Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Das oberschlächtige Rad

urn:nbn:de:bsz:31-282850

$$\left.\begin{array}{l}\frac{V}{g}-\frac{v\cos.\delta}{g}+6.\frac{v}{V}\frac{V\cos\delta-2v}{g}+\frac{3}{2}\frac{a}{V}\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta}\\ \qquad\qquad+3\frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}}{a\,v\,V}=0\\ \text{welche in Verbindung mit:}\\ \qquad\qquad a=\frac{Q}{n}\frac{2\,g}{0{\cdot}42}\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}\frac{1}{V^3}\\ \text{und}\\ \qquad\qquad v=\frac{m\,Q}{n\,a^2}\end{array}\right\}(153)$$

die Werthe von a, v, V bestimmen. Das Verfahren der Berechnung ist folgendes. Man nimmt zuerst V versuchsweise an, berechnet den Werth von a, dann den Werth von v, und sieht dann nach, ob dieser so erhaltene Werth der ersten der Gleichungen (153) genügt. Ist diess der Fall, so ist man am Ziele, wo nicht, so muss man für V eine zweite Annahme machen, und die gleichen Operationen wiederholen.

Setzt man

$$\beta=26,\ \gamma=120,\ R=4,\ m=3$$

$$n=7\ Q=0{\cdot}5\ \delta=20$$

so findet man auf dem bezeichneten Wege

$$V=3{\cdot}12,\ a=0{\cdot}322,\ v=2{\cdot}06,\ b=2{\cdot}25^m$$

Das oberschlächtige Rad.

Gleichung für den Effekt.

Für dieses Rad darf man ohne merklichen Fehler $\gamma=180^0$ setzen, und dann wird

$$\frac{e}{2}\sin.\gamma+e\sin.(\gamma-\beta)-s=a\left(1-\frac{Q}{a\,b\,v}\right)$$

Diese Gleichung ist um so genauer richtig, je grösser das Rad ist, sie ist aber auch bei kleineren Rädern zulässig, denn der Schwerpunkt der Wassermasse senkt sich während der Füllung einer Zelle immer nur wenig. Berücksichtiget man nebst den so eben aufgestellten Gleichungen den Seite (77) aufgefundenen Ausdruck für den Effektverlust, welcher durch das allmählige Entleeren der Zellen entsteht, so wie auch den Verlust durch die Zapfenreibung, so findet man für den Nutzeffekt folgenden Werth:

$$\left.\begin{aligned} E_n = 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - h + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g} - a\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{a\,b\,v}\right) \right. \\ \left. - R\left[0{\cdot}50 - 0{\cdot}07\frac{a\,b\,v}{Q}\right] \right\} - 7{\cdot}63\,\frac{v}{R}\,f\,N\sqrt{N} \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

in welcher Gleichung alle Grössen unabhängig von einander sein können.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Rades von gegebenen Abmessungen.

Differenzirt man diesen Ausdruck nach v und setzt $\frac{d\,E_n}{d\,v} = 0$, so findet man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit eines oberschlächtigen Rades von gegebenen Abmessungen folgende Gleichung:

$$0 = 1000\,Q\left\{\frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g} - \frac{1}{2}\frac{Q}{b\,v^2} + 0{\cdot}07\,R\,.\,\frac{a\,b}{Q}\right\} - 7{\cdot}63\,f\,\frac{N\sqrt{N}}{R}.$$

numerische Rechnungen zeigen, dass v immer etwas grösser als $\frac{1}{2}\,V\cos.\,\delta$ ausfällt.

Bedingungen des absoluten Maximums des Nutzeffektes.

Setzt man in der Gleichung (154)

$$h = 0,\ V = 0,\ v = 0,\ \delta = 0,\ a = 0,\ m = 7$$

so wird

$$E_n = 1000\,Q\,H$$

Diese Annahmen würden daher die Bedingungen ausdrücken, bei deren Erfüllung der Nutzeffekt gleich dem absoluten Effekt der Wasserkraft wäre; sie sind aber nicht realisirbar, indem $a = 0$ und $v = 0$ zu einer unendlich grossen Breite b führt, man muss sich also mit einem relativen Maximum begnügen, welches zu praktisch brauchbaren Construktionsverhältnissen führt.

Relatives Maximum des Nutzeffektes.

Für ein zu erbauendes Rad kann man die Bedingungen stellen: 1) dass das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit V das Rad erreiche; 2) dass Breite und Tiefe des Rades in einem gewissen Verhältnisse $\frac{b}{a} = n$ zu einander stehen sollen; 3) dass die Füllung $\frac{a\,b\,v}{Q}$ des Rades einen gewissen Werth $= m$ habe.

Unter dieser Voraussetzung bleiben nur noch a und v zu bestimmen übrig.

Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b}{a} = n \\ \frac{a\,b\,v}{Q} = m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

Folgt durch Elimination von b

$$a^2 v = \frac{m}{n} Q$$

Differenzirt man diese Gleichungen in Bezug auf a und v, und dividirt das Resultat durch a, so findet man:

$$2 v\,d a + a\,d v = 0 \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

Vernachlässigt man in dem Ausdruck für den Nutzeffekt das Glied, welches sich auf die Zapfenreibung bezieht, substituirt für $\frac{a\,b\,v}{Q}$ den Werth $= m$ und differenzirt hierauf in Bezug auf a und v, so findet man, weil für die vortheilhaftesten Werthe dieser Grössen $d E_n = 0$ werden muss.

$$0 = \frac{V \cos.\delta - 2 v}{g} d v - \left(1 - \frac{1}{2 m}\right) d a \quad . \quad (157)$$

Aus den Gleichungen (155, 156, 157) findet man:

$$v = \frac{1}{2} V \cos.\delta + \frac{g}{4}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{v} \cdot \sqrt{\frac{mQ}{nv}}$$

hat man aus dieser Gleichung durch Probiren v bestimmt, so findet man weiter:

$$a = \sqrt{\frac{mQ}{nv}}$$

$$b = na$$

Es sei:

$$V = 3,\ \delta = 10^0,\ g = 9\cdot81,\ m = 3$$

$$Q = 0\cdot25,\ n = 7$$

dann findet man:

$$v = 1\cdot76^m,\ a = 0\cdot248^m,\ b = 1\cdot74^m.$$

Genauere Theorie des Poncelet'schen Rades.

Aufstellung der Grundgleichungen.

Bei dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Wissenschaften ist es ganz unmöglich, eine vollständige genaue Theorie dieses Rades aufzustellen, indem die wechselseitigen Einwirkungen der Wassertheilchen auf einander, und die daraus entstehenden Modifikationen ihrer Bewegungen so zusammengesetzt sind, dass sie durch keine von dem bis jetzt erfundenen Rechnungsmethoden bestimmt werden können. Man ist daher gezwungen, sich mit einer Annäherungstheorie zu begnügen, indem man die Bewegung und Wirkung eines isolirten Wassertheilchens bestimmt, und die sich auf diesem Wege ergebenden Resultate für jedes andere Wassertheilchen, mithin für die ganze Wassermasse, welche dem Rade zuströmt, gelten lässt. Wahrscheinlich wird man der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man die Bewegung eines Theilchens von dem mittleren Wasserfaden bestimmt.

Es sei also Fig. (35) A_0 der Punkt, in welchem der mittlere Wasserfaden in die Schichte des dem Rade zufliessenden Wassers den Umfang des Rades durchschneidet.

$A_0\ Z_0$ die Position einer Schaufel in dem Momente, in welchem ein Theilchen des mittleren Wasserfadens bei A_0 eintritt.