Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Theorie des Kropfrades

Theorie des Kropfrades.

Berechnung des Nutzeffektes.

Wenn wir den allgemeinen Fall annehmen, dass die Schaufeln des Rades kübelartig aus ebenen Brettflächen zusammengesetzt sind, und dass der Wasserstand im unteren Kanale um h tiefer steht als in dem tiefsten Schaufelraum, geben uns die Resultate des vorhergehenden Abschnitts zur Berechnung des Nutzeffektes Folgendes:

1) Effektverlust, welcher beim Eintritt des Wassers entsteht. S. 42

$$\left.\begin{array}{l} 1000\,\frac{Q}{2\,g}\left[\,V^2 - 2\,V\,v\cos.\delta + v^2\,\right] \\ +\,1000\,Q\left[\,\frac{e}{2}\sin.\gamma + c\sin.(\gamma-\beta) - s\,\right] \end{array}\right\} \quad . \quad (103)$$

Für radial gestellte Schaufeln ist $c = o$, für Schaufeln, welche aus einer Ebene bestehen, die gegen den Radius so geneigt ist, dass sie beim Austritt aus dem Unterwasser ungefähr vertikal steht, ist nahe $c = \frac{a}{\cos.\beta}$.

2) Effektverlust, welcher durch das Entweichen des Wassers durch den Spielraum der Schaufeln entsteht. Seite 69.

$$1000\,\varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[H - \frac{V^2}{2\,g}\right]\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right] \quad . \quad (104)$$

3) Effektverlust, welcher bei dem Austritt des Wassers entsteht:

$$1000\,Q\left\{\frac{v^2}{2\,g} + \frac{1}{2}\,h\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

4) Effektverlust, welcher durch den Luftwiderstand entsteht:

$$0{\cdot}118\,i\,a\,b\,v^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106)$$

5) Effektverlust, welcher der Reibung des Wassers am Gerinne entspricht:

$$0{\cdot}366\,v^3\,b\,S \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

6) Effektverlust, welchen die Zapfenreibung verursacht:

$$0{\cdot}8\ n\, f\, N \sqrt{N} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (108)$$

Zieht man diese Verluste von dem absoluten Effekt 1000 Q H ab, so findet man für den Nutzeffekt folgenden Ausdruck;

$$\left.\begin{aligned} E_n = {} & 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2}h + \frac{v\,(V \cos.\delta - v)}{g} \right\} \\ & - 1000\,Q \left[\frac{e}{2} \sin.\gamma + c \sin.(\gamma - \beta) - s \right] \\ & - 1000\,\varepsilon\, b \sqrt{2ge} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \,.\, \frac{Q}{a\,b\,v} \right] \\ & - 0{\cdot}188\, i\, a\, b\, v^3 \\ & - 0.366\, b\, S\, v^3 \\ & - 7{\cdot}63 \,.\, \frac{v}{R} \,.\, f \,.\, N \sqrt{N} \end{aligned}\right| \quad (109)$$

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines bestehenden Kropfrades, dessen Dimensionen gegeben sind.

Sucht man den Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,v}$ und setzt denselben gleich Null, so erhält man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit des Rades folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 = {} & 1000\,Q\, \frac{V \cos.\delta - 2v}{g} + \\ & + 1000\,\varepsilon\, b \sqrt{2ge} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] 0.26\, \frac{Q}{a\,b} \,.\, \frac{1}{v^2} \\ & - [0{\cdot}564\, i\, a\, b + 1{\cdot}098\, b\, S]\, v^2 \\ & - 7{\cdot}63\, \frac{f}{R}\, N \sqrt{N} \end{aligned}$$

Setzt man in den drei letzteren Gliedern für v den Annäherungswerth, welcher sich ergibt, wenn man sie vernachlässigt, nämlich $\frac{1}{2}$ V cos. δ, so findet man:

$$v = \frac{1}{2} V \cos \delta + \frac{g}{1000\,Q} \; \frac{520\, \varepsilon\, b \sqrt{2\,g\,e} \left[H - \frac{V^2}{2\,g} \right] \frac{Q}{a\,b}}{V^2 \cos.^2 \delta}$$

$$- \frac{g}{1000\,Q} \left\{ [0{\cdot}07\, f\, a\, b + 0{\cdot}137\, b\, S]\; V^2 \cos.^2 \delta + 3{\cdot}81 \frac{f}{R} N \sqrt{N} \right\}$$

Es sei z. B. für ein Rad mit radialen Schaufeln:

$H = 2^m$	$b = 2$	$\delta = 36^0$	$f = 0{\cdot}1$
$Q = 1^{km}$	$a = 0{\cdot}6$	$\gamma = 60$	$S = 3^m$
$V = 3^m$	$e = 0{\cdot}6$	$c = 0$	$g = 9{\cdot}81$
$R = 3^m$	$\varepsilon = 0{\cdot}02$	$i = 32$	$N = 0{\cdot}7 \times 26 = 18$

und dann findet man:

$$v = 1{\cdot}314^m = 0.438\ V.$$

Die vortheilhafteste Geschwindigkeit fällt demnach etwas kleiner aus, als die Hälfte von derjenigen, mit welcher das Wasser den Umfang des Rades erreicht

Bedingungen für das absolute Maximum des Nutzeffektes.

Wenn man in der Gleichung (109) von der Grösse s absieht, sind alle übrigen Grössen unabhängig von einander, das heisst, es kann jede einzelne derselben beliebig abgeändert werden, ohne dass desshalb eine andere eine Veränderung erleiden müsste.

Man kann daher den Einfluss jeder dieser Grössen auf den Effekt unabhängig von den übrigen betrachten, und man findet, dass der Effekt unter folgenden Bedingungen am grössten ausfällt;

1) Wenn $h = o$, d. h., wenn die Wasserspiegel im unteren Schaufelraum und im Abzugskanal gleich hoch stehen; eine Bedingung, die bei einem unveränderlichen Wasserstande realisirbar ist.

2) Wenn $\gamma = o$, eine Bedingung, die nicht realisirbar ist, weil sie einen unendlich grossen Halbmesser des Rades erfordert.

3) Wenn $\delta = o$, d. h., wenn das Wasser nach tangentialer Richtung in das Rad eintritt.

4) Wenn e möglichst klein gemacht wird.

5) Wenn entweder $c = o$ oder $\gamma = \beta$, d. h., wenn das Rad mit

radialen oder mit ebenen Schaufeln versehen wird, die während das Wasser gegen sie einströmt, eine horizontale Lage haben.

6) Wenn b möglichst klein gemacht wird, weil dann die Verluste, welche das Entweichen des Wassers, der Luftwiderstand und die Wasserreibung verursachen, klein ausfallen.

7) Wenn a so gewählt wird, dass

$$\left(\frac{a\,b\,v}{Q}\right)^2 = \frac{260\,\varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[H - \frac{V^2}{2\,g}\right]}{0{\cdot}188\;i\;v^2\;Q}$$

ausfällt. Diese Bezeichnung findet man, wenn das relative Maximum von E_n in Bezug auf a, d. h. wenn $\frac{d\,E_n}{d\,a} = o$ gesucht wird.

Diese Bezeichnung kann realisirt werden, wenn $\frac{a\,b\,v}{Q} > 1$ ausfällt. Für die Daten des früheren Beispiels wird:

$$\frac{a\,b\,v}{Q} = 2{\cdot}4$$

8) Wenn V so gewählt wird, dass $\frac{d\,E_n}{d\,V} = o$ ausfällt; dies ist der Fall, wenn:

$$V = \frac{v\cos.\,\delta\,Q}{Q + \varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right]}$$

9) Endlich muss noch für den vortheilhaftesten Werth von v, $\frac{d\,E}{d\,v} = o$ werden, was die Bedingungsgleichung:

$$0 = 1000\,Q\,\frac{V\cos.\,\delta - 2\,v}{g} +$$

$$+ 1000\,\varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[H - \frac{V^2}{2\,g}\right] 0{\cdot}26\;.\;\frac{Q}{a\,b}\,.\,\frac{1}{v^2}$$

$$- \left[0{\cdot}564\;i\,a\,b + 1{\cdot}098\;b\,S\right] v^2$$

$$- 7{\cdot}63\,.\,\frac{f}{R}\,N\sqrt{N}$$

zur Folge hat

Um die wahren vortheilhaftesten Werthe von $\frac{a\,b\,v}{Q}$, V, v zu finden, müsste man die drei letzten Gleichungen in Bezug auf diese drei Grössen auflösen, was zu grossen Weitläufigkeiten führt, die man sich ersparen kann, weil vorauszusehen ist, dass diese Bedingungen des grössten Effektes bei der der Untersuchung zu Grunde liegenden Anordnung nicht realisirbar sind. Es fallen nämlich die Werthe von v und V sehr klein aus, und da überdiess noch b möglichst klein sein soll, so ist leicht einzusehen, dass diesen Forderungen nur bei einem Ueberfallsschützen entsprochen werden kann, denn wenn b möglichst klein werden soll, muss der Schützen möglichst hoch, also ganz aufgezogen werden, d. h. der Wassereinlauf muss, wie bei der Anordnung mit dem überflutheten Schützen, ein freier Ueberfall sein.

Der Wassereinlauf.

Der Einlauf soll so eingerichtet werden, dass das Wasser, ohne irgend eine Störung zu erleiden, an den Umfang des Rades mit einer Geschwindigkeit V und nach einer Richtung ankommt, die gegen den Horizont den Winkel $\gamma - \delta$ bildet. Diese Bedingungen werden mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit erfüllt, wenn der Einlauf **b c** Fig. 2 nach der parabolischen Bahn gekrümmt wird, die einen frei geworfenen Körper beschreiben muss, um in dem Punkt **c** auf die oben beschriebene Weise anzukommen. Diese Bahn stimmt aber bekanntlich mit derjenigen überein, die ein Körper beschreibt, welcher aus dem Punkte **c** mit einer Geschwindigkeit V unter einem Winkel $\gamma - \delta$ gegen den Horizont geworfen wird.

Um diese Parabel zu bestimmen, nehmen wir Fig. 47 den Punkt **B** welcher sich in eine Tiefe $\frac{V^2}{2\,g}$ unter der Oberfläche des Wassers im Zuflusskanal befinden muss, als Anfangspunkt der Coordinaten an und eine durch diesen Punkt gehende horizontale **B D** als Abscissenlinie

Setzen wir: $B\,l = \xi$, $m_2\,l = v$, so ist die Gleichung der Bahn:

$$v^2 = \xi \text{ tang. } (\gamma - \delta) - \frac{g\,\xi^2}{2\,V^2 \cos.^2 (\gamma - \delta)} \quad . \quad . \quad (110)$$

Zur Bestimmung der Position des Scheitels **A** findet man dann aus ieser Gleichung:

$$\overline{BD} = \frac{V^2}{2g} \sin. 2\,(\gamma - \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

$$\overline{AD} = \frac{V^2}{2g} \sin.^2 (\gamma - \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Für die Höhe des Wasserstandes über dem Scheitel ist ferner:

$$\overline{\mathrm{An}} = \frac{V^2}{2g} \cos.^2 (\gamma - \delta) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (113)$$

Endlich findet man für die Subnormale $2' \, 2''$ für einen beliebigen Punkt m_2 der Parabel

$$\overline{2' \, 2''} = 2 . \frac{V^2}{2g} \cdot \cos.^2 (\gamma - \delta) = 2 \, \overline{\mathrm{An}} \; . \; . \quad (114)$$

Diese Ausdrücke lassen sich sehr leicht construiren, und daraus ergibt sich für die Verzeichnung des Einlaufes ein einfaches Verfahren, welches später beschrieben werden soll.

Der Regulirschützen muss nicht gerade über den Scheitel **A** der Parabel gestellt werden; er mag, wenn er niedergelassen wird, den Einlauf im Scheitel **A**, oder in irgend einem Punkt m_2 berühren, so wird das Wasser in dem einen und in dem anderen Falle auf die vorgeschriebene Weise in dem Punkt **B** ankommen.

Wenn der niedergelassene Schützen den Einlauf unterhalb des Scheitels, z. B. in m_2 berührt, ist es nicht einmal nothwendig, dass die Parabel über m_2 hinauf bis an den Scheitel fortgesetzt wird. Wenn in diesem Falle nur dafür gesorgt wird, dass das Wasssr bei m_2 nach der Richtung der Tangente, welche diesem Punkte m_2 entspricht, austritt, so muss es den Punkt **B** auf die vorgeschriebene Weise eben so genau erreichen, als wenn es in dem Scheitel **A** nach horizontaler Richtung ausgetreten wäre.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich daraus, dass die Geschwindigkeit, welche ein Wassertheilchen in m_2 besitzt, wenn es bei **A** nach horizontaler Richtung austritt, genau eben so gross ist, als jene, mit welcher es bei m_2 austritt, wenn daselbst die Schützenöffnung angebracht wird; wenn also nur im letzteren Falle der Austritt nach der Richtung der Tangente geschieht, welche zum Punkte m_2 gehört, so muss die Bewegung von diesem Punkte m_2 an, bis nach a hin gerade so erfolgen, wie wenn das Theilchen bei **A** nach horizontaler Richtung ausgetreten wäre.

Von dieser Eigenschaft des Parabeleinlaufs kann man in dem Falle, wenn der Wasserstand im oberen Kanale veränderlich ist, einen nützlichen Gebrauch machen. Wenn man nämlich in diesem Falle den Schützen so anordnet, dass die Ausflussöffnung so viel als möglich dem Punkte **B** genähert wird und den oberen Theil der Parabel ganz weglässt, so wird man unter allen Umständen eine grössere Wassermenge dem Rade zuleiten können, als wenn der Einlauf bis an den Scheitel fortgesetzt ist. In der Regel wird man aber das letztere thun, weil die vollständige Parabel doch die zuverlässigste Leitung des Wassers zu bewirken vermag.

Die Höhe $\overline{nA}$ des Wasserstandes über dem Scheitel fällt gewöhnlich kleiner aus, als die Tiefe des Wassers im Zuleitungskanal; es muss also vor dem Einlauf eine schiefe Ebene angebracht werden, welche den Uebergang von dem Boden des Kanals bis an den höher liegenden Scheitel **c** des Einlaufs vermittelt.

Theorie des Rades mit Ueberfalleinlauf.

Berechnung des Nutzeffektes.

Bei diesem Rade kommen ganz dieselben Effektverluste vor, wie bei dem vorhergehenden Rade; man erhält daher für den Nutzeffekt ganz den gleichen Ausdruck, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} E_n = {} & 1000\, Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2} h + \frac{v\,(V \cos. \delta - v)}{g} \right\} \\ & - 1000\, Q \left[\frac{c}{2} \sin. \gamma + c \sin. (\gamma - \beta) - s \right] \\ & - 1000\, \varepsilon\, b \sqrt{2 g e} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{a b v} \right] \\ & - 0{\cdot}118\, i a b v^3 \\ & - 0{\cdot}366\, b S v^3 \\ & - 7{\cdot}63\, \frac{v}{R}\, f N \sqrt{N}. \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Gleichung für die Wassermenge Q.

Wenn bei einem freien Ueberfall von der Breite **b** der Wasserstand über dem Scheitel **z** beträgt, ist die Wassermenge **Q**, welche p 1″ abfliesst, bekanntlich:

$$Q = 0{\cdot}42 \,.\, b \,.\, z \sqrt{2 g z}$$