Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Das rückschlächtige Zellenrad mit Coulisseneinlauf und Kreisgerinne

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Das rückschlächtige Zellenrad mit Coulisseneinlauf und Kreisgerinne.

Gleichungen für die Wassermenge, den Halbmesser des Rades und für den Nutzeffekt.

Für dieses Rad ist offenbar wie bei dem vorhergehenden:

$$Q = \frac{0{\cdot}42}{2\,g} \,.\, b \,\frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,\gamma}\, V^3 \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2\,g} + \frac{Q}{b\,v} - h}{1 - \cos.\,\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Zur Berechnung des Nutzeffektes hat man ferner:
Effektverlust, welcher bei dem Eintritt entsteht:

$$1000\,\frac{Q}{2\,g}\left\{ V^2 - 2\,V\,v\,\cos.\,\delta + v^2 \right\} +$$

$$+ 1000\,Q\left[\frac{e}{2}\,\sin.\,\gamma + e\,\sin.\,(\gamma - \beta) - s\right]$$

Effektverlust, welchen das Entweichen des Wassers durch den Spielraum an den Zellenkanten verursacht.

$$464\,\varepsilon\,R\,\sqrt{2\,g\,e}\,\frac{Q}{a\,b}$$

Effektverlust, welcher bei dem Austritt des Wassers entsteht:

$$1000\,Q\left\{\frac{v^2}{2\,g} + \tfrac{1}{2}\,h\right\}$$

Effektverlust, welcher durch die Reibung des Wassers an dem Gerinne entsteht

$$0{\cdot}366\ b\ S\ v^3$$

Effektverlust, welchen die Zapfenreibung verursacht

$$7{\cdot}63\,\frac{v}{R}\,f\,N_n\,\sqrt{N_n}$$

Der Luftwiderstand kann bei einem Zellenrade vernachlässigt werden; wir erhalten daher für den Nutzeffekt folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
E_n = 1000\,Q & \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2}\,h + \frac{v\,(V\cos.\,\delta - v)}{g} \right\} \\
& - 1000\,Q \left[\frac{e}{2}\sin.\,\gamma + c\sin.\,(\gamma - \beta) - s \right] \\
& - 464\,\varepsilon\,\sqrt{2ge}\;R\,\frac{Q}{a\,v} \\
& - 0{\cdot}366\,b\,S\,v^3 \\
& - 7{\cdot}63\,\frac{v}{R}\,f\,N\sqrt{N}.
\end{aligned}\right\} \quad (151)$$

Vergleichung zwischen Schaufelrädern und Zellenrädern.

Der Effektverlust, welcher bei dem Eintritt des Wassers entsteht, ist bei einem Zellenrade grösser; jener, welcher durch das Entweichen des Wassers entsteht, ist dagegen kleiner, als bei einem Schaufelrade.

Denkt man sich zwei Anordnungen von Rädern, die sich nur allein darin unterscheiden, dass das eine mit radialen Schaufeln, das andere aber mit Zellen versehen ist, in jeder andern Hinsicht aber übereinstimmen, so ist nun die Frage, welches von beiden den besseren Effekt geben wird?

Unter dieser Voraussetzung haben die Grössen **H, Q, V, v, b, R,** γ, **a,** δ, **e** für beide Räder ganz übereinstimmende Werthe. Wenn wir die Glieder, welche sich auf den Luftwiderstand und auf die Wasserreibung beziehen, vernachlässigen, so findet man, dass der Nutzeffekt des Schaufelrades grösser ausfällt, als jener des Zellenrades, so lange

$$Q \left\{ \frac{e}{2}\sin.\,\gamma - s \right\} + \varepsilon\,b\sqrt{2ge}\left[H - \frac{V^2}{2g}\right]\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right] <$$

$$Q \left\{ \frac{e}{2}\sin.\,\gamma + c\sin.\,(\gamma - \beta) - s_1 \right\} + 0{\cdot}464\,.\,\varepsilon\,.\,R\,.\,\sqrt{2ge}\cdot\frac{Q}{a\,v}$$

wobei für das Zellenrad s_1 statt s gesetzt wurde, weil unter den gemachten Voraussetzungen die Werthe von s für die zwei Anordnungen nicht genau übereinstimmen können.

Setzt man in dem zweiten Gliede dieser Gleichung für $H - \frac{V^2}{2g}$ den Annäherungswerth, welcher sich aus der Gleichung

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2g}}{1 - \cos.\gamma}$$

ergibt, so findet man aus derselben:

$$R < \frac{Q}{\varepsilon b \sqrt{2ge}} \frac{c \sin.(\gamma - \beta) + s - s_1}{\left(0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{abv}\right)(1 - \cos.\gamma) - 0.464 \frac{Q}{abv}}$$

als Bedingung, bei deren Erfüllung das Schaufelrad dem Kübelrade vorzuziehen ist. Um also in einem vorliegenden Falle zu entscheiden, ob ein Rad mit Schaufeln oder mit Zellen versehen werden soll, muss man den Ausdruck rechter Hand des Zeichens $<$ berechnen. Findet man einen Werth, der grösser als **R**, so sind Schaufeln zu nehmen, fällt der Werth kleiner als **R** aus, so sind Zellen zu nehmen; findet man endlich einen Werth gleich **R**, so ist es gleichgültig, ob man Zellen oder Schaufeln nimmt. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass bei kleinen Gefällen bis zu 5^m die Schaufeln, bei grösseren Gefällen von 5^m und darüber die Zellen den Vorzug verdienen.

Bedingungen für das absolute Maximum des Nutzeffektes eines Zellenrades mit Kreisgerinne und Coulisseneinlauf.

Vernachlässigt man die zwei letzten Glieder des Ausdrucks für den Nutzeffekt, setzt für c seinen Werth

$$c = \frac{a}{2 \sin.\beta}$$

und für **R** den Annäherungswerth

$$R = \frac{H}{1 - \cos.\gamma}$$

welcher sich aus (150) ergibt, wenn man $-\frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{bv} - h$ gegen **H** vernachlässigt, so findet man:

$$E_n = 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2} h + \frac{v\,(V \cos.\,\delta - v)}{g} - \right.$$

$$\left. \left[\frac{e}{2} \sin.\,\gamma + \frac{a}{2} \frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\,\beta} - s\right] - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2ge}}{a\,v} \frac{H}{1-\cos.\,\gamma} \right\}$$

Um aus diesem Ausdruck die Bedingungen des grössten Effekts abzuleiten, erlauben wir uns wiederum, s als eine constante Grösse zu behandeln Dadurch entsteht zwar ein kleiner Fehler, denn s ist nicht constant, sondern ist vielmehr eine sehr zusammengesetzte und sogar discontinuirliche Function von sehr vielen Grössen, deren Berücksichtigung zu enorm weitläufigen mit der geringen Wichtigkeit der Sache in keinem Verhältniss stehenden Rechnungen führen würde. Wenn wir aber von s absehen, so können wir alle in der letzten Gleichung erscheinenden Grössen als unabhängig von einander betrachten, und es folgt dann zunächst, dass für den grössten Effekt h, δ und e möglichst klein oder gleich null genommen werden sollen, was nur hinsichtlich h möglich ist.

Zur Berechnung der vortheilhaftesten Werthe der übrigen Grössen findet man, wenn man die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{dE_n}{da}, \quad \frac{dE_n}{dv}, \quad \frac{dE_n}{aV}, \quad \frac{dE_n}{d\gamma},$$

berechnet und sie gleich Null setzt, folgende Ausdrücke:

$$a^5 = \frac{8}{g}(1+\sin.{}^2\delta) \left[\frac{\sin.\,\beta}{\sin.\,(\gamma-\beta)}\right]^3 \left[\frac{0.464\ .\ \varepsilon\sqrt{2ge}\ .\ H}{1-\cos.\,\gamma}\right]^2$$

$$v = \frac{0.928\ \varepsilon\sqrt{2ge}\ .\ H\ \sin.\,\beta}{a^2\,[1-\cos.\,\gamma]\,\sin.(\gamma-\beta)}$$

$$V = v\,\cos.\,\delta.$$

$$\frac{e}{a}\,\cos.\,\gamma + \text{cotg.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \text{cotg.}\,\beta$$

Ein einziges numerisches Beispiel wird genügen, um zu beweisen, dass diese Relationen zu practisch unbrauchbaren Constructionsverhältnissen führen.

Nehmen wir an $\frac{a}{e} = 1$, $\beta = 26^\circ$, so findet man aus der letzten dieser Gleichungen für den vortheilhaftesten Werth von γ

$$\gamma = 63^\circ + 30'$$

Diesem Winkel entspricht aber ein sehr grosser Radhalbmesser, denn nach der früheren Vergleichung zwischen Zellen- und Schaufelrädern sind die ersteren nur bei grösseren Gefällen empfehlenswerth; wir müssen also, wenn von einem Zellenrade die Rede ist, ein ziemlich grosses Gefälle von wenigstens 5^m annehmen; dann wird aber: für

$$H = 5^m$$

$$\gamma = 63^\circ + 30'$$

$$R = \frac{H}{1 - \cos.\gamma} = 9^m$$

Man muss also zunächst auf die Realisirung der Gleichung für γ verzichten, was übrigens von keinem grossen Nachtheil ist, indem der Werth von γ, so lange derselbe innerhalb gewisser Grenzen bleibt, nur einen unbedeutenden Einfluss auf den Effekt hat. Aber selbst dann, wenn man für γ einen praktisch brauchbaren Werth, z. B. 126° annimmt, wird man durch die übrigen Gleichungen auf unzulässige Resultate geführt. Setzt man z. B.

$$\gamma = 126,\ \beta = 26,\ \delta = 20,\ \varepsilon = 0{\cdot}02,\ H = 6{\cdot}35,\ \sqrt{2ge} = 3,$$

so findet man:

$$R = 4,\ a = 0{\cdot}25,\ v = 1{\cdot}51,\ V = 1{\cdot}419,\ \frac{b}{Q} = 38$$

und man sieht, dass das Rad eine ganz unverhältnissmässige, gar nicht ausführbare Breite erhielte.

Da nun die Bedingungen des absoluten Maximums nicht realisirbar sind, so wollen wir nun versuchen, durch relative Maxima zu guten und brauchbaren Regeln zu kommen.

Erstes relatives Maximum.

Suchen wir zuerst die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Rades von gegebenen Abmessungen. In diesem Falle sind in dem Ausdruck für den Effekt alle Grössen bis auf v gegeben, und man findet, dass für den vortheilhaftesten Werth derselben

$$\frac{V \cos.\delta - 2v}{g} + \frac{0{\cdot}461 \,.\, \varepsilon \sqrt{2ge} \,.\, H}{a v^2 (1 - \cos.\gamma)} = 0$$

ist, woraus v durch Versuchen gefunden werden kann. Man sieht, dass $v > \frac{1}{2} V \cos.\delta$ ausfällt.

Es sei z. B.

$V=3,\ \delta=20^{\circ},\ \varepsilon=0{\cdot}02,\ e=0.4,\ H=4,\ \gamma=120^{\circ},\ a=0{\cdot}4,$

und dann findet man: $v=1{\cdot}7^{m}$.

Bemerkenswerth ist, dass der Werth von $\frac{E_n}{1000\ Q\ H}$ · innerhalb sehr weit von einander entfernten Grenzen unabhängig von Q ist. Ein rückschlächtiges Zellenrad mit Kreisgerinne gibt also bei grösseren und kleineren Wassermengen immer einen gleich günstigen Effekt. Diess gilt aber nur so lange, als die Füllung des Rades nicht diejenige Grenze erreicht hat, bei welcher durch die Luftspalten der Zellen Wasser ausspritzt.

Zweites relatives Maximum.

Betrachten wir H, Q . b, γ, δ, β als gegeben, so ergibt sich zunächst:

$$V=\sqrt[3]{\frac{2g}{0{\cdot}42}\cdot\frac{Q}{b}\,\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}}$$

es blieben also in der Gleichung für den Effekt nur noch v und a zu bestimmen.

Berechnet man die Differenzialquotienten $\frac{dE_n}{dv}$, $\frac{dE_n}{da}$, und setzt dieselben gleich Null, so erhält man zwei Gleichungen, aus welchen sich zur Berechnung der vortheilhaftesten Werthe von a und v ohne Schwierigkeit folgende Ausdrücke ableiten lassen:

$$(2\,v-V\cos.\delta)^{2}v^{3}=\tfrac{1}{2}\,g^{2}\,0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2ge}\,.\,H.\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta(1-\cos.\gamma)}$$

$$a=\frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\,g\sqrt{2ge}\,H\,.}{(2\,v-V\cos.\delta)\,v^{2}\,(1-\cos.\gamma)}$$

Nehmen wir an:

$$\frac{Q}{b}=\frac{1}{44},\ \gamma=120^{\circ},\ \delta=20^{\circ},\ \beta=26,\ e=0{\cdot}4,\ \varepsilon=0{\cdot}02,\ H=5^{m}$$

so findet man:

$$V=3,\ v=2{\cdot}01,\ a=0{\cdot}21,\ \frac{a\,b\,v}{Q}=1{\cdot}86$$

Drittes relatives Maximum.

Man kann die Bedingung stellen, dass für eine gegebene Füllung $\left(\frac{a\,b\,v}{Q}\right)$ des Rades, die Grössen v V, a b möglichst vortheilhaft bestimmt werden sollen.

Die Gleichungen, welche zur Lösung dieser Aufgabe führen, sind:

$$E_n = 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2} h_2 + \frac{v(V \cos.\delta - v)}{g} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{e}{2} \sin.\gamma + \frac{a}{2}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - s\right) - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon \sqrt{2 g e R}}{m\,Q}\,b \right\}$$

$$a\,b\,v = m\,Q$$

$$b\,V^3 = \frac{2\,g}{0{\cdot}42}\,.\,Q\,\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}$$

wobei m die Zahl bezeichnet, durch welche die Füllung des Rades ausgedrückt wird.

Differenzirt man diese 3 Gleichungen, indem man dabei **H**, **Q**, h, δ, e, γ, **R**, m als constant behandelt, so findet man:

$$0 = \left(-\frac{V}{g} + \frac{v \cos.\delta}{g}\right) d\,V + \frac{V \cos.\delta - 2\,v}{g}\,d\,v -$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta}\,da - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon \sqrt{2\,g\,e\,.\,R}}{m\,Q}\,d\,b$$

$$a\,b\,d\,v + a\,v\,d\,b + v\,b\,d\,a = 0$$

$$V\,d\,b + 3\,b\,d\,V = 0$$

Aus den zwei letzteren Gleichungen d V und d a gesucht, und die erste eingeführt, und die Faktoren von d b und d v gleich Null gesetzt, so findet man folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{V \cos.\delta - 2\,v}{g} + \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{v}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{V - v \cos.\delta\,V}{g\,b} + \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{b}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon \sqrt{2\,g\,e\,.\,R}}{m\,Q} = 0$$

Aus diesen Gleichungen findet man ohne Schwierigkeiten zur Bestimmung von v, V, a, b folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4\left(2-\frac{V}{v}\cos\,\delta\right)\sin.\beta}{m\,\sin.\,(\gamma-\beta)} &= 0\cdot42\cdot\frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,\gamma}\left(\frac{V}{v}\right)^{3} \\
V^{5} &= \frac{0\cdot464\,.\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}\,.\,R\,.\,2\,.\,g^{2}\,.\,\sin.\,\delta}{0\cdot42\;m\;\sin.\,\delta\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{v}{V}\cos.\,\delta\right)-\frac{v}{V}\left(\cos.\,\delta-2\frac{v}{V}\right)\right]} \\
a &= \frac{2\,v\,[2\,v-V\,\cos.\,\delta]\,\sin.\,\beta}{g\,\sin.\,(\gamma-\beta)} \\
b &= \frac{m\,Q}{a\,v}
\end{aligned}\right\}(152)$$

Die erste Gleichung bestimmt das Verhältniss $\frac{V}{v}$, und dieses ist unabhängig von dem Entweichen des Wassers und von der Wassermenge Q. Ist $\frac{V}{v}$ bekannt, so gibt die zweite Gleichung V, und bestimmt sich v durch $v = V\,.\left(\frac{v}{V}\right)$. Der Werth von V hängt, wie man sieht, von dem Entweichen des Wassers ab; jedoch nur sehr wenig, denn V ist der fünften Wurzel aus ε und der zehnten Wurzel aus e proportional.

Wenn $\varepsilon = 0$ gemacht werden könnte, würde $V = 0$ und folglich auch $v = 0$, $a = 0$ und $b = \infty$. Grosse Breite, geringe Tiefe und langsamer Gang sind demnach die Bedingungen eines hinsichtlich des Entweichens von Wasser sehr genau gearbeiteten Kübelrades. Setzen wir, um ein nummerisches Beispiel zu berechnen:

$$\delta = 20,\ \beta = 26,\ \gamma = 120^{0},\ R = 4,\ m = 2,\ \varepsilon = 0\cdot02\ \ e = 0\cdot4$$

so geben die Gleichungen (152)

$$\frac{V}{v} = 1\cdot478,\ V = 2\cdot681,\ v = 1\cdot813,\ a = 0\cdot179,\ \frac{b}{Q} = 6\cdot15$$

Die Breite ist etwas grösser, die Tiefe bedeutend kleiner und der Gang etwas schneller, als bei den bestehenden Rädern.

Viertes relatives Maximum.

Wir wollen noch die Bedingungen stellen, dass nebst einer bestimmten Füllung, zwischen Breite und Tiefe ein gewisses Verhältniss statt finden soll, und unter dieser Voraussetzung, die unbestimmt bleibenden Grössen V, v, a, möglichst vortheilhaft zu bestimmen suchen.

In diesem Falle hat man, nebst den zwei Gleichungen für den Effekt und für die Wassermenge, noch die Bedingungen

$$\frac{b}{a} = n, \quad \frac{a\,b\,v}{Q} = m$$

zu beachten. Differenzirt man diese 4 Gleichungen, indem man nur allein a, b, v, V als veränderlich betrachtet, und setzt wegen des Maximums $d\,E_n = 0$, so erhält man folgende Differenzialausdrücke:

$$\left(-\frac{V}{g} + \frac{v\cos.\delta}{g}\right) d\,V + \left[\frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g} + \frac{0{\cdot}446.\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}\,R}{a\,v^2}\right] d\,v -$$

$$\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sin.(\gamma - \beta)}{\sin.\beta} - \frac{0\,464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}.R}{a^2\,v}\right] d\,a = 0$$

$$b\,d\,a = a\,d\,b$$

$$a\,b\,d\,v + a\,v\,d\,b + v\,b\,d\,a = 0$$

$$V\,d\,b + 3\,b\,d\,V = 0$$

Aus den 3 letzten Gleichungen folgt:

$$d\,b = 3\,\frac{b}{V}\,d\,V,\ d\,a = \frac{3\,a}{V}\,d\,V,\ d\,v = -6\,.\,\frac{v}{V}\,d\,V$$

Führt man diese Werthe in den ersten Differenzialausdruck ein, so findet man folgende Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{V}{g} - \frac{v\cos.\delta}{g} + 6.\frac{v}{V}\frac{V\cos\delta - 2v}{g} + \frac{3}{2}\frac{a}{V}\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} \\ \qquad + 3\,\frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}}{a\,v\,V} = 0 \\ \text{welche in Verbindung mit:} \\ \qquad a = \frac{Q}{n}\frac{2\,g}{0\,42}\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}\frac{1}{V^3} \\ \text{und} \\ \qquad v = \frac{m\,Q}{n\,a^2} \end{array}\right| \quad (153)$$

die Werthe von a, v, V bestimmen. Das Verfahren der Berechnung ist folgendes. Man nimmt zuerst V versuchsweise an, berechnet den Werth von a, dann den Werth von v, und sieht dann nach, ob dieser so erhaltene Werth der ersten der Gleichungen (153) genügt. Ist diess der Fall, so ist man am Ziele, wo nicht, so muss man für V eine zweite Annahme machen, und die gleichen Operationen wiederholen.

Setzt man

$$\beta = 26,\ \gamma = 120,\ R = 4,\ m = 3$$

$$n = 7\ Q = 0\,5\ \delta = 20$$

so findet man auf dem bezeichneten Wege

$$V = 3{\cdot}12,\ a = 0{\cdot}322,\ v = 2{\cdot}06,\ b = 2\,25^{m}$$

Das oberschlächtige Rad.

Gleichung für den Effekt.

Für dieses Rad darf man ohne merklichen Fehler $\gamma = 180^0$ setzen, und dann wird

$$\frac{e}{2}\sin.\gamma + e\sin.(\gamma - \beta) - s = a\left(1 - \frac{Q}{a\,b\,v}\right)$$

Diese Gleichung ist um so genauer richtig, je grösser das Rad ist, sie ist aber auch bei kleineren Rädern zulässig, denn der Schwerpunkt