Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Genauere Theorie des Poncelet'schen Rades

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Aus den Gleichungen (155, 156, 157) findet man:

$$v = \frac{1}{2} V \cos.\delta + \frac{g}{4}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{v} \cdot \sqrt{\frac{m Q}{n v}}$$

hat man aus dieser Gleichung durch Probiren v bestimmt, so findet man weiter:

$$a = \sqrt{\frac{m Q}{n v}}$$

$$b = n a$$

Es sei:

$$V = 3,\ \delta = 10^{\circ},\ g = 9{\cdot}81,\ m = 3$$

$$Q = 0{\cdot}25,\ n = 7$$

dann findet man:

$$v = 1{\cdot}76^{m},\ a = 0{\cdot}248^{m},\ b = 1{\cdot}74^{m}.$$

Genauere Theorie des Poncelet'schen Rades.

Aufstellung der Grundgleichungen.

Bei dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Wissenschaften ist es ganz unmöglich, eine vollständige genaue Theorie dieses Rades aufzustellen, indem die wechselseitigen Einwirkungen der Wassertheilchen auf einander, und die daraus entstehenden Modifikationen ihrer Bewegungen so zusammengesetzt sind, dass sie durch keine von dem bis jetzt erfundenen Rechnungsmethoden bestimmt werden können. Man ist daher gezwungen, sich mit einer Annäherungstheorie zu begnügen, indem man die Bewegung und Wirkung eines isolirten Wassertheilchens bestimmt, und die sich auf diesem Wege ergebenden Resultate für jedes andere Wassertheilchen, mithin für die ganze Wassermasse, welche dem Rade zuströmt, gelten lässt. Wahrscheinlich wird man der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man die Bewegung eines Theilchens von dem mittleren Wasserfaden bestimmt.

Es sei also Fig. (35) A_0 der Punkt, in welchem der mittlere Wasserfaden in die Schichte des dem Rade zufliessenden Wassers den Umfang des Rades durchschneidet.

$A_0\ Z_0$ die Position einer Schaufel in dem Momente, in welchem ein Theilchen des mittleren Wasserfadens bei A_0 eintritt.

A Z irgend eine allgemeine Position der gleichen Schaufeln; nach Verlauf der Zeit t, die von dem Augenblicke an gezählt werden soll, in welchem das Theilchen bei A_0 eintrat.

M der Punkt, in welchem sich das Theilchen zur Zeit t befindet.

$A_1 Z_1$ die Position der Schaufel in dem Augenblick, wenn das Theilchen wiederum bei A_1 austrat.

o k die durch den Mittelpunkt des Rades gezogene Vertikallinie.

$\widehat{A_0OK} = \gamma$, $\widehat{KOA_1} = \gamma_1$, $\widehat{AOM} = \varphi$, $\widehat{AO_0t} = \omega t$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades bezeichnet.

$OA_0 = OA = AO_1 = R$ der äussere Halbmesser des Rades.

a die radiale Dimension der Radkrone, d. h. die Differenz zwischen dem äussern und dem innern Halbmesser des Rades.

b Die Breite des Rades.

$\beta = \widehat{DA_0F}$ der Winkel, unter welchem eine jede Schaufel den Umfangskreis des Rades durchschneidet.

$CA_0 = V$ der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen bei A_0 ankommt.

Diese Geschwindigkeit ist gleich kleiner oder grösser als $\sqrt{2gH}$ je nachdem der Punkt A_0 im Niveau des Unterwassers oder über demselben, oder endlich unter demselben liegt.

$DA_0 = D_1 A_1 = v$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades.

$\delta = \widehat{DA_0C}$ der Winkel, den die Richtungen von V und v mit einander bilden.

λ der Winkel, welchen der, dem Durchschnittspunkt des Gerinnes mit dem Umfangskreis des Rades entsprechende Radius mit der vertikalen Richtung bildet.

Δ die Dicke der Wasserschicht unmittelbar vor dem Rade.

ε der Spielraum unter dem Rade zwischen dem Umfangskreis desselben und dem Gerinne.

u_0 u u_1 die relativen Geschwindigkeiten des Wassertheilchens gegen die Schaufel in den Punkten A_0 M und A_1.

w die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel bei A_1 verlässt.

w_1 die absolute Geschwindigkeit, welche das Theilchen bei seinem Austritt nach horizontaler Richtung besitzt.

$r = OM$.

T die Oscillationszeit des Theilchens, d. h. die Zeit von dem Eintritt bis zu dem Austritt des Theilchens.

$S = \widehat{A_0 A A_1}$ der Bogen, welchen ein Punkt von dem Umfang des Rades während der Oscillationszeit beschreibt.

q das Gewicht des Theilchens, dessen Bewegung untersucht wird.

Q das Volumen der Wassermenge, welche pr. 1″ dem Rade zufliesst.

E_n der Nutzeffekt des Rades in Kilogram-Metres.

$g = 9{\cdot}81^m$.

Andere Bezeichnungen, welche nur einem vorübergehenden Zwecke dienen, sollen während der Rechnung angegeben werden.

Die Geschwindigkeit des Theilchens nach der Richtung $F A_0$ ist $V \cos. (\beta - \delta)$ und die Geschwindigkeit des Punktes A_0 nach der gleichen Richtung ist $v \cos. \beta$; die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen in die Schaufel eintritt, ist demnach:

$$u_0 = V \cos. (\beta - \delta) - v \cos. \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

Die Geschwindigkeit des Theilchens senkrecht auf $F A_0$ ist $V \sin. (\beta - \delta)$ und der des Punktes A_0 nach der gleichen Richtung ist $v \sin. \beta$. Das Theilchen stösst demnach mit einer Geschwindigkeit $V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta$ gegen die Schaufel, und dadurch entsteht ein Verlust an Wirkung, welcher nach dem Prinzipe von *Carnot* durch

$$\frac{q}{2g} \Big[V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta \Big]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

ausgedrückt wird.

Nach Verlauf der Zeit t besitzt das Theilchen gegen die Schaufel eine relative Geschwindigkeit u, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird.

$$u^2 = u_0^2 + (r^2 - R^2)\,\omega^2 + 2\,g\,[r \cos. (\gamma - \varphi - \omega t) - R \cos. \gamma] \quad (160)$$

Das Glied $(r^2 - R^2)\,\omega^2$, welches sich auf die Centrifugalkraft bezieht, nimmt während der aufsteigenden Bewegung fortwährend ab, und während der niedergehenden Bewegung fortwährend zu; die Centrifugalkraft verzögert daher die erstere, beschleunigt die letztere dieser Bewegungen, vermindert daher die Oscillationszeit. Das mit 2 g multiplizirte Glied, welches sich auf das Gewicht des Theilchens bezieht, nimmt im Allgemeinen während der aufsteigenden Bewegung ab, und bei der niedergehenden Bewegung zu.

Da

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

ist, so kann obige Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = u_0^2 + (r^2 - R^2)\,\omega^2 +$$
$$+ 2g\left[r \cos.(\gamma - \varphi - \omega t) - R \cos.\gamma\right] \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Wenn die Form der Kurve **AZ**, mithin eine gewisse Beziehung zwischen r und φ angenommen wird, so kann man vermittelst derselben r und dr durch φ und $d\varphi$ ausdrücken, und dann verwandelt sich die letzte Gleichung in eine Differenzialgleichung zwischen den Variablen φ und t, deren Integrale das Bewegungsgesetz des Theilchens auf der angenommenen Kurve bestimmen würde.

Wenn dagegen ein gewisses Bewegungsgesetz, also eine gewisse Beziehung zwischen r und t oder zwischen φ und t angenommen wird, so kann man t und dt im ersteren Falle durch r und dr, im letzteren Falle durch φ und $d\varphi$ ausdrücken, und dann verwandelt sich die Gleichung (161) in eine Differenzialgleichung, deren Integration zur Kenntniss der Kurve führen würde, welche dem angenommenen Bewegungsgesetz entspricht.

Es ist mir aber nicht gelungen, für die Kurve oder für das Bewegungsgesetz eine Annahme ausfindig zu machen, die zu einer integrirbaren Differenzialgleichung geführt hätte. Ich werde später zeigen, wie man wenigstens annäherungsweise die Bewegung des Theilchens auf der Schaufel, wenn dieselbe nach einem Kreise oder nach einer Cycloide gekrümmt angenommen wird, bestimmen kann; vorläufig wollen wir uns aber um diese Bewegung nicht bekümmern, weil das Gesetz derselben keinen Einfluss hat auf die zunächst zu bestimmende Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel verlässt.

Für den Moment des Austritts ist nämlich: $r = R$, $\varphi = 0$, $\omega t = \gamma + \gamma_1$, demnach erhalten wir aus (160):

$$u_1^2 = u_0^2 + 2gR\,(\cos.\gamma_1 - \cos.\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Die Austrittsgeschwindigkeit u_1 ist also von der Form der Schaufelfläche unabhängig, was nach dem allgemeinen Prinzipe der Wirkung der Kräfte vorauszusehen war.

Die absolute Geschwindigkeit des Theilchens bei seinem Austritt ist nun:

$$w = \sqrt{u_1^2 + v^2 - 2 u_1 v \cos.\beta} \quad . \; . \; . \; . \quad (163)$$

Der Verlust an Wirkung, welcher bei dem Austritt entsteht, ist, wenn $\gamma_1 > \gamma$ ausfällt:

$$\frac{q}{2g} \cdot w^2 + q \cdot R (\cos.\gamma - \cos.\gamma_1)$$

oder: wenn man für w obigen Werth setzt:

$$\frac{q}{2g}\left\{u_1^2 + v^2 - 2 u_1 v \cos.\beta + 2 g R (\cos.\gamma - \cos.\gamma_1)\right\} \quad (164)$$

Die absolute Geschwindigkeit des Theilchens nach horizontaler Richtung ist im Momente seines Austrittes:

$$w_1 = v \cos.\gamma_1 - u_1 \cos.(\gamma_1 + \beta) \quad . \; . \; . \quad (165)$$

Die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch den Spielraum ε unter dem Rade entweicht, ist $Q \frac{\varepsilon}{e}$ und der daraus entstehende Effektverlust ist:

$$1000\, Q \frac{\varepsilon}{\varDelta} \cdot H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (166)$$

weil dieses Entweichen mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gH}$ erfolgt, welche dem ganzen Gefälle entspricht.

Wenn wir nun annehmen, dass die Resultate, welche wir im Vorhergehenden für ein isolirtes Theilchen des mittleren Wasserfadens gefunden haben, auf jedes andere Theilchen der in das Rad eintretenden Wassermenge $Q\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varDelta}\right)$ angewendet werden dürfen, und wenn wir die Effektverluste vernachlässigen, welche aus der wechselseitigen Störung der Wassertheilchen in ihrer Bewegung, und durch die Reibung des Wassers an den Schaufeln entstehen: so erhalten wir nun für den Nutzeffekt des Rades folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}E_n = &+ 1000\,Q\,H\\ &- 1000\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\left(V\sin.(\beta-\delta)-v\sin.\beta\right)^2\\ &- 1000\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\left(u_1^2+v^2-2\,u_1\,v\cos.\beta\right)\\ &- 1000\,Q\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)R\left(\cos\gamma-\cos.\gamma^1\right)\\ &- 1000\,Q\,\frac{\varepsilon}{\Delta}\,H\end{aligned}\right\} \quad . \quad (167)$$

Wir wollen vorläufig noch keine Folgerung aus dieser Gleichung ziehen, sondern erst vollständig sämmtliche Gleichungen aufstellen, welche für die Entwicklung der Theorie des Rades nothwendig sind. Diese noch aufzustellenden Gleichungen hängen aber, wie wir bald sehen werden, von der relativen Bewegung des Theilchens auf der beweglichen Schaufelfläche ab; wir müssen daher zunächst suchen, diese Bewegung wenigstens annähernd zu bestimmen, da eine scharfe Bestimmung, wie schon früher gesagt wurde, nicht angeht.

Ich nehme für die Schaufelkurve ein Bogenstück m n z Fig. (36), einer Cycloide an, welche durch Wälzung eines Kreises vom Durchmesser p auf einer geraden Linie gebildet wird; stelle diese Cycloide so, dass sie 1) durch den Halbirungspunkt n des Bogens $A_0\,A_1$ geht, welcher durch den Ein- und Austritt des Theilchens bestimmt wird; 2) in dem Punkte n den Umkreis des Rades unter einem Winkel β schneidet; 3) dass ihre Grundlinie o y eine horizontale Lage erhält, und erlaube mir nun, die Annahme, dass auf dieser ruhend gedachten Cycloide die Bewegung eines Theilchens nach n nach dem gleichen Gesetze erfolgen werde, wie auf der beweglichen Schaufelfläche n m z, vorausgesetzt, dass bei der ersteren dieser Bewegungen das Theilchen in n eine Geschwindigkeit u_0 besitzt.

Bei dieser Annahme wird, wie man sieht, der Einfluss der Centrifugalkraft auf die Bewegung des Theilchens ganz vernachlässigt; der Einfluss, welchen bei der wirklichen Bewegung die Veränderlichkeit der Stellung der Schaufeln gegen den Horizont hervorbringt, wird aber einigermassen berücksichtiget, indem für die Position der ruhend gedachten Schaufel die mittlere Position der beweglichen Schaufel angenommen wird. Je grösser der Halbmesser des Rades im Vergleiche mit der Länge des Bogens $A_0\,A_1$ ist, oder je kleiner der Winkel $\gamma+\gamma_1$ ist, desto weniger wird die eine Bewegung von der andern abweichen.

Es sei nun der Scheitel o der Cycloide der Anfangspunkt der Coordinaten,

$\left.\begin{array}{l} o\,n_1 = y_0 \\ n\,n_1 = x_0 \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes n,

$\left.\begin{array}{l} o\,m_1 = y \\ m\,m_1 = x \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes m, in welchen sich das Theilchen nach Verlauf der Zeit t (die von dem Augenblicke an gerechnet werden soll, in welchem es durch den Punkt n geht) befindet;

$\left.\begin{array}{l} o\,n = s_0 \\ o\,m = s \end{array}\right\}$ die Bogenlängen der Cycloide, welche den Punkten m und n entsprechen;

$\left.\begin{array}{l} \beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma) \\ \varphi. \end{array}\right\}$ die Winkel, welche die zu den Punkten n und m gezogenen Tangenten mit der horizontalen Richtung bilden.

ϱ der Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkte m der Cycloide entspricht;

ϱ_m der mittlere Krümmungshalbmesser, der dem Bogenstück der Cycloide entspricht, welches das Theilchen von n an nach aufwärts durchläuft.

Diess vorausgesetzt hat man nun als Gleichung der Cycloide:

$$y = \sqrt{px - x^2} + \frac{p}{2} \cdot \text{Arc cos.} \frac{p - 2x}{p} \quad . \quad . \quad (168)$$

und daraus findet man:

$$\left.\begin{array}{l} dy = dx \, . \sqrt{\dfrac{p - x}{x}} \\[2ex] ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\dfrac{p}{x}} \\[2ex] s = 2\sqrt{px} \\[2ex] \varrho = -\dfrac{ds^3}{dx\, d^2y} = 2\sqrt{p} . \sqrt{p - x} \\[2ex] \sin. \varphi = \dfrac{dx}{ds} = \sqrt{\dfrac{x}{p}} \, . \end{array}\right| \quad . \quad (169)$$

Da das Theilchen bei n eine Geschwindigkeit u_0 besitzen soll, so ist die Gleichung der Bewegung desselben auf der ruhenden Fläche:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{u_0^2 - 2g(x - x_0)} \quad \ldots\ldots \quad (170)$$

wobei das obere Zeichen für die aufsteigende, das untere für die niedergehende Bewegung gilt. Nun ist aber leicht einzusehen, dass eine dieser Bewegungen eben so viel Zeit erfordert, als die andere; man findet also die Zeit **T** einer vollständigen Oscillation, wenn man die Zeit der aufsteigenden Bewegung berechnet und das Resultat mit 2 multiplicirt.

Wenn das Theilchen im höchsten Punkte angekommen ist, ist seine Geschwindigkeit gleich 0, und der dieser Position entsprechende Werth von x ist:

$$x_0 + \frac{u_0^2}{2g}$$

Dieser Werth von x entspricht wegen $s = 2\sqrt{px}$ einem Bogen von der Länge

$$2\sqrt{p\left(x_0 + \frac{u_0^2}{2g}\right)} = 2\sqrt{p\left(\frac{s_0^2}{4p} + \frac{u_0^2}{2g}\right)} = \sqrt{s_0^2 + 4p\frac{u_0^2}{2g}}$$

Aus der Gleichung (170) folgt, wenn das obere Zeichen genommen und

$$x = \frac{s^2}{4p} \qquad x_0 = \frac{s_0^2}{4p}$$

gesetzt wird:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{u_0^2 + \frac{g}{2p}(s_0^2 - s^2)}}$$

Das allgemeine Integrale ist:

$$t = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \text{Arc sin.}\, s \sqrt{\frac{\frac{g}{2p}}{u_0^2 + \frac{g}{2p} s_0^2}} + \text{const.} \right\}$$

Nimmt man es von s gleich s_0 bis s gleich $\sqrt{s_0^2 + 4p\frac{u_0^2}{2g}}$

so erhält man die halbe Schwingungszeit, welche mit 2 multiplicirt die ganze Oscillationszeit gibt. Man findet:

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc} \sin. \sqrt{\frac{\frac{g}{2p} s_0^2}{u_0^2 + \frac{g}{2p} \cdot s_0^2}} \right\}$$

Nun ist aber:

$$s^2 = 4px = 4p^2 \sin.^2\varphi$$

und

$$s_0^2 = 4p^2 \sin.^2[\beta + \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]$$

Daher findet man:

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \cdot \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc} \sin. \sqrt{\frac{2pg \sin.^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}{u_0^2 + 2pg \sin.^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}} \right\}. \quad (171)$$

Diese Schwingungszeit für die Bewegung eines Theilchens auf einer cycloidischen Fläche dürfen wir wohl auch für eine kreisbogenförmige Fläche gelten lassen, deren Krümmungshalbmesser gleich ist dem mittleren Krümmungshalbmesser ϱ_m des cycloidischen Bogens, welcher das Theilchen durchläuft.

Dieser mittlere Krümmungshalbmesser ist aber:

$$\varrho_m = \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \frac{w_0^2}{2g}} \varrho \, dx}{\frac{u_0^2}{2g}} = \frac{2g}{u_0^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{p} \int_{x_0}^{x_0 + \frac{u_0^2}{2g}} \sqrt{p - x} \, dx =$$

$$\tfrac{4}{3} \cdot \frac{2g}{u_0^2} \cdot \sqrt{p} \cdot \left\{ (p - x_0)^{\frac{3}{2}} - \left(p - x_0 - \frac{u_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (172)$$

Wenn das Theilchen bei seiner Bewegung auf der cycloidischen Fläche bis zum höchsten Punkte der Cycloide emporschwingt, ist $x_0 + \frac{u_0^2}{2g}$ gleich p, und der mittlere Krümmungshalbmesser, welcher dieser Bewegung entspricht, wird:

$$\varrho_m = \frac{4}{3} \sqrt{p \cdot \frac{u_0^2}{2g}}$$

oder

$$\varrho_m = \frac{4}{3} \ p \ \cos. \left[\beta + \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)\right] \ . \ . \ . \ (173)$$

denn es ist in diesem Falle

$$p = x_0 + \frac{u_0^2}{2g} = p \sin.^2 \left[\beta + \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)\right] + \frac{u_0^2}{2g}$$

demnach

$$p \cos.^2 \left[\beta + \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)\right] = \frac{u_0^2}{2g}$$

und

$$\sqrt{p \frac{u_0^2}{2g}} = p \cos. \left[\beta + \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)\right]$$

Der oben bestimmte allgemeine Werth von ϱ_m dient zur Effektberechnung eines bestehenden Rades, dessen Schaufeln nach Kreisbögen geformt sind; der speciellere Werth von ϱ_m dient zur Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades.

Zur Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades sind noch einige Bestimmungen nothwendig. Die radiale Dimension a der Radkrone wird durch die grösste Höhe bestimmt, bis zu welcher die Wassertheilchen emporschwingen. Nun befindet sich der Punkt A_0 Fig. (36), in welchem die Theilchen des mittleren Wasserfadens in das Rad eintreten, in einer Höhe $\frac{1}{2} \, \varDelta \cos. \gamma + R\,(1 - \cos. \gamma)$ über dem tiefsten Punkt K des Rades, und da dieser Eintritt mit einer relativen Geschwindigkeit u_0 erfolgt, so darf man annehmen, dass die Erhebung der Theilchen des mittleren Fadens über dem Eintrittspunkte $\frac{u_0^2}{2g}$ beträgt; die kleinste Höhe, welche die Radkrone erhalten muss, ist demnach annähernd:

$$a = \frac{1}{2} \, \varDelta \cos. \gamma + R\,(1 - \cos. \gamma) + \frac{u_0^2}{2g} \ . \ . \ (174)$$

Nebst den bis hierher aufgestellten Relationen bestehen noch folgende Beziehungen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann:

$$S = R\,(\gamma + \gamma_1) = T\,v \ . \ . \ . \ . \ . \ (175)$$

$$\varDelta = 2\,R \left\{ \cos. [\lambda - (\gamma - \delta)] - \cos. \delta \right\} . \ . \ (176)$$

Effektberechnung eines Rades von gegebenen Abmessungen.

Vermittelst der bis jetzt aufgestellten Gleichungen kann nun die Berechnung des Effektes eines Rades von gegebenen Abmessungen auf folgende, allerdings etwas umständliche Weise geschehen.

Die gegebenen Grössen sind in diesem Falle:

$$H, Q, R, a, b, \varrho_m, \Delta, \beta, \gamma, \delta, V, v, \varepsilon.$$

Die zu bestimmenden Grössen sind dagegen:

$$u_0, u_1, \gamma_1, w_1, p, S, T, E_n.$$

Die Bestimmungen geschehen wie folgt: den Werth von u_0 findet man aus der Gleichung

$$u_0 = V \cos. (\beta - \delta) - v \cos. \beta$$

Die Werthe von γ_1 und p ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{R(\gamma + \gamma_1)}{v} = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc sin.} \sqrt{\frac{2gp \sin^2 [\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}{u_0^2 + 2gp \sin.^2 [\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}} \right\}$$

$$\varrho_m = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{p}}{\frac{u_0^2}{2g}} \left\{ (p - x_0)^{\frac{3}{2}} - \left(p - x_0 - \frac{u_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$x_0 = p \sin.^2 [\beta + \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]$$

von denen die erste erhalten wird, wenn man die Werthe von **T**, welche die Gleichungen (171) (175) darbieten, einander gleichsetzt. Dass die Ausmittlung der Werthe von γ_1 und p aus diesen Gleichungen nur durch Versuche geschehen kann, bedarf kaum einer Erwähnung.

Ist γ_1 bekannt, so findet man:

$$T = \frac{R(\gamma + \gamma_1)}{v}$$

$$S = R(\gamma + \gamma_1)$$

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2gR(\cos. \gamma_1 - \cos. \gamma)}$$

Ferner

$$w_1 = v \cos. \gamma_1 - u_1 \cos. (\gamma_1 + \beta)$$

endlich:

$$E_n = 1000\,Q\,H - 1000 \frac{Q}{2g} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right) \left(V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta\right)^2$$

$$- 1000 \frac{Q}{2g} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right) \left(u_1^2 V v^2 - 2 u_1 v \cos. \beta\right)$$

$$- 1000\,Q \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right) R \left(\cos. \gamma - \cos. \gamma_1\right)$$

$$- 1000\,Q \frac{\varepsilon}{\Delta} H$$

Diese Rechnung hat übrigens keinen praktischen Werth; ich habe sie nur zusammengestellt, um wenigstens die theoretische Möglichkeit einer genaueren Effektberechnung des *Poncelet*'schen Rades zu zeigen. Auch ist klar, dass nach dieser Rechnungsart der Nutzeffekt zu günstig erscheinen muss, indem weder die Reibung des Wassers an den Radschaufeln, noch auch die wechselseitigen Störungen der Wassertheilchen in ihrer Bewegung berücksichtigt worden sind.

Die Bedingungen eines günstigen Nutzeffektes.

Der Nutzeffekt des Rades wird gleich dem absoluten Effekt der Wasserkraft, wenn

$$\gamma = \gamma_1 \; \delta = 0, \beta = 0, \varepsilon = 0, v = \tfrac{1}{2} V$$

ist, d. h. wenn 1) die Punkte des Ein- und Austrittes auf gleicher Höhe und zwar im Niveau des Unterwassers liegen; 2) wenn das Wasser nach tangentialer Richtung nach dem Rade geleitet wird; 3) wenn die Schaufeln den Umfangskreis des Rades berühren; 4) wenn der Spielraum unter dem Rade unendlich klein ist; 5) wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades halb so gross ist, als jene, mit welcher das Wasser an den Umfang des Rades ankommt.

Der Bedingung $\gamma = \gamma_1$ kann entsprochen werden, wenn der Eintrittspunkt A_0 im Niveau des Unterwassers angenommen wird, und wenn die Werthe von ϱ_m und R zweckmässig gewählt werden.

Der Winkel δ kann zwar klein aber nie gleich 0 gemacht werden, weil die Wasserschichte vor dem Rade immer eine gewisse Dicke haben muss, damit das Rad eine endliche und ausführbare Breite erhält. Der Winkel könnte zwar gleich 0 angenommen werden, da aber dies in Bezug auf δ nicht möglich ist, so fällt der vortheilhafteste Werth von β grösser als 0 aus, was durch folgende Rechnung bewiesen wird: Setzt man in dem Ausdruck für E_n, $\gamma_1 = \gamma$ demnach $u_1 = u_0 = \cos.(\beta - \delta) - v \cos.\beta$, so nimmt derselbe nach einigen einfachen Reduktionen die Form an:

$$E_n = 1000\ Q\ H - 1000 \frac{Q}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\Big\{ V^2 + 2\ v^2\ [1 + \cos.^2 \beta]$$

$$- 2\ V\ v\ [\cos.\delta + \cos.(\beta - \delta) \cos.\beta] \Big\} - 1000\ Q \frac{\varepsilon}{\Delta} H$$

Sucht man den partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\ E_n}{d\ \beta}$ und setzt denselben gleich 0, so erhält man zur Bestimmung des vortheilhaftesten Werthes von β die Gleichung:

$$\text{cotg. } 2\,\beta = \frac{\cos.\delta - \frac{v}{V}}{\sin.\ \delta} \quad \ldots\ldots \quad (177)$$

Nun ist aus einem Grunde, der weiter unten erklärt werden wird, die vortheilhafteste Geschwindigkeit v nicht gleich 0·5 V sondern 0·55 V. Setzen wir also in dieser Gleichung $\frac{v}{V} = 0{\cdot}55$, so gibt dieselbe für verschiedene Werthe von δ die entsprechenden vortheilhaftesten Werthe von β und man findet

für	$\delta =$ 15°,	20,	24° + 37',	30°
	$\beta =$ 29° + 2',	24° + 12',	24° + 37',	28° + 51'

Hieraus sieht man, dass der vortheilhafteste Werth von β nicht gleich 0, sondern bald grösser, bald kleiner und für $\delta = 24° + 37'$ gleich δ wird.

Der Spielraum ε kann nicht leicht kleiner als $0{\cdot}01^m$ gehalten werden; es findet also immer etwas Verlust an Wasser statt, der theils durch eine hinreichende Dicke der Wasserschichte, theils dadurch vermindert werden kann, dass man das Zuleitungsgerinne nicht tangential an den

Umfang des Rades hinführt, sondern so, dass seine Richtung den Umfangskreis des Rades etwas schneidet. Die Umfangsgeschwindigkeit v könnte allerdings gleich $\frac{1}{2}$ V angenommen werden, es ist aber bei der Aufstellung der Effektgleichung ein Umstand ausser Acht gelassen worden, der dafür spricht, v grösser als $\frac{1}{2}$ V anzunehmen. Wenn nämlich $v = \frac{1}{2} V$ angenommen wird, besitzt das Wasser nach seinem Austritt gar keine oder doch nur eine sehr unbedeutende Geschwindigkeit, es muss sich also, um zum Fortfliessen im Abflusskanal Geschwindigkeit zu gewinnen, hinter dem Rade aufstauen.

Um diesen nachtheiligen Aufstau zu beseitigen, ist es daher gut, wenn das Wasser dei seinem Austritt die zum Fortfliessen nothwendige Geschwindigkeit nach horizontaler Geschwindigkeit bereits besitzt, die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit des Rades ist daher grösser als 0·5 V, und beträgt nach den Versuchen von *Poncelet* 0·55 V.

Führt man diesen Werth von v in die Gleichungen (158) und (165) ein, so werden für den vortheilhaftesten Bewegungszustand die Werthe von u_o und w_1

$$u_o = [\cos. (\beta - \delta) - 0{\cdot}55 \cos. \beta]\, V \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

$$w_1 = \left[0{\cdot}275 \cos. \gamma + 0{\cdot}275 \cos. (2\beta + \gamma) - \cos. (\gamma + \beta) \cos. (\beta - \delta)\right] V$$

Wir wenden uns nun zur

Berechnung der Abmessungen eines zu erbauenden Rades.

Zur Erleichterung der Uebersicht wird es gut sein, wenn wir alle diejenigen Gleichungen zusammenstellen, aus denen die Abmessungen des Rades gesucht werden müssen. Diese Gleichungen sind:

$$\varDelta = 2\, R \left\{ \cos. [\lambda - (\gamma - \delta)] - \cos. \delta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

$$T = \frac{2\, \gamma\, R}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

$$u_o = \left(\cos. (\beta - \delta) - \frac{v}{V} \cos. \beta\right) V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

$$\operatorname{cotg.} 2\beta = \frac{\cos. \delta - \frac{v}{V}}{\sin. \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

$$a = \frac{1}{2} \varDelta \cos. \gamma + R (1 - \cos. \gamma) \pm \frac{u_0^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (174)$$

$$b = \frac{Q}{\varDelta V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (178)$$

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \text{ arc. sin.} \sqrt{\frac{2 g p \sin.^2 \beta}{u_0^2 + 2 g p \sin.^2 \beta}} \right\} \quad . \quad (171)$$

$$\varrho_m = \frac{4}{3} p \cos. \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (173)$$

Die Zahl derselben ist 8 und die Anzahl der Grössen, welche sie enthalten, 15; es müssen also 7 Grössen angenommen werden, und dann lassen sich die übrigen 8 bestimmen.

Nun ist zunächst als bekannt anzunehmen Q und $V = \sqrt{2 g H}$ und $v = 0{\cdot}55 \, V$, es bleiben also noch 4 innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Annahmen übrig. Für diese wollen wir annehmen:

$$\lambda = 15^\circ, \gamma - \delta = 3^\circ, \varDelta = \frac{1}{6} H, R = 1{\cdot}75 H$$

und werden später durch Rechnung nachweisen, dass sie zu einer vortheilhaften Construction führen.

Die Bestimmung der Grössen δ, T, u_0 β, a, b, p, ϱ_m geschieht nun auf folgende Weise.

Aus der Gleichung (176) folgt:

$$\cos. \delta = \cos. [\lambda - (\gamma - \delta)] - \frac{\varDelta}{2 R}$$

und man findet, wenn $\lambda = 15^\circ$, $\gamma - \delta = 3^\circ$ $\varDelta = \frac{1}{6} H$, $R = 1{\cdot}75$ H gesetzt wird:

$$\delta = 21^\circ + 29'$$

Wegen $\gamma - \delta = 3^\circ$ wird nun

$$\gamma = 24^\circ + 29'$$

Die Gleichung (177) gibt, wenn man $\delta = 21^\circ + 29'$, $\frac{v}{V} = 0{\cdot}55$ einführt:

$$\beta = 23^\circ + 3^I$$

Aus der Gleichung (158) folgt nun, wenn man für β, δ, $\frac{v}{V}$ die bereits bestimmten Werthe einführt:

$$u_0 = 0\,4933\ V$$

$$u_0^2 = 0{\cdot}243\ V^2$$

Aus der Gleichung (174) findet man nun:

$$a = 0{\cdot}476\ H.$$

Die Gleichung (178) gibt:

$$b = 6 \cdot \frac{Q}{H\sqrt{2\,g\,H}}$$

Aus der Gleichung (175) findet man

$$T = 0{\cdot}1392\ .\ V.$$

Führt man diesen Werth von **T** in die Gleichung (171) ein, so wird dieselbe:

$$0{\cdot}1392.V = \sqrt{\frac{2\,p}{g}}\left\{\pi - 2\,\text{arc. sin.}\sqrt{\frac{2\ g\ p\ \sin.^2\ (23^\circ + 3^1)}{-243\ V^2 + 2\,g\,p\,\sin.^2\,(23^\circ + 3^1)}}\right\}$$

Dieser Gleichung wird genüge geleistet, wenn man setzt:

$$p = 0{\cdot}36\ H$$

und nun gibt endlich wegen (173)

$$\varrho_m = 0{\cdot}442\ H.$$

Hiermit sind nun alle Dimensionen bis auf die Anzahl der Schaufeln bestimmt. Es ist mir nicht gelungen, für dieses Element aus der Natur der Sache eine rationelle Regel abzuleiten. So viel ist klar, dass sich die Schaufeltheilung nach der Dicke der Wasserschichte vor dem Rade, und da diese dem Gefälle proportional ist, nach dem Gefälle richten muss. Nach dem Gefühle zu urtheilen, darf man die Schaufeltheilung e gleich 0·3 H annehmen, und dann wird die Anzahl derselben, wenn $R = 1{\cdot}75\ H$ gesetzt wird: gleich 36.

Nach dem Ergebniss dieser Rechnung erhalten wir nun für die Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades folgende äusserst einfache Regeln:

$$\lambda = 15', \ \delta = 21^\circ + 29', \ \beta = 23^\circ + 3', \ \gamma = 24^\circ + 29'$$

$$u_0 = 0{\cdot}4933\ V \ . \ T = 0{\cdot}139\ V$$

$$\Delta = \frac{1}{6} H, \ R = 1{\cdot}75\ H, \ a = 0{\cdot}476\ H, \ p = 0{\cdot}36\ H, \ \varrho_m = 0{\cdot}442\ H.$$

$$b = 6 \frac{Q}{H \sqrt{2\,g\,H}}.$$

Anzahl der Radschaufeln gleich 36.

Nach dieser Angabe sind alle Dimensionen, welche im Durchschnitt des Rades vorkommen, dem Gefälle proportional und unabhängig von der Wassermenge, dagegen aber ist die Breite des Rades nicht nur von dem Gefälle, sondern auch von der Wassermenge abhängig. Die praktische Bestimmung der Dimensionen ist also bei diesem Rade einfacher als bei irgend einem anderen; denn man hat nur allein die Breite des Rades zu berechnen, weil die übrigen Elemente theils constante Grössen sind, theils durch die aufgefundenen Verhältnisszahlen bestimmt werden.

Werden die berechneten Werthe in die Formel (167) für den Nutzeffekt eingeführt, berücksichtiget man, dass $\gamma = \gamma$, $U_1 = U_0$, $\frac{V^2}{2g} = H$ zu setzen ist, und nimmt man $\varepsilon = 0{\cdot}01\ H$ an, so findet man:

$$1000\,\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varDelta}\right)\left\{V\sin.(\beta-\delta)-v\sin.\beta\right\}^2=0{\cdot}0368\times 1000\;Q\,H$$

Effektverlust bei dem Eintritt.

$$1000\,\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varDelta}\right)\left\{u_1^{\,2}+v^2-2\,u_1\,v\cos.\beta\right\}=0{\cdot}0440\times 1000\;Q\,H$$

Effektverlust bei dem Austritt.

$$1000\;Q\,.\,\frac{\varepsilon}{\varDelta}\,H\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.=\underline{0{\cdot}0600\times 1000\;Q\,H}$$

Effektverlust wegen des Entweichens.

Summe der Effektverluste . . . . $0{\cdot}1408\times 1000\;Q\,H$

Nutzeffekt des Rades . . . . . . $0{\cdot}8592\times 1000\;Q\,H$

Abgesehen von den Verlusten, die durch die wechselseitigen Störungen der Wassertheilchen in ihrer Bewegung und durch die Reibung des Wassers an den Schaufeln entstehen, verspricht daher ein nach den aufgestellten Regeln construirtes Rad einen Nutzeffekt von 86 Procent.

Angenommen, dass die vernachlässigten Effektverluste 10 Procent betragen, so bleibt noch immer ein reiner Nutzeffekt von 76 Procent übrig.

Die Dimensionen, welche wir mit der Annahme $\lambda=15^0$, $\gamma-\delta=3^0$, $\varDelta=\frac{1}{6}\,H$, $R=1{\cdot}75$ erhalten haben, sind annähernd als die kleinsten zu betrachten, mit welchen es noch möglich ist, Räder von guter Wirkungsfähigkeit zu bauen, denn der Werth von ϱ_m ist mit jenen Annahmen bereits etwas kleiner als a geworden, und es ist klar, dass ein guter Effekt nur dann erwartet werden darf, wenn ϱ_m nicht beträchtlich kleiner als a ist, denn wenn $\varrho_m < a$, ist der obere Theil der Schaufel, wenn sie sich in ihrer mittleren Stellung befindet, nach rückwärts geneigt; die Wassertheilchen werden also beim Beginn ihres Niederganges nicht diesem Theil der Schaufel folgen, sondern auf das nachströmende Wasser herabfallen, was nothwendig Störungen verursachen muss.

Bei Gefällen, die einen oder mehr als einen Metre betragen, fällt nach den aufgestellten Regeln der Halbmesser des Rades schon so gross aus, dass man ihn in diesen Fällen wohl nie grösser wünschen wird, sondern im Gegentheil eher kleiner.

Bei kleineren Gefällen unter einem Meter und wenn (wie etwa zum Betriebe eines Pumpenwerkes), eine kleine Geschwindigkeit des Rades zweckmässig ist, kann man mit Vortheil für λ, $\gamma-\delta$, Δ, **R** Annahmen machen, die zu grösseren Dimensionen führen.

Nehmen wir z. B.

$$\lambda = 15\,,\ \gamma - \delta = 3^0,\ \mathbf{R} = 2\,\mathrm{H},\ \Delta = 0{\cdot}19\ \mathrm{H}$$

so findet man ganz auf die gleiche Weise wie früher:

$$\delta = 21^0 + 29'\,,\ \gamma = 24^0 + 29',\ \beta = 23^0 + 3'$$

$$u_0 = 0{\cdot}4933\ \mathrm{V}\,,\ \mathrm{T} = 0{\cdot}1588\ \mathrm{V}$$

$$a = 0{\cdot}509\,\mathrm{H},\ p = 0{\cdot}58\,\mathrm{H},\ \varrho_m = 0{\cdot}711\,\mathrm{H},\ b = 5{\cdot}26\,\frac{Q}{\mathrm{H}\sqrt{2\,g\,\mathrm{H}}}$$

Nimmt man die Schaufeltheilung wiederum gleich 0·3 **H**, so wird ihre Anzahl 42. Diese Regeln können also für kleinere Gefälle unter 1^m, und wenn ein langsamer Gang des Rades gewünscht wird, angewendet werden.

Anwendbarkeit des Poncelet-Rades.

Die Grenzen von dem Wasserkraftgebiet, welches dem Poncelet-Rade entspricht, werden durch die grössten und kleinsten in der Praxis zulässigen Dimensionen von b und **R** bestimmt.

Der grösste praktisch zulässige Halbmesser darf zu 3^m und die grösste Radbreite zu 4^m angenommen werden.

Nun ist für grössere Gefälle **R** = 1·75 **H** das grösste Gefälle, bei welchen das Poncelet-Rad noch gut anwendbar ist, ist daher: $\frac{3}{1{\cdot}75}$ $= 1{\cdot}7^m$, und bis zu diesem Gefälle hin kann es in allen Fällen angewendet werden, in welchen die Breite nicht grösser als 4^m ausfällt. Die graphische Darstellung der Wasserkraftgebiete für die verschiedenen Räder enthält auch das Gebiet für das Poncelet-Rad.

Schliesslich muss ich bemerken, dass die Dimensionen, welche wir aufgefunden haben, bedeutend grösser sind, als diejenigen, welche ***Poncelet*** in seinem ***Memoires sur les Roues hydrauliques a aubes courbes, mues par dessous 1827*** angibt. Die Erfahrung spricht zu Gunsten der von uns aufgestellten Regeln. Im benachbarten Elsass befinden sich mehrere Räder, die nach den von Poncelet aufgestellten Regeln erbaut wurden, so wie auch solche, die nach dem gleichen System, aber mit grösseren Dimensionen, ausgeführt worden sind. Bei allen von den ersteren dieser Räder springt das Wasser in das Rad hinein, und tritt erst in einer beträchtlichen Höhe über dem Spiegel des Unterwassers aus den Schaufeln; bei den letzteren dagegen ist dies nicht der Fall. Auch hat mich ein Construkteur, der sich viel mit dem Bau von Poncelet-Rädern abgegeben hat, versichert, er habe die Erfahrung gemacht, dass man nur dann gute Effekte erhalte, wenn man das Rad in jeder Hinsicht grösser baue, als es nach den von Poncelet aufgestellten Regeln sein müsste.