Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Das unterschlächtige Rad

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Es wird hier am rechten Orte sein, diesen Weg in Kürze anzudeuten. Bezeichnen wir durch die Buchstaben a b c e f g .... die verschiedenen Grössen, deren Anzahl gleich n sein mag, welche auf den Effekt Einfluss haben; so kann man diese durch die Gleichung

$$E_n = F\ (a,\ b,\ c\ \ldots.)$$

ausdrücken, wobei F als Funktionszeichen dient. Wenn eine Anordnung ihrem Zwecke ganz entsprechen soll, wird sie jederzeit gewissen Bedingungen entsprechen müssen, die sich durch Gleichungen zwischen den Grössen a b c .... ausdrücken lassen. Nehmen wir an, es seien m solcher Bedingungsgleichungen A B C. .... vorhanden, und denken wir uns aus denselben m Grössen gesucht und in den Ausdruck für E_n substituirt, so wird der Effekt als eine Funktion von n — m independenter Grössen erscheinen, und diese können und sollen für die zweckmässigste Anordnung so gewählt werden, dass der Effekt ein Maximum wird. Zu diesem Endzweck muss man die partiellen Differenzialquotienten von E_n in Bezug auf jede von diesen n — m independenten Grössen aufsuchen, und gleich Null setzen, und dann erhält man n — m, Gleichungen, welche in Verbindung mit den m gegebenen Bedingungs-Gleichungen A. B. C. .... gerade hinreichen, sämmtliche n Grössen zu bestimmen.

Wir wollen nun versuchen, zuerst für die älteren Räder und dann für das neuere *Poncelet*'sche Rad den Effekt mit möglichster Genauigkeit zu berechnen; wobei wir wiederum die indirekte Methode befolgen, indem wir die sämmtlichen Effektverluste bestimmen und ihre Summe von dem absoluten Effekt des Motors abziehen.

Das unterschlächtige Rad.

Wassermenge, welche in jeder Secunde zwischen den Schaufeln durchgeht ohne gegen dieselben zu stossen.

Diese Wassermenge ist früher S. 50 und 51 berechnet worden, sie ist

a) wenn der Boden des Zuflusskanals und der Boden des Abflusskanals eine fortlaufende gerade Linie bilden (Fig. 26):

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \tfrac{1}{24}\, e^2 \frac{b}{R} \left(\frac{V}{V-v}\right)^2 V \;\ldots\; \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} > \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\
q_1 &= Q\left[1 - \tfrac{4}{3}\frac{1}{e}\frac{V-v}{V}\sqrt{\frac{2RQ}{b\,V}}\right] \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} < \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\
q_1 &= \tfrac{1}{3}\, Q \;\ldots\ldots\ldots\; \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} = \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

b) wenn im Abflusskanal Boden und Wasserspiegel tiefer liegen als im Zuflusskanal Fig (27)

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= Q\left[1 - \tfrac{2}{3}\,\frac{1}{e}\,\frac{V-v}{V}\sqrt{\frac{2RQ}{bV}}\right] && \text{wenn}\ \frac{Q;}{bV} < \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V,}{V-v}\right)^2 \\ q_1 &= \tfrac{1}{6}\,b\,\frac{e^2}{R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 V \quad . \quad . && \text{wenn}\ \frac{Q}{bV} > \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\ q_1 &= \tfrac{1}{3}\,Q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. && \text{wenn}\ \frac{Q}{bV} = \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

c) wenn der Boden des Zuflusskanals, durch einen, wenigstens über zwei Schaufeltheilungen sich erstreckenden Kreisbogen in den Boden des Abflusskanals übergeht.

$$q_1 = 0$$

Wassermenge, welche unter dem Rade durch den Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Gerinne entweicht.

Dieser Wasserverlust ist nach Seite 56

a) bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne: Fig. (26)

$$q_2 = b\,V\left(\varepsilon + \frac{e^2}{16\,R}\right)\sqrt{1 - \frac{2g}{V^2}\cdot\frac{Q}{b\,v}} \quad . \quad . \quad (97)$$

b) wenn der Boden des Abflusskanales tiefer liegt als jener des Zuflusskanals: Fig. (27)

$$q_2 = b\,V\left(\varepsilon + \frac{e^2}{16\,R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

c) wenn der Boden des Zuflusskanals durch einen bogenförmigen Theil in den Boden des Abflusskanales übergeht, wie in Fig. (28, 29)

$$q_2 = 0$$

Berechnung des Nutzeffektes.

Von der ganzen Wassermenge Q welche p 1″ dem Rade zufliesst, kommt nur der Theil $Q - q_1 - q_2$ zum Stoss, und die Menge $q_1 + q_2$ entweicht ohne eine Aenderung der Geschwindigkeit zu erleiden. Die Dicke der Wasserchichte vor dem Rade beträgt: $\frac{Q}{b\,V}$. Bezieht man den Winkel δ auf den mittleren Wasserfaden, so ist

$$R\,(1 - \cos.\,\delta) = \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,V}$$

demnach wird:

$$\cos.\,\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,V\,R}$$

$$\text{und: } 2\,v\,V\cos.\,\delta = 2\,v\,V - \frac{Q\,v}{b\,R}$$

Setzt man in dem allgemeinen Ausdruck (29) für den Effektverlust, welcher bei dem Eintritt des Wassers entsteht:

$$\text{für } Q \;\ldots\; Q - q_1 - q_2$$

$$\text{für } 2\,v\,V\cos.\,\delta \;\ldots\; 2\,v\,V - \frac{Q\,v}{b\,R}$$

$$\gamma = 0$$
$$c = 0$$
$$s = 0$$

so findet man für diesen Verlust bei dem unterschlächtigen Rade:

$$1000\,\frac{Q - q_1 - q_2}{2\,g}\left[(V - v)^2 + \frac{Q\,v}{b\,R}\right]$$

Bei dem Austritt des Wassers entstehen aus drei Ursachen Effektverluste. Erstens entweicht die Wassermenge $Q - q_1 - q_2$ mit der Geschwindigkeit v und dies verursachet einen Verlust

$$1000\,(Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2g}$$

Zweitens wird diese Wassermenge durch die radial stehenden Schaufeln auf die Höhe $\frac{v^2}{2\,g}\,\frac{2\,Q}{b\,v\,R}$ gehoben, und dadurch entsteht ein Verlust

$$1000\ (Q - q_1 - q_2)\ \cdot \frac{2\,Q}{b\,v\,R} \cdot \frac{v^2}{2\,g}\,.$$

Drittens entweicht die Wassermenge $q_1 + q_2$ mit der Geschwindigkeit V und dies verursacht einen Verlust

$$\frac{1000\ (q_1 + q_2)}{2\,g}\,.\,V^2$$

Der totale beim Entweichen des Wassers entstehende Verlust ist demnach:

$$1000\ (Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2\,g} \cdot \left[1 + \frac{2\,Q}{b\,v\,R}\right] + 1000\ (q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2\,g}$$

Der Effektverlust, welchen der Luftwiderstand verursacht, ist:

$$0{\cdot}118\ i\,a\,b\,v^3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (99)$$

endlich der Effektverlust wegen der Zapfenreibung.

$$0{\cdot}8\ n\ f\ N_n \sqrt{N_n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (100)$$

Wenn wir nun von dem absoluten Effekte $1000\ Q\ \frac{V^2}{2\,g}$ die verschiedenen Verluste abziehen, so erhalten wir für den Nutzeffekt E_n folgenden Ausdruck

$$E_n = \frac{1000}{2\,g}\,(Q - q_1 - q_2)\left[2\,v\ (V - v) - \frac{3\,Q\,v}{b\,R}\right]$$

$$- 0{\cdot}118\ i\,a\,b\ v^3 - 0{\cdot}8\ n\ f\ N_n \sqrt{N_n} \quad . \ . \ . \quad (101)$$

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines unterschlächtigen Rades von gegebenen Abmessungen.

Diese könnte auf analytischem Wege ausgemittelt werden, wenn man, mit Rücksicht auf die Werthe von $q_1\,q_2$ den Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,v}$ suchte, ihn gleich Null setzte, und aus der Gleichung den Werth von v aufsuchte; allein dieses Verfahren führt zur Auflösung einer complizirten höheren Gleichung, aus welcher man nicht allgemein erkennen kann, wie der vortheilhafteste Werth von v von den verschiedenen anderen Grössen abhängt; es ist daher zweckmässiger, für mehrere Annahmen für v die correspondirenden Werthe von E_n zu berechnen, wodurch man dann auch den vortheilhaftesten Werth von v und den correspondirenden Werth von E_n bestimmen kann, wie uns folgendes Beispiel erhellen wird.

Es sei für ein unterschlächtiges Rad mit geradlinig fortlaufendem Gerinne:

$$V = 4{\cdot}43,\ Q = 1\ b = 2,\ a = 0{\cdot}5$$

$$e = 0{\cdot}5,\ \varepsilon = 0{\cdot}02,\ R = 2{\cdot}5$$

Setzt man der Reihe nach:

$$v = 0{\cdot}3\ V,\ 0{\cdot}4\ V\ .\ 0{\cdot}5\ V$$

so ist für jede dieser Annahmen:

$$\frac{Q}{b\,V} > \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2$$

es muss also in jedem dieser drei Fälle q_1 vermittelst der ersten der Gleichungen (95) berechnet werden, und man findet folgende Resultate:

$\frac{v}{V}$	q_1	q_2	E_n	E_a
0·3	0 075	0·230	237^{km}	1000
0·4	0·102	0·230	237^{km}	1000
0·5	0·104	0·230	196^{km}	1000

aus welchen hervorgeht, dass die vortheilhafteste Geschwindigkeit des Rades zwischen 0·3 V und 0.4 V liegt, und dass das Maximum des Effektes 0.237 vom absoluten Effekt beträgt. Diese Resultate stimmen vollkommen mit denjenigen überein, welche sich aus den Versuchen von ***Bossut*** und ***Smeaton*** ergeben haben

Aus obiger Tabelle ersieht man, dass vorzugsweise das Entweichen des Wassers durch den Spielraum ε zwischen den Schaufelkanten und dem Gerinnsboden den Nutzeffekt bedeutend schwächt; weil aber dieser Spielraum nicht leicht kleiner als $0{\cdot}02^m$ gemacht werden kann, so kann man von einem unterschlächtigen Rade mit geradlinigem Gerinne nie mehr als ungefähr $^1/_4$ E_a als Nutzeffekt erwarten. Wenn das Gerinne wie Fig. 28, 29 zeigt, geformt ist, so dass die Wasserverluste q_1 und q_2 verschwinden, findet man für die obigen Daten, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit $v = 2 = 0{\cdot}45\ V$, und den correspondirenden Werth von $E_n = 374$ km; man kann also bei der günstigsten Constructionsart höchstens einen Nutzeffekt von 0.374 des absolutsn Effekts erwarten.

Die hinsichtlich des Effektes vortheilhafteste Anordnung eines unterschlächtigen Rades.

Um mit einem unterschlächtigen Rade eine möglichst günstige Wirkung zu erhalten, ist zunächst nothwendig, das Gerinne so anzuordnen, wie früher Seite (56) gezeigt wurde, um die für den Effekt so nachtheiligen Wasserverluste q_1 und q_2 zu vermeiden.

Vollständig werden diese Verluste auch bei dieser Anordnung nicht vermieden werden können, aber doch grösstentheils. Damit $q_1 = 0$ wird, muss sich, wie Seite 54 gezeigt wurde, der bogenförmige Theil des Gerinnes auf eine Bogenlänge

$$e \cdot \frac{V}{V - v}$$

erstrecken. Da für den vortheilhaftesten Effekt v ungefähr $= 0.4\ V$ gesetzt werden kann, so ist jene Bogenlänge

$$1{\cdot}66\ e.$$

Damit $q_2 = 0$ wird, muss die verlängerte geradlinige Richtung des Zuleitungskanals von dem Umfangskreis des Rades ein kleines Segment wegschneiden, weil dann das Wasser nicht direkt gegen den Spielraum der Schaufeln hinströmt.

Hinsichtlich der Hauptdimensionen **R**, a, b des Rades kann man aus der Gleichung (101) für den Effekt folgern, dass dieselben nur einen sehr geringen Einfluss auf den Effekt haben, daher ziemlich willkürlich angenommen wenden können, vorausgesetzt, dass das Gerinne auf die oben angegebene Weise construirt wird, denn unter dieser Voraussetzung haben die Glieder des Ausdrucks (101), welche von den Dimensionen des Rades abhängen, nur einen sehr kleinen Werth. Wegen des Ein- und Austrittes der Schaufeln, so wie auch wegen der Zapfenreibung soll **R** (weil n mit **R** abnimmt), ziemlich gross, wegen des Luftwiderstandes dagegen (weil i mit R wächst) ziemlich klein genommen werden.

Die Dimensionen a und b müssen wie bei jedem Rade so genommen werden, dass die Wassermenge Q in dem Rade Platz findet, wozu erforderlich ist, dass $a\,b\,v > Q$ sei. Um sicher zu gehen, dass das Rad für die aufzunehmende Wassermenge hinreichend geräumig wird, muss man $a\,b\,v$ wenigstens gleich 2 Q nehmen.

Setzt man

$$a\,b\,v = 2\,Q$$

so wird dadurch die Grösse $a\,b$ einer Schaufelfläche bestimmt.

Aus der Gleichung (101) würde man, wenn $q_1 = q_2 = 0$ und $a\,b\,v = 2\,Q$ gesetzt wird, folgern können, dass b möglichst gross genommen werden sollte, allein diese Folgerung scheint bedenklich zu sein, weil die Wasserverluste q_1 und q_2, welche nie ganz beseitigt werden können, bei sehr grosser Breite des Rades einen merklichen nachtheiligen Einfluss auf den Effekt hervorbringen würden.

Die Breite b kann also auf theoretischem Wege nicht scharf bestimmt werden, es ist aber auch, wie schon gesagt wurde, eine scharfe Bestimmung nicht nothwendig, weil der Einfluss dieser Grösse auf den Effekt, so lange sie innerhalb gewisser Grenzen bleibt, von sehr geringer Bedeutung ist. Die empirische Regel, welche später zur Bestimmung der Dimensionen der Schaufeln angegeben wird, ist auch zur Bestimmung von b für das unterschlächtige Rad vollkommen genügend.

Auch die Schaufeltheilung ist, wenn der bogenförmige Theil des Gerinnes eine Länge $e \frac{V}{V - v}$ erhält, ziemlich gleichgültig. Damit aber dieser Bogen nicht zu lang ausfällt, ist es gut, wenn e nicht zu gross genommen wird. Auch zur Bestimmung von e wird später eine allgemeine, auf alle Schaufelräder anwendbare praktische Regel angegeben werden.

Setzt man in der Gleichung (101) für n seinen Werth

$$n = 9{\cdot}548 \,.\, \frac{v}{R}$$

und sucht hierauf $\frac{d\,E_n}{d\,v} = 0$, so findet man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit des Rades, wenn $q_1 = q_2 = 0$ ist, folgende Gleichung:

$$\frac{1000\,Q}{2\,g}\left[2(V-2\,v)-\frac{3\,Q}{b\,R}\right]-0{\cdot}354\,i\,a\,b\,v^2-7{\cdot}64\,.\,f\,N\,\frac{\sqrt{N}}{R}=0.$$

Setzt man, um einen einfachen und hinreichend genauen Werth für v zu erhalten, in dem Gliede, welches von dem Luftwiderstande herrührt, $v=0{\cdot}4\ V$, so findet man aus dieser Gleichung:

$$v=\frac{1}{2}\,V-\frac{3}{4}\,\frac{Q}{b\,R}-\frac{g}{1000\,Q}\left\{0{\cdot}177\ i\,a\,b\,v^2+3.82\ f\,N.\frac{\sqrt{N}}{R}\right\} \quad (102)$$

Für die im vorhergehenden Beispiele angegebenen Daten wird:

$$v = 1{\cdot}83^{m} = 0{\cdot}41\ V$$

Das Verhalten unterschlächtiger Räder bei veränderlichem Wasserstand im untern Kanale.

Bisher wurde angenommen, dass das Wasser hinter dem Rade ebenso hoch oder etwas niedriger stehe, als in dem Rade selbst. Nun ist aber der Wasserstand eines jeden Flusses oder Baches mit der Witterung veränderlich, es entsteht daher die Frage, wie sich das unterschlächtige Rad bei veränderlichem Stande des Unterwassers verhält.

Es ist leicht einzusehen, dass es am günstigsten ist, wenn der Wasserstand in dem Rade selbst und unmittelbar hinter demselben gleich hoch steht Ist der Wasserstand hinter dem Rade tiefer als in dem Rade, so ist dies zwar insofern gut, als die Schaufeln wenig Wasser in die Höhe werfen, allein es geht dann das Gefälle, welches dem Vertikalabstande jener Wasserspiegel entspricht, für die Wirkung auf das Rad verloren, und überdies entweicht zwischen den Schaufeln mehr Wasser, als bei gleich hoch stehenden Wasseiständen, diese Nachtheile überwiegen aber offenbar jenen Vortheil.

Ist der Wasserstand hinter dem Rade höher als in dem Rade, so strömt das Wasser aus dem Abflusskanal unter den Schaufeln in das Rad hinein, und zwar nach einer der Bewegung des Rades und des darin enthaltenen Wassers entgegengesetzten Richtung. Dadurch verliert das im Rade befindliche Wasser seine Geschwindigkeit, so dass es durch die nachfolgenden Schaufeln fortgeschoben und dabei gleichzeitig beschleunigt werden muss. Wenn das Unterwasser hoch steht, wird ferner noch viel Wasser von den Schaufeln in die Höhe geworfen. Es ist also klar, dass der Effekt sehr ungünstig ausfallen muss, wenn das Wasser hinter dem Rade bedeutend höher steht, als in dem Rade selbst.

Es gibt allerdings Mittel, durch welche man sich gegen die nachtheiligen Wirkungen des Hinterwassers schützen kann. Wenn man z. B. ein Hebwerk anbringt, vermittelst welchem sowohl das Rad als auch das Gerinne mehr oder weniger gehoben werden kann, oder wenn man den untern bogenförmigen Theil des Gerinnes von dem untersten Punkte an zum Verlängern oder Verkürzen einrichtet, was am leichtesten durch Hinzufügen oder Wegnehmen von einzelnen Brettern geschehen könnte. Allein das erste Mittel führt zu einem sehr kostspieligen Bau, welcher bei einem unterschlächtigen Rade nicht zulässig ist, und das zweite Mittel hilft nur unvollkommen und ist im Gebrauche unbequem. Es ist also wohl am klügsten, wenn man das unterschlächtige Rad zur Benutzung von kleinen Gefällen mit veränderlichen Wasserständen gar nicht anwendet, und entweder zu einem *Poncelet*'schen Rade oder zu einer Turbine seine Zuflucht nimmt.

Das unterschlächtige Rad zur Benutzung von grösseren Gefällen.

Wenn an einem Orte weit mehr Wasserkraft vorhanden ist, als der Betrieb eines Werkes erfordert, ist immer die einfachste Einrichtung wenn sie auch viel Betriebswasser erfordert, die zweckmässigste. In Gebirgsgegenden werden desshalb die unterschlächtigen Räder auch bei grösseren Gefällen von 2^m, 3^m, bis 4^m zum Betriebe von Sägen, Hämmern, Mühlen angewendet, weil sie durch ihren schnellen Gang das Zahnräderwerk sehr vereinfachen, und oft sogar ganz entbehrlich machen, wodurch jederzeit eine äusserst einfache Anordnung des Werkes erzielt werden kann.

Fig. (7) zeigt die Einrichtung eines solchen Rades. Das Wasser wird in einem Gerinne bis in die Nähe des Rades und von da an durch ein stark geneigtes Gerinne nach tangentialer Richtung gegen das Rad geleitet, welches oft nur aus Schaufelbrettern besteht, die in die Welle eingesetzt sind.

Der Nutzeffekt eines solchen Rädchens beträgt unter dem günstigstem Umstande, (wenn nämlich die Umfangsgeschwindigkeit ungefähr 0·4 von der des anschlagenden Wassers ist) nicht mehr als $\frac{1}{5}$ von dem absoluten Effekt, weil sehr viel Wasser verspritzt und in die Höhe geworfen wird.

Die Dimensionen eines solchen Rades, welches eine gewisse Anzahl Umdrehungen p 1^m machen, und einen gewissen Nutzeffekt entwickeln soll, lassen sich einfach auf folgende Art bestimmen.

Es ist, wenn man annimmt, dass der Nutzeffekt $\frac{1}{5}$ von dem absoluten Effekt beträgt:

$$Q = 5 \frac{E_n}{1000\,H}$$

Die radiale Dimension a der Schaufeln kann man $= 0{\cdot}3^m$ nehmen, und dann wird die Breite des Rades durch die Bedingung bestimmt, dass der Raum $a\,b\,v$, welcher die Wassermenge Q zu fassen hat, drei mal so gross werden soll, als das Volumen Q.

Es ist nämlich unter dieser Voraussetzung:

$$b = \frac{3\,Q}{a\,v}$$

und weil $v = 0{\cdot}4\ V = 0.4\sqrt{2\,g\,H}$ sein soll, so erhält man

$$b = \frac{3\,Q}{0{\cdot}4 \times a\sqrt{2\,g\,H}}$$

Für die Halbmesser des Rades hat man:

$$R = 9{\cdot}548\ \frac{v}{n} = 9{\cdot}548 \times \frac{0{\cdot}4\sqrt{2\,g\,H}}{n} = 3{\cdot}819\ .\ \frac{\sqrt{2\,g\,H}}{n}$$

Wenn der Bau des Rades möglich werden soll, muss **R** wenigstens $0{\cdot}5^m$ sein.

Es sei z. B. für eine zu erbauende Säge:

$$H = 4^m,\ E_n = 4 \times 75 = 300^{km},\ n = 70$$

so wird:

$$Q = \frac{5 \times 300}{4 \times 1000} = 0{\cdot}375\ \text{Kub.M.}$$

$$a = 0.3$$

$$b = \frac{3 \times 0{\cdot}375}{0{\cdot}4 \times 0{\cdot}3\sqrt{2\,g\,4}} = 1{\cdot}06^m$$

$$R = 3{\cdot}819\ .\ \frac{\sqrt{2\,g\,4}}{70} = 0{\cdot}48^m$$

Die Ausführung des Rades ist also, wie man sieht, gerade noch möglich, und seine sämmtlichen Dimensionen sind so klein, dass die Herstellung nur sehr wenig kostet.

Nimmt man noch $e = 0{\cdot}3$ so wird

$$i = 10.$$