Elemens de Geometrie - Cod. Durlach 219

[S.l.], [18. Jahrh.]

Elemens de Geometrie. A L'usage des Enfans de France

urn:nbn:de:bsz:31-267485

Elemens de Geometrie

A l'usage des Enfans de France

Traité des Proportions

On ne vient a la connoissance dune quantité inconnüe qu'en considerant le rapport quelle a avec une quantité connüe

Ce rapport peut etre de deux manieres Arithmetique et Geometrique

Il est Arithmetique lorsque l'on considere la difference quil y a entre la quantité connüe et l'inconnüe, Et Geometrique lorsque l'on considere quelle partie l'une est de l'autre, et cest ce dernier que l'on nomme proprement Rapport ou Raison

Si deux Quantitez ont meme rapport entre elles que deux autres, cette egalité de Rapports se nomme Proportion

Nous examinerons dans ce Traité les proprietez des rapports et des proportions que nous exprimerons par les nombres pour une plus grande facilité quoiqu'elles se doivent appliquer a toutes sortes de quantitez

Chapitre. I.

Du Tout et de ses Parties

I. Une Quantité est appellee Tout a l'egard d'une plus petite, et on la nomme Partie a l'egard d'une plus grande, ainsi 8. est appellé Tout a l'egard de 2. et 2. est appelle Partie de 8.

II. Si une quantité en contient une autre plusieurs fois exactement elle en est appellee Multiple, ainsi 12 est multiple de 4. Et la quantité qui est contenüe plusieurs fois exactement dans la premiere en est appellé Partie aliquote ou simplement aliquote, ainsi 4. est aliquote de 12.

L'on dit qu'une aliquote mesure son tout que 4 mesure 12. mais 4. ne mesure pas 10.

III. Vne Aliquote commune ou une Commune mesure est une quantité qui est Aliquote de deux autres, Ainsi 4. est Aliquote commune de 12. et de 8. mais non pas de 12. et de 10.

Les Quantitez qui ont une Aliquote commune ou une commune mesure sont appellées Commensurables comme sont tous les nombres entiers auxquels l'unité est une commune mesure, Et les Quantitez qui n'ont point de commune mesure sont appellées jncommensurables

IV. Deux Aliquotes sont Semblables ou pareilles lorsquelles sont egalement contenües dans leurs multiples, Ainsi 2 et 3. sont aliquotes Semblables de 8 et 12. parceque 2. est contenu 4. fois dans 8. comme 3. est contenu 4. fois dans 12. L'on vient par cette definition que les moities, les tiers, les quarts, les sixiemes &c de deux quantitez en sont les Aliquotes Semblables

V. Les quantitez qui contiennent Egalement leurs Aliquotes Semblables en sont appellées Equimultiples

Ainsi 8 et 12. sont Equimultiples de 2 et 3. parceque 8. contient quatre fois 2. comme 12. contient quatre fois 3. l'on voit par cette definition que les Doubles, les Triples, les quatruples, les quintuples &c. de deux quantitez en sont les Equimultiples

Chapitre. II.

Des rapports et de la proportion Geometrique

Definitions

I. Quand on compare une quantité avec une autre de meme nature, la premiere s'appelle Antecedent ou Premier Terme, et la Seconde Consequent ou Second Terme

II. Rapport ou Raison est la maniere dont l'antecedent contient son consequent ou quelques unes de ses aliquotes; Ainsi le rapport de 12. a 4. est la maniere dont 12. contient 4. et comme 12. contient 3. fois 4. on exprime ce rapport en disant que 12. est triple de 4. De meme le rapport de 8. a 12. est la maniere dont 8. contient une aliquote de 12. Et comme 8. contient 2. fois 4. qui est le tiers de 12. on exprime ce rapport en disant que 8. est les deux tiers de 12.

III. Il y a de deux sortes de Rapports d'exactes et de sourds

Le Rapport exact est celuy dont l'Antecedent contient exactement son consequent ou quelques unes de ses aliquotes; Ainsi le rapport de 12 a 4. est exact, parceque 12. contient exactement 3. fois 4. De meme le rapport de 6. a 9. est aussi exact parceque 6. contient exactement 2. fois 3. qui est le tiers de 9. Cette sorte de rapport se rencontre toujours entre les Quantitez commensurables

Le rapport sourd est celuy dont l'Antecedent ne contienne point exactement quelque aliquote que ce soit de son consequent. Comme si ayant divisé C. en quelques aliquotes que ce soit, si A. ne contient pas exactement une de ses Aliquotes le rapport de A a C. est appellé sourd, et cette sorte de rapports se trouve entre les Quantitez jncommensurables

Mais puisque l'on conçoit que C. peut etre divisé en parties infiniment petites si A. ne contient pas exactement une de ses petites parties il ne s'en faudra qu'un reste moindre que l'une de ces parties, lequel etant infiniment petit pourra etre negligé; et alors on pourra regarder le rapport de A. a C. comme un rapport exact, c'est a dire comme si A. contenoit exactement une aliquote de C. C'est pourquoy nous ne parlerons dans la suite que du rapport exact

IV. Deux rapports sont egaux lorsque les antecedens contiennent exactement leurs consequens ou les aliquotes semblables de leurs consequens. Ainsi le rapport de 8 a 2. est egal au rapport de 12. a 3. parceque 8. contient 4 fois 2. comme 12. contient 4. fois 3. De meme le rapport de 4. a 6. est egal a celuy de 10. a 15. parceque 4. contient 2. fois le tiers de 6. et que 10. contient aussi 2. fois le tiers de 15.

V. L'Egalité de deux rapports s'appelle proportion et les Quantitez entre lesquelles il y a des rapports egaux sont appellees Proportionnelles. Ainsi l'on dit qu'il y a proportion entre ces 4. quantitez 4, 6, 10, 15; qui

Sont appellees Proportionnelles, cequi s'exprime ainsi 4 . 6 :: 10 . 15 . c'est a dire 4 . est a 6 . comme 10 . est a 15 .

Comme une proportion contient deux rapports, et que chaque rapport contient deux termes, sçavoir un Antecedent et un consequent, il s'ensuit qu'une proportion contient 4 . termes 2 . Antecedens et 2 . consequens

Le premier et le dernier terme d'une proportion s'appellent les Extremes et ceux du milieu s'appellent les moyens

Les termes extremes d'une proportion sont appellez Reciproques ou Reciproquement proportionnels des moyens . Ainsi dans cette proportion 9 . 12 :: 6 . 8 , 9 et 8 . qui sont les extremes sont dits reciproques de 12 . et de 6 . qui sont les moyens

Si les termes moyens d'une proportion sont les memes, ou cequi est la meme chose, s'il y a proportion entre trois termes la proportion est appellee Continüe, comme 4 . 6 :: 6 . 9 . cequi se marque ainsi ∺ 4 . 6 . 9 .

Dans la proportion continüe le terme moyen se nomme Moyen proportionnel

Si la proportion continüe s'etend a plus de trois termes on l'appelle Progression comme ∺ 1.2.4.8.16.32.64.&c.

VI. Deux Rapports sont inegaux lorsque leur antecedens ne contiennent pas egalement leurs consequens, ou les aliquotes semblables de leurs consequens, Et celuy-la est le plus grand rapport dont l'antecedent contient d'avantage son consequent ou les aliquotes semblables de son consequent. Ainsi le rapport de 8. a 2. est plus grand que celuy de 12. a 4. parceque 8. contient 4. fois 2. et que 12 ne contient que 3. fois 4. De meme le rapport de 6. a 4. est plus grand que celuy de 10. a 8. parceque 6. contient 6. fois le quart de 4. et que 10. ne contient que 5. fois le quart de 8.

VII. Lorsque l'on compare ensemble deux quantitez seulement comme 4 et 6. le rapport quil y a entre ces deux quantitez est appellé un Raport Simple ou Raison Simple

Mais si l'on multiplie les deux termes d'un raport simple par ceux d'un autre raport, le raport quil y a entre leurs produits est appellé Raport composé ou Raison composee des deux raports Simples ainsi Si l'on multiplie les termes 4. et 6. d'un raport par les termes 9 et 12. d'un autre raport, les produits 36 et 72. auront entre eux un raport composé de celuy de 4. a 6. et de celuy de 9. a 12.

Et generalement et Si l'on multiplie plusieurs raports l'un par l'autre

4 .	6.	raports simples
9 .	12.	
36 .	72.	raports composé

c'est a dire les antecedens les uns par les autres, et les consequens aussi les uns par les autres, le raport quil y aura entre leurs produits Sera Composé de tous ceux de ces raports

Ces raports composés recoivent differens noms des differens raports qui Sont multipliés

Ainsi Si l'on multiplie deux raports egaux l'un par l'autre, le raport composé de leurs produits est appellé

Raport Doublé ou raison Doublee

2 .	3.	
4 .	6	
8 .	18.	raison doublee de 2 a 3 ou de 4. a 6.

Si l'on multiplie trois raports egaux l'un par l'autre le raport composé de leurs produits est appellé Raport triplé ou raison Triplee &c.

2 .	3 .
4 .	6 .
8 .	12 .
64 .	216 . raison triplee de 2 a 3. ou de 4 a 6.

Et les raports Simples dont un raport est doublé Sont dits etre en raison Sousdoublee, ou Raport Soudoublé de ces quantitez Ainsi le raport de 2 a 3. ou de 4. a 6. est Soudoublé de celuy de 8 a 16.

De meme les raports Simples dont un raport composé est Triplé Sont dits etre en raison Soustriplee ou Raport Soustriplee de ces quantitez. Ainsi 2 et 3. Sont en raport Soutriplé de 64. a 216. aussi bien que 4. et 6. et que 8 et 12.

Il est evident que Si au lieu d'avoir pris des quantitez inegales pour exprimer les raports Simples egaux dont d'autres Sont doublés et triplés l'on avoit pris les memes quantitez, les termes des raports doublés auroient eté les quarrés de ces quantitez, et les termes des raports Triplés en auroient eté les cubes, Et les termes des raports Simples Sont les racines quarrees des termes des raports doublés, et les racines cubiques des raports Triplés comme l'on peut voir dans cette Exemple

2 . 3.	raports Simples egaux
2 . 3	
4 . 9	raport doublé, ou quarré
2 . 3.	
8 . 27 .	raport Triplé ou Cubes

C'est pourquoy ces deux expressions, Deux quantitez Sont entre elles en raison doublee de deux autres, ou deux quantitez Sont entre elles les quarrés de deux autres Signifient la meme chose aussi bien que ces expressions cy

Deux quantitez Sont entre elles en raison Triplee de deux autres, Ou deux quantitez Sont entre elles comme les cubes de deux autres

Deux quantitez Sont entre elles en raison Sousdoublee de deux autres, ou deux quantitez Sont entre elles comme les racines quarrees de deux autres

Deux quantitez Sont entre elles en raison Soustriplee de deux autres, ou deux quantitez Sont entre elles comme les racines cubiques de deux autres

VIII. Des definitions precedentes il Suit que pour connoistre Si quatre quantitez Sont proportionnelles, il Faut examiner Si les antecedens contiennent egalement leurs consequens ou les aliquotes Semblables de leurs consequens

Pour faire cet examen 1.° Divisez chaque antecedent par son consequent, si la division se fait sans reste, et que les quotiens soient egaux, il est evident que les antecedens contiendront egalement leurs consequens, et qu'ainsy elles sont proportionnelles. Si les quotiens sont inegaux les quantitez ne sont pas proportionnelles

2.° Si la division ne se fait pas sans reste; ou si les antecedens sont plus petits que leurs consequens. Partagez les consequens en aliquotes semblables plus petites que leurs antecedens; considerez ensuite combien chaque antecedent contient des aliquotes de son consequent; si les antecedens contiennent egalement et sans reste les aliquotes de leurs consequens les quantitez sont proportionnelles; si elles ne les contiennent pas egalement soit sans reste, soit avec un reste, les quantitez ne sont pas proportionnelles, et le plus grand rapport est celuy dont l'antecedent contient le plus d'aliquotes semblables de son consequent

3.° Si les antecedens contiennent egalement les aliquotes semblables de leurs consequens avec des restes il faut partager les consequens en aliquotes plus petites que les premiers et recommencer le meme examen

Exemples

Soient proposees les quantitez 12, 3, 20, 5, pour connoitre si elles sont proportionnelles Divisez 12 par 3, et 20 par 5. les quotiens 4 et 4. marqueront que chaque

12		20	
3	4	5	4

antecedent contient quatre fois son consequent et ainsi ces quantitez sont proportionnelles C'est a dire que 12.3:: 20.5.

Soient proposees ces autres quantitez 15.20, 18.24. partagez les consequens 20. et 24. en aliquotes semblables, par exemple en quarts vous aurez 20. exprimé par 5.5.5.5. et 24. par 6.6.6.6. considerez ensuite combien les antecedens contiennent des aliquotes de leurs consequens vous aurez 15. egal a 5.5.5. et 18. egal a 6.6.6. ainsi les quantitez 15.20.18.24. seront exprimees par celle cy 5.5.5. 555:: 6.6.6.6.6.6.6. qui marquent que ces quantitez sont proportionnelles puisque chaque antecedent contient trois fois sans reste le quart de son consequent. On pourroit exprimer ces memes parties des quantitez 15. 20. 18. 24. par celle cy 3,5. 4,5 :: 3,6. 4,6. qui marquent aussi que ces

15	.	20	::	18	. 24.
555	.	5555	::	666	. 6666
3,5	.	4,5	::	3,6	. 4,6.

quantitez sont proportionelles et quil faut lire ainsi 3. fois 5. est a 4. fois 5. comme 3. fois 6. est a 4. fois 6. Et nous nous servirons de cette derniere expression comme plus commode pour les demonstrations

Soient encore proposees les quantitez 20. 32. 15. 24. a lexaminer si elles sont proportionnelles si vous partagez les consequens 32 et 24. en quarts vous trouverez que les antecedens 20. et 15 contiennent egalement ces quarts mais avec des restes

	20 .	32 .	15 .	24.
	8,8+4.	8,8,8,8.	6,6,6.	. 6,6,6,6.
ou	28+4 .	4,8 .	26+3 .	4,6.
	4,4,4,4.	.4,4,4,4,4,4,4,4.	3,3,3,3 .	3,3,3,3,3,3,3,3.
ou	5,4 .	8,4 .	5,3.	8,3.

C'est pourquoy il faut partager ces consequens en aliquotes plus petites, par exemple en huitiemes vous aurez les quantitez 20. 32. 15. 24. exprimees de cette maniere 4,4,4,4,4 ; 4,4,4,4,4,4,4,4 ; 3,3,3,3,3 ; 3,3,3,3, 3,3,3,3, Oubien 5,4. 8,4 :: 5,3. 8,3. qui marquent l'une et l'autre que ces quantitez sont proportionnelles puisque les antecedens contiennent chacun 5. fois la huitieme partie de leurs consequens

Ce changement de quantité dans leurs parties pour en connoitre la proportion se nomme Transformation

Chapitre. III.

De la maniere de changer deux quantitez sans changer leur Rapport

Deux quantitez peuvent etre changées sans changer leur rapport de quatre manieres, sçavoir, en leur ajoutant ou en retranchant deux quantitez qui ayent un meme rapport, et en les multipliant ou divisant par une meme quantité

I. Si a deux quantitez on ajoute deux autres quantitez qui ayent un meme rapport, les Sommes auront aussi un meme raport

Soient proposees les 2. quantitez .... 8 . 12.

ausquelles on ajoute .... 2 . 3.

Les Sommes .... 10 . 15.

auront aussi un meme rapport C'est a dire que .. 10 . 15 :: 8 . 12.

Car si l'on transforme ces quantitez on aura .... 2,5 . 3,5 :: 2,4 . 3,4.

qui sont evidemment des raports egaux

Il est evident que si a ces Sommes .... 10 .. 15.

On ajoutoit encore d'autres quantités .... 6 . 9.

qui ont un meme raport, les Sommes .... 16 . 24.

auront aussi un meme rapport

D'où il suit que si plusieurs quantitez ont un meme rapport, et que l'on ajoute ensemble tous les antecedens d'un coté, et tous les consequens d'un autre, la Somme des antecedens sera a la Somme des consequens comme l'un des antecedens est a son consequent

Suposons les quantités suivantes .... { 2 . 3 :: 10 . 15 :: 4 . 6. :: 14 . 21. :: 6 . 9. }

qui ont meme rapport

Leurs Sommes .... 36 . 54.

auront aussi meme rapport

C'est a dire que .... 36 . 54 :: 2 . 3.

II. Si de deux quantitez on ost deux autres quantitez qui ayent meme rapport, les restes auront aussi un meme rapport

Soient proposees les deux quantitez .... 8 . 12.

desquels on oste .... 2 . 3.

qui ont meme rapport les restes .... 6 . 9.

C'est a dire que .... 6 . 9 :: 8 . 12.

Ou en transformant l'on a .... 2,3 . 3,3 :: 2,4 . 3,4.

III. Si deux quantitez sont multipliees par une meme quantité, les produits auront meme rapport que ces deux quantitez

Soient proposees les quantitez .... 2 . 3.

qui soient multipliees par .... 4 . 4.

Les produits .... 8 . 12.

auront aussi meme rapport

C'est a dire de .... 8 . 12 :: 2 . 3.

Car en transformant l'on a .... 2,4 . 3,4 :: 2,1 . 3,1.

Il est evident qu'en multipliant deux quantitez par une meme quantité les produits sont les Equimultiples de ces quantitez, ainsi si l'on multiplie deux quantitez par 2. les produits en sont les doubles par 3. les triples, par 4. les quatruples; par 100. les centuples. Mais l'on vient de prouver que lorsque l'on multiplie deux quantitez par une meme quantité les produits, ont meme raport que ces deux quantitez Donc Deux quantitez ont meme raport entre elles que leurs Equimultiples

V. Si deux quantitez sont divisees par une meme quantité les quotiens auront meme rapport que ces quantitez

Soient proposees les quantitez .... 8 . 12.

qui soient divisees par .... 4 . 4.

Les quotiens .... 2 . 3.

Auront aussi meme raport, c'est a dire que .... 8 . 12 :: 2 . 3.

Car en transformant l'on a .... 2,4 . 3,4 :: 2,1 . 3,1.

Il est Evident que ces quotiens sont les aliquotes semblables de ces quantitez Donc deux quantitez sont entre elles comme leurs aliquotes semblables et reciproquement les aliquotes semblables sont entre elles comme leurs Equimultiples ainsi 8. est a 12. comme le quart de 8. qui est 2. est au quart de 12. qui est 3. Et de meme 2 . 3 :: 8 . 12.

Chapitre. IV.

Maniere de comparer ensemble les quatre termes d'une proportion en conservant toujours une proportion entre ces quatre termes

Il y a cinq manieres en general de comparer ensemble les quatre termes d'une proportion en conservant toujours une proportion entre ces quatre termes

I. En Renversant c'est a dire mettant des consequens a la place des antecedens

Soient proposees les proportions Suivantes	A . C :: a . c. 2 . 6 :: 3 . 9.
En Renversant	C . A :: c . a. 6 . 2 :: 9 . 3.

II. En Permutant, c'est a dire comparant ensemble les deux antecedens d'une part et les consequens de l'autre

Soient proposees les proportions Suivantes .... $\left\{\begin{array}{l} A \,.\, C :: a \,.\, c. \\ 2 \,.\, 6 :: 3 \,.\, 9. \end{array}\right.$

En permutant .... $\left\{\begin{array}{l} A \,.\, a :: C \,.\, c. \\ 2 \,.\, 3 :: 6 \,.\, 9. \end{array}\right.$

III. En ajoutant cequon appelle en Composant, cést a dire comparant la Somme de lántecedent et du consequent de chaque rapport avec lántecedent ou le consequent du meme rapport

Soient proposees les proportions Suivantes .... $\left\{\begin{array}{l} A \,.\, C :: a \,.\, c. \\ 2 \,.\, 6 :: 3 \,.\, 9. \end{array}\right.$

En ajoutant .... $\left\{\begin{array}{l} A+C \,.\, A :: a+c \,.\, a. \\ 8 \,.\, 2 :: 12 \,.\, 3. \end{array}\right.$

Ou bien .... $\left\{\begin{array}{l} A+C \,.\, C :: a+c \,.\, c. \\ 8 \,.\, 6 :: 12 \,.\, 9. \end{array}\right.$

IV. En ostant cequon appelle en Divisant, cest a dire comparant la difference de lántecedent et du consequent de chaque rapport avec lántecedent ou le consequent du meme rapport

Soient proposees les proportions Suivantes .... $\left\{\begin{array}{l} A \,.\, C :: a \,.\, c. \\ 2 \,.\, 6 :: 3 \,.\, 9. \end{array}\right.$

En ostant .... $\left\{\begin{array}{l} A-C \,.\, A :: a-c \,.\, a. \\ 4 \,.\, 2 :: 6 \,.\, 3. \end{array}\right.$

Ou bien .... $\left\{\begin{array}{l} A-C \,.\, C :: a-c \,.\, c. \\ 4 \,.\, 6 :: 6 \,.\, 9. \end{array}\right.$

V. En ajoutant et ostant en meme temps ce quón appelle par Division de Raison cest a dire comparant la somme de lántecedent et du consequent

Soient proposees les proportions Suivantes ...... $\begin{cases} A \,.\, C :: a \,.\, c. \\ 2 \,.\, 6 :: 3 \,.\, 9. \end{cases}$

En ajoutant et ostant en meme temps. $\begin{cases} A+C \,.\, A-C :: a+c \,.\, a-c. \\ 8 \,.\, 4 :: 12 \,.\, 6. \end{cases}$

Toutes ces regles paroitrons Evidentes par la Transformation

Car soit cet autre

Proportion .... 6 . 8 :: 15 . 20.

Transformez la vous aurez .... 3,2 . 4,2 :: 3,5 . 4,5.

En Renversant .... $\begin{cases} 8 \,.\, 6 :: 20 \,.\, 15. \\ 4{,}2 \,.\, 3{,}2 :: 4{,}5 \,.\, 3{,}5. \end{cases}$

En permutant .... $\begin{cases} 6 \,.\, 15 :: 8 \,.\, 20. \\ 3{,}2 \,.\, 3{,}5 :: 4{,}2 \,.\, 4{,}5. \end{cases}$

En composant .... $\begin{cases} 14 \,.\, 6 :: 35 \,.\, 15. \\ 7{,}2 \,.\, 3{,}2 :: 7{,}5 \,.\, 3{,}5. \end{cases}$

Ou bien .... $\begin{cases} 14 \,.\, 8 :: 35 \,.\, 20. \\ 7{,}2 \,.\, 4{,}2 :: 7{,}5 \,.\, 4{,}5. \end{cases}$

En ostant ou divisant .... $\begin{cases} 2 \,.\, 6 :: 5 \,.\, 15. \\ 1{,}2 \,.\, 3{,}2 :: 1{,}5 \,.\, 3{,}5. \end{cases}$

Ou bien .... $\begin{cases} 2 \,.\, 8 :: 5 \,.\, 20. \\ 1{,}2 \,.\, 4{,}2 :: 1{,}5 \,.\, 4{,}5. \end{cases}$

Par division de raison .... $\begin{cases} 14 \,.\, 2 :: 35 \,.\, 5. \\ 7{,}2 \,.\, 1{,}2 :: 7{,}5 \,.\, 1{,}5. \end{cases}$

Pour demontrer qu'en permutant les quantitez sont proportionnelles qui est le seul cas, ou l'on voye par Evidemment par les transformations que les antecedens contiennent egalement leurs consequens ou leurs aliquotes semblables l'on trouvera en divisant le 1.er raport 3,2 . 3,5 par le produisant commun 3. ce qui ne changera point le raport, divisant de meme le second raport 4,2 . 4,5 par le produisant commun 4. l'on aura la proportion 3,2 . 3,5 :: 4,2 . 4,5 exprimee de cette maniere 2 . 5 :: 2 . 5 qui en marque clairement la proportion

Chapitre. V.

Propritez des Quãtitez proportionnelles

I. Quatre quantitez etant proportionnelles 1.° si les consequens sont egaux, les antecedens le seront aussi 2.° si les consequens sont inegaux les antecedens seront aussi inegaux, et le plus grand consequent aura le plus grand antecedent

Cette proposition est evidente par la definition des quantitez proportionnelles puisque les antecedens doivent contenir egalem.

leurs consequent ou les aliquotes Semblables de leurs
consequens

1.^{er} Exemple .... 8 . 12 :: 8 . 12.

2.^{d} Exemple .... 8 . 12 :: 10 . 15.

3.^{e} Exemple .... 8 . 12 :: 6 . 9.

D'ou il Suit 1.° que deux quantitez egales ont meme rapport a une meme quantité, puisqu'elles la contiennent egalement ou Ses aliquotes Semblables par la meme raison Si deux quantitez ont meme rapport a une meme quantité elles Sont egales 2.° Si deux quantitez Sont inegales la plus grande a un plus grand rapport a une troisieme quantité puisquelle la contiendra plus de fois, ou Ses aliquotes Semblables; Par la meme raison de deux quantitez inegales, celle qui a un plus grand rapport a une troisieme quantité est la plus grande.

II. Si deux Quantitez ont meme rapport entre elles que deux autres, et que ces Secondes quantitez ayent meme rapport que deux troisiemes, les deux premieres auront aussi meme rapport que les deux dernieres

Supposons que 2 . 3 :: 4 . 6 . et que 4 . 6 :: 8 . 12 . je dis que 2 . 3 :: 8 . 12 . cequi est evident

Cette proposition Se peut encore exprimer de cette maniere

Si deux raports Sont egaux a un meme raport, ils Sont egaux entre eux cequi parois evident

III. Quatre quantitez etant proportionnelles le produit des extremes est egal au produit des moyens

Soit proposé la proportion... 2 . 6 :: 3 . 9 .

produit 18 des moyens

produit des 18 Extremes

Le produit des extremes 2 et 9 . qui est 18 . est egal au produit des moyens 3 et 6 . qui est aussi 18 . ceque l'on peut demontrer par la transformation de cette maniere

Soit la proportion Suivante .... 8 . 10 :: 12 . 15 .

que l'on transformera dans Ses parties .... 4,2 . 5,2 :: 4,3 . 5,3 .

L'on voit que pour avoir le produit des extremes il faut multiplier ensemble les quatre produisans 4 . 2 . 5 . 3 . Et que pour avoir le produit des moyens il faut aussi multiplier ensemble les quatre produisans 5 . 2 . 4 . 3 . qui Sont les memes que ceux du produit des extremes, Donc les produits des extremes est egal au produit des moyens

D'ou il Suit 1.° que le produit de Deux quantitez reciproques est egal au produit des deux autres. Car nous avons appellé les termes extremes d'une proportion Reciproques des Termes moyens

2.° Que lorsque l'on connoist trois Termes d'une proportion on peut toujours trouver le quatrieme, car si c'est un extreme qui manque, En multipliant les moyens ensemble leur produit sera egal a celuy des extremes, C'est pourquoy divisant leur produit par l'extreme connu, le quotient donnera l'Extreme jnconnu

Si c'est un moyen qui manque, multipliant les extremes ensemble, et divisant leur produit par le moyen connu le quotient donnera le moyen inconnu comme l'on verra dans les problemes suivans

Il suit 3.° que dans une proportion continüe le produit des extremes est egal au quarré du moyen comme l'on peut voir dans cet exemple

$$4 \cdot \underbrace{6 :: 6}_{\text{quarré 36. du moyen}} \cdot 9 \cdot$$

produit des 36. Extreme

C'est pourquoy pour trouver un moyen proportionnelle entre deux quantitez proposees, il faut multiplier ces deux quantitez ensemble et prendre la racine quarree de leur produit, ce sera la moyenne proportionnelle que l'on cherche.

IV. Quatre quantitez etant proportionnelles si l'on divise chaque antecedent par son consequent les quotiens son egaux

Supposons la proportion suivante $8 . 2 :: 12 . 3 \quad \frac{8}{2} = 4 . \frac{12}{3} = 4.$

Divisant 8. par 2. et 12. par 3. les quotiens 4 et 4. sont egaux

Supposons cette autre proportion $4 . 6 :: 10 . 15.$

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$$

Divisant de meme 4. par 6. et 10. par 15. les quotiens $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont encore egaux

Pour demontrer cette proposition. il faut considerer que lorsque l'on divise chaque antecedent par son consequent les quotiens marquent combien chaque antecedent contient son consequent, lorsque la division se fait sans reste, ou d'aliquotes de son consequent, lorsquelle ne se fait pas sans reste; Mais par la definition des quantites proportionnelles les antecedens contiennent egalement leurs consequens ou leurs aliquotes

Semblables; Donc les quotiens doivent etre egaux

V. Si le raport de deux quantitez est composé de plusieurs raports et que celuy de deux autres quantitez soit composé de meme nombre de raports egaux aux premiers, ces quatre quantitez seront proportionnelles

Soient les deux premieres quantitez 36 et 72. dont le raport est composé des raports de 4. a 6. et de 9. a 12.

Soient les deux secondes quantitez 30 et 60. dont le raport est composé des raports 2 a 3. et de 15. a 20. egaux aux premiers, je dis que 36. 72 :: 30. 60.

Car si l'on dispose les raports simples egaux en proportion

l'on aura { 4 . 6 :: 2 . 3.
{ 9 . 12 :: 15 . 20

dont les produits... 36 . 72 :: 30 . 60.

Sont les quantitez quil faut prouver etre proportionnelles

Transformez ces deux proportions

simples, vous aurez ..... { 2,2 . 3,2 :: 21 . 3,1.
{ 3,3 . 4,3 :: 3,5 . 4,5.

Et po.r produisans de leurs produits.. 2233 . 2334 :: 2135 . 1345

Effacez les produisans egaux des termes de chaque raport

les Raports ne changeront point, et il restera 2 . 4 :: 2 4 .
qui Sont en proportion, Donc les produits 36 . 72 . 30 . 60 de tous
ces produisans Seront aussi en proportion

On demontreroit de la meme maniere que Si le raport de
deux quantitez etoit composé de plus de deux raports et que celuy
de deux autres fut composé de meme nombre de raports egaux
aux premiers ces quantitez Seroient proportionnelles

D'ou il Suit 1.° Que Si deux raports Sont egaux leurs raports
Doublez et Triples Sont aussi egaux

2.° Si des raports Doublez et Triplez Sont egaux leurs
raports Sousdoublés, Soustriples Sont aussi egaux.

$$\text{Raports} \left\{ \begin{matrix} 3 . 4 :: 6 . 8 . \\ 3 . 4 :: 6 . 8 . \end{matrix} \right\} \text{egaux}$$

Raports 9 . 16 :: 36 . 64 . Doublez

Raports 27 . 64 :: 216 . 512 . Triplez

C'est pourquoy Si quatre quantitez Sont proportionnelles
leurs quarrés et leurs cubes Sont proportionnels et leurs cubes
Sont aussi proportionnels, Et de meme Si quatre quarrés ou
quatre cubes Sont proportionnels leurs racines quarrees et
cubiques Sont aussi proportionnelles

3.° Lorsque l'on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion chaque terme par luy qui luy a repond, les produits seront en proportion, le rapport de leurs produits sera composé des rapports des deux proportions simples. On diroit la meme chose de plus de deux proportions

$$\text{Soient les proportions} \ldots \left\{\begin{array}{l} 2 \ . \ 3 :: 4 \ . \ 6. \\ 5 \ . \ 10 :: 6 \ . \ 12. \end{array}\right.$$

$$\text{produits} \quad 10 \ . \ 30 :: 24 \ . \ 72.$$

VI. Si l'on supose quil y ait de suite plusieurs quantitez qui ayent entre elles tels raports que l'on voudra egaux ou inegaux, le raport de la premiere a la derniere sera composé de tous les raports quil y a entre ces quantitez

Soient les quantitez 6. 8. 10. 12. 15. Je dis que le raport de 6 a 15. est composé des raports de 6 a 8, de 8. a 10. de 10. a 12. et de 12. a 15.

$$\text{Disposez ces raports l'un sur l'autre} \ldots \left\{\begin{array}{ll} 6 \ . & 8. \\ 8 \ . & 10. \\ 10 \ . & 12. \\ 12 \ . & 15 \end{array}\right.$$

Le raport composé de tous ces raports aura pour produisans 6 ~~8~~, ~~10~~, ~~12~~ . ~~8~~, ~~10~~, ~~12~~, 15

Effacez les produisans egaux de chaque terme de ce raport ce qui ne changera point leur raport il restera 6. 15. Donc le raport de ces deux quantitez est composé de tous les raports des quantitez qui etoient entre deux

D'ou il suit 1.° que si trois quantitez sont en proportion continüe le raport de la 1.ere a la troisieme sera doublé de celuy de la premiere a la seconde, ou cequi est la meme chose la premiere sera a la troisieme comme le quarré de la premiere sera au quarré de la seconde, Puisque le raport de la premiere a la troisieme sera composé de deux raports egaux

Soient les trois quantitez ÷ 4. 6. 9. je dis que 4 est a 9. en raison doublee de 4 a 6. ou que 4 . 9 :: 16 . 36. cequi est evident par les demonstrations precedentes

2.° Si quatre quantitez sont en proportion continüe le raport de la premiere a la quatrieme sera Triplé du raport de la premiere a la seconde, ou cequi est la meme chose, la premiere sera a la quatrieme comme le cube de la seconde, puisque le raport de la premiere a la quatrieme sera composé de trois raports egaux

Soient les quatre quantitez ÷ 2 . 6 :: 18 . 54. Je dis que 2. est a 54. en raison triplee de 2 a 6. ou que 2. 54 :: 8. 216.

3.° Lorsque l'on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion, les produits seront encore en proportion. Et le raport de leurs produits sera composé des raports simples des deux proportions. On diroit la meme chose de plus de deux proportions

Soient les proportions .... $\begin{cases} 2 \,.\, 3 :: 4 \,.\, 6. \\ 5 \,.\, 10 :: 6 \,.\, 12. \end{cases}$

Les produits .... $10 \,.\, 30 :: 24 \,.\, 72.$

VII. Quatre quantitez etant proportionnelles le produit des antecedens est au produit des consequens comme le quarré d'un antecedent est au quarré de son consequent

Soient les quantitez proportionnelles 6. 8 :: 9. 12. je dis que le produit des antecedens 6 et 9. qui est 54. est au produit des consequens 8 et 12. qui est 96. comme le quarré de 6. qui est 36. est au quarré de 8. qui est 64. comme le quarré de 9. est au quarré de 12. C'est a dire que 54. 96 :: 36. 64. ou 54. 96 :: 81. 144.

Pour le prouver Transformez les termes de la proportion

Vous aurez $\begin{cases} 6 \;.\; 8 :: 9 \;.\; 12. \\ 3,2 \;.\; 4,2 \quad 3,3 \;.\; 4,3. \end{cases}$

$\cancel{3},\cancel{2},3,3 \;.\; \cancel{2},\cancel{3},4,4 :: \cancel{2},\cancel{2},3,3 \;.\; \cancel{2},\cancel{2},4,4.$

Rangez de $\cancel{2},\cancel{3},3,3 \;.\; \cancel{2},\cancel{3},4,4 :: \cancel{3},\cancel{2},3,3 \;.\; \cancel{3},\cancel{2},4,4.$

suite les produisans du produit des antecedens, faites la meme chose des produisans du produit des consequens, des produisans du quarré d'un antecedent et les produisans du quarré de son consequent, Effacez ensuite les produisans egaux des termes de chaque rapport cequi ne changera point leur rapport, il restera 3,3 . 4,4 :: 3,3 . 4,4 . qui sont en proportion, donc les produits de ces produisans sont aussi en proportion. Donc quatre quantitez etant proportionnelles, le produit des antecedens est au produit des consequens, comme le quarré d'un antecedent est au quarré de son consequent

VIII. Six quantitez etant proportionnelles le produit des trois antecedens est au produit des trois consequens comme le cube d'un antecedent est au cube de son consequent

Soient les quantitez proportionnelles 2 . 5 :: 4 . 10 :: 6 . 15 . je dis que le produit des trois antecedens 2, 4, 6 . qui est 48 . est au produit des trois consequens 5, 10, 15 . qui est 750 . comme le cube de 2. qui est 8. est au cube de 5. qui est 125. ou comme le cube de 4. au cube de 10. &c. C'est a dire que 48. 750 :: 64. 125. &c.

Car Transformez les Termes de ces trois raports egaux

Vous aurez	2 ·	5 ::	4 ·	10 ::	6 ·	15.
	2,1	5,1 ::	2,2 ·	5,2 ::	2,3 ·	5,3.

122,2,2,3 · 1235,5,5 :: 1112,2,2 · 1115,5,5.

Rangez 122,2,2,3 · 1235,5,5 :: 2222,2,2 · 2225,5,5;

desuite les produisans des produits des antecedens, leur produisans des produits des consequens, les produisans du cube de tel antecedent quil vous plaira, et les produisans du cube de son consequent, Effacez ensuite des termes de chaque raport les produisans egaux, ce qui ne changera point leur raport il restera 222 · 555 :: 222. 555. qui sont evidemment en proportion, Dons les produits de ces produisans sont aussi en proportion, Donc six quantitez etant proportionnelles le produit des antecedens est au produit des consequens comme le cube d'un antecedent est au cube de son consequent

IX. Dans toute progression geometrique qui diminüe le premier terme moins le second est au premier terme, comme le premier terme moins le dernier est a la Somme de tous les termes moins le dernier

Supposons la progression $\div\div$ 81. 27. 9. 3. 1. je dir que 81 — 27. ou 54. est a 81. comme 81 — 1. ou 80. est a la somme de tous les termes moins 1. qui est 120.

Car disposant les Termes des raports egaux de ces quantitez l'un sous l'autre

de cette maniere ......
$$\left\{\begin{array}{lll} & 81 & . \quad 27. \\ :: & 27 & . \quad 9. \\ :: & 9 & . \quad 3. \\ :: & 3 & . \quad 1. \end{array}\right.$$
$$\overline{120 \;.\; 40 :: 81.\ 27.}$$

La Somme des antecedens 120. sera a la Somme des consequens 40. comme l'un des antecedens 81. est a son consequent 27.

Et en divisant .... 80. 120 :: 54. 81.

Ou bien .... 54. 81 :: 80. 120.

Mais 54. est le premier terme moins le second 81. est le premier, 80. est le premier moins le dernier, et 120. est la somme de tous les termes moins le dernier, Donc dans toute progression geometrique qui diminüe le premier terme, comme le premier moins le dernier est a la Somme de tous les termes moins le dernier

D'ou il suit que si la progression diminue a l'infiny, le dernier terme etant 0. alors le premier terme moins le second est au premier, comme le premier est a la somme de tous les termes

Problemes

1. Trois quantitez 4. 6. 10. etant proposees trouver une quatrieme proportionnelle

Multipliez ensemble les deux termes 6 et 10. qui sont les moyens dans la proportion, leur produit 6. sera aussi le produit des deux extremes 4. et de celuy que l'on cherche; C'est pourquoy divisez ce produit 60. par le premier terme 4. le quotient 15. sera la quatrieme proportionnel que l'on cherche c'est a dire que 4. 6 :: 10. 15.

2. Deux quantitez 4 et 6. etant donnees trouver une troisieme proportionnelle

Repetez la seconde quantité 6. et vous aurez 4. 6 :: 6. cherchez comme cy dessus une quatrieme proportionnelle et vous trouverez 9. qui sera la quantité que l'on cherche, cest a dire que 4. 6 :: 6. 9.

3. Deux quantitez 4 et 9. etant proposees trouver une moyenne proportionnelle

Multipliez ensemble les deux quantitez proposees 4 et 9. et de leur produit 36. prenez la racine quarree 6. ce sera la moyenne proportionnelle que l'on cherche c'est a dire que ÷ 4. 6. 9.

4. Le premier le Second et le dernier terme d'une progression geometrique qui diminüe etant donnez trouver la somme de tous les termes

Supposons la progression geometrique proposee soit ÷ 81. 27. 9. 3. 1. multipliez la difference du premier et du dernier terme 80 par le premier terme 81. et divisez le produit par la difference du premier et du Second terme 54. le quotient 120. sera la somme de tous les termes de la progression moins le dernier

5. Le premier et le Second terme d'une progression geometrique qui diminüe a l'infiny etant donnez trouver la somme de tous les Termes

Supposons que la progression soit ÷ 64. 32. 16. 8. 4. 2; 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ &c

Divisez le quarré 4096. du premier terme 64 par la difference des deux premiers termes 32. le quotient 128 donnera la somme de tous les termes

Chapitre. VI.

Du raport et de la proportion Arithmetique

Definitions

I. Nous avons appellé raport Arithmetique la difference de deux quantitez, ainsi le Raport Arithmetique de 11. a 15. est 4.

II. Le raport Arithmetique de deux quantitez est egal au raport Arithmetique de deux autres lorsque la difference des deux premieres est egale a la difference des deux dernieres. Ainsi le raport Arithmetique de 11 a 15. est egal a celuy de 5 a 9. parceque leur difference est 4.

III. L'egalité de deux raports Arithmetique se nomme Proportion Arithmetique, ainsi il y a proportion Arithmetique entre les quatre quantitez 5. 9. 11. 15. cequi s'exprime ainsi 5. 9 : 11. 15. c'est a dire quil y a meme raport Arithmetique en 5 et 9. que entre 11. et 15. oubien que la difference de 5 a 9. est egale a celle de 11. a 15.

IV. Si les deux termes moyens d'une proportion Arithmetique sont les memes, elle s'appelle Proportion Continüe, ainsi 5 . 9 : 9 . 13 . sont en proportion continüe ce qui s'exprime ainsi ÷ 5 . 9 . 13 .

Les Termes moyen d'une proportion Arithmetique continüe se nomme Moyen Arithmetique ou simplement Moyen

V. Si la proportion Arithmetique continüe s'etent a plus de trois termes elle s'appelle Progression Arithmetique comme ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . &c.

Proprietez

I. L'on peut transformer les quatre termes d'une proportion Arithmetique 5 . 9 : 11 . 15 . en d'autres termes qui marquent leur proportion Arithmetique en marquant le second terme de chaque rapport par le premier plus ou moins la difference du second au premier en cette maniere $\left\{\begin{matrix} 5 & . & 9 & : & 11 & . & 15. \\ 5 & . & 5+4 & : & 11 & . & 11+4 \end{matrix}\right\}$ De meme l'on transforme les quatre termes 9 . 5 : 15 . 11 . en ceux cy 9 . 9 − 4 : 15 . 15 − 4 . Par ces transformations l'on connoit evidemment la proportion Arithmetique de ces quatre termes

II. Si a deux quantitez 5 et 9 . l'on adjoute la meme quantité 3. oubien si on l'oste, les sommes 8 et 12. ou les restes 2. et 6. auront encore un meme raport arithmetique.

C'est a dire .... 5 . 9 : 8 . 12.

Oubien .... 5 . 9 : 2 . 6.

III. Si quatre quantitez sont en proportion arithmetique elles y seront en Renversant et en Permutant

Comme si .... 5 . 9 : 8 . 12.

En renversant .... 9 . 5 : 12 . 8.

En permutant .... 5 . 8 : 9 . 12.

IV. Quatre quantitez etant en proportion arithmetique si l'on leur adjoute, ou si l'on en oste quatre autres quantitez qui soient aussi en proportion arithmetique, les sommes ou les restes seront aussi en proportion arithmetique

Soient les quatre quantitez .... 5 . 9 : 8 . 12.

auxquelles on adjoute, ou desquelles on oste .... 4 . 6 : 2 . 4.

Les Sommes .... 9 . 15 : 10 . 16.

Les Restes .... 1 . 3 : 6 . 8

V. Quatre quantitez 5.9.8.12. etant en proportion Arithmetique la Somme des extremes 5 et 12. qui est 17. est egale a la Somme des moyens 9 et 8. qui est aussi 17.

D'où il Suit que Si trois quantitez ÷ 5.9:13. Sont en proportion Arithmetique continüe, la Somme des extremes 5 et 13. qui est 18. est egal au double du moyen 9. qui est aussi 18.

VI. Dans une progression Arithmetique ÷ 1.3.5.7.9.11. les Termes egalement eloignez Sont en proportion Arithmetique, ainsi 1.5:7.11.

VII. La Somme de tous les termes d'une Progression Arithmetique est egale au produit de la Somme du premier et du dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes

Soit la progression Arithmetique ÷ 1.3.5.7.9.11. la Somme du premier terme 1. et du dernier 11. est 12. laquelle etant multipliée par 3. moitié du nombre des termes donnera 36 pour la Somme des termes de la progression

Car par la precedente proposition 1.3:9 11. de meme 3.5:7.9. donc $1+11=3+9=5+7=12$. c'est a dire ajoutant ensemble les termes egalement eloignez des extremes la Somme est toujours egale a celles des extremes, mais le nombre de ces Sommes est egal a la moitié du nombre des termes, Donc en multipliant la Somme du premier et du dernier terme par la moitié du nombre des termes, l'on aura la Somme de tous les termes de la progression

Problemes

1. Trois quantitez 5.9.8. etant proposees trouver une quatrieme proportionnelle arithmetique

Adjoutez ensemble les deux termes 9 et 8. qui sont les moyens dans la proportion et de leur Somme 17. otez le premier terme 5. le reste 12. sera la quatrieme proportionnelle que l'on cherche, c'est a dire 5.9: 8.12.

2. Deux quantitez 5.13. etant proposees trouver une moyenne proportionnelle arithmetique

Ajoutez ensemble les deux quantitez proposees 5. et 13 et de leur Somme 18. prenez en la moitié 9. ce sera la moyenne proportionnelle arithmetique que l'on cherche, c'est a dire que ÷ 5 . 9 . 13.

3. Trouver la Somme des termes d'une progression Arithmetique ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11.

Adjoutez ensemble le premier et le dernier terme, et multipliez leur Somme 12. par la moitié 3. du nombre des termes, leur produit 36. sera la Somme des termes de la progression ./.

Elemens de Geometrie

Livre I