Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Dritter Abschnitt. Analytische Theorie der Wasserräder

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Dritter Abschnitt.

Analytische Theorie der Wasserräder.

Nachdem nun in dem vorhergehenden Abschnitte die verschiedenen Effektverluste berechnet worden sind, welche bei den älteren Anordnungen von Wasserrädern vorkommen, ist es nun möglich eine genauere Theorie von jedem einzelnen Rade zu entwickeln.

Von der Theorie einer Betriebsmaschine wird vorzugsweise die Beantwortung zweier Fragen gefordert, von denen sich die eine auf eine bereits existirende, oder als existirend gedachte, die andere auf eine zu erbauende Maschine bezieht. Im erstern Falle sind die Dimensionen der Maschine bekannt und man wünscht, den Nutzeffekt zu kennen, welchen ihr der Motor unter verschiedenen Umständen mittheilt. Im letzteren Falle wünscht man zu erfahren, wie die Abmessungen und die Geschwindigkeit der zu erbauenden Maschine gewählt werden soll, damit bei einem gegebenen Motor der Nutzeffekt ein Maximum oder bei einem gegebenen Nutzeffekt der absolute Effekt des Motors ein Minimum wird. Wenn es sich nur um die Beantwortung der ersteren Frage handelte, könnte man sich die Mühe ersparen, welche die Auffindung eines genaueren Ausdruckes für den Nutzeffekt verursacht, denn von einer bereits existirenden Maschine kann man ja den Effekt am zuverlässigsten durch Versuche ausmitteln: allein die zweite Frage, hinsichtlich der zweckmässigsten Dimensionen und Geschwindigkeit einer Maschine, kann nur vermittelst eines möglichst genauen Ausdruckes für den Effekt gelöst werden; denn der wirkliche Nutzeffekt einer Maschine ist eine Funktion ihrer Geschwindigkeit und ihrer sämmtlichen Abmessungen; die zweckmässigsten Werthe für diese Grössen können also nur dann richtig und scharf ausgemittelt werden, wenn ihr Einfluss auf den Effekt durch einen mathematischen Ausdruck scharf bestimmt ist. Gelingt es, einen solchen Ausdruck ausfindig zu machen, so lassen sich die Dimensionen und sonstigen Bedingungen, welche zu einer zweckmässigen Anordung führen, auf rein analytischem Wege herleiten; und das Hauptproblem der Theorie einer Maschine ist sodann gelöst.

Es wird hier am rechten Orte sein, diesen Weg in Kürze anzudeuten. Bezeichnen wir durch die Buchstaben a b c e f g .... die verschiedenen Grössen, deren Anzahl gleich n sein mag, welche auf den Effekt Einfluss haben; so kann man diese durch die Gleichung

$$E_n = F\ (a,\ b,\ c\ \ldots.)$$

ausdrücken, wobei F als Funktionszeichen dient. Wenn eine Anordnung ihrem Zwecke ganz entsprechen soll, wird sie jederzeit gewissen Bedingungen entsprechen müssen, die sich durch Gleichungen zwischen den Grössen a b c .... ausdrücken lassen. Nehmen wir an, es seien m solcher Bedingungsgleichungen A B C. .... vorhanden, und denken wir uns aus denselben m Grössen gesucht und in den Ausdruck für E_n substituirt, so wird der Effekt als eine Funktion von n — m independenter Grössen erscheinen, und diese können und sollen für die zweckmässigste Anordnung so gewählt werden, dass der Effekt ein Maximum wird. Zu diesem Endzweck, muss man die partiellen Differenzialquotienten von E_n in Bezug auf jede von diesen n — m independenten Grössen aufsuchen, und gleich Null setzen, und dann erhält man n — m, Gleichungen, welche in Verbindung mit den m gegebenen Bedingungs-Gleichungen A. B. C. .... gerade hinreichen, sämmtliche n Grössen zu bestimmen.

Wir wollen nun versuchen, zuerst für die älteren Räder und dann für das neuere *Poncelet*'sche Rad den Effekt mit möglichster Genauigkeit zu berechnen; wobei wir wiederum die indirekte Methode befolgen, indem wir die sämmtlichen Effektverluste bestimmen und ihre Summe von dem absoluten Effekt des Motors abziehen.

Das unterschlächtige Rad.

Wassermenge, welche in jeder Secunde zwischen den Schaufeln durchgeht ohne gegen dieselben zu stossen.

Diese Wassermenge ist früher S. 50 und 51 berechnet worden, sie ist

a) wenn der Boden des Zuflusskanals und der Boden des Abflusskanals eine fortlaufende gerade Linie bilden (Fig. 26):

$$\left.\begin{array}{ll} q_1 = \frac{1}{24}\, e^2 \frac{b}{R} \left(\frac{V}{V-v}\right)^2 V\ .\ . & \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} > \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\ q_1 = Q\left[1 - \frac{4}{3}\frac{1}{e}\frac{V-v}{V}\sqrt{\frac{2RQ}{b\,V}}\right] & \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} < \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\ q_1 = \frac{1}{3} Q\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \text{wenn } \frac{Q}{b\,V} = \frac{e^2}{8R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \end{array}\right\} \quad (95)$$

b) wenn im Abflusskanal Boden und Wasserspiegel tiefer liegen als im Zuflusskanal Fig (27)

$$\left.\begin{array}{ll} q_1 = Q\left[1 - \frac{2}{3}\frac{1}{e}\frac{V-v}{V}\sqrt{\frac{2RQ}{bV}}\right] & \text{wenn } \frac{Q}{bV} < \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\ q_1 = \frac{1}{6}\, b\, \frac{e^2}{R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 V \;\; . \;\; . & \text{wenn } \frac{Q}{bV} > \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \\ q_1 = \frac{1}{3}\, Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \text{wenn } \frac{Q}{bV} = \frac{e^2}{2R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2 \end{array}\right\} \quad (96)$$

c) wenn der Boden des Zuflusskanals, durch einen, wenigstens über zwei Schaufeltheilungen sich erstreckenden Kreisbogen in den Boden des Abflusskanals übergeht.

$$q_1 = 0$$

Wassermenge, welche unter dem Rade durch den Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Gerinne entweicht.

Dieser Wasserverlust ist nach Seite 56

a) bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne: Fig. (26)

$$q_2 = b\,V\left(\varepsilon + \frac{e^2}{16R}\right)\sqrt{1 - \frac{2g}{V^2}\cdot\frac{Q}{bv}} \quad . \quad . \quad (97)$$

b) wenn der Boden des Abflusskanales tiefer liegt als jener des Zuflusskanals: Fig. (27)

$$q_2 = b\,V\left(\varepsilon + \frac{e^2}{16R}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (98)$$

c) wenn der Boden des Zuflusskanals durch einen bogenförmigen Theil in den Boden des Abflusskanales übergeht, wie in Fig. (28, 29)

$$q_2 = 0$$

Berechnung des Nutzeffektes.

Von der ganzen Wassermenge Q welche p 1″ dem Rade zufliesst, kommt nur der Theil $Q - q_1 - q_2$ zum Stoss, und die Menge $q_1 + q_2$ entweicht ohne eine Aenderung der Geschwindigkeit zu erleiden. Die Dicke der Wasserchichte vor dem Rade beträgt: $\frac{Q}{b\,V}$. Bezieht man den Winkel δ auf den mittleren Wasserfaden, so ist

$$R\,(1 - \cos.\,\delta) = \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,V}$$

demnach wird:

$$\cos.\,\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,V\,R}$$

$$\text{und: } 2\,v\,V\,\cos.\,\delta = 2\,v\,V - \frac{Q\,v}{b\,R}$$

Setzt man in dem allgemeinen Ausdruck (29) für den Effektverlust, welcher bei dem Eintritt des Wassers entsteht:

$$\text{für } Q \;\ldots\; Q - q_1 - q_2$$

$$\text{für } 2\,v\,V\,\cos.\,\delta \;\ldots\; 2\,v\,V - \frac{Q\,v}{b\,R}$$

$$\gamma = 0$$
$$c = 0$$
$$s = 0$$

so findet man für diesen Verlust bei dem unterschlächtigen Rade:

$$1000\,\frac{Q - q_1 - q_2}{2\,g}\left[(V - v)^2 + \frac{Q\,v}{b\,R}\right]$$

Bei dem Austritt des Wassers entstehen aus drei Ursachen Effektverluste. Erstens entweicht die Wassermenge $Q - q_1 - q_2$ mit der Geschwindigkeit v und dies verursachet einen Verlust

$$1000\,(Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2g}$$

Zweitens wird diese Wassermenge durch die radial stehenden Schaufeln auf die Höhe $\frac{v^2}{2\,g}\,\frac{2\,Q}{b\,v\,R}$ gehoben, und dadurch entsteht ein Verlust

$$1000\ (Q - q_1 - q_2)\ \cdot \frac{2\,Q}{b\,v\,R} \cdot \frac{v^2}{2\,g}\,.$$

Drittens entweicht die Wassermenge $q_1 + q_2$ mit der Geschwindigkeit V und dies verursacht einen Verlust

$$\frac{1000\ (q_1 + q_2)}{2\,g}\,.\,V^2$$

Der totale beim Entweichen des Wassers entstehende Verlust ist demnach:

$$1000\ (Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2\,g} \cdot \left[1 + \frac{2\,Q}{b\,v\,R}\right] + 1000\ (q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2\,g}$$

Der Effektverlust, welchen der Luftwiderstand verursacht, ist:

$$0{\cdot}118\ i\,a\,b\,v^3 \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (99)$$

endlich der Effektverlust wegen der Zapfenreibung.

$$0{\cdot}8\ n\ f\ N_n \sqrt{N_n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (100)$$

Wenn wir nun von dem absoluten Effekte $1000\ Q\ \frac{V^2}{2\,g}$ die verschiedenen Verluste abziehen, so erhalten wir für den Nutzeffekt E_n folgenden Ausdruck

$$E_n = \frac{1000}{2\,g}\,(Q - q_1 - q_2)\left[2\,v\ (V - v) - \frac{3\,Q\,v}{b\,R}\right]$$

$$-\,0{\cdot}118\ i\,a\,b\ v^3 - 0{\cdot}8\ n\ f\ N_n\sqrt{N_n}\ \ .\ .\ .\ \ (101)$$

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines unterschlächtigen Rades von gegebenen Abmessungen.

Diese könnte auf analytischem Wege ausgemittelt werden, wenn man, mit Rücksicht auf die Werthe von $q_1\,q_2$ den Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,v}$ suchte, ihn gleich Null setzte, und aus der Gleichung den Werth von v aufsuchte; allein dieses Verfahren führt zur Auflösung einer complizirten höheren Gleichung, aus welcher man nicht allgemein erkennen kann, wie der vortheilhafteste Werth von v von den verschiedenen anderen Grössen abhängt; es ist daher zweckmässiger, für mehrere Annahmen für v die correspondirenden Werthe von E_n zu berechnen, wodurch man dann auch den vortheilhaftesten Werth von v und den correspondirenden Werth von E_n bestimmen kann, wie uns folgendes Beispiel erhellen wird.

Es sei für ein unterschlächtiges Rad mit geradlinig fortlaufendem Gerinne:

$$V = 4{\cdot}43,\ Q = 1\ b = 2,\ a = 0{\cdot}5$$

$$e = 0{\cdot}5,\ \varepsilon = 0{\cdot}02,\ R = 2{\cdot}5$$

Setzt man der Reihe nach:

$$v = 0{\cdot}3\ V,\ 0{\cdot}4\ V\ .\ 0{\cdot}5\ V$$

so ist für jede dieser Annahmen:

$$\frac{Q}{b\,V} > \frac{e^2}{8\,R}\left(\frac{V}{V-v}\right)^2$$

es muss also in jedem dieser drei Fälle q_1 vermittelst der ersten der Gleichungen (95) berechnet werden, und man findet folgende Resultate:

$\frac{v}{V}$	q_1	q_2	E_n	E_a
0·3	0 075	0·230	237^{km}	1000
0·4	0·102	0·230	237^{km}	1000
0·5	0·104	0·230	196^{km}	1000

aus welchen hervorgeht, dass die vortheilhafteste Geschwindigkeit des Rades zwischen 0·3 V und 0.4 V liegt, und dass das Maximum des Effektes 0.237 vom absoluten Effekt beträgt. Diese Resultate stimmen vollkommen mit denjenigen überein, welche sich aus den Versuchen von *Bossut* und *Smeaton* ergeben haben

Aus obiger Tabelle ersieht man, dass vorzugsweise das Entweichen des Wassers durch den Spielraum ε zwischen den Schaufelkanten und dem Gerinnsboden den Nutzeffekt bedeutend schwächt; weil aber dieser Spielraum nicht leicht kleiner als $0{\cdot}02^m$ gemacht werden kann, so kann man von einem unterschlächtigen Rade mit geradlinigem Gerinne nie mehr als ungefähr $^1/_4$ E_a als Nutzeffekt erwarten. Wenn das Gerinne wie Fig. 28, 29 zeigt, geformt ist, so dass die Wasserverluste q_1 und q_2 verschwinden, findet man für die obigen Daten, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit $v = 2 = 0{\cdot}45\ V$, und den correspondirenden Werth von $E_n = 374$ km; man kann also bei der günstigsten Constructionsart höchstens einen Nutzeffekt von 0.374 des absolutsn Effekts erwarten.

Die hinsichtlich des Effektes vortheilhafteste Anordnung eines unterschlächtigen Rades.

Um mit einem unterschlächtigen Rade eine möglichst günstige Wirkung zu erhalten, ist zunächst nothwendig, das Gerinne so anzuordnen, wie früher Seite (56) gezeigt wurde, um die für den Effekt so nachtheiligen Wasserverluste q_1 und q_2 zu vermeiden.

Vollständig werden diese Verluste auch bei dieser Anordnung nicht vermieden werden können, aber doch grösstentheils Damit $q_1 = 0$ wird, muss sich, wie Seite 54 gezeigt wurde, der bogenförmige Theil des Gerinnes auf eine Bogenlänge

$$e \cdot \frac{V}{V - v}$$

erstrecken. Da für den vortheilhaftesten Effekt v ungefähr $= 0.4\ V$ gesetzt werden kann, so ist jene Bogenlänge

$$1{\cdot}66\ e.$$

Damit $q_2 = 0$ wird, muss die verlängerte geradlinige Richtung des Zuleitungskanals von dem Umfangskreis des Rades ein kleines Segment wegschneiden, weil dann das Wasser nicht direkt gegen den Spielraum der Schaufeln hinströmt.

Hinsichtlich der Hauptdimensionen **R**, **a**, **b** des Rades kann man aus der Gleichung (101) für den Effekt folgern, dass dieselben nur einen sehr geringen Einfluss auf den Effekt haben, daher ziemlich willkürlich angenommen wenden können, vorausgesetzt, dass das Gerinne auf die oben angegebene Weise construirt wird, denn unter dieser Voraussetzung haben die Glieder des Ausdrucks (101), welche von den Dimensionen des Rades abhängen, nur einen sehr kleinen Werth. Wegen des Ein- und Austrittes der Schaufeln, so wie auch wegen der Zapfenreibung soll **R** (weil n mit **R** abnimmt), ziemlich gross, wegen des Luftwiderstandes dagegen (weil i mit R wächst) ziemlich klein genommen werden.

Die Dimensionen a und b müssen wie bei jedem Rade so genommen werden, dass die Wassermenge Q in dem Rade Platz findet, wozu erforderlich ist, dass $a\,b\,v > Q$ sei. Um sicher zu gehen, dass das Rad für die aufzunehmende Wassermenge hinreichend geräumig wird, muss man $a\,b\,v$ wenigstens gleich $2\,Q$ nehmen.

Setzt man

$$a\,b\,v = 2\,Q$$

so wird dadurch die Grösse $a\,b$ einer Schaufelfläche bestimmt.

Aus der Gleichung (101) würde man, wenn $q_1 = q_2 = 0$ und $a\,b\,v = 2\,Q$ gesetzt wird, folgern können, dass b möglichst gross genommen werden sollte, allein diese Folgerung scheint bedenklich zu sein, weil die Wasserverluste q_1 und q_2, welche nie ganz beseitigt werden können, bei sehr grosser Breite des Rades einen merklichen nachtheiligen Einfluss auf den Effekt hervorbringen würden.

Die Breite b kann also auf theoretischem Wege nicht scharf bestimmt werden, es ist aber auch, wie schon gesagt wurde, eine scharfe Bestimmung nicht nothwendig, weil der Einfluss dieser Grösse auf den Effekt, so lange sie innerhalb gewisser Grenzen bleibt, von sehr geringer Bedeutung ist. Die empirische Regel, welche später zur Bestimmung der Dimensionen der Schaufeln angegeben wird, ist auch zur Bestimmung von b für das unterschlächtige Rad vollkommen genügend.

Auch die Schaufeltheilung ist, wenn der bogenförmige Theil des Gerinnes eine Länge $e\,\frac{V}{V-v}$ erhält, ziemlich gleichgültig. Damit aber dieser Bogen nicht zu lang ausfällt, ist es gut, wenn e nicht zu gross genommen wird. Auch zur Bestimmung von e wird später eine allgemeine, auf alle Schaufelräder anwendbare praktische Regel angegeben werden.

Setzt man in der Gleichung (101) für n seinen Werth

$$n = 9{\cdot}548\,.\,\frac{v}{R}$$

und sucht hierauf $\frac{d\,E_n}{d\,v} = 0$, so findet man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit des Rades, wenn $q_1 = q_2 = 0$ ist, folgende Gleichung:

$$\frac{1000\,Q}{2\,g}\left[2\,(V-2\,v)-\frac{3\,Q}{b\,R}\right]-0{\cdot}354\,i\,a\,b\,v^2-7{\cdot}64\,.\,f\,N\,\frac{\sqrt{N}}{R}=0.$$

Setzt man, um einen einfachen und hinreichend genauen Werth für v zu erhalten, in dem Gliede, welches von dem Luftwiderstande herrührt, $v=0{\cdot}4\ V$, so findet man aus dieser Gleichung:

$$v=\tfrac{1}{2}\,V-\tfrac{3}{4}\,\frac{Q}{b\,R}-\frac{g}{1000\,Q}\left\{0{\cdot}177\ i\,a\,b\,v^2+3.82\ f\,N\,.\,\frac{\sqrt{N}}{R}\right\}\quad(102)$$

Für die im vorhergehenden Beispiele angegebenen Daten wird:

$$v=1{\cdot}83^{m}=0{\cdot}41\ V$$

Das Verhalten unterschlächtiger Räder bei veränderlichem Wasserstand im untern Kanale.

Bisher wurde angenommen, dass das Wasser hinter dem Rade ebenso hoch oder etwas niedriger stehe, als in dem Rade selbst. Nun ist aber der Wasserstand eines jeden Flusses oder Baches mit der Witterung veränderlich, es entsteht daher die Frage, wie sich das unterschlächtige Rad bei veränderlichem Stande des Unterwassers verhält.

Es ist leicht einzusehen, dass es am günstigsten ist, wenn der Wasserstand in dem Rade selbst und unmittelbar hinter demselben gleich hoch steht Ist der Wasserstand hinter dem Rade tiefer als in dem Rade, so ist dies zwar insofern gut, als die Schaufeln wenig Wasser in die Höhe werfen, allein es geht dann das Gefälle, welches dem Vertikalabstande jener Wasserspiegel entspricht, für die Wirkung auf das Rad verloren, und überdies entweicht zwischen den Schaufeln mehr Wasser, als bei gleich hoch stehenden Wasserständen, diese Nachtheile überwiegen aber offenbar jenen Vortheil.

Ist der Wasserstand hinter dem Rade höher als in dem Rade, so strömt das Wasser aus dem Abflusskanal unter den Schaufeln in das Rad hinein, und zwar nach einer der Bewegung des Rades und des darin enthaltenen Wassers entgegengesetzten Richtung. Dadurch verliert das im Rade befindliche Wasser seine Geschwindigkeit, so dass es durch die nachfolgenden Schaufeln fortgeschoben und dabei gleichzeitig beschleunigt werden muss. Wenn das Unterwasser hoch steht, wird ferner noch viel Wasser von den Schaufeln in die Höhe geworfen. Es ist also klar, dass der Effekt sehr ungünstig ausfallen muss, wenn das Wasser hinter dem Rade bedeutend höher steht, als in dem Rade selbst.

Es gibt allerdings Mittel, durch welche man sich gegen die nachtheiligen Wirkungen des Hinterwassers schützen kann. Wenn man z. B. ein Hebwerk anbringt, vermittelst welchem sowohl das Rad als auch das Gerinne mehr oder weniger gehoben werden kann, oder wenn man den untern bogenförmigen Theil des Gerinnes von dem untersten Punkte an zum Verlängern oder Verkürzen einrichtet, was am leichtesten durch Hinzufügen oder Wegnehmen von einzelnen Brettern geschehen könnte. Allein das erste Mittel führt zu einem sehr kostspieligen Bau, welcher bei einem unterschlächtigen Rade nicht zulässig ist, und das zweite Mittel hilft nur unvollkommen und ist im Gebrauche unbequem. Es ist also wohl am klügsten, wenn man das unterschlächtige Rad zur Benutzung von kleinen Gefällen mit veränderlichen Wasserständen gar nicht anwendet, und entweder zu einem *Poncelet*'schen Rade oder zu einer Turbine seine Zuflucht nimmt.

Das unterschlächtige Rad zur Benutzung von grösseren Gefällen.

Wenn an einem Orte weit mehr Wasserkraft vorhanden ist, als der Betrieb eines Werkes erfordert, ist immer die einfachste Einrichtung wenn sie auch viel Betriebswasser erfordert, die zweckmässigste. In Gebirgsgegenden werden desshalb die unterschlächtigen Räder auch bei grösseren Gefällen von 2^m, 3^m, bis 4^m zum Betriebe von Sägen, Hämmern, Mühlen angewendet, weil sie durch ihren schnellen Gang das Zahnräderwerk sehr vereinfachen, und oft sogar ganz entbehrlich machen, wodurch jederzeit eine äusserst einfache Anordnung des Werkes erzielt werden kann.

Fig. (7) zeigt die Einrichtung eines solchen Rades. Das Wasser wird in einem Gerinne bis in die Nähe des Rades und von da an durch ein stark geneigtes Gerinne nach tangentialer Richtung gegen das Rad geleitet, welches oft nur aus Schaufelbrettern besteht, die in die Welle eingesetzt sind.

Der Nutzeffekt eines solchen Rädchens beträgt unter dem günstigstem Umstande, (wenn nämlich die Umfangsgeschwindigkeit ungefähr 0·4 von der des anschlagenden Wassers ist) nicht mehr als $^1/_5$ von dem absoluten Effekt, weil sehr viel Wasser verspritzt und in die Höhe geworfen wird.

Die Dimensionen eines solchen Rades, welches eine gewisse Anzahl Umdrehungen p 1^m machen, und einen gewissen Nutzeffekt entwickeln soll, lassen sich einfach auf folgende Art bestimmen.

Es ist, wenn man annimmt, dass der Nutzeffekt $^1/_5$ von dem absoluten Effekt beträgt:

$$Q = 5 \frac{E_n}{1000\,H}$$

Die radiale Dimension a der Schaufeln kann man $= 0{\cdot}3^m$ nehmen, und dann wird die Breite des Rades durch die Bedingung bestimmt, dass der Raum a b v, welcher die Wassermenge Q zu fassen hat, drei mal so gross werden soll, als das Volumen Q.

Es ist nämlich unter dieser Voraussetzung:

$$b = \frac{3\,Q}{a\,v}$$

und weil $v = 0{\cdot}4\ V = 0.4\sqrt{2\,g\,H}$ sein soll, so erhält man

$$b = \frac{3\,Q}{0{\cdot}4 \times a\sqrt{2\,g\,H}}$$

Für die Halbmesser des Rades hat man:

$$R = 9{\cdot}548\ \frac{v}{n} = 9{\cdot}548 \times \frac{0{\cdot}4\sqrt{2\,g\,H}}{n} = 3{\cdot}819\ .\ \frac{\sqrt{2\,g\,H}}{n}$$

Wenn der Bau des Rades möglich werden soll, muss R wenigstens $0{\cdot}5^m$ sein.

Es sei z. B. für eine zu erbauende Säge:

$$H = 4^m,\ E_n = 4 \times 75 = 300^{km},\ n = 70$$

so wird:

$$Q = \frac{5 \times 300}{4 \times 1000} = 0{\cdot}375 \text{ Kub.M.}$$

$$a = 0.3$$

$$b = \frac{3 \times 0{\cdot}375}{0{\cdot}4 \times 0{\cdot}3\sqrt{2\,g\,4}} = 1{\cdot}06^m$$

$$R = 3{\cdot}819\ .\ \frac{\sqrt{2\,g\,4}}{70} = 0{\cdot}48^m$$

Die Ausführung des Rades ist also, wie man sieht, gerade noch möglich, und seine sämmtlichen Dimensionen sind so klein, dass die Herstellung nur sehr wenig kostet.

Nimmt man noch $e = 0{\cdot}3$ so wird

$$i = 10.$$

Theorie des Kropfrades.

Berechnung des Nutzeffektes.

Wenn wir den allgemeinen Fall annehmen, dass die Schaufeln des Rades kübelartig aus ebenen Brettflächen zusammengesetzt sind, und dass der Wasserstand im unteren Kanale um h tiefer steht als in dem tiefsten Schaufelraum, geben uns die Resultate des vorhergehenden Abschnitts zur Berechnung des Nutzeffektes Folgendes:

1) Effektverlust, welcher beim Eintritt des Wassers entsteht. S. 42

$$\left.\begin{array}{l} 1000\,\frac{Q}{2\,g}\left[\,V^2-2\,V\,v\cos.\delta+v^2\,\right] \\ +\,1000\,Q\left[\,\frac{e}{2}\sin.\gamma+c\,\sin.(\gamma-\beta)-s\,\right] \end{array}\right\} \quad . \quad (103)$$

Für radial gestellte Schaufeln ist $c = o$, für Schaufeln, welche aus einer Ebene bestehen, die gegen den Radius so geneigt ist, dass sie beim Austritt aus dem Unterwasser ungefähr vertikal steht, ist nahe $c = \frac{a}{\cos.\beta}$.

2) Effektverlust, welcher durch das Entweichen des Wassers durch den Spielraum der Schaufeln entsteht. Seite 69.

$$1000\,\varepsilon\,b\sqrt{2\,g\,e}\left[H-\frac{V^2}{2\,g}\right]\left[0{\cdot}43+0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right] \quad . \quad (104)$$

3) Effektverlust, welcher bei dem Austritt des Wassers entsteht:

$$1000\,Q\left\{\frac{v^2}{2\,g}+\frac{1}{2}\,h\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

4) Effektverlust, welcher durch den Luftwiderstand entsteht:

$$0{\cdot}118\;i\;a\,b\,v^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106)$$

5) Effektverlust, welcher der Reibung des Wassers am Gerinne entspricht:

$$0{\cdot}366\;v^3\,b\,S \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

6) Effektverlust, welchen die Zapfenreibung verursacht:

$$0{\cdot}8\ \mathrm{n\,f\,N}\sqrt{\mathrm{N}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (108)$$

Zieht man diese Verluste von dem absoluten Effekt 1000 **Q H** ab, so findet man für den Nutzeffekt folgenden Ausdruck;

$$\begin{aligned} E_n = 1000\,Q & \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2} h + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g} \right\} \\ & - 1000\,Q \left[\frac{e}{2} \sin.\gamma + c \sin.(\gamma - \beta) - s \right] \\ & - 1000\,\varepsilon\,b \sqrt{2ge} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \cdot \frac{Q}{a b v} \right] \\ & - 0{\cdot}188\,i\,a\,b\,v^3 \\ & - 0.366\,b\,S\,v^3 \\ & - 7{\cdot}63 \cdot \frac{v}{R} \cdot f \cdot N\sqrt{N} \end{aligned} \quad (109)$$

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines bestehenden Kropfrades, dessen Dimensionen gegeben sind.

Sucht man den Differenzialquotienten $\frac{d E_n}{d v}$ und setzt denselben gleich Null, so erhält man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit des Rades folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 = 1000\,Q\, & \frac{V\cos.\delta - 2v}{g} + \\ & + 1000\,\varepsilon\,b\sqrt{2ge}\left[H - \frac{V^2}{2g}\right] 0.26\,\frac{Q}{a b} \cdot \frac{1}{v^2} \\ & - [0{\cdot}564\,i\,a\,b + 1{\cdot}098\,b\,S]\,v^2 \\ & - 7{\cdot}63\,\frac{f}{R}\,N\sqrt{N} \end{aligned}$$

Setzt man in den drei letzteren Gliedern für v den Annäherungswerth, welcher sich ergibt, wenn man sie vernachlässigt, nämlich $\frac{1}{2}$ V cos. δ, so findet man:

$$v = \frac{1}{2} V \cos\delta + \frac{g}{1000\,Q} \frac{520\,\varepsilon\, b \sqrt{2 g e}\left[H - \frac{V^2}{2g}\right]\frac{Q}{a\,b}}{V^2 \cos.^2 \delta}$$

$$- \frac{g}{1000\,Q}\left\{[0{\cdot}07\, f\, a\, b + 0{\cdot}137\, b\, S]\, V^2 \cos.^2 \delta + 3{\cdot}81 \frac{f}{R} N \sqrt{N}\right\}$$

Es sei z. B. für ein Rad mit radialen Schaufeln:

$H = 2^m$	$b = 2$	$\delta = 36^0$	$f = 0{\cdot}1$
$Q = 1^{km}$	$a = 0{\cdot}6$	$\gamma = 60$	$S = 3^m$
$V = 3^m$	$e = 0{\cdot}6$	$c = 0$	$g = 9{\cdot}81$
$R = 3^m$	$\varepsilon = 0{\cdot}02$	$i = 32$	$N = 0{\cdot}7 \times 26 = 18$

und dann findet man:

$$v = 1{\cdot}314^m = 0.438\ V.$$

Die vortheilhafteste Geschwindigkeit fällt demnach etwas kleiner aus, als die Hälfte von derjenigen, mit welcher das Wasser den Umfang des Rades erreicht

Bedingungen für das absolute Maximum des Nutzeffektes.

Wenn man in der Gleichung (109) von der Grösse s absieht, sind alle übrigen Grössen unabhängig von einander, das heisst, es kann jede einzelne derselben beliebig abgeändert werden, ohne dass desshalb eine andere eine Veränderung erleiden müsste.

Man kann daher den Einfluss jeder dieser Grössen auf den Effekt unabhängig von den übrigen betrachten, und man findet, dass der Effekt unter folgenden Bedingungen am grössten ausfällt;

1) Wenn $h = o$, d. h., wenn die Wasserspiegel im unteren Schaufelraum und im Abzugskanal gleich hoch stehen; eine Bedingung, die bei einem unveränderlichen Wasserstande realisirbar ist.

2) Wenn $\gamma = o$, eine Bedingung, die nicht realisirbar ist, weil sie einen unendlich grossen Halbmesser des Rades erfordert.

3) Wenn $\delta = o$, d. h., wenn das Wasser nach tangentialer Richtung in das Rad eintritt.

4) Wenn e möglichst klein gemacht wird.

5) Wenn entweder $c = o$ oder $\gamma = \beta$, d. h., wenn das Rad mit

radialen oder mit ebenen Schaufeln versehen wird, die während das Wasser gegen sie einströmt, eine horizontale Lage haben.

6) Wenn b möglichst klein gemacht wird, weil dann die Verluste, welche das Entweichen des Wassers, der Luftwiderstand und die Wasserreibung verursachen, klein ausfallen.

7) Wenn a so gewählt wird, dass

$$\left(\frac{a\,b\,v}{Q}\right)^2 = \frac{260\,\varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[H - \frac{V^2}{2\,g}\right]}{0{\cdot}188\;i\;v^2\;Q}$$

ausfällt. Diese Bezeichnung findet man, wenn das relative Maximum von E_n in Bezug auf a, d. h. wenn $\frac{d\,E_n}{d\,a} = o$ gesucht wird.

Diese Bezeichnung kann realisirt werden, wenn $\frac{a\,b\,v}{Q} > 1$ ausfällt. Für die Daten des früheren Beispiels wird:

$$\frac{a\,b\,v}{Q} = 2{\cdot}4$$

8) Wenn V so gewählt wird, dass $\frac{d\,E_n}{d\,V} = o$ ausfällt; dies ist der Fall, wenn:

$$V = \frac{v\cos.\,\delta\;Q}{Q + \varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right]}$$

9) Endlich muss noch für den vortheilhaftesten Werth von v, $\frac{d\,E}{d\,v} = o$ werden, was die Bedingungsgleichung:

$$0 = 1000\,Q\,\frac{V\cos.\,\delta - 2\,v}{g} +$$

$$+ 1000\,\varepsilon\,b\,\sqrt{2\,g\,e}\left[H - \frac{V^2}{2\,g}\right]0{\cdot}26\,.\,\frac{Q}{a\,b}\,.\,\frac{1}{v^2}$$

$$-\left[0{\cdot}564\;i\,a\,b + 1{\cdot}098\;b\,S\right]v^2$$

$$-\,7{\cdot}63\,.\,\frac{f}{R}\,N\sqrt{N}$$

zur Folge hat

Um die wahren vortheilhaftesten Werthe von $\frac{a\,b\,v}{Q}$, V, v zu finden, müsste man die drei letzten Gleichungen in Bezug auf diese drei Grössen auflösen, was zu grossen Weitläufigkeiten führt, die man sich ersparen kann, weil vorauszusehen ist, dass diese Bedingungen des grössten Effektes bei der der Untersuchung zu Grunde liegenden Anordnung nicht realisirbar sind. Es fallen nämlich die Werthe von v und V sehr klein aus, und da überdiess noch b möglichst klein sein soll, so ist leicht einzusehen, dass diesen Forderungen nur bei einem Ueberfallsschützen entsprochen werden kann, denn wenn b möglichst klein werden soll, muss der Schützen möglichst hoch, also ganz aufgezogen werden, d. h. der Wassereinlauf muss, wie bei der Anordnung mit dem überflutheten Schützen, ein freier Ueberfall sein.

Der Wassereinlauf.

Der Einlauf soll so eingerichtet werden, dass das Wasser, ohne irgend eine Störung zu erleiden, an den Umfang des Rades mit einer Geschwindigkeit V und nach einer Richtung ankommt, die gegen den Horizont den Winkel $\gamma - \delta$ bildet. Diese Bedingungen werden mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit erfüllt, wenn der Einlauf **b c** Fig. 2 nach der parabolischen Bahn gekrümmt wird, die einen frei geworfenen Körper beschreiben muss, um in dem Punkt **c** auf die oben beschriebene Weise anzukommen. Diese Bahn stimmt aber bekanntlich mit derjenigen überein, die ein Körper beschreibt, welcher aus dem Punkte **c** mit einer Geschwindigkeit V unter einem Winkel $\gamma - \delta$ gegen den Horizont geworfen wird.

Um diese Parabel zu bestimmen, nehmen wir Fig. 47 den Punkt **B** welcher sich in eine Tiefe $\frac{V^2}{2\,g}$ unter der Oberfläche des Wassers im Zuflusskanal befinden muss, als Anfangspunkt der Coordinaten an und eine durch diesen Punkt gehende horizontale **B D** als Abscissenlinie

Setzen wir: $B\,l = \xi$, $m_2\,l = v$, so ist die Gleichung der Bahn:

$$v^2 = \xi \text{ tang. } (\gamma - \delta) - \frac{g\,\xi^2}{2\,V^2 \cos.^2 (\gamma - \delta)} \quad . \quad . \quad (110)$$

Zur Bestimmung der Position des Scheitels **A** findet man dann aus ieser Gleichung:

$$\overline{BD} = \frac{V^2}{2g} \sin.\, 2\,(\gamma - \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

$$\overline{AD} = \frac{V^2}{2g} \sin.^2 (\gamma - \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Für die Höhe des Wasserstandes über dem Scheitel ist ferner:

$$\overline{An} = \frac{V^2}{2g} \cos.^2 (\gamma - \delta) \text{ . . . . . } (113)$$

Endlich findet man für die Subnormale $2' 2''$ für einen beliebigen Punkt m_2 der Parabel

$$\overline{2' 2''} = 2 . \frac{V^2}{2g} \cdot \cos.^2 (\gamma - \delta) = 2 \overline{An} \text{ . . } (114)$$

Diese Ausdrücke lassen sich sehr leicht construiren, und daraus ergibt sich für die Verzeichnung des Einlaufes ein einfaches Verfahren, welches später beschrieben werden soll.

Der Regulirschützen muss nicht gerade über den Scheitel A der Parabel gestellt werden; er mag, wenn er niedergelassen wird, den Einlauf im Scheitel A, oder in irgend einem Punkt m_2 berühren, so wird das Wasser in dem einen und in dem anderen Falle auf die vorgeschriebene Weise in dem Punkt B ankommen.

Wenn der niedergelassene Schützen den Einlauf unterhalb des Scheitels, z. B. in m_2 berührt, ist es nicht einmal nothwendig, dass die Parabel über m_2 hinauf bis an den Scheitel fortgesetzt wird. Wenn in diesem Falle nur dafür gesorgt wird, dass das Wasssr bei m_2 nach der Richtung der Tangente, welche diesem Punkte m_2 entspricht, austritt, so muss es den Punkt B auf die vorgeschriebene Weise eben so genau erreichen, als wenn es in dem Scheitel A nach horizontaler Richtung ausgetreten wäre.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich daraus, dass die Geschwindigkeit, welche ein Wassertheilchen in m_2 besitzt, wenn es bei A nach horizontaler Richtung austritt, genau eben so gross ist, als jene, mit welcher es bei m_2 austritt, wenn daselbst die Schützenöffnung angebracht wird; wenn also nur im letzteren Falle der Austritt nach der Richtung der Tangente geschieht, welche zum Punkte m_2 gehört, so muss die Bewegung von diesem Punkte m_2 an, bis nach a hin gerade so erfolgen, wie wenn das Theilchen bei A nach horizontaler Richtung ausgetreten wäre.

Von dieser Eigenschaft des Parabeleinlaufs kann man in dem Falle, wenn der Wasserstand im oberen Kanale veränderlich ist, einen nützlichen Gebrauch machen. Wenn man nämlich in diesem Falle den Schützen so anordnet, dass die Ausflussöffnung so viel als möglich dem Punkte B genähert wird und den oberen Theil der Parabel ganz weglässt, so wird man unter allen Umständen eine grössere Wassermenge dem Rade zuleiten können, als wenn der Einlauf bis an den Scheitel fortgesetzt ist. In der Regel wird man aber das letztere thun, weil die vollständige Parabel doch die zuverlässigste Leitung des Wassers zu bewirken vermag.

Die Höhe $\overline{nA}$ des Wasserstandes über dem Scheitel fällt gewöhnlich kleiner aus, als die Tiefe des Wassers im Zuleitungskanal; es muss also vor dem Einlauf eine schiefe Ebene angebracht werden, welche den Uebergang von dem Boden des Kanals bis an den höher liegenden Scheitel **c** des Einlaufs vermittelt.

Theorie des Rades mit Ueberfalleinlauf.

Berechnung des Nutzeffektes.

Bei diesem Rade kommen ganz dieselben Effektverluste vor, wie bei dem vorhergehenden Rade; man erhält daher für den Nutzeffekt ganz den gleichen Ausdruck, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} E_n = {} & 1000\,Q\left\{H - \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2}h + \frac{v\,(V\cos.\delta - v)}{g}\right\} \\ & - 1000\,Q\left[\frac{c}{2}\sin.\gamma + c\sin.(\gamma - \beta) - s\right] \\ & - 1000\,\varepsilon\,b\sqrt{2ge}\left[H - \frac{V^2}{2g}\right]\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right] \\ & - 0{\cdot}118\,i\,a\,b\,v^3 \\ & - 0{\cdot}366\,b\,S\,v^3 \\ & - 7{\cdot}63\,\frac{v}{R}\,f\,N\sqrt{N}. \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Gleichung für die Wassermenge Q.

Wenn bei einem freien Ueberfall von der Breite **b** der Wasserstand über dem Scheitel **z** beträgt, ist die Wassermenge **Q**, welche p 1″ abfliesst, bekanntlich:

$$Q = 0{\cdot}42 \,.\, b \,.\, z\sqrt{2gz}$$

Da bei dem Ueberfalleinlauf die unteren Wassertheilchen des Strahles den Umfang des Rades mit einer Geschwindigkeit V und unter einem Winkel δ erreichen, so beträgt die Höhe des Wasserstandes (im Zuflusskanal) über dem Scheitel der von dem unteren Wassertheilchen beschriebenen Parabel

$$\frac{V^2}{2g} \cdot \cos.^2 (\gamma - \delta)$$

und das ist offenbar der Werth von z; man erhält daher die Gleichung

$$Q = \frac{0{\cdot}42}{2g} \, b \, V^3 \cos.^3 (\gamma - \delta) \quad \ldots \quad (116)$$

Bekanntlich ist zwar der Coeffizient 0·42 mit dem Verhältniss zwischen der Breite des Ueberfalls und der Dicke der Wasserschichte etwas veränderlich, allein, da diese Veränderlichkeit nur bei sehr grossen (bei Wasserrädern nie vorkommenden) Differenzen in jenem Verhältnisse von einiger Bedeutung ist, so darf man sich wohl erlauben, unter allen Umständen den Coeffizienten 0.42 beizubehalten.

Gleichung für den Halbmesser des Rades.

Wenn der Wasserstand im Abzugskanale um h tiefer steht, als in dem unteren Schaufelraume (in welchem die Wassertiefe $\frac{Q}{v\,b}$ ist), findet man für den Halbmesser des Rades leicht folgenden Ausdruck:

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{b\,v} - h}{1 - \cos.\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (117)$$

Absolutes Maximum des Nutzeffektes.

Wir dürfen uns wohl erlauben, für diese Untersuchung die drei letzten Glieder des Ausdruckes für den Nutzeffekt unberücksichtigt zu lassen, indem ihr Betrag so unbedeutend ist, dass sie auf die Bedingungen des grössten Effektes nur einen sehr geringen Einfluss haben können.

Unter diesen Voraussetzungen wird der Ausdruck für den Nutzeffekt, wenn in demselben b vermittelst der Gleichung (116) eliminirt wird:

$$\left.\begin{aligned} E_n = 1000\ Q & \left[H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2}h + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g}\right] \\ -1000\,Q & \left[\left(\frac{e}{2}\sin.\gamma + c\sin.(\gamma-\beta) - s\right) + \frac{k}{\cos.^3(\gamma-\delta)}\,\frac{H - \frac{V^2}{2g}}{V^3}\right] \end{aligned}\right\} (118)$$

wobei der Kürze wegen:

$$\varepsilon \sqrt{2ge}\left[0{\cdot}43 + 0.26 \cdot \frac{Q}{a\,b\,v}\right]\frac{2g}{0{\cdot}42} = k \quad . \quad . \quad (119)$$

gesetzt wurde.

Das Maximum des Effektes erfordert auch hier wiederum, dass die Grössen h, e, γ, c, ε möglichst klein genommen werden sollen, was nur theilweise möglich ist.

h kann nur für einen constanten Wasserstand im unteren Kanale klein oder 0 gemacht werden. e kann nicht leicht kleiner als $0{\cdot}3^m$ genommen werden, weil sonst die vielen Schaufeln die Constructionskosten des Rades zu sehr vermehren. Auch darf e hinsichtlich des Nutzeffektes nicht gar zu klein sein, weil sonst das Wasser bei seinen unregelmässigen Schwankungen in den Schaufelräumen leicht gegen die Rückseiten der Schaufeln, mithin gegen die Bewegung des Rades schlägt.

γ kann nicht zu klein angenommen werden, sondern muss in de Regel, und insbesondere bei grösseren Gefällen, gross angenommen werden, damit der Halbmesser des Rades nicht zu gross ausfällt, was die Kosten des Rades zu sehr steigern würde.

ε hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher das Rad in den Verbindungen seiner Theile ausgeführt wird. Bei einem sorgfältig gearbeiteten eisernen Rade mit hölzernen Schaufeln kann $\varepsilon = 0{\cdot}015^m$ werden. Bei einem hölzernen Rade muss schon von vornherein ε grösser gemacht werden, weil sonst bei kleinen Aenderungen in der Form des Rades die Schaufeln an das Gerinne anschleifen würden. Im Mittel genommen darf man für sorgfältige Constructionen $\varepsilon = 0{\cdot}02^m$ annehmen.

c kann ohne Anstand $= 0$ oder sehr klein gemacht werden; letzteres ist dem ersteren vorzuziehen, weil dann die äusseren Theile der Schaufeln so gestellt werden können, dass sie senkrecht aus dem Unterwasser austreten.

Hinsichtlich der vortheilhaftesten Werthe von δ, V, v und b erhalten wir ebenfalls durch die Gleichung (118) Aufschluss, wenn wir die partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,\delta}$, $\frac{d\,E_n}{d\,V}$, $\frac{d\,E_n}{d\,v}$ aufsuchen, jeden derselben gleich 0 setzen, und aus den sich so ergebenden Gleichungen v, V, δ zu bestimmen suchen.

Man findet:

$$\frac{d\,E_n}{d\,\delta} = 0 = -\frac{v\,V}{g}\sin.\delta + k\,.\,\frac{H-\frac{V^2}{2\,g}}{V^3}\,\frac{3\sin.(\gamma-\delta)}{\cos.^4(\gamma-\delta).}$$

oder

$$\frac{\sin.\delta\cos.^4(\gamma-\delta)}{\sin.(\gamma-\delta)} = 3\,g\,k\,.\,\frac{H-\frac{V^2}{2\,g}}{v\,V^4} \quad . \; . \; . \quad (120)$$

$$\frac{d\,E_n}{d\,V} = 0 = \frac{-V+v\cos.\delta}{g} + \frac{k}{\cos.^3(\gamma-\delta)}\left[\frac{1}{g\,V^2} - 3\,\frac{H-\frac{V^2}{2\,g}}{V^4}\right]$$

oder;

$$(V - v\cos.\delta)\cos.^3(\gamma-\delta) = k\,g\left[\frac{1}{g\,V^2} + 3\,\frac{H-\frac{V^2}{2\,g}}{V^4}\right] . \quad (121)$$

$$\frac{d\,E_n}{d\,v} = V\cos.\delta - 2\,v = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (122)$$

Aus (120) und (121) folgt durch Division:

$$\frac{(V - v\cos.)\sin.(\gamma-\delta)}{\sin.\delta\cos.(\gamma-\delta)} = v\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\frac{V^2}{2\,g}}{H-\frac{V^2}{2\,g}}\right\}$$

oder:

$$\frac{V\sin.(\gamma-\delta) - v\sin.\gamma}{\sin.\delta\cos.(\gamma-\delta)} = v\,.\,\frac{2}{3}\,\frac{\frac{V^2}{2\,g}}{H-\frac{V^2}{2\,g}} \quad . \quad (123)$$

Durch Elimination von v aus den Gleichungen (120) und (123) vermittelst der Gleichung (122) findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\gamma\cos.\delta - 2\cos.\gamma\sin.\delta}{\sin.2\,\delta\cos.(\gamma-\delta)} &= \frac{1}{3}\,\frac{\frac{V^2}{2g}}{H-\frac{V^2}{2g}}\\ \frac{\sin.2\,\delta\cos.^4(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)} &= 12\,k\,g\,\frac{H-\frac{V^2}{2g}}{V^5}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (124)$$

Aus diesen zwei Gleichungen müssen durch irgend eine Annäherungs-Methode die Werthe von δ und V bestimmt werden. Da vorauszusehen ist, dass der vortheilhafteste Werth von **V** nicht sehr gross ausfallen kann, so ist gewiss das Glied rechter Hand des Zeichens $=$ in der ersten von obigen Gleichungen eine kleine Grösse; man wird also keinen merklichen Fehler begehen, wenn man

$$\sin.\gamma\cos.\delta - 2\cos.\gamma\sin.\delta = 0$$

setzt; dann ergibt sich

$$\text{tang.}\,\delta = \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

wodurch die Berechnung von δ ohne Schwierigkeit geschehen kann. Kennt man den Werth von δ, und substituirt denselben in die zweite der Gleichungen (124) so kann man aus derselben ohne Anstand V bestimmen.

Ist auch diess geschehen, so findet man aus (122)

$$v = \tfrac{1}{2}\,V\cos.\,\delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

und endlich aus (2)

$$\frac{b}{Q} = \frac{2\,g}{0{\cdot}42}\cdot\frac{1}{V^3\cos.^3(\gamma-\delta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

Auch der vortheilhafteste Werth von a oder von **a b v** liesse sich bestimmen, man müsste aber dieser Bestimmung die Gleichung (117) zu Grunde legen, weil der vortheilhafteste Werth von **a** auch von dem

Luftwiderstand abhängt. Indess ist dieses Element von äusserst geringem Einfluss auf den Effekt, es ist daher hinreichend, wenn a so bestimmt wird, dass die Bedingung $a\,b\,v > Q$ erfüllt ist. Wir setzen also zur Bestimmung von a

$$a = \frac{2\,Q}{b\,V} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (128)$$

In Bezug auf die Grösse a muss noch bemerkt werden; dass bei der Aufsuchung der partiellen Differenzialquotienten: a, oder vielmehr $\frac{Q}{a\,b\,v}$ welches in k enthalten ist, als constant angesehen wurde, die erhaltenen Resultate setzen also schon voraus, dass man die Füllung des Rades von vornherein angenommen habe.

Aus den aufgefundenen Bedingungsgleichungen erkennt man zunächst, dass die vortheilhaftesten Werthe von v V, $\frac{b}{Q}$ vorzugsweise von dem Entweichen des Wassers, nämlich von der Grösse k abhängen: Bei einem schwach gefüllten, eng geschaufelten und genau in das Gerinne eingepassten Rade sind die Grössen ε, e, $\frac{Q}{a\,b\,v}$ und ist folglich auch k klein (119). Wenn aber k klein ist, fällt wegen der zweiten der Gleichungen (124) V und wegen der Gleichung (126) v klein aus, dagegen wird wegen (127) $\frac{b}{Q}$ sehr gross. Wäre es möglich ε unendlich klein zu machen, so würde gar V und v unendlich klein und $\frac{b}{Q}$ unendlich gross. Hieraus sieht man, dass sich die vortheilhafteste Geschwindigkeit und die vortheilhafteste Breite des Rades vorzugsweise nach der Vollkommenheit richtet, mit welcher das Rad hinsichtlich des Entweichens des Wassers konstruirt ist, und dass ein genau gearbeitetes Rad einen langsamen Gang und eine grosse Breite, ein ungenau gearbeitetes Rad eine grössere Geschwindigkeit und kleinere Breite erhalten soll. Die vortheilhaftesten Werthe von v und $\frac{b}{Q}$ ändern sich aber nicht in dem gleichen Maasse mit ε oder mit k, denn aus der zweiten der Gleichungen (124) sieht man, dass V ungefähr der fünften Wurzel aus k proportinal ist, daher ändert sich auch wegen (126) v nur sehr wenig bei einer Aenderung von k. Das Verhältniss $\frac{b}{Q}$ ist dagegen der dritten Potenz von V, demnach ungefähr der $\frac{3}{5}$ten Potenz von k verkehrt proportional. Hieraus sieht man also, dass der Einfluss der Grösse k auf die vortheilhafteste Breite des Rades viel grösser ist, als auf die vortheilhafteste Geschwindigkeit.

Auch sieht man aus dieser Untersuchung, dass die ältere Theorie der Wasserräder, welche auf das Entweichen nicht Rücksicht nimmt, oder richtiger gesprochen, welche voraussetzt, dass gar kein Entweichen statt findet, für die Bedingungen des grössten Effektes $v = V = o$ und $\frac{b}{Q} = \infty$ geben muss, denn diese Resultate ergeben sich auch aus den aufgestellten Gleichungen wenn man $k = o$ annimmt.

Es ist nun die Frage, ob die für δ, V, v, b erhaltenen Gleichungen zu praktisch brauchbaren Construktionsverhältnissen führen? Um diess zu entscheiden, sind numerische Rechnungen nothwendig. Die nachfolgende Tabelle enthält die Resultate solcher Rechnungen, bei welchen so verfahren wurde. Zuerst wurden die Werthe von γ angenommen; dann wurden vermittelst (125) die correspondirenden Werthe von δ gesucht. Hierauf wurde, um für H Annahmen zu machen, welche den Werthen von γ angemessen sind, für alle Räder $R = 3$ gesetzt. Dann wurden die Werthe von $H - \frac{V^2}{2g}$ vermittelst der Gleichung:

$$H - \frac{V^2}{2g} = R\,(1 - \cos.\,\gamma)$$

bestimmt. Sodann wurde vermittelst der zweiten der Gleichungen (124) V berechnet. Die Werthe von v, $\frac{b}{Q}$ und a ergaben sich zuletzt aus den Gleichungen (126), (127), 128).

Die constanten Grössen, welche diesen Rechnungen zu Grunde gelegt wurden, sind:

$$R = 3\,,\ e = 0{\cdot}5\,,\ \frac{a\,b\,v}{Q} = 2\,,\ \varepsilon = 0{\cdot}02\,,\ g = q{\cdot}81$$

Tabelle über die vortheilhaftesten Anordnungen von Ueberfall-Rädern.

I. Tabelle.

Nr.	γ	δ	$H - \frac{V^2}{2g}$	V	H	v	$\frac{b}{Q}$	a	s
I.	45°	26°+33'	0·89	2·42	1·188	1·080	3·86	0·48	0·24
II.	53	33°+33'	1·20	2·54	1·528	1·060	3·43	0·55	0·23
III.	60	40°+54'	1·50	2·60	1·844	0·982	3·15	0·64	0·23
IV.	70	53°+56'	2·00	2·65	2·358	0·779	2·82	0·91	0·20
V.	80	70°+34'	2·50	2·66	2·861	0·142	2·58	1·75	0·10

Zur Bestimmung der Werthe von s wurden die berechneten Räder verzeichnet, und die Wasserstände in den Schaufeln eingetragen.

Die Nutzeffekte dieser Räder sind in folgender Tabelle enthalten.

Sie wurden vermittelst der Formel (115) berechnet. Es wurde

$$Q = 1,\ h = 0,\ c = 0,\ f = 0{\cdot}1$$

und für die Berechnung der Zapfenreibung

$$N = 0{\cdot}75\ \frac{1000\ Q\ H}{75}$$

angenommen. Die Effekte sind in Theilen des absoluten Effektes der Wasserkraft ausgedrückt; die Zahlen, welche die Tabelle enthält, sind also die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Effekten und dem absoluten Effekt.

II. Tabelle.

Nr.	Effekte in Procenten des absoluten Effekts.	I.	II.	III.	IV.	V.
1	Effektverlust durch Ein- und Austritt	0·0976	0·1210	0·1269	0·1403	0·1706
2	Effektverlust durch das Entweichen des Wassers .	0·1011	0·0942	0·0895	0·0836	0·0788
3	Effektverlust durch den Luftwiderstand	0·0083	0·0062	0·0044	0·0021	0·0005
4	Effektverlust durch die Wasserreibung . . .	0·0017	0·0015	0·0011	0·0005	0·0001
5	Effektverlust durch die Zapfenreibung	0·0094	0·0101	0·0101	0·0097	0·0060
6	Summe der Effektverluste	0·2181	0·2330	0·2320	0·2362	0·2560
7	Nutzeffekt der Räder wenn $h = o$	0·7819	0·7670	0·7680	0·7638	0·7440
	Nutzeffekt der Räder wenn $h = \frac{1}{2}\ a$	0·631	0·677	0·681	0·667	0·591

Ueber die Resultate dieser Berechnungen lassen sich folgende Bemerkungen machen.

Aus der ersten Tabelle ersieht man:

1) dass die vortheilhaftesten Geschwindigkeiten v der Räder sehr klein ausfallen, sie werden daher nur eine kleine Anzahl Umdrehungen p 1′ machen, und man würde, da man in der Regel grosse Geschwindigkeiten nothwendig hat, starke Räderübersetzungen brauchen, die kostspielig und krafterschöpfend sind.

2) Dass die berechneten Räder ziemlich breit und sehr tief sind, demnach auch aus diesem Grunde etwas kostspielig würden.

Aus der zweiten Tabelle ersieht man den Betrag der einzelnen Effektverluste.

Durch Vergleichung der zwei letzten Horizontalcolumnen ersieht man, wie nothwendig es ist, die Anordnung so zu treffen, dass $h = o$ wird, dass also der Wasserspiegel in dem unteren Schaufelraum und im Abflusskanal gleich hoch stehen, was allerdings nur bei einem constanten Wasserstand in dem letzteren möglich ist. Die Effektverluste 3, 4, 5 sind wegen der kleinen Geschwindigkeit des Rades sehr unbedeutend. Der Effektverlust 1 steigt von 10 bis 17 Procent, der Verlust 2 fällt von 10 bis 7 Procent

Relatives Maximum des Nutzeffektes.

Die im Vorhergehenden berechneten Räder sind zu breit, zu tief und gehen zu langsam, entsprechen daher nicht genug den Bedingungen, welche in der Praxis aus ökonomischen Rücksichten gestellt werden. Nun kann man aber voraussehen, dass der Nutzeffekt nicht merklich ungünstiger ausfallen könne, wenn die Radbreite etwas kleiner und der Gang etwas schneller angenommen wird, denn es gilt ja allgemein der Satz „dass sich eine jede Funktion in der Nähe ihres Maximums nur wenig ändert.“ Wir wollen daher den Versuch machen, die Dimensionen und die Geschwindigkeit der Räder den praktischen Anforderungen gemäss anzunehmen, und die Grössen V und δ (welche auf den Preis des Rades keinen Einfluss haben), so zu bestimmen, dass E_n möglichst gross ausfällt.

Nehmen wir also an, dass in den Gleichungen (115) und (116) alle Grössen bis auf V und δ constant und gegeben seien. Differenzirt man (115) in Bezug auf V und δ und setzt $d E_n = 0$, so findet man:

$$0 = -\frac{V}{g} d V + \frac{v}{g} (\cos. \delta d V - V \sin. \delta d \delta)$$

$$+ \frac{\varepsilon b \sqrt{2 g e}}{Q} \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{a b v} \right] \frac{V}{g} d V$$

oder

$$0 = \frac{v}{g} (\cos. \delta d V - V \sin. \delta d \delta)$$

$$- \frac{V}{g} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon b \sqrt{2 g e}}{Q} \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \, . \, \frac{Q}{a b v} \right] \right\} d V$$

Nun ist aber das Produkt, welches ε als Faktor enthält, eine gegen die Einheit kleine Grösse, denn es ist für praktische Fälle $\frac{b}{Q}$ ungefähr $= 2$, $\varepsilon = 0{\cdot}02$, $\sqrt{2\,g\,e} = 3$, $\frac{Q}{a\,b\,c} = 0{\cdot}5$, der Betrag dieses Produkts ist daher ungefähr $0{\cdot}1$, was gegen die Einheit vernachlässigt werden darf. Unter dieser Voraussetzung wird diese Differenzialgleichung:

$$0 = v\,(\cos.\,\delta\,d\,V - V\,\sin.\,\delta\,d\,\delta) - V\,.\;.\;.\quad(129)$$

differenzirt man ferner die Gleichung (116), indem man nur V und δ als veränderlich betrachtet, so findet man

$$\cos.\,(\gamma - \delta)\,d\,V + V\sin.\,(\gamma - \delta)\,d\,\delta = 0\quad.\;.\quad(130)$$

Aus diesen Gleichungen (129 und 130) folgt:

$$V = v\,\frac{\sin.\,\gamma}{\sin.\,(\gamma - \delta)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(131)$$

und wenn man diesen Werth von V in (116) einführt, erhält man:

$$\frac{\sin.\,\gamma}{\mathrm{tang.}\,(\gamma - \delta)} = \sqrt[3]{\frac{2\,g\,Q}{0{\cdot}42\,b\,v^3}}\quad.\;.\;.\;.\quad(132)$$

Diese Gleichung bestimmt den vortheilhaftesten Werth von δ, und ist dieser bestimmt, so erhält man aus (131) den vortheilhaftesten Werth von V.

Die Gesetze, welche in diesen Formeln enthalten sind, können wiederum am besten durch die numerischen Rechnungen zur Anschauung gebracht werden, deren Resultate in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind. Die erste Tabelle ist für die Annahme:

$$v = 1{\cdot}5\,,\ \frac{b}{Q} = 2,\ \frac{a\,b\,v}{Q} = 2,\ R = 3$$

auf folgende Art berechnet worden. Zuerst wurden die Winkel γ angenommen, dann wurden vermittelst der Gleichungen (131) und (132) die Werthe von δ und γ berechnet.

Zur Bestimmung von $H - \frac{V^2}{2\,g}$ und a dienten die Formeln:

$$H - \frac{V^2}{2g} = R\,(1 - \cos.\gamma)$$

$$a = \frac{2Q}{vb}$$

Zur Berechnung der zweiten Tabelle diente die Formel (115), und es wurde gesetzt:

$$Q = 1,\; a = 0{\cdot}5,\; c = 0,\; \varepsilon = 0{\cdot}02,\; f = 0.1.$$

III. Tabelle.

Nr. des Rade.	γ	δ	V	$H - \frac{V^2}{2g}$	H	a	s
I	45°	24° + 38	3·047	0 879	1·353	0·666	0.23
II	50	28° + 6	3·081	1·071	1·555	0·666	0·22
III	55	31° + 44	3·110	1 279	1·772	0·666	0 20
IV	60	35° + 34	3·141	1·500	2·003	0 666	0 18
V	70	43° + 45	3·187	1·974	2·493	0 666	0·16
VI	80	52° + 41	3·219	2·479	3·008	0 666	0·14
VII	90	62° + 18	3·227	3 000	3·532	0·666	0·12

IV Tabelle.

Effekte und Effektverluste in Procenten.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Eintritt und Austritt . .	0·167	0.172	0·182	0·189	0·189	0·189	0·187
Entweichen des Wassers .	0 045	0·048	0 051	0·050	0.056	0·058	0·060
Luftwiderstand	0·014	0·012	0 011	0 009	0.008	0·006	0·005
Reibung des Wassers am Gerinne	0·004	0·004	0·004	0·004	0·003	0·003	0·003
Zapfenreibung	0·014	0·015	0 016	0·017	0·019	0·021	0 022
Summe der Effektverluste	0 244	0·251	0·264	0·269	0·275	0·277	0·277
Nutzeffekte wenn . . $h = 0$ . .	0.756	0·749	0·736	0 731	0·725	0·723	0·723
Nutzeffekte wenn . . $h = \frac{1}{2}$ a .	0 633	0 642	0 642	0·647	0 658	0·668	0·674

Vergleicht man diese Tabellenwerthe mit den früher für das absolute Maximum aufgefundenen, so sieht man, dass die Differenzen in den

Effekten von gar keiner Bedeutung sind Es sind sogar einige Effekte in der Tabelle IV. grösser, als in der Tabelle II, was nicht von einer Unvollkommenheit der Theorie oder von einem Rechnungsfehler, sondern von dem Umstande herrührt, dass bei den Differenziationen die Grösse s in beiden Fällen als constant behandelt wurde.

Wir können also sagen, dass die nach dem relativen Maximum berechneten Räder hinsichtlich des Effektes eben so gut, wegen ihrer grösseren Geschwindigkeit und kleineren Breite aber besser sind, als die Räder, welche früher nach den Bedingungen des absoluten Maximums des Effekts berechnet wurden.

Auffallend ist auch hier wiederum der Einfluss von h, insbesondere bei den kleineren Gefällen.

Das Brustrad mit Coulisseneinlauf.

Nutzeffekt des Rades und Halbmesser.

Bei diesem Rade kommen wiederum die gleichen Effektverluste vor, wie bei den zwei vorhergehenden; der Nutzeffekt ist also auch hier wie dort:

$$\left.\begin{aligned} E_n = {} & 1000\,Q \left\{ H - \tfrac{1}{2}\,h - \frac{V^2}{2g} + \frac{v\,(V \cos.\,\delta - v)}{g} \right\} \\ & - 1000\,Q \left[\frac{e}{2} \sin.\,\gamma + c \sin.\,(\gamma - \beta) - s \right] \\ & - 1000\,\varepsilon\, b \sqrt{2ge} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{a\,b\,v} \right] \\ & - 0{\cdot}118\; i\, a\, b\, v^3 \\ & - 0{\cdot}366\; b\, S\, v^3 \\ & - 7{\cdot}64 \cdot \frac{v}{R} \cdot f\, N \sqrt{N} \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Auch für den Halbmesser des Rades ist, wie bei den zwei vorhergehenden Rädern:

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{b\,v} - h}{1 - \cos.\,\gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (134)$$

Gleichung für die Wassermenge.

Wir nehmen an, dass alle Coulissen dem Umfang des Rades unter dem gleichen Winkel δ begegnen, und dass der Wasserspiegel im Zuflusskanale gar nicht oder nur wenig höher stehe, als die oberste Leitfläche. Unter dieser Voraussetzung findet man leicht nach dem gewöhnlichen Verfahren, nach welchem die Wassermenge bei Ueberfällen berechnet wird, folgenden Ausdruck:

$$Q = \frac{0.42}{2\,g}\, b\, \frac{\sin\ \delta}{\sin.\ \gamma}\, V^3 \ldots\ldots \quad (135)$$

Vortheilhaftester Effekt eines bestehenden Rades.

Bei einem bestehenden Rade können nur zwei Grössen, nämlich die Wassermenge Q und die Geschwindigkeit v des Rades veränderlich sein, und man kann sich die Frage vorlegen, wie diese Grössen genommen werden müssen, damit das Verhältniss $\frac{E_n}{1000\,Q\,H}$ zwischen dem Nutzeffekte und dem absoluten Effekte möglichst gross ausfällt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (133) die drei letzten Glieder, welche, wie die früheren numerischen Rechnungen gezeigt, nur einen sehr kleinen Werth haben; vernachlässigt man ferner in dem Gliede, welches sich auf das Entweichen bezieht $\frac{V^2}{2\,g}$ gegen H, und setzt in dem gleichen Gliede für Q den Werth, welchen die Gleichung (135) darbietet, so kann (133) geschrieben werden wie folgt:

$$\frac{E_n}{1000\,Q\,H} = \frac{1}{H}\left\{H - \tfrac{1}{2}\,h - \frac{V^2}{2\,g} + \frac{v\,(V\ \cos.\ \delta - v)}{g}\right\}$$

$$- \frac{1}{H}\left(\frac{e}{2}\ \sin.\ \gamma + c\ \sin.\ (\gamma - \beta) - s\right)$$

$$- \varepsilon\, b\, \sqrt{2\,g\,e}\left(\frac{2 \times 0{\cdot}43\ g\ \sin.\ \gamma}{0{\cdot}42\ b\ \sin.\ \delta\ V^3} + \frac{0{\cdot}26}{a\,b\,v}\right)$$

Berechnet man die partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,V}$, $\frac{d\,E_n}{d\,v}$ und setzt jeden derselben $= 0$, so erhält man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Werthe von V und v folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{V}{\cos.\ \delta} - \frac{k}{V^4} \\ V &= \frac{2v}{\cos.\ \delta} - \frac{k_1}{v^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

in welchen der Kürze wegen gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{6 \times 0{\cdot}43\ g^2 \sin.\ \gamma\ \varepsilon \sqrt{2ge}}{0{\cdot}42 \sin.\ \delta\ .\ \cos.\ \delta} \\ k_1 &= \frac{0{\cdot}26\ g\ \varepsilon \sqrt{2ge}}{a \cos.\ \delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (137)$$

Aus den Gleichungen (136) folgt durch Elimination von v:

$$V\left(\frac{V}{\cos.\ \delta} - \frac{k}{V^4}\right)^2 = \frac{2}{\cos.\ \delta}\left(\frac{V}{\cos.\ \delta} - \frac{k}{V^4}\right)^3 - k_1 \quad (138)$$

woraus V durch Annäherung bestimmt werden muss. Ist diess geschehen, so ergibt sich weiters v durch die erste der Gleichungen (136) und Q durch (135). Dieses relative Maximum ist aber nur dann möglich, wenn $a\,b\,v \overset{=}{>} Q$ ausfällt.

Es sei z.B. $b = 2$, $\gamma = 70^0$, $\delta = 40$, $\varepsilon = 0{\cdot}02$, $e = 0{\cdot}5$, $a = 0{\cdot}6$

so wird: $k = 72, \quad k_1 = 0{\cdot}348$

und $V = 2.4, \quad v = 0.96$

endlich $V = 0{\cdot}405$

$$\frac{a\,b\,v}{Q} = 2{\cdot}84$$

Dieses Rad gibt also bei langsamem Gange und schwacher Füllung den vortheilhaftesten Effekt. Indessen gilt auch hier wiederum, was früher schon als allgemeiner Grundsatz ausgesprochen wurde, dass sich der Nutzeffekt immer nur wenig von seinem vortheilhaftesten Werthe entfernt, so lange die Bedingungen dieses Werthes nur ungefähr erfüllt sind. Die Wassermenge und die Geschwindigkeit können also z. B bei dem so eben berechneten Rade bedeutend grösser oder kleiner sein, als durch die Rechnung gefunden wurde, ohne dass desshalb der Nutzeffekt wesentlich ungünstiger würde.

Aus den Gleichungen (136) und (137) sieht man, dass sich V und v oder Q und v in dem gleichen Sinne ändert wie ε. Für ein in das Gerinne sehr genau eingepasstes Rad fällt daher Q und v kleiner aus, als für ein in dieser Hinsicht ungenau ausgeführtes Rad, und wenn $\varepsilon = 0$ gemacht werden könnte, würde der Effekt am günstigsten werden, wenn Q, V und v gleich 0 wären.

Bedingungen des absoluten Maximums des Effektes für ein zu erbauendes Rad.

Damit für bestimmte Werthe von Q und H, E_n möglichst gross ausfällt, sollen wiederum, wie bei den zwei vorhergehenden Rädern h c, γ, e möglichst klein genommen werden, und es gelten auch hier die Bemerkungen, welche früher hinsichtlich dieser Grössen gemacht worden sind. Was die Grössen V, v, δ betrifft, so lassen sich ihre vortheilhaftesten Werthe wiederum analytisch bestimmen, wenn man mit Rücksicht auf die Gleichung (135) die Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\,E_n}{d\,V} = 0\ \frac{d\,E_n}{d\,v} = 0\,,\ \frac{d\,E_n}{d\,\delta} = 0$$

berechnet, und aus denselben V, v, δ aufsucht.

Vernachlässigt man in der Gleichung (133) die 3 letzten Glieder, substituirt für b den Werth, welcher sich aus (135) ergibt, und setzt der Kürze wegen:

$$\varepsilon \sqrt{2\,g\,e}\left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26\,\frac{Q}{a\,b\,v}\right]\frac{2\,g}{0\,4\,2} = k\ .\ \ . \quad (139)$$

so erhält man:

$$E_n = 1000\,Q\left\{H - \frac{V^2}{2g} - h_3 + \frac{v\,(V\cos\delta - v)}{g}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{e}{2}\sin.\gamma + c\sin.(\gamma - \beta) - s\right) - k \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin.\delta}\ \frac{H - \frac{V^2}{2g}}{V^3}\right\}$$

in welcher Gleichung alle Grössen von einander unabhängig sind.

Hieraus findet man:

$$\frac{d\,E_n}{d\,\delta} = 0 = -\frac{v\,V}{g}\sin.\delta + k\sin.\gamma\,\frac{H - \frac{V^2}{2g}}{V^3}\,\frac{\cos\delta}{\sin.^2\delta}$$

oder:

$$\frac{\sin.^3\delta}{\cos.\delta} = g\,k\,\sin.\gamma\,\frac{H - \frac{V^2}{2g}}{v\,V^4} \quad . \; . \; . \; . \quad (140)$$

ferner findet man:

$$\frac{d\,E_n}{d\,V} = 0 = \frac{v\cos.\delta - V}{g} - k\left[\frac{-V^3\frac{V}{g} - \left(H - \frac{V^2}{2g}\right)3\,V^2}{V^6}\right]\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}$$

oder:

$$(V - v\cos.\delta)\sin.\delta = g\,k\,\sin.\gamma\left[3\,.\,\frac{H - \frac{V^2}{2g}}{V^4} + \frac{1}{g\,V^2}\right] (141)$$

endlich ist:

$$\frac{d\,E_n}{d\,v} = 0 = V\cos.\delta - 2\,v \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (142)$$

Bei diesen Differenziationen wurde k als constant behandelt, weil $\frac{Q}{a\,b\,v}$ weniger a als eine besondere von den übrigen Grössen unabhängige Grösse angesehen werden kann.

Durch Division von (140) und (141) findet man:

$$\frac{(V - v\cos.\delta)\cos.\delta}{\sin.^2\delta} = v\left[3 + 2\,\frac{\frac{V^2}{2g}}{H - \frac{V^2}{2g}}\right]$$

und wenn aus dieser Gleichung v vermittelst (142) eliminirt wird, folgt nach einigen einfachen Reduktionen

$$\sin.^2\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{H - \frac{V^2}{2g}}{H}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (143)$$

Durch Elimination von v aus (140) und (142) findet man ferner:

$$\sin.^3 \delta = 2 \text{ g k } \sin. \gamma \frac{H - \frac{V^2}{2g}}{V^5}$$

Eliminirt endlich δ aus diesen zwei letzten Gleichungen, so erhält man zur Bestimmung von V folgende Gleichung:

$$\left(H - \frac{V^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} V^5 = 2^{\frac{5}{2}} \text{ g . k } \sin. \gamma \, H^{\frac{3}{2}} \quad . \quad (144)$$

Ist V bestimmt, so ergibt sich ferner aus (143)

$$\sin. \delta = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{H - \frac{V^2}{2g}}{H}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (145)$$

und aus (142)

$$v = \frac{1}{2} V \cos. \delta$$

endlich aus (135)

$$\frac{b}{Q} = \frac{2 g}{0{\cdot}4\,2} \frac{\sin \gamma}{\sin. \delta} \cdot \frac{1}{V^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

Die folgenden Tabellen enthalten die Dimensionen und die Effekte von 4 Rädern, welche nach den Gleichungen (144), (145), (146 und (133) berechnet worden sind Bei dieser Berechnung wurden zuerst die Werthe von H angenommen, dann wurden die Winkel γ so gewählt, dass R für jedes der 4 Räder ungefähr $= 3^m$ ausfiel. Zur Berechnung von a wurde $\frac{a\,b\,v}{Q} = 2$ gesetzt. s wurde durch eine Zeichnung der Räder gefunden. Bei der Berechnung der Effekte würde $e = 0{\cdot}5$, $f = 0{\cdot}1$, $Q = 1$ angenommen. Um auch hier wiederum zu zeigen, wie wichtig es ist, dass $h = 0$ gemacht werde, ist in den letzten 2 horizontalen Columnen der Nutzeffekt der Räder sowohl für $h = 0$ als auch für $h = \frac{a}{2}$ berechnet.

I. Tabelle.

Nr. des Rades.	H	V	v	δ	γ	$\frac{b}{m}$	a	s	$H-\frac{V^2}{2g}$
I.	2	2·81	1·089	39^0+12	60^0	2·88	0·638	0·22	1·597
II.	2·5	2·98	1·145	$39^0+47'$	70^0	2·59	0·674	0·20	2·047
III.	3	3·12	1·191	$40^0+14'$	90^0	2·38	0·705	0·13	2·503
IV.	4	3·20	1·203	41^0+15	120^0	1·87	0.889	0·10	3·478

II. Tabelle.

Effekte in Procenten.	I.	II.	III.	IV.
Ein- und Austritt . . .	0·139	0·141	0·157	0·123
Entweichen des Wassers .	0·056	0·057	0·058	0·061
Luftwiderstand	0·005	0·004	0·004	0·003
Reibung des Wassers . .	0·002	0·002	0·002	0·001
Zapfen-Reibung	0·012	0·015	0·016	0·019
Summe der Effektverluste	0·214	0·219	0·237	0·207
Nutzeffekte wenn $h = 0$.	0·786	0·787	0·763	0·793
Nutzeffekte wenn $h = \frac{a}{2}$.	0·906	0·718	0·704	0·738

Diese Resultate weichen zwar nicht weit von denjenigen ab, welche früher Tabelle I und II. für die Ueberfallsräder erhalten wurden, im Allgemeinen stellen sich aber doch die Coulissenräder vortheilhafter dar, denn die Radbreiten sind etwas kleiner, die Geschwindigkeiten sind grösser, und die Effekte sind im Allgemeinen etwas günstiger.

Für die kleineren Gefälle bis zu $\gamma = 90^0$ erscheinen beide Anordungen ungefähr gleich gut, wenn aber für grössere Gefälle $\gamma > 90^0$ genommen werden muss, damit das Rad nicht zu gross ausfällt, so ist das Coulissenrad entschieden dem Ueberfallsrade vorzuziehen, denn bei diesem letzteren sind die Bedingungen des absoluten Maximums gar nicht mehr realisirbar, so wie $\gamma > 90^0$, weil dann der vortheilhafteste Werth von v negativ ausfällt.

Weil nun das Ueberfallsrad eine etwas einfachere Anordnung ist als das Coulissenrad, so kann man also ersteres für kleinere Gefälle bis zu $2{\cdot}5^m$, letztere aber für grössere Gefälle von 2·5 bis zu $4{\cdot}5^m$ anwenden.

Relatives Maximum für ein zu erbauendes Coulissenrad.

Bei den im Vorhergehenden berechneten Rädern ist die Breite etwas zu gross und die Geschwindigkeit etwas zu klein ausgefallen, man kann daher auch hier wiederum v und b sowie überhaupt die Dimension des Rades annehmen, und die Grössen V und δ, welche auf den Preis des Rades keinen Einfluss haben, möglichst vortheilhaft zu bestimmen suchen.

Differenzirt man die Gleichung (133) in Bezug auf δ und V, und vernachlässigt dabei in dem Gliede, welches sich auf das Entweichen des Wassers bezieht, $\frac{V^2}{2g}$ gegen H, so findet man:

$$d E_n = 0 = -\frac{V v}{g} \sin. \delta d \delta + \frac{v \cos. \delta - V}{g} d V$$

Differenzirt man ferner die Gleichung (135) in Beziehung auf dieselben Grössen und setzt $d Q = 0$, weil von dem Effekt für eine bestimmte Wassermenge die Rede ist, so findet man

$$d Q = 0 = 3 V^2 \sin. \delta d V + V^3 \cos. \delta d \delta$$

Aus diesen zwei Differenzialausdrücken folgt:

$$V = v \frac{1 + 2 \sin^2 \delta}{\cos. \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

und wenn man diesen Werth in (135) einführt, ergibt sich zur Bestimmung des vortheilhaftesten Werthes von δ folgende Gleichung:

$$\frac{2 g Q \sin. \gamma}{0{\cdot}42 \, b \, v^3} = \sin. \delta \left(\frac{1 + 2 \sin.^2 \delta}{\cos. \delta.} \right)^3 \quad . \quad . \quad (148)$$

Ist dieser Werth von δ bestimmt, so gibt dann (147) den correspondirenden Werth von V.

Nimmt man für γ zwei Winkel an, die sich zu 180° ergänzen, (z. B. 60 und 120°), so gibt die Gleichung (148) für beide gleich grosse Werthe für δ, und da V nicht von γ, sondern nur von δ abhängt, so entsprechen jenen zwei Werthen von γ auch gleich grosse Werthe von V. Hieraus geht hervor, dass es jederzeit zwei Anordnungen von Rädern gibt, die hinsichtlich der vortheilhaftesten Werthe von V und δ übereinstimmen.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten die Resultate über mehrere, nach den vorhergehenden Formeln berechnete Räder. Dabei ist für alle Räder

$$R=3,\ e=0{\cdot}5^{m},\ \frac{a\,b\,v}{Q}=2,\ v=1{\cdot}5,\ b=2,\ Q=1,\ f=0{\cdot}1$$

angenommen werden. Zur Vereinfachung der Rechnung wurde ferner der Werth von δ angenommen, und der entsprechende Werth von γ gesucht. Die rückschlächtigen Anordnungen sind nicht berechnet worden.

Tabelle über die Abmessungen.

Nr.	δ	γ	V	$\frac{V^2}{2g}$	H	a	s
I.	30	$22^0+13'$	2·60	0·344	0·567	0·666	0·12
II.	32	$28^0+48'$	2·76	0·383	0·754	0·666	0·15
III.	34	$37^0+47'$	2·94	0·441	1·070	0·666	0·19
IV.	36	$51^0+21'$	3·14	0·503	1·629	0·666	0·23
V.	37	$61^0+44'$	3·24	0·535	2·114	0·666	0·20
VI.	38	$84^0+\ 4'$	3·35	0·572	3·262	0·666	0·17
VII.	38^0+16	90^0	3·38	0·582	3·582	0·666	0·14

Tabelle über die Effekte.

Effekte in Procenten.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Ein- und Austritt . . .	0·359	0·298	0·244	0·190	0·184	0·146	0·144
Entweichen	0·028	0·034	0·042	0·048	0·050	0·057	0·059
Luftwiderstand	0·033	0·025	0·018	0·012	0·009	0·006	0·005
Wasserreibung	0·004	0·005	0·004	0·004	0·004	0·003	0·003
Zapfenreibung	0·010	0·011	0·013	0·016	0·018	0·023	0·024
Summe der Effektverluste	0·434	0·373	0·321	0·270	0 265	0·235	0·235
Nutzeffekte wenn $h=0$	0·566	0·627	0·679	0·730	0·735	0.765	0·765
Nutzeffekte wenn $h={}^1/_2a$	0·283	0·406	0·523	0·628	0·656	0·714	0·718

Das rückschlächtige Zellenrad mit Coulisseneinlauf und Kreisgerinne.

Gleichungen für die Wassermenge, den Halbmesser des Rades und für den Nutzeffekt.

Für dieses Rad ist offenbar wie bei dem vorhergehenden:

$$Q = \frac{0 \cdot 42}{2g} \cdot b \, \frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,\gamma} V^3 \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{b\,v} - h}{1 - \cos.\,\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Zur Berechnung des Nutzeffektes hat man ferner:
Effektverlust, welcher bei dem Eintritt entsteht:

$$1000 \frac{Q}{2g} \left\{ V^2 - 2\,V\,v \cos.\,\delta + v^2 \right\} +$$

$$+ 1000\,Q \left[\frac{e}{2} \sin.\,\gamma + e \sin.\,(\gamma - \beta) - s \right]$$

Effektverlust, welchen das Entweichen des Wassers durch den Spielraum an den Zellenkanten verursacht.

$$464\,\varepsilon\,R\,\sqrt{2\,g\,e}\,\frac{Q}{a\,b}$$

Effektverlust, welcher bei dem Austritt des Wassers entsteht:

$$1000\,Q \left\{ \frac{v^2}{2g} + \tfrac{1}{2}\,h \right\}$$

Effektverlust, welcher durch die Reibung des Wassers an dem Gerinne entsteht

$$0 \cdot 366\,b\,S\,v^3$$

Effektverlust, welchen die Zapfenreibung verursacht

$$7 \cdot 63\,\frac{v}{R}\,f\,N_n\,\sqrt{N_n}$$

Der Luftwiderstand kann bei einem Zellenrade vernachlässigt werden; wir erhalten daher für den Nutzeffekt folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} E_n = 1000\ Q & \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2}\,h + \frac{v\,(V \cos.\ \delta - v)}{g} \right\} \\ & - 1000\ Q \left[\frac{e}{2} \sin.\ \gamma + c \sin.\ (\gamma - \beta) - s \right] \\ & - 464\ \varepsilon\ \sqrt{2ge}\ R\ \frac{Q}{a\,v} \\ & - 0{\cdot}366\ b\,S\,v^3 \\ & - 7{\cdot}63\ \frac{v}{R}\ f\,N\,\sqrt{N}. \end{aligned}\right\} \quad (151)$$

Vergleichung zwischen Schaufelrädern und Zellenrädern.

Der Effektverlust, welcher bei dem Eintritt des Wassers entsteht, ist bei einem Zellenrade grösser; jener, welcher durch das Entweichen des Wassers entsteht, ist dagegen kleiner, als bei einem Schaufelrade.

Denkt man sich zwei Anordnungen von Rädern, die sich nur allein darin unterscheiden, dass das eine mit radialen Schaufeln, das andere aber mit Zellen versehen ist, in jeder andern Hinsicht aber übereinstimmen, so ist nun die Frage, welches von beiden den besseren Effekt geben wird?

Unter dieser Voraussetzung haben die Grössen **H, Q, V, v, b, R,** γ, **a,** δ, **e** für beide Räder ganz übereinstimmende Werthe. Wenn wir die Glieder, welche sich auf den Luftwiderstand und auf die Wasserreibung beziehen, vernachlässigen, so findet man, dass der Nutzeffekt des Schaufelrades grösser ausfällt, als jener des Zellenrades, so lange

$$Q \left\{ \frac{e}{2} \sin.\ \gamma - s \right\} + \varepsilon\, b \sqrt{2ge} \left[H - \frac{V^2}{2g} \right] \left[0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{a\,b\,v} \right] <$$

$$Q \left\{ \frac{e}{2} \sin.\ \gamma + c \sin.\ (\gamma - \beta) - s_1 \right\} + 0{\cdot}464 .\ \varepsilon .\ R .\ \sqrt{2ge} \cdot \frac{Q}{a\,v}$$

wobei für das Zellenrad s_1 statt s gesetzt wurde, weil unter den gemachten Voraussetzungen die Werthe von s für die zwei Anordnungen nicht genau übereinstimmen können.

Setzt man in dem zweiten Gliede dieser Gleichung für $H - \frac{V^2}{2g}$ den Annäherungswerth, welcher sich aus der Gleichung

$$R = \frac{H - \frac{V^2}{2g}}{1 - \cos.\gamma}$$

ergibt, so findet man aus derselben:

$$R < \frac{Q}{\varepsilon b \sqrt{2ge}} \frac{c \sin.(\gamma - \beta) + s - s_1}{\left(0{\cdot}43 + 0{\cdot}26 \frac{Q}{abv}\right)(1 - \cos.\gamma) - 0.464 \frac{Q}{abv}}$$

als Bedingung, bei deren Erfüllung das Schaufelrad dem Kübelrade vorzuziehen ist. Um also in einem vorliegenden Falle zu entscheiden, ob ein Rad mit Schaufeln oder mit Zellen versehen werden soll, muss man den Ausdruck rechter Hand des Zeichens $<$ berechnen. Findet man einen Werth, der grösser als **R**, so sind Schaufeln zu nehmen, fällt der Werth kleiner als **R** aus, so sind Zellen zu nehmen; findet man endlich einen Werth gleich **R**, so ist es gleichgültig, ob man Zellen oder Schaufeln nimmt. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass bei kleinen Gefällen bis zu 5^m die Schaufeln, bei grösseren Gefällen von 5^m und darüber die Zellen den Vorzug verdienen.

Bedingungen für das absolute Maximum des Nutzeffektes eines Zellenrades mit Kreisgerinne und Coulisseneinlauf.

Vernachlässigt man die zwei letzten Glieder des Ausdrucks für den Nutzeffekt, setzt für c seinen Werth

$$c = \frac{a}{2 \sin.\beta}$$

und für **R** den Annäherungswerth

$$R = \frac{H}{1 - \cos.\gamma}$$

welcher sich aus (150) ergibt, wenn man $-\frac{V^2}{2g} + \frac{Q}{bv} - h$ gegen **H** vernachlässigt, so findet man:

$$E_n = 1000\,Q\left\{H - \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2}h + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g} - \right.$$

$$\left.\left[\frac{e}{2}\sin.\gamma + \frac{a}{2}\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - s\right] - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2ge}}{a\,v}\,\frac{H}{1-\cos.\gamma}\right\}$$

Um aus diesem Ausdruck die Bedingungen des grössten Effekts abzuleiten, erlauben wir uns wiederum, s als eine constante Grösse zu behandeln Dadurch entsteht zwar ein kleiner Fehler, denn s ist nicht constant, sondern ist vielmehr eine sehr zusammengesetzte und sogar discontinuirliche Function von sehr vielen Grössen, deren Berücksichtigung zu enorm weitläufigen mit der geringen Wichtigkeit der Sache in keinem Verhältniss stehenden Rechnungen führen würde. Wenn wir aber von s absehen, so können wir alle in der letzten Gleichung erscheinenden Grössen als unabhängig von einander betrachten, und es folgt dann zunächst, dass für den grössten Effekt h, δ und e möglichst klein oder gleich null genommen werden sollen, was nur hinsichtlich h möglich ist.

Zur Berechnung der vortheilhaftesten Werthe der übrigen Grössen findet man, wenn man die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{dE_n}{da},\quad \frac{dE_n}{dv},\quad \frac{dE_n}{aV},\quad \frac{dE_n}{d\gamma},$$

berechnet und sie gleich Null setzt, folgende Ausdrücke:

$$a^5 = \frac{8}{g}(1+\sin.{}^2\delta)\left[\frac{\sin.\beta}{\sin.(\gamma-\beta)}\right]^3\left[\frac{0.464\ .\ \varepsilon\sqrt{2ge}\ .\ H}{1-\cos.\gamma}\right]^2$$

$$v = \frac{0{.}928\ \varepsilon\sqrt{2ge}\ .\ H\ \sin.\beta}{a^2\,[1-\cos.\gamma]\,\sin.(\gamma-\beta)}$$

$$V = v\cos.\delta.$$

$$\frac{e}{a}\cos.\gamma + \text{cotg.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{cotg.}\,\beta$$

Ein einziges numerisches Beispiel wird genügen, um zu beweisen, dass diese Relationen zu practisch unbrauchbaren Constructionsverhältnissen führen.

Nehmen wir an $\frac{a}{e} = 1$, $\beta = 26^\circ$, so findet man aus der letzten dieser Gleichungen für den vortheilhaftesten Werth von γ

$$\gamma = 63^\circ + 30'$$

Diesem Winkel entspricht aber ein sehr grosser Radhalbmesser, denn nach der früheren Vergleichung zwischen Zellen- und Schaufelrädern sind die ersteren nur bei grösseren Gefällen empfehlenswerth; wir müssen also, wenn von einem Zellenrade die Rede ist, ein ziemlich grosses Gefälle von wenigstens 5^m annehmen; dann wird aber: für

$$H = 5^m$$

$$\gamma = 63^0 + 30^1$$

$$R = \frac{H}{1 - \cos.\gamma} = 9^m$$

Man muss also zunächst auf die Realisirung der Gleichung für γ verzichten, was übrigens von keinem grossen Nachtheil ist, indem der Werth von γ, so lange derselbe innerhalb gewisser Grenzen bleibt, nur einen unbedeutenden Einfluss auf den Effekt hat. Aber selbst dann, wenn man für γ einen praktisch brauchbaren Werth, z. B. 126^0 annimmt, wird man durch die übrigen Gleichungen auf unzulässige Resultate geführt. Setzt man z. B.

$$\gamma = 126,\ \beta = 26,\ \delta = 20,\ \varepsilon = 0{\cdot}02,\ H = 6{\cdot}35,\ \sqrt{2ge} = 3,$$

so findet man:

$$R = 4,\ a = 0{\cdot}25,\ v = 1{\cdot}51,\ V = 1{\cdot}419,\ \frac{b}{Q} = 38$$

und man sieht, dass das Rad eine ganz unverhältnissmässige, gar nicht ausführbare Breite erhielte.

Da nun die Bedingungen des absoluten Maximums nicht realisirbar sind, so wollen wir nun versuchen, durch relative Maxima zu guten und brauchbaren Regeln zu kommen.

Erstes relatives Maximum.

Suchen wir zuerst die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Rades von gegebenen Abmessungen. In diesem Falle sind in dem Ausdruck für den Effekt alle Grössen bis auf v gegeben, und man findet, dass für den vortheilhaftesten Werth derselben

$$\frac{V \cos.\delta - 2v}{g} + \frac{0{\cdot}461 . \varepsilon \sqrt{2ge} . H}{a v^2 (1 - \cos.\gamma)} = 0$$

ist, woraus v durch Versuchen gefunden werden kann. Man sieht, dass $v > \frac{1}{2}\ V \cos.\delta$ ausfällt.

Es sei z. B.

$V=3,\ \delta=20^{0},\ \varepsilon=0{\cdot}02,\ e=0.4,\ H=4,\ \gamma=120^{0},\ a=0{\cdot}4,$

und dann findet man: $v=1{\cdot}7^{m}$.

Bemerkenswerth ist, dass der Werth von $\frac{E_n}{1000\ Q\ H}$ · innerhalb sehr weit von einander entfernten Grenzen unabhängig von Q ist. Ein rückschlächtiges Zellenrad mit Kreisgerinne gibt also bei grösseren und kleineren Wassermengen immer einen gleich günstigen Effekt. Diess gilt aber nur so lange, als die Füllung des Rades nicht diejenige Grenze erreicht hat, bei welcher durch die Luftspalten der Zellen Wasser ausspritzt.

Zweites relatives Maximum.

Betrachten wir H, Q . b, γ, δ, β als gegeben, so ergibt sich zunächst:

$$V=\sqrt[3]{\frac{2g}{0{\cdot}42}\cdot\frac{Q}{b}\,\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}}$$

es blieben also in der Gleichung für den Effekt nur noch v und a zu bestimmen.

Berechnet man die Differenzialquotienten $\frac{dE_n}{dv}$, $\frac{dE_n}{da}$, und setzt dieselben gleich Null, so erhält man zwei Gleichungen, aus welchen sich zur Berechnung der vortheilhaftesten Werthe von a und v ohne Schwierigkeit folgende Ausdrücke ableiten lassen:

$$(2\,v-V\cos.\delta)^{2}v^{3}=\tfrac{1}{2}\,g^{2}\,0{\cdot}464\,\varepsilon\,\sqrt{2ge}\,.\,H.\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta(1-\cos.\gamma)}$$

$$a=\frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\,g\,\sqrt{2ge}\,H\,.}{(2\,v-V\cos.\delta)\,v^{2}\,(1-\cos.\gamma)}$$

Nehmen wir an:

$$\frac{Q}{b}=\frac{1}{44},\ \gamma=120^{0},\ \delta=20^{0},\ \beta=26,\ e=0{\cdot}4,\ \varepsilon=0{\cdot}02,\ H=5^{m}$$

so findet man:

$$V=3,\ v=2{\cdot}01,\ a=0{\cdot}21,\ \frac{a\,b\,v}{Q}=1{\cdot}86$$

Drittes relatives Maximum.

Man kann die Bedingung stellen, dass für eine gegebene Füllung $\left(\frac{a\,b\,v}{Q}\right)$ des Rades, die Grössen v V, a b möglichst vortheilhaft bestimmt werden sollen.

Die Gleichungen, welche zur Lösung dieser Aufgabe führen, sind:

$$E_n = 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - \tfrac{1}{2} h_2 + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{e}{2}\sin.\gamma + \frac{a}{2}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - s\right) - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e\,R}}{m\,Q}\,b \right\}$$

$$a\,b\,v = m\,Q$$

$$b\,V^3 = \frac{2\,g}{0{\cdot}42}\cdot Q\,\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}$$

wobei m die Zahl bezeichnet, durch welche die Füllung des Rades ausgedrückt wird.

Differenzirt man diese 3 Gleichungen, indem man dabei **H**, **Q**, h, δ, e, γ, **R**, m als constant behandelt, so findet man:

$$0 = \left(-\frac{V}{g} + \frac{v\cos.\delta}{g}\right) d\,V + \frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g}\,d\,v -$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta}\,da - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e\,.\,R}}{m\,Q}\,db$$

$$a\,b\,d\,v + a\,v\,d\,b + v\,b\,d\,a = 0$$

$$V\,d\,b + 3\,b\,d\,V = 0$$

Aus den zwei letzteren Gleichungen d V und d a gesucht, und die erste eingeführt, und die Faktoren von d b und d v gleich Null gesetzt, so findet man folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g} + \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{v}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{V - v\cos.\delta\,V}{g\,b} + \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{b}\,\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e\,.\,R}}{m\,Q} = 0$$

Aus diesen Gleichungen findet man ohne Schwierigkeiten zur Bestimmung von v, V, a, b folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{4\left(2-\dfrac{V}{v}\cos\delta\right)\sin.\beta}{m\ \sin.(\gamma-\beta)}=0{\cdot}42\cdot\dfrac{\sin.\delta}{\sin.\gamma}\left(\dfrac{V}{v}\right)^{3} \\[2ex]
V^{5}=\dfrac{0{\cdot}464\,.\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}\,.\,R\,.\,2\,.\,g^{2}\,.\,\sin.\delta}{0{\cdot}42\ m\ \sin.\delta\left[\frac{1}{3}\left(1-\dfrac{v}{V}\cos.\delta\right)-\dfrac{v}{V}\left(\cos.\delta-2\dfrac{v}{V}\right)\right]} \\[2ex]
a=\dfrac{2\,v\,[2\,v-V\cos.\delta]\sin.\beta}{g\ \sin.(\gamma-\beta)} \\[2ex]
b=\dfrac{m\,Q}{a\,v}
\end{array}\right\}(152)$$

Die erste Gleichung bestimmt das Verhältniss $\frac{V}{v}$, und dieses ist unabhängig von dem Entweichen des Wassers und von der Wassermenge Q. Ist $\frac{V}{v}$ bekannt, so gibt die zweite Gleichung V, und bestimmt sich v durch $v = V\,.\left(\frac{v}{V}\right)$. Der Werth von V hängt, wie man sieht, von dem Entweichen des Wassers ab; jedoch nur sehr wenig, denn V ist der fünften Wurzel aus ε und der zehnten Wurzel aus e proportional.

Wenn $\varepsilon = 0$ gemacht werden könnte, würde $V = 0$ und folglich auch $v = 0$, $a = 0$ und $b = \infty$. Grosse Breite, geringe Tiefe und langsamer Gang sind demnach die Bedingungen eines hinsichtlich des Entweichens von Wasser sehr genau gearbeiteten Kübelrades. Setzen wir, um ein nummerisches Beispiel zu berechnen:

$$\delta = 20,\ \beta = 26,\ \gamma = 120^{0},\ R = 4,\ m = 2,\ \varepsilon = 0{\cdot}02\ \ e = 0{\cdot}4$$

so geben die Gleichungen (152)

$$\frac{V}{v} = 1{\cdot}478,\ V = 2{\cdot}681,\ v = 1{\cdot}813,\ a = 0{\cdot}179,\ \frac{b}{Q} = 6{\cdot}15$$

Die Breite ist etwas grösser, die Tiefe bedeutend kleiner und der Gang etwas schneller, als bei den bestehenden Rädern.

Viertes relatives Maximum.

Wir wollen noch die Bedingungen stellen, dass nebst einer bestimmten Füllung, zwischen Breite und Tiefe ein gewisses Verhältniss statt finden soll, und unter dieser Voraussetzung, die unbestimmt bleibenden Grössen V, v, a, möglichst vortheilhaft zu bestimmen suchen.

In diesem Falle hat man, nebst den zwei Gleichungen für den Effekt und für die Wassermenge, noch die Bedingungen

$$\frac{b}{a} = n, \quad \frac{a\,b\,v}{Q} = m$$

zu beachten. Differenzirt man diese 4 Gleichungen, indem man nur allein a, b, v, V als veränderlich betrachtet, und setzt wegen des Maximums $d\,E_n = 0$, so erhält man folgende Differenzialausdrücke:

$$\left(-\frac{V}{g} + \frac{v\cos.\delta}{g}\right) d\,V + \left[\frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g} + \frac{0{\cdot}446.\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}\,R}{a\,v^2}\right] d\,v -$$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} - \frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2\,g\,e}.R}{a^2\,v}\right] d\,a = 0$$

$$b\,d\,a = a\,d\,b$$

$$a\,b\,d\,v + a\,v\,d\,b + v\,b\,d\,a = 0$$

$$V\,d\,b + 3\,b\,d\,V = 0$$

Aus den 3 letzten Gleichungen folgt:

$$d\,b = 3\,\frac{b}{V}\,d\,V,\; d\,a = \frac{3\,a}{V}\,d\,V,\; d\,v = -6\,.\,\frac{v}{V}\,d\,V$$

Führt man diese Werthe in den ersten Differenzialausdruck ein, so findet man folgende Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{V}{g}-\frac{v\cos.\delta}{g}+6.\frac{v}{V}\frac{V\cos\delta-2v}{g}+\frac{3}{2}\frac{a}{V}\frac{\sin.(\gamma-\beta)}{\sin.\beta} \\ \qquad\qquad +3\frac{0{\cdot}464\,\varepsilon\sqrt{2ge}}{a\,v\,V}=0 \\ \text{welche in Verbindung mit:} \\ \qquad\qquad a=\frac{Q}{n}\frac{2g}{0{\cdot}42}\frac{\sin.\gamma}{\sin.\delta}\frac{1}{V^3} \\ \text{und} \\ \qquad\qquad v=\frac{m\,Q}{n\,a^2}\end{array}\right\}(153)$$

die Werthe von a, v, V bestimmen. Das Verfahren der Berechnung ist folgendes. Man nimmt zuerst V versuchsweise an, berechnet den Werth von a, dann den Werth von v, und sieht dann nach, ob dieser so erhaltene Werth der ersten der Gleichungen (153) genügt. Ist diess der Fall, so ist man am Ziele, wo nicht, so muss man für V eine zweite Annahme machen, und die gleichen Operationen wiederholen.

Setzt man

$$\beta=26,\ \gamma=120,\ R=4,\ m=3$$
$$n=7\quad Q=0{\cdot}5\quad \delta=20$$

so findet man auf dem bezeichneten Wege

$$V=3{\cdot}12,\ a=0{\cdot}322,\ v=2{\cdot}06,\ b=2{\cdot}25^{m}$$

Das oberschlächtige Rad.

Gleichung für den Effekt.

Für dieses Rad darf man ohne merklichen Fehler $\gamma = 180^0$ setzen, und dann wird

$$\frac{e}{2}\sin.\gamma+e\sin.(\gamma-\beta)-s=a\left(1-\frac{Q}{a\,b\,v}\right)$$

Diese Gleichung ist um so genauer richtig, je grösser das Rad ist, sie ist aber auch bei kleineren Rädern zulässig, denn der Schwerpunkt der Wassermasse senkt sich während der Füllung einer Zelle immer nur wenig. Berücksichtiget man nebst den so eben aufgestellten Gleichungen den Seite (77) aufgefundenen Ausdruck für den Effektverlust, welcher durch das allmählige Entleeren der Zellen entsteht, so wie auch den Verlust durch die Zapfenreibung, so findet man für den Nutzeffekt folgenden Werth:

$$E_n = 1000\,Q \left\{ H - \frac{V^2}{2g} - h + \frac{v(V\cos.\delta - v)}{g} - a\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{a\,b\,v}\right) - R\left[0{\cdot}50 - 0{\cdot}07\frac{a\,b\,v}{Q}\right] \right\} - 7{\cdot}63\,\frac{v}{R}\,f\,N\sqrt{N} \quad (154)$$

in welcher Gleichung alle Grössen unabhängig von einander sein können.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Rades von gegebenen Abmessungen.

Differenzirt man diesen Ausdruck nach v und setzt $\frac{d\,E_n}{d\,v} = 0$, so findet man zur Bestimmung der vortheilhaftesten Geschwindigkeit eines oberschlächtigen Rades von gegebenen Abmessungen folgende Gleichung:

$$0 = 1000\,Q\left\{\frac{V\cos.\delta - 2\,v}{g} - \frac{1}{2}\frac{Q}{b\,v^2} + 0{\cdot}07\,R\,.\,\frac{a\,b}{Q}\right\} - 7{\cdot}63\,f\frac{N\sqrt{N}}{R}.$$

numerische Rechnungen zeigen, dass v immer etwas grösser als $\frac{1}{2}$ V cos. δ ausfällt.

Bedingungen des absoluten Maximums des Nutzeffektes.

Setzt man in der Gleichung (154)

$$h = 0,\ V = 0,\ v = 0,\ \delta = 0,\ a = 0,\ m = 7$$

so wird

$$E_n = 1000\,Q\,H$$

Diese Annahmen würden daher die Bedingungen ausdrücken, bei deren Erfüllung der Nutzeffekt gleich dem absoluten Effekt der Wasserkraft wäre; sie sind aber nicht realisirbar, indem $a = 0$ und $v = 0$ zu einer unendlich grossen Breite b führt, man muss sich also mit einem relativen Maximum begnügen, welches zu praktisch brauchbaren Construktionsverhältnissen führt.

Relatives Maximum des Nutzeffektes.

Für ein zu erbauendes Rad kann man die Bedingungen stellen: 1) dass das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit V das Rad erreiche; 2) dass Breite und Tiefe des Rades in einem gewissen Verhältnisse $\frac{b}{a} = n$ zu einander stehen sollen; 3) dass die Füllung $\frac{a\,b\,v}{Q}$ des Rades einen gewissen Werth $= m$ habe.

Unter dieser Voraussetzung bleiben nur noch a und v zu bestimmen übrig.

Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{a} &= n \\ \frac{a\,b\,v}{Q} &= m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

Folgt durch Elimination von b

$$a^2 v = \frac{m}{n}\, Q$$

Differenzirt man diese Gleichungen in Bezug auf a und v, und dividirt das Resultat durch a, so findet man:

$$2\,v\,d\,a + a\,d\,v = 0 \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

Vernachlässigt man in dem Ausdruck für den Nutzeffekt das Glied, welches sich auf die Zapfenreibung bezieht, substituirt für $\frac{a\,b\,v}{Q}$ den Werth $= m$ und differenzirt hierauf in Bezug auf a und v, so findet man, weil für die vortheilhaftesten Werthe dieser Grössen $d\,E_n = 0$ werden muss.

$$0 = \frac{V \cos.\delta - 2\,v}{g}\, d\,v - \left(1 - \frac{1}{2\,m}\right) d\,a \quad . \quad (157)$$

Aus den Gleichungen (155, 156, 157) findet man:

$$v = \frac{1}{2} V \cos.\delta + \frac{g}{4}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{v} \cdot \sqrt{\frac{mQ}{nv}}$$

hat man aus dieser Gleichung durch Probiren v bestimmt, so findet man weiter:

$$a = \sqrt{\frac{mQ}{nv}}$$

$$b = n a$$

Es sei:

$$V = 3, \ \delta = 10^{0}, \ g = 9{\cdot}81, \ m = 3$$

$$Q = 0{\cdot}25, \ n = 7$$

dann findet man:

$$v = 1{\cdot}76^{m}, \ a = 0{\cdot}248^{m}, \ b = 1{\cdot}74^{m}.$$

Genauere Theorie des Poncelet'schen Rades.

Aufstellung der Grundgleichungen.

Bei dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Wissenschaften ist es ganz unmöglich, eine vollständige genaue Theorie dieses Rades aufzustellen, indem die wechselseitigen Einwirkungen der Wassertheilchen auf einander, und die daraus entstehenden Modifikationen ihrer Bewegungen so zusammengesetzt sind, dass sie durch keine von dem bis jetzt erfundenen Rechnungsmethoden bestimmt werden können. Man ist daher gezwungen, sich mit einer Annäherungstheorie zu begnügen, indem man die Bewegung und Wirkung eines isolirten Wassertheilchens bestimmt, und die sich auf diesem Wege ergebenden Resultate für jedes andere Wassertheilchen, mithin für die ganze Wassermasse, welche dem Rade zuströmt, gelten lässt. Wahrscheinlich wird man der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man die Bewegung eines Theilchens von dem mittleren Wasserfaden bestimmt.

Es sei also Fig. (35) A_0 der Punkt, in welchem der mittlere Wasserfaden in die Schichte des dem Rade zufliessenden Wassers den Umfang des Rades durchschneidet.

$A_0 Z_0$ die Position einer Schaufel in dem Momente, in welchem ein Theilchen des mittleren Wasserfadens bei A_0 eintritt.

A Z irgend eine allgemeine Position der gleichen Schaufeln; nach Verlauf der Zeit t, die von dem Augenblicke an gezählt werden soll, in welchem das Theilchen bei A_0 eintrat.

M der Punkt, in welchem sich das Theilchen zur Zeit t befindet.

A_1 Z_1 die Position der Schaufel in dem Augenblick, wenn das Theilchen wiederum bei A_1 austrat.

o k die durch den Mittelpunkt des Rades gezogene Vertikallinie.

$\widehat{A_0 O K} = \gamma$, $\widehat{K O A_1} = \gamma_1$, $\widehat{A O M} = \varphi$, $\widehat{A O_0 t} = \omega t$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades bezeichnet.

$O A_0 = O A = A O_1 = R$ der äussere Halbmesser des Rades.

a die radiale Dimension der Radkrone, d. h. die Differenz zwischen dem äussern und dem innern Halbmesser des Rades.

b Die Breite des Rades.

$\beta = \widehat{D A_0 F}$ der Winkel, unter welchem eine jede Schaufel den Umfangskreis des Rades durchschneidet.

$C A_0 = V$ der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen bei A_0 ankommt.

Diese Geschwindigkeit ist gleich kleiner oder grösser als $\sqrt{2 g H}$ je nachdem der Punkt A_0 im Niveau des Unterwassers oder über demselben, oder endlich unter demselben liegt.

$D A_0 = D_1 A_1 = v$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades.

$\delta = \widehat{D A_0 C}$ der Winkel, den die Richtungen von V und v mit einander bilden.

λ der Winkel, welchen der, dem Durchschnittspunkt des Gerinnes mit dem Umfangskreis des Rades entsprechende Radius mit der vertikalen Richtung bildet.

$\varDelta$ die Dicke der Wasserschicht unmittelbar vor dem Rade.

ε der Spielraum unter dem Rade zwischen dem Umfangskreis desselben und dem Gerinne.

u_0 u u_1 die relativen Geschwindigkeiten des Wassertheilchens gegen die Schaufel in den Punkten A_0 M und A_1.

w die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel bei A_1 verlässt.

w_1 die absolute Geschwindigkeit, welche das Theilchen bei seinem Austritt nach horizontaler Richtung besitzt.

$r = O M$.

T die Oscillationszeit des Theilchens, d. h. die Zeit von dem Eintritt bis zu dem Austritt des Theilchens.

$S = \widehat{A_0\,A\,A_1}$ der Bogen, welchen ein Punkt von dem Umfang des Rades während der Oscillationszeit beschreibt.

q das Gewicht des Theilchens, dessen Bewegung untersucht wird.

Q das Volumen der Wassermenge, welche pr. 1″ dem Rade zufliesst.

E_n der Nutzeffekt des Rades in Kilogram-Metres.

$g = 9{\cdot}81^m$.

Andere Bezeichnungen, welche nur einem vorübergehenden Zwecke dienen, sollen während der Rechnung angegeben werden.

Die Geschwindigkeit des Theilchens nach der Richtung $F A_0$ ist $V \cos. (\beta - \delta)$ und die Geschwindigkeit des Punktes A_0 nach der gleichen Richtung ist $v \cos. \beta$; die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen in die Schaufel eintritt, ist demnach:

$$u_0 = V \cos. (\beta - \delta) - v \cos. \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

Die Geschwindigkeit des Theilchens senkrecht auf $F\ A_0$ ist $V \sin. (\beta - \delta)$ und der des Punktes A_0 nach der gleichen Richtung ist $v \sin. \beta$. Das Theilchen stösst demnach mit einer Geschwindigkeit $V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta$ gegen die Schaufel, und dadurch entsteht ein Verlust an Wirkung, welcher nach dem Prinzipe von *Carnot* durch

$$\frac{q}{2g}\left[V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

ausgedrückt wird.

Nach Verlauf der Zeit t besitzt das Theilchen gegen die Schaufel eine relative Geschwindigkeit u, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird.

$$u^2 = u_0^2 + (r^2 - R^2)\,\omega^2 + 2g\left[r \cos. (\gamma - \varphi - \omega t) - R \cos. \gamma\right] \quad (160)$$

Das Glied $(r^2 - R^2)\,\omega^2$, welches sich auf die Centrifugalkraft bezieht, nimmt während der aufsteigenden Bewegung fortwährend ab, und während der niedergehenden Bewegung fortwährend zu; die Centrifugalkraft verzögert daher die erstere, beschleunigt die letztere dieser Bewegungen, vermindert daher die Oscillationszeit. Das mit 2 g multiplizirte Glied, welches sich auf das Gewicht des Theilchens bezieht, nimmt im Allgemeinen während der aufsteigenden Bewegung ab, und bei der niedergehenden Bewegung zu.

Da

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

ist, so kann obige Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = u_0^2 + (r^2 - R^2)\,\omega^2 +$$

$$+ 2g\left[r\cos.(\gamma - \varphi - \omega t) - R\cos.\gamma\right] \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Wenn die Form der Kurve **AZ**, mithin eine gewisse Beziehung zwischen r und φ angenommen wird, so kann man vermittelst derselben r und dr durch φ und $d\varphi$ ausdrücken, und dann verwandelt sich die letzte Gleichung in eine Differenzialgleichung zwischen den Variablen φ und t, deren Integrale das Bewegungsgesetz des Theilchens auf der angenommenen Kurve bestimmen würde.

Wenn dagegen ein gewisses Bewegungsgesetz, also eine gewisse Beziehung zwischen r und t oder zwischen φ und t angenommen wird, so kann man t und dt im ersteren Falle durch r und dr, im letzteren Falle durch φ und $d\varphi$ ausdrücken, und dann verwandelt sich die Gleichung (161) in eine Differenzialgleichung, deren Integration zur Kenntniss der Kurve führen würde, welche dem angenommenen Bewegungsgesetz entspricht.

Es ist mir aber nicht gelungen, für die Kurve oder für das Bewegungsgesetz eine Annahme ausfindig zu machen, die zu einer integrirbaren Differenzialgleichung geführt hätte. Ich werde später zeigen, wie man wenigstens annäherungsweise die Bewegung des Theilchens auf der Schaufel, wenn dieselbe nach einem Kreise oder nach einer Cycloide gekrümmt angenommen wird, bestimmen kann; vorläufig wollen wir uns aber um diese Bewegung nicht bekümmern, weil das Gesetz derselben keinen Einfluss hat auf die zunächst zu bestimmende Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel verlässt.

Für den Moment des Austritts ist nämlich: $r = R$, $\varphi = 0$, $\omega t = \gamma + \gamma_1$, demnach erhalten wir aus (160):

$$u_1^2 = u_0^2 + 2gR\,(\cos.\gamma_1 - \cos.\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Die Austrittsgeschwindigkeit u_1 ist also von der Form der Schaufelfläche unabhängig, was nach dem allgemeinen Prinzipe der Wirkung der Kräfte vorauszusehen war.

Die absolute Geschwindigkeit des Theilchens bei seinem Austritt ist nun:

$$w = \sqrt{u_1^2 + v^2 - 2 u_1 v \cos. \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Der Verlust an Wirkung, welcher bei dem Austritt entsteht, ist, wenn $\gamma_1 > \gamma$ ausfällt:

$$\frac{q}{2 g} \cdot w^2 + q \cdot R (\cos. \gamma - \cos. \gamma_1)$$

oder: wenn man für w obigen Werth setzt:

$$\frac{q}{2 g} \left\{ u_1^2 + v^2 - 2 u_1 v \cos. \beta + 2 g R (\cos. \gamma - \cos. \gamma_1) \right\} \quad (164)$$

Die absolute Geschwindigkeit des Theilchens nach horizontaler Richtung ist im Momente seines Austrittes:

$$w_1 = v \cos. \gamma_1 - u_1 \cos. (\gamma_1 + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad (165)$$

Die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch den Spielraum ε unter dem Rade entweicht, ist $Q \frac{\varepsilon}{e}$ und der daraus entstehende Effektverlust ist:

$$1000 \, Q \frac{\varepsilon}{\Delta} \cdot H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

weil dieses Entweichen mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2 g H}$ erfolgt, welche dem ganzen Gefälle entspricht.

Wenn wir nun annehmen, dass die Resultate, welche wir im Vorhergehenden für ein isolirtes Theilchen des mittleren Wasserfadens gefunden haben, auf jedes andere Theilchen der in das Rad eintretenden Wassermenge $Q \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right)$ angewendet werden dürfen, und wenn wir die Effektverluste vernachlässigen, welche aus der wechselseitigen Störung der Wassertheilchen in ihrer Bewegung, und durch die Reibung des Wassers an den Schaufeln entstehen: so erhalten wir nun für den Nutzeffekt des Rades folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
E_n = &+ 1000\,Q\,H \\
&- 1000\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\left(V \sin.(\beta-\delta) - v \sin.\beta\right)^2 \\
&- 1000\frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\left(u_1^2 + v^2 - 2\,u_1\,v \cos.\beta\right) \\
&- 1000\,Q\left(1-\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)R\left(\cos\gamma - \cos.\gamma^1\right) \\
&- 1000\,Q\,\frac{\varepsilon}{\Delta}\,H
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (167)$$

Wir wollen vorläufig noch keine Folgerung aus dieser Gleichung ziehen, sondern erst vollständig sämmtliche Gleichungen aufstellen, welche für die Entwicklung der Theorie des Rades nothwendig sind. Diese noch aufzustellenden Gleichungen hängen aber, wie wir bald sehen werden, von der relativen Bewegung des Theilchens auf der beweglichen Schaufelfläche ab; wir müssen daher zunächst suchen, diese Bewegung wenigstens annähernd zu bestimmen, da eine scharfe Bestimmung, wie schon früher gesagt wurde, nicht angeht.

Ich nehme für die Schaufelkurve ein Bogenstück m n z Fig. (36), einer Cycloide an, welche durch Wälzung eines Kreises vom Durchmesser p auf einer geraden Linie gebildet wird; stelle diese Cycloide so, dass sie 1) durch den Halbirungspunkt n des Bogens $A_0\,A_1$ geht, welcher durch den Ein- und Austritt des Theilchens bestimmt wird; 2) in dem Punkte n den Umkreis des Rades unter einem Winkel β schneidet; 3) dass ihre Grundlinie o y eine horizontale Lage erhält, und erlaube mir nun, die Annahme, dass auf dieser ruhend gedachten Cycloide die Bewegung eines Theilchens nach n nach dem gleichen Gesetze erfolgen werde, wie auf der beweglichen Schaufelfläche n m z, vorausgesetzt, dass bei der ersteren dieser Bewegungen das Theilchen in n eine Geschwindigkeit u_0 besitzt.

Bei dieser Annahme wird, wie man sieht, der Einfluss der Centrifugalkraft auf die Bewegung des Theilchens ganz vernachlässigt; der Einfluss, welchen bei der wirklichen Bewegung die Veränderlichkeit der Stellung der Schaufeln gegen den Horizont hervorbringt, wird aber einigermassen berücksichtiget, indem für die Position der ruhend gedachten Schaufel die mittlere Position der beweglichen Schaufel angenommen wird. Je grösser der Halbmesser des Rades im Vergleiche mit der Länge des Bogens $A_0\,A_1$ ist, oder je kleiner der Winkel $\gamma + \gamma_1$ ist, desto weniger wird die eine Bewegung von der andern abweichen.

Es sei nun der Scheitel o der Cycloide der Anfangspunkt der Coordinaten,

$\left.\begin{array}{l} o\,n_1 = y_0 \\ n\,n_1 = x_0 \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes n,

$\left.\begin{array}{l} o\,m_1 = y \\ m\,m_1 = x \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes m, in welchen sich das Theilchen nach Verlauf der Zeit t (die von dem Augenblicke an gerechnet werden soll, in welchem es durch den Punkt n geht) befindet;

$\left.\begin{array}{l} o\,n = s_0 \\ o\,m = s \end{array}\right\}$ die Bogenlängen der Cycloide, welche den Punkten m und n entsprechen;

$\left.\begin{array}{l} \beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma) \\ \varphi. \end{array}\right\}$ die Winkel, welche die zu den Punkten n und m gezogenen Tangenten mit der horizontalen Richtung bilden.

ϱ der Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkte m der Cycloide entspricht;

ϱ_m der mittlere Krümmungshalbmesser, der dem Bogenstück der Cycloide entspricht, welches das Theilchen von n an nach aufwärts durchläuft.

Diess vorausgesetzt hat man nun als Gleichung der Cycloide:

$$y = \sqrt{px - x^2} + \frac{p}{2} \cdot \text{Arc cos.} \frac{p - 2x}{p} \quad . \quad . \quad (168)$$

und daraus findet man:

$$\left.\begin{array}{l} dy = dx \,.\, \sqrt{\frac{p-x}{x}} \\[2ex] ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\frac{p}{x}} \\[2ex] s = 2\sqrt{px} \\[2ex] \varrho = -\frac{ds^3}{dx\, d^2y} = 2\sqrt{p} . \sqrt{p - x} \\[2ex] \sin.\, \varphi = \frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{x}{p}}\,. \end{array}\right| \quad . \quad (169)$$

Da das Theilchen bei n eine Geschwindigkeit u_0 besitzen soll, so ist die Gleichung der Bewegung desselben auf der ruhenden Fläche:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{u_0^2 - 2g\,(x - x_0)} \quad \ldots\ldots \quad (170)$$

wobei das obere Zeichen für die aufsteigende, das untere für die niedergehende Bewegung gilt. Nun ist aber leicht einzusehen, dass eine dieser Bewegungen eben so viel Zeit erfordert, als die andere; man findet also die Zeit **T** einer vollständigen Oscillation, wenn man die Zeit der aufsteigenden Bewegung berechnet und das Resultat mit 2 multiplicirt.

Wenn das Theilchen im höchsten Punkte angekommen ist, ist seine Geschwindigkeit gleich 0, und der dieser Position entsprechende Werth von x ist:

$$x_0 + \frac{u_0^2}{2g}$$

Dieser Werth von x entspricht wegen $s = 2\sqrt{px}$ einem Bogen von der Länge

$$2\sqrt{p\left(x_0 + \frac{u_0^2}{2g}\right)} = 2\sqrt{p\left(\frac{s_0^2}{4p} + \frac{u_0^2}{2g}\right)} = \sqrt{s_0^2 + 4p\frac{u_0^2}{2g}}$$

Aus der Gleichung (170) folgt, wenn das obere Zeichen genommen und

$$x = \frac{s^2}{4p} \quad x_0 = \frac{s_0^2}{4p}$$

gesetzt wird:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{u_0^2 + \frac{g}{2p}\,(s_0^2 - s^2)}}$$

Das allgemeine Integrale ist:

$$t = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \text{Arc sin.}\, s \sqrt{\frac{\frac{g}{2p}}{u_0^2 + \frac{g}{2p}\,s_0^2}} + \text{const.} \right\}$$

Nimmt man es von s gleich s_0 bis s gleich $\sqrt{s_0^2 + 4p\frac{u_0^2}{2g}}$

so erhält man die halbe Schwingungszeit, welche mit 2 multiplicirt die ganze Oscillationszeit gibt. Man findet:

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc} \sin. \sqrt{\frac{\frac{g}{2p} \, s_0^2}{u_0^2 + \frac{g}{2p} \cdot s_0^2}} \right\}$$

Nun ist aber:

$$s^2 = 4px = 4p^2 \sin.^2 \varphi$$

und

$$s_0^2 = 4p^2 \sin.^2 [\beta + \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]$$

Daher findet man:

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \cdot \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc} \sin. \sqrt{\frac{2pg \sin.^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}{u_0^2 + 2pg \sin.^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}} \right\}. \quad (171)$$

Diese Schwingungszeit für die Bewegung eines Theilchens auf einer cycloidischen Fläche dürfen wir wohl auch für eine kreisbogenförmige Fläche gelten lassen, deren Krümmungshalbmesser gleich ist dem mittleren Krümmungshalbmesser ϱ_m des cycloidischen Bogens, welcher das Theilchen durchläuft.

Dieser mittlere Krümmungshalbmesser ist aber:

$$\varrho_m = \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \frac{w_0^2}{2g}} \varrho \, dx}{\frac{u_0^2}{2g}} = \frac{2g}{u_0^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{p} \int_{x_0}^{x_0 + \frac{u_0^2}{2g}} \sqrt{p - x} \, dx =$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2g}{u_0^2} \cdot \sqrt{p} \cdot \left\{ (p - x_0)^{\frac{3}{2}} - \left(p - x_0 - \frac{u_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (172)$$

Wenn das Theilchen bei seiner Bewegung auf der cycloidischen Fläche bis zum höchsten Punkte der Cycloide emporschwingt, ist $x_0 + \frac{u_0^2}{2g}$ gleich p, und der mittlere Krümmungshalbmesser, welcher dieser Bewegung entspricht, wird:

$$\varrho_m = \tfrac{4}{3} \sqrt{p \cdot \frac{u_0^2}{2g}}$$

oder

$$\varrho_m = \tfrac{4}{3} \; p \; \cos. \; [\beta + \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)] \quad . \; . \; . \quad (173)$$

denn es ist in diesem Falle

$$p = x_o + \frac{u_0^2}{2g} = p \sin.^2 [\beta + \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)] + \frac{u_0^2}{2g}$$

demnach

$$p \cos.^2 [\beta + \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)] = \frac{u_0^2}{2g}$$

und

$$\sqrt{p \frac{u_0^2}{2g}} = p \cos. [\beta + \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)]$$

Der oben bestimmte allgemeine Werth von ϱ_m dient zur Effektberechnung eines bestehenden Rades, dessen Schaufeln nach Kreisbögen geformt sind; der speciellere Werth von ϱ_m dient zur Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades.

Zur Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades sind noch einige Bestimmungen nothwendig. Die radiale Dimension a der Radkrone wird durch die grösste Höhe bestimmt, bis zu welcher die Wassertheilchen emporschwingen. Nun befindet sich der Punkt A_0 Fig. (36), in welchem die Theilchen des mittleren Wasserfadens in das Rad eintreten, in einer Höhe $\frac{1}{2} \; \varDelta \cos. \gamma + R \, (1 - \cos. \gamma)$ über dem tiefsten Punkt K des Rades, und da dieser Eintritt mit einer relativen Geschwindigkeit u_0 erfolgt, so darf man annehmen, dass die Erhebung der Theilchen des mittleren Fadens über dem Eintrittspunkte $\frac{u_0^2}{2g}$ beträgt; die kleinste Höhe, welche die Radkrone erhalten muss, ist demnach annähernd:

$$a = \tfrac{1}{2} \; \varDelta \cos. \gamma + R \, (1 - \cos. \gamma) + \frac{u_0^2}{2g} \quad . \; . \quad (174)$$

Nebst den bis hierher aufgestellten Relationen bestehen noch folgende Beziehungen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann:

$$S = R \, (\gamma + \gamma_1) = T \, v \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (175)$$

$$\varDelta = 2 \, R \left\{ \cos. \, [\lambda - (\gamma - \delta)] - \cos. \, \delta \right\} . \; . \quad (176)$$

Effektberechnung eines Rades von gegebenen Abmessungen.

Vermittelst der bis jetzt aufgestellten Gleichungen kann nun die Berechnung des Effektes eines Rades von gegebenen Abmessungen auf folgende, allerdings etwas umständliche Weise geschehen.

Die gegebenen Grössen sind in diesem Falle:

$$H, Q, R, a, b, \varrho_m, \Delta, \beta, \gamma, \delta, V, v, \varepsilon.$$

Die zu bestimmenden Grössen sind dagegen:

$$u_0, u_1, \gamma_1, w_1, p, S, T, E_n.$$

Die Bestimmungen geschehen wie folgt: den Werth von u_0 findet man aus der Gleichung

$$u_0 = V \cos. (\beta - \delta) - v \cos. \beta$$

Die Werthe von γ_1 und p ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{R(\gamma + \gamma_1)}{v} = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \operatorname{Arc sin.} \sqrt{\frac{2gp\sin^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}{u_0^2 + 2gp\sin.^2[\beta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]}} \right\}$$

$$\varrho_m = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{p}}{\frac{u_0^2}{2g}} \left\{ (p - x_0)^{\frac{3}{2}} - \left(p - x_0 - \frac{u_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$x_0 = p \sin.^2 [\beta + \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)]$$

von denen die erste erhalten wird, wenn man die Werthe von T, welche die Gleichungen (171) (175) darbieten, einander gleichsetzt. Dass die Ausmittlung der Werthe von γ_1 und p aus diesen Gleichungen nur durch Versuche geschehen kann, bedarf kaum einer Erwähnung.

Ist γ_1 bekannt, so findet man:

$$T = \frac{R(\gamma + \gamma_1)}{v}$$

$$S = R(\gamma + \gamma_1)$$

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2gR(\cos. \gamma_1 - \cos. \gamma)}$$

Ferner

$$w_1 = v \cos. \gamma_1 - u_1 \cos. (\gamma_1 + \beta)$$

endlich:

$$E_n = 1000\, Q\, H - 1000 \frac{Q}{2g} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varDelta}\right) \left(V \sin. (\beta - \delta) - v \sin. \beta\right)^2$$

$$- 1000 \frac{Q}{2g} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varDelta}\right) \left(u_1^2 V v^2 - 2 u_1 v \cos. \beta\right)$$

$$- 1000\, Q \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varDelta}\right) R \left(\cos. \gamma - \cos. \gamma_1\right)$$

$$- 1000\, Q \frac{\varepsilon}{\varDelta} H$$

Diese Rechnung hat übrigens keinen praktischen Werth; ich habe sie nur zusammengestellt, um wenigstens die theoretische Möglichkeit einer genaueren Effektberechnung des *Poncelet'*schen Rades zu zeigen. Auch ist klar, dass nach dieser Rechnungsart der Nutzeffekt zu günstig erscheinen muss, indem weder die Reibung des Wassers an den Radschaufeln, noch auch die wechselseitigen Störungen der Wassertheilchen in ihrer Bewegung berücksichtigt worden sind.

Die Bedingungen eines günstigen Nutzeffektes.

Der Nutzeffekt des Rades wird gleich dem absoluten Effekt der Wasserkraft, wenn

$$\gamma = \gamma_1 \;\; \delta = 0\,,\; \beta = 0,\; \varepsilon = 0,\; v = \tfrac{1}{2} V$$

ist, d. h. wenn 1) die Punkte des Ein- und Austrittes auf gleicher Höhe und zwar im Niveau des Unterwassers liegen; 2) wenn das Wasser nach tangentialer Richtung nach dem Rade geleitet wird; 3) wenn die Schaufeln den Umfangskreis des Rades berühren; 4) wenn der Spielraum unter dem Rade unendlich klein ist; 5) wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades halb so gross ist, als jene, mit welcher das Wasser an den Umfang des Rades ankommt.

Der Bedingung $\gamma = \gamma_1$ kann entsprochen werden, wenn der Eintrittspunkt A_0 im Niveau des Unterwassers angenommen wird, und wenn die Werthe von ϱ_m und R zweckmässig gewählt werden.

Der Winkel δ kann zwar klein aber nie gleich 0 gemacht werden, weil die Wasserschichte vor dem Rade immer eine gewisse Dicke haben muss, damit das Rad eine endliche und ausführbare Breite erhält. Der Winkel könnte zwar gleich 0 angenommen werden, da aber dies in Bezug auf δ nicht möglich ist, so fällt der vortheilhafteste Werth von β grösser als 0 aus, was durch folgende Rechnung bewiesen wird: Setzt man in dem Ausdruck für E_n, $\gamma_1 = \gamma$ demnach $u_1 = u_0 =$ cos. $(\beta - \delta)$ — v cos. β, so nimmt derselbe nach einigen einfachen Reduktionen die Form an:

$$E_n = 1000\ Q\ H - 1000 \frac{Q}{2\,g}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta}\right)\Big\{ V^2 + 2\,v^2\,[1 + \cos.^2 \beta]$$

$$- 2\,V\,v\,[\cos.\delta + \cos.(\beta - \delta)\cos.\beta] \Big\} - 1000\ Q\,\frac{\varepsilon}{\Delta}\,H$$

Sucht man den partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\,E_n}{d\,\beta}$ und setzt denselben gleich 0, so erhält man zur Bestimmung des vortheilhaftesten Werthes von β die Gleichung:

$$\text{cotg.}\ 2\,\beta = \frac{\cos.\delta - \frac{v}{V}}{\sin.\ \delta} \quad \ldots\ldots \quad (177)$$

Nun ist aus einem Grunde, der weiter unten erklärt werden wird, die vortheilhafteste Geschwindigkeit v nicht gleich 0·5 V sondern 0·55 V. Setzen wir also in dieser Gleichung $\frac{v}{V} = 0{\cdot}55$, so gibt dieselbe für verschiedene Werthe von δ die entsprechenden vortheilhaftesten Werthe von β und man findet

für	$\delta = 15^0$,	20,	$24^0 + 37^1$,	30^0
	$\beta = 29^0 + 2^1$,	$24^0 + 12^1$,	$24^0 + 37^1$,	$28^0 + 51^1$

Hieraus sieht man, dass der vortheilhafteste Werth von β nicht gleich 0, sondern bald grösser, bald kleiner und für $\delta = 24^0 + 37^1$ gleich δ wird.

Der Spielraum ε kann nicht leicht kleiner als $0{\cdot}01^m$ gehalten werden; es findet also immer etwas Verlust an Wasser statt, der theils durch eine hinreichende Dicke der Wasserschichte, theils dadurch vermindert werden kann, dass man das Zuleitungsgerinne nicht tangential an den

Umfang des Rades hinführt, sondern so, dass seine Richtung den Umfangskreis des Rades etwas schneidet. Die Umfangsgeschwindigkeit v könnte allerdings gleich $\frac{1}{2}$ V angenommen werden, es ist aber bei der Aufstellung der Effektgleichung ein Umstand ausser Acht gelassen worden, der dafür spricht, v grösser als $\frac{1}{2}$ V anzunehmen. Wenn nämlich $v = \frac{1}{2} V$ angenommen wird, besitzt das Wasser nach seinem Austritt gar keine oder doch nur eine sehr unbedeutende Geschwindigkeit, es muss sich also, um zum Fortfliessen im Abflusskanal Geschwindigkeit zu gewinnen, hinter dem Rade aufstauen.

Um diesen nachtheiligen Aufstau zu beseitigen, ist es daher gut, wenn das Wasser dei seinem Austritt die zum Fortfliessen nothwendige Geschwindigkeit nach horizontaler Geschwindigkeit bereits besitzt, die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit des Rades ist daher grösser als 0·5 V, und beträgt nach den Versuchen von ***Poncelet*** 0·55 V.

Führt man diesen Werth von v in die Gleichungen (158) und (165) ein, so werden für den vortheilhaftesten Bewegungszustand die Werthe von u_0 und w_1

$$u_0 = [\cos. (\beta - \delta) - 0{\cdot}55 \cos. \beta]\, V \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

$$w_1 = \left[0{\cdot}275 \cos. \gamma + 0{\cdot}275 \cos. (2\beta + \gamma) - \cos. (\gamma + \beta) \cos. (\beta - \delta)\right] V$$

Wir wenden uns nun zur

Berechnung der Abmessungen eines zu erbauenden Rades.

Zur Erleichterung der Uebersicht wird es gut sein, wenn wir alle diejenigen Gleichungen zusammenstellen, aus denen die Abmessungen des Rades gesucht werden müssen. Diese Gleichungen sind:

$$\varDelta = 2\, R \,\{ \cos. [\lambda - (\gamma - \delta)] - \cos. \delta \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

$$T = \frac{2\, \gamma\, R}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

$$u_0 = \left(\cos. (\beta - \delta) - \frac{v}{V} \cos. \beta \right) V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

$$\cotg. 2\beta = \frac{\cos. \delta - \frac{v}{V}}{\sin. \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

$$a = \frac{1}{2} \Delta \cos. \gamma + R (1 - \cos. \gamma) \pm \frac{u_0^2}{2g} \ldots\ldots (174)$$

$$b = \frac{Q}{\Delta V} \ldots\ldots (178)$$

$$T = \sqrt{\frac{2p}{g}} \left\{ \pi - 2 \text{ arc. sin.} \sqrt{\frac{2 g p \sin.^2 \beta}{u_0^2 + 2 g p \sin.^2 \beta}} \right\} \ldots (171)$$

$$\varrho_m = \frac{4}{3} p \cos. \beta \ldots\ldots (173)$$

Die Zahl derselben ist 8 und die Anzahl der Grössen, welche sie enthalten, 15; es müssen also 7 Grössen angenommen werden, und dann lassen sich die übrigen 8 bestimmen.

Nun ist zunächst als bekannt anzunehmen Q und $V = \sqrt{2 g H}$ und $v = 0{\cdot}55\ V$, es bleiben also noch 4 innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Annahmen übrig. Für diese wollen wir annehmen:

$$\lambda = 15^\circ,\ \gamma - \delta = 3^\circ,\ \Delta = \frac{1}{6} H,\ R = 1{\cdot}75 H$$

und werden später durch Rechnung nachweisen, dass sie zu einer vortheilhaften Construction führen.

Die Bestimmung der Grössen δ, T, u_0 β, a, b, p, ϱ_m geschieht nun auf folgende Weise.

Aus der Gleichung (176) folgt:

$$\cos. \delta = \cos. [\lambda - (\gamma - \delta)] - \frac{\Delta}{2 R}$$

und man findet, wenn $\lambda = 15^\circ$, $\gamma - \delta = 3^\circ$ $\Delta = \frac{1}{6} H$, $R = 1{\cdot}75\ H$ gesetzt wird:

$$\delta = 21^\circ + 29'$$

Wegen $\gamma - \delta = 3^\circ$ wird nun

$$\gamma = 24^\circ + 29'$$

Die Gleichung (177) gibt, wenn man $\delta = 21^\circ + 29'$, $\frac{v}{V} = 0{\cdot}55$ einführt:

$$\beta = 23^\circ + 3^{I}$$

Aus der Gleichung (158) folgt nun, wenn man für β, δ, $\frac{v}{V}$ die bereits bestimmten Werthe einführt:

$$u_0 = 0.4933\ V$$

$$u_0^2 = 0.243\ V^2$$

Aus der Gleichung (174) findet man nun:

$$a = 0.476\ H.$$

Die Gleichung (178) gibt:

$$b = 6 \,.\, \frac{Q}{H \sqrt{2\, g\, H}}$$

Aus der Gleichung (175) findet man

$$T = 0.1392\ .\ V.$$

Führt man diesen Werth von **T** in die Gleichung (171) ein, so wird dieselbe:

$$0.1392 . V = \sqrt{\frac{2\,p}{g}} \left\{ \pi - 2\,\text{arc. sin.} \sqrt{\frac{2\, g\, p\, \sin.^2 (23^\circ + 3^1)}{-243\, V^2 + 2\, g\, p \sin.^2 (23^\circ + 3^1)}} \right\}$$

Dieser Gleichung wird genüge geleistet, wenn man setzt:

$$p = 0.36\ H$$

und nun gibt endlich wegen (173)

$$\varrho_m = 0.442\ H.$$

Hiermit sind nun alle Dimensionen bis auf die Anzahl der Schaufeln bestimmt. Es ist mir nicht gelungen, für dieses Element aus der Natur der Sache eine rationelle Regel abzuleiten. So viel ist klar, dass sich die Schaufeltheilung nach der Dicke der Wasserschichte vor dem Rade, und da diese dem Gefälle proportional ist, nach dem Gefälle richten muss. Nach dem Gefühle zu urtheilen, darf man die Schaufeltheilung **e** gleich 0·3 **H** annehmen, und dann wird die Anzahl derselben, wenn $\mathbf{R} = 1{\cdot}75\ \mathbf{H}$ gesetzt wird: gleich 36.

Nach dem Ergebniss dieser Rechnung erhalten wir nun für die Berechnung der Dimensionen eines zu erbauenden Rades folgende äusserst einfache Regeln:

$$\lambda = 15', \ \delta = 21^\circ + 29', \ \beta = 23^\circ + 3', \ \gamma = 24^\circ + 29'$$

$$u_0 = 0{\cdot}4933\ \mathbf{V}\ .\ \mathbf{T} = 0{\cdot}139\ \mathbf{V}$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\mathbf{H},\ \mathbf{R} = 1{\cdot}75\ \mathbf{H},\ a = 0{\cdot}476\ \mathbf{H},\ p = 0{\cdot}36\ \mathbf{H},\ \varrho_m = 0{\cdot}442\ \mathbf{H}.$$

$$b = 6\,\frac{Q}{H\sqrt{2\,g\,H.}}$$

Anzahl der Radschaufeln gleich 36.

Nach dieser Angabe sind alle Dimensionen, welche im Durchschnitt des Rades vorkommen, dem Gefälle proportional und unabhängig von der Wassermenge, dagegen aber ist die Breite des Rades nicht nur von dem Gefälle, sondern auch von der Wassermenge abhängig. Die praktische Bestimmung der Dimensionen ist also bei diesem Rade einfacher als bei irgend einem anderen; denn man hat nur allein die Breite des Rades zu berechnen, weil die übrigen Elemente theils constante Grössen sind, theils durch die aufgefundenen Verhältnisszahlen bestimmt werden.

Werden die berechneten Werthe in die Formel (167) für den Nutzeffekt eingeführt, berücksichtiget man, dass $\gamma = \gamma$, $U_1 = U_0$, $\frac{V^2}{2g} = H$ zu setzen ist, und nimmt man $\varepsilon = 0{\cdot}01\ \mathbf{H}$ an, so findet man:

$$1000 \frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varDelta}\right)\left\{ V \sin.(\beta-\delta) - v \sin.\beta \right\}^2 = 0{\cdot}0368 \times 1000\ Q\ H$$

Effektverlust bei dem Eintritt.

$$1000 \frac{Q}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varDelta}\right)\left\{ u_1{}^2 + v^2 - 2\ u_1\ v \cos.\beta \right\} = 0{\cdot}0440 \times 1000\ Q\ H$$

Effektverlust bei dem Austritt.

$$1000\ Q \cdot \frac{\varepsilon}{\varDelta} H \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}0600 \times 1000\ Q\ H$$

Effektverlust wegen des Entweichens.

Summe der Effektverluste . . . . $0{\cdot}1408 \times 1000\ Q\ H$

Nutzeffekt des Rades . . . . . . $0{\cdot}8592 \times 1000\ Q\ H$

Abgesehen von den Verlusten, die durch die wechselseitigen Störungen der Wassertheilchen in ihrer Bewegung und durch die Reibung des Wassers an den Schaufeln entstehen, verspricht daher ein nach den aufgestellten Regeln construirtes Rad einen Nutzeffekt von 86 Procent.

Angenommen, dass die vernachlässigten Effektverluste 10 Procent betragen, so bleibt noch immer ein reiner Nutzeffekt von 76 Procent übrig.

Die Dimensionen, welche wir mit der Annahme $\lambda = 15^\circ$, $\gamma - \delta = 3^\circ$, $\varDelta = \frac{1}{6}$ H, R $= 1{\cdot}75$ erhalten haben, sind annähernd als die kleinsten zu betrachten, mit welchen es noch möglich ist, Räder von guter Wirkungsfähigkeit zu bauen, denn der Werth von ϱ_m ist mit jenen Annahmen bereits etwas kleiner als a geworden, und es ist klar, dass ein guter Effekt nur dann erwartet werden darf, wenn ϱ_m nicht beträchtlich kleiner als a ist, denn wenn $\varrho_m < a$, ist der obere Theil der Schaufel, wenn sie sich in ihrer mittleren Stellung befindet, nach rückwärts geneigt; die Wassertheilchen werden also beim Beginn ihres Niederganges nicht diesem Theil der Schaufel folgen, sondern auf das nachströmende Wasser herabfallen, was nothwendig Störungen verursachen muss.

Bei Gefällen, die einen oder mehr als einen Metre betragen, fällt nach den aufgestellten Regeln der Halbmesser des Rades schon so gross aus, dass man ihn in diesen Fällen wohl nie grösser wünschen wird, sondern im Gegentheil eher kleiner.

Bei kleineren Gefällen unter einem Meter und wenn (wie etwa zum Betriebe eines Pumpenwerkes), eine kleine Geschwindigkeit des Rades zweckmässig ist, kann man mit Vortheil für λ, $\gamma-\delta$, Δ, **R** Annahmen machen, die zu grösseren Dimensionen führen.

Nehmen wir z. B.

$$\lambda = 15, \gamma - \delta = 3^0, \mathbf{R} = 2\mathrm{H}, \Delta = 0{\cdot}19\ \mathrm{H}$$

so findet man ganz auf die gleiche Weise wie früher:

$$\delta = 21^0 + 29', \gamma = 24^0 + 29', \beta = 23^0 + 3'$$

$$u_0 = 0{\cdot}4933\ \mathrm{V}, \mathbf{T} = 0{\cdot}1588\ \mathrm{V}$$

$$a = 0{\cdot}509\,\mathrm{H},\ p = 0{\cdot}58\,\mathrm{H},\ \varrho_m = 0{\cdot}711\,\mathrm{H},\ b = 5{\cdot}26\,\frac{Q}{\mathrm{H}\sqrt{2g\mathrm{H}}}$$

Nimmt man die Schaufeltheilung wiederum gleich 0·3 **H**, so wird ihre Anzahl 42. Diese Regeln können also für kleinere Gefälle unter 1^m, und wenn ein langsamer Gang des Rades gewünscht wird, angewendet werden.

Anwendbarkeit des Poncelet-Rades.

Die Grenzen von dem Wasserkraftgebiet, welches dem Poncelet-Rade entspricht, werden durch die grössten und kleinsten in der Praxis zulässigen Dimensionen von b und **R** bestimmt.

Der grösste praktisch zulässige Halbmesser darf zu 3^m und die grösste Radbreite zu 4^m angenommen werden.

Nun ist für grössere Gefälle **R** = 1·75 **H** das grösste Gefälle, bei welchen das Poncelet-Rad noch gut anwendbar ist, ist daher: $\frac{3}{1{\cdot}75} = 1{\cdot}7^m$, und bis zu diesem Gefälle hin kann es in allen Fällen angewendet werden, in welchen die Breite nicht grösser als 4^m ausfällt. Die graphische Darstellung der Wasserkraftgebiete für die verschiedenen Räder enthält auch das Gebiet für das Poncelet-Rad.

Schliesslich muss ich bemerken, dass die Dimensionen, welche wir aufgefunden haben, bedeutend grösser sind, als diejenigen, welche ***Poncelet*** in seinem ***Memoires sur les Roues hydrauliques a aubes courbes, mues par dessous 1827*** angibt. Die Erfahrung spricht zu Gunsten der von uns aufgestellten Regeln. Im benachbarten Elsass befinden sich mehrere Räder, die nach den von Poncelet aufgestellten Regeln erbaut wurden, so wie auch solche, die nach dem gleichen System, aber mit grösseren Dimensionen, ausgeführt worden sind. Bei allen von den ersteren dieser Räder springt das Wasser in das Rad hinein, und tritt erst in einer beträchtlichen Höhe über dem Spiegel des Unterwassers aus den Schaufeln; bei den letzteren dagegen ist dies nicht der Fall. Auch hat mich ein Construkteur, der sich viel mit dem Bau von Poncelet-Rädern abgegeben hat, versichert, er habe die Erfahrung gemacht, dass man nur dann gute Effekte erhalte, wenn man das Rad in jeder Hinsicht grösser baue, als es nach den von Poncelet aufgestellten Regeln sein müsste.