 2,6 \text{ mm}$$

Bei zwangsweiser Ausgleichung des Netzes

$$m = \pm 3,3 \text{ mm (Hauptnetz)}$$

$$m = \pm 5,1 \text{ mm (kleines Netz).}$$

Wieweit der Zweck des Nivellements erreicht ist, der zunächst in der Bestimmung von absoluten oder Normalnullhöhen für das ganze Land besteht, ersieht man am besten an deren aus der Ausgleichung hervorgegangenen mittleren Fehlern.

Im Maximum wurde für den mittleren Fehler einer Normalnullhöhe gefunden:

- a) Bei zwangsweiser Netzausgleichung

$$\pm 2 \text{ cm.}$$

- b) Bei innerer Netzausgleichung

$$\pm 3 \text{ cm.}$$

Es ist demnach möglich, auf Grund des vorhandenen Präzisionsnivellements für Württemberg absolute Höhen zu ermitteln, die den meisten an sie zu stellenden Anforderungen durchaus genügen.

Der größte mittlere Fehler einer durch zwangsweise Ausgleichung zwischen den Netzen von Baden und Bayern ermittelten Normalnullhöhe zeigt, daß es möglich wäre mit Benützung des vorhandenen Materials für Württemberg Normalnullhöhen zu bestimmen, für welche die seither bestehenden Differenzen in den Anschlußpunkten der Nachbarstaaten verschwinden würden. Würde man sich in Württemberg mit Rücksicht auf die jetzt bestehenden Differenzen

bei den Anschlüssen an die Nachbarstaaten zu einer Abänderung der seither benützten Normalnullhöhen entschließen, so hätten der zwangsweisen Neuausgleichung zweckmäßigerweise einige Nachbar- bzw. Ergänzungsmessungen in dem vorhandenen Netz voranzugehen. Bei Nachmessungen würden die folgenden, offenbar fehlerhaft gemessenen Strecken in Betracht kommen: Ulm—Heidenheim—Aalen, Ulm—Schelklingen—Mengen, Leutkirch—Memmingen und Leutkirch—Rötenbach. Bei Ergänzungsmessungen würde zunächst die Strecke Reutlingen—Münsingen—Schelklingen zu berücksichtigen sein. Zur Kontrolle der aus einer solchen Neuausgleichung hervorgehenden Größen wäre sodann die Nachmessung von einigen beliebig herausgegriffenen Strecken zu empfehlen.

Da vom praktischen Standpunkte aus die bestehenden Anschlußdifferenzen an Baden und Bayern ziemlich belanglos sind, so ist es besonders mit Rücksicht auf die mit einer Änderung der seitherigen Höhen verbundenen, nicht unbeträchtlichen Kosten soviel wie ausgeschlossen, daß die in Württemberg benützten Normalnullhöhen abgeändert werden. Aus diesem Grunde ist es noch von Wichtigkeit, zu untersuchen, wie groß bei Verzicht auf einen differenzlosen Anschluß an die Nachbarstaaten die Unsicherheit in den bestehenden Normalnullhöhen ist. Zu einem Urteil hierüber kann man dadurch gelangen, daß man mit Benützung der Ergebnisse der inneren Netzausgleichung (Ausgleichung B) von einem Punkt — z. B. Ulm — ausgehend die Höhen der anderen Punkte ermittelt, wobei man für den Ausgangspunkt die seitherige Höhe annimmt; führt man die Berechnung in dieser Weise durch, so erhält man:

Punkt	Bestehende Höhe	Neue Höhe		Differenz
	m	m	mm	mm
Ulm	478,638	478,638	± 0	± 0
Aulendorf	549,062	549,075	± 7	+ 13
Mengen	561,689	561,699	± 9	+ 10
Sigmaringen . . .	574,102	574,111	± 11	+ 9
Tübingen	323,851	323,834	± 28	— 17
Horb	393,188	393,176	± 29	— 12
Calw	350,082	350,091	± 29	+ 9
Pforzheim	282,257	282,250	± 30	— 7
Mühlacker	242,413	242,414	± 27	+ 1
Bietigheim	222,231	222,242	± 27	+ 11
Heilbronn	159,447	159,417	± 28	— 30
Hall	307,773	307,772	± 24	— 1

Punkt	Bestehende Höhe	Neue Höhe		Differenz
	m	m	mm	mm
Crailsheim	411,413	411,419	± 33	+ 6
Goldshöfe	470,967	470,950	± 34	— 17
Gmünd	321,112	321,127	± 21	+ 15
Süßen	366,681	366,697	± 15	+ 16
Plochingen	255,383	255,375	± 28	— 8
Herrenberg	430,154	430,118	± 29	— 36
Stuttgart	251,497	251,494	± 28	— 3
Cannstatt	224,073	224,062	± 28	— 11
Zuffenhausen . . .	282,911	282,902	± 28	— 9
Gaildorf	329,542	329,542	± 23	± 0

Wie die beigesetzten Differenzen und mittleren Fehler zeigen, beträgt die Unsicherheit bei den in Württemberg im Gebrauch stehenden Höhen nicht mehr als 4 cm, so daß ihre Genauigkeit für technische und topographische Zwecke als genügend zu bezeichnen ist; die durch eine Änderung der bestehenden Höhen verursachten Kosten wären deshalb kaum zu rechtfertigen.

Punkt	Bestehende Höhe	Neue Höhe	Differenz
	m	m	mm
Crailsheim	411,413	411,419	+ 6
Goldshöfe	470,967	470,950	— 17
Gmünd	321,112	321,127	+ 15
Süßen	366,681	366,697	+ 16
Plochingen	255,383	255,375	— 8
Herrenberg	430,154	430,118	— 36
Stuttgart	251,497	251,494	— 3
Cannstatt	224,073	224,062	— 11
Zuffenhausen . . .	282,911	282,902	— 9
Gaildorf	329,542	329,542	± 0