Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Berechnung des Effektverlustes, welcher bei dem Austritt des Wassers aus den Rädern entsteht

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Berechnung des Effektverlustes, welcher bei dem Austritt des Wassers aus den Rädern entsteht.

a. Bei dem unterschlächtigen Rade.

Wenn die Schaufeln des Rades gegen den Radius geneigt sind, wie bei Fig. (38) haben sie bei ihrem Austritt fast eine vertikale Stellung und ihre Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung stimmt mit jener des Wassers überein. Der Bewegungszustand des Wassers muss also, ein geradlinig fortlaufendes Gerinne vorausgesetzt, unmittelbar nach dem Austritt genau so sein, wie er vor dem Austritt war, d. h es haben alle Wassertheilchen, welche auf die Schaufeln einen Stoss ausüben, nach ihrem Austritt aus dem Bereiche des Rades eine horizontale Geschwindigkeit v.

Bezeichnen wir, wie früher Seite (50), durch q_1 die Wassermenge, welche zwischen den Schaufeln mit unveränderter Geschwindigkeit V durchgeht, und durch q_2 die Wassermenge, welche (bei einem geradlinigen Gerinne) durch den Spielraum der Schaufeln im Gerinne entweicht, so ist die lebendige Kraft oder die Wirkungsfähigkeit, welche in dem p 1″ vom Rade wegfliessenden Wasser enthalten ist, bei dieser Anordnung des Rades und Gerinnes:

$$\left.\begin{array}{l} 1000\,(Q - q_1 - q_2)\,\frac{V^2}{2\,g} \quad 1000 + (q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2\,g} \\ \text{oder} \\ 1000\,Q\,\frac{v^2}{2\,g} + 1000\,(q_1 + q_2)\left(\frac{V^2}{2\,g} - \frac{v^2}{2\,g}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad (78)$$

Anders verhält sich dagegen die Sache, wenn die Schaufeln radial gestellt sind; in diesem Falle heben sie beim Austreten einen Theil des Wassers in die Höhe, wodurch eine für den Effekt nachtheilige Rückwirkung auf das Rad entsteht. Um hier die Wirkungsfähigkeit zu bestimmen, welche in der Wassermenge in dem Moment enthalten ist, wenn sie das Rad verlässt, wollen wir zuerst ein einzelnes Wassertheilchen betrachten, und die Frage zu beantworten suchen, in welcher Höhe und mit welcher Geschwindigkeit dasselbe die untere Kante einer Schaufel verlassen wird.

Es sei:

m die Masse des Theilchens;

r_0 die Entfernung des Theilchens von der Axe des Rades, wenn die radial gestellte Schaufel vertikal steht;

r die Entfernung des Theilchens von der Axe nach Verlauf der Zeit t, die wir von dem Augenblicke an zählen, in welchem die Schaufel vertical stund;

w die Winkelgeschwindigkeit des Rades;

T die Zeit, in welcher das Theilchen die untere Kante der Schaufel erreicht;

u_a u_r die absolute und relative Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel verlässt.

Diess vorausgesetzt ist die Gleichung für die relative Bewegung des Theilchens auf der in Bewegung befindlichen Schaufel:

$$\frac{d r^2}{d t^2} = r w^2 + g \cos. w t \quad . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Für das allgemeine Integrale dieser Differenzialgleichung findet man (am bequemsten nach der Methode der Variation der Constanten)

$$r = - \frac{g}{2 w^2} \cos. w t + A e^{wt} + B e^{-wt} \quad . \; (80)$$

wobei A und B die Constanten der Integration und e = 2·718 die Basis der natürlichen Logarithmen bedeuten.

Berücksichtiget man, dass für

$$t = o, r = r_o \text{ und } \frac{d r}{d t} = o$$

ist, so findet man aus diesem allgemeinen Integrale

$$r = - \frac{g}{2 w^2} \cos. wt + \frac{1}{2}\left(r_o + \frac{g}{2 w^2}\right)\left(e^{wt} + e^{-wt}\right) (81)$$

Da das Theilchen nach sehr kurzer Zeit die untere Kante der Schaufel erreicht, so brauchen wir diese Gleichung nur für sehr kleine Werthe von t zu betrachten, können uns daher erlauben:

$$\cos. \, w t = 1 - \tfrac{1}{2} \, w^2 t^2$$

$$e^{-wt} = 1 + w t + \tfrac{1}{2} \, w^2 \, t^2$$

$$e^{-wt} = 1 - w t + \tfrac{1}{2} \, w^2 \, t^2$$

zu setzen und dann findet man:

$$r = r_0 + \frac{t^2}{2} (g + r_0 \, w^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (82)$$

Für $t = T$ wird $r = R$, demnach findet man:

$$T^2 = \frac{2 \, (R - r_0)}{g + r_0 \, w^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83)$$

Aus (b) folgt durch Differenziation:

$$\frac{dr}{dt} = t \, (g + r_0 \, w^2)$$

Quadrirt man diese Gleichung, eliminirt hierauf t^2 vermittelst (82) und setzt zuletzt $r = R$, so findet man für das Quadrat der relativen Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen die Schaufel verlässt, folgenden Ausdruck:

$$u_r^2 = 2 \, (R - r_0) \, (g + r_0 \, w^2) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (84)$$

In dem Augenblicke, in welchem das Theilchen an der unteren Kante der Schaufel angekommen ist, hat es nach der Richtung der Schaufel die Geschwindigkeit u_r und senkrecht gegen die Schaufel die Geschwindigkeit v, für die absolute Geschwindigkeit u_a ist demnach:

$$u_a^2 = u_r^2 + v^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

Während der Zeit T legt ein Punkt der äusseren Schaufelkante einen Weg $v \, T$ zurück, der Punkt, in welchem das Theilchen die Schaufel verlässt, befindet sich daher über dem tiefsten Punkt des Rades in einer Höhe, die sehr nahe gleich $\frac{1}{2} \, \frac{v^2 \, T^2}{R}$ ist.

Da nun das Theilchen während der betrachteten Bewegung um:

$$\tfrac{1}{2}\, v^2 \,\frac{T^2}{R^2} - (R - r_0)$$

gehoben worden ist und zuletzt eine absolute Geschwindigkeit u_a besitzt, so geht durch dieses Theilchen eine Wirkung

$$2\, g\, m \left[\frac{u_a^2}{2\,g} + \tfrac{1}{2}\, v^2 \,\frac{T^2}{R^2} - (R - r_0)\right]$$

verloren.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (83) (84) (85) und dass $R\, w = v$ ist, wird dieser Ausdruck

$$m\, v^2 \left\{ 1 + 2\,(R - r_0) \left[\frac{r_0}{R^2} + \frac{g\, R}{g\, R^2 + r_0\, v^2}\right]\right\} \qquad (86)$$

Denken wir uns nun die zwischen den Schaufeln enthaltenen Wassermassen in ihren Schwerpunkten vereiniget und erlauben wir uns, die Gleichung auf diese concentrirt gedachten Massen anzuwenden. Die wirklich p 1'' zum Stoss gelangende Wassermasse ist: $\frac{1000\,(Q - q_1 - q_2)}{2\,g}$ die Tiefe des Wassers in der unteren Schaufel ist: $\frac{Q}{b\, v}$, die Höhe des Schwerpunktes des zwischen den Schaufeln befindlichen Wassers über dem tiefsten Punkt des Rades ist demnach $\frac{1}{2}\frac{Q}{b\, v}$. Setzen wir nun die Gleichung (86)

$$m = \frac{1000\,(Q - q_1 - q_2)}{2\,g}$$

$$r_0 = R - \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{b\, v}$$

so erhalten wir für den Effektverlust, welcher der Wassermenge $Q - q_1 - q_2$ entspricht; und wenn wir noch den Effektverlust:

$$1000\,(q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2\,g}$$

dazu addiren, welcher der nicht zum Stoss kommenden Wassermenge entspricht, so erhalten wir endlich für den totalen Effektverlust, der beim Austritt des Wassers aus dem Rade entsteht, folgenden Ausdruck:

$$1000\,(Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2g}\left\{1 + \frac{Q}{b\,v}\left[\frac{R - \frac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,v}}{R^2} + \frac{g\,R}{g\,R^2 + \left(R - \frac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,v}\right)v^2}\right]\right\} + 1000\,(q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2g} \qquad (87)$$

oder weil $\frac{1}{2}\,\frac{Q}{b\,v}$ gegen R und $\left(R - \frac{1}{2}\,\frac{Q}{e\,v}\right)v^2$ gegen $g\,R^2$ vernachlässigt werden kann

$$1000\,(Q - q_1 - q_2)\,\frac{v^2}{2g}\left[1 + \frac{Q}{a\,b\,v}\cdot\frac{2\,a}{R}\right] + 1000\,(q_1 + q_2)\,\frac{V^2}{2g} \quad (88)$$

Die Werthe von q_1 und q_2 sind früher Seite 50 und 56 bestimmt worden.

Wenn das Gerinne so angeordnet ist, dass alles dem Rade zufliessende Wasser die Geschwindigkeit der Schaufel annehmen muss, ist q_1 und q_2 gleich Null zu setzen.

Bisher haben wir angenommen, dass das Wasser hinter dem Rade genau so hoch steht, als in dem Rade selbst. Sollte das Hinterwasser um h höher oder tiefer stehen, als das Wasser im Rade, so müsste der obige Ausdruck (88) noch um $\frac{1}{2}$ 1000 Q h vermehrt werden.

b. Bei den Mantelrädern.

Bei diesen Rädern tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit, die jener des Rades gleichkommt, aus, und der Spiegel des Unterwassers befindet sich in der Regel in einer gewissen Tiefe h unter der Oberfläche des Wassers in der untersten Zelle, der hieraus entstehende Effektverlust ist:

$$1000\;Q\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2}\,h\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (89)$$

c. Bei dem oberschlächtigen Rade

tritt das Wasser ebenfalls mit einer Geschwindigkeit v aus, und der tiefste Punkt des Rades befindet sich gewöhnlihh in einer gewissen Höhe h über dem Spiegel des Unterwassers, was man das „Freihängen“ nennt. Der hieraus entstehende Effektverlust ist:

$$1000\, Q \left\{ \frac{v^2}{2g} + h \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

Der Effektversust durch das allmählige Herausfallen des Wassers ist schon früher berechnet worden.

Effektverlust, den bei Schaufelrädern der Luftwiderstand verursacht.

Es ist zwar vorauszusehen, dass dieser Verlust von keiner Bedeutung sein kann; aber gleichwohl ist es doch wünschenswerth, seinen Werth zu kennen.

Nach den Versuchen, welche *Piobert, Morin* und *Didion* über den Luftwiderstand der Flügelräder angestellt haben, kann derselbe ziemlich genau durch folgende Formel berechnet werden:

$$0{\cdot}100 + (0.0068 + 0{\cdot}118\ i\ a\ b)\ v^2 \text{ Killg.}$$

wobei i, a, b, v die Bedeutung haben, welche das allgemeine Schema der Bezeichnungen angibt. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit v, so erhält man den Effektverlust

$$0{\cdot}1\ v + (0\ 0068 + 0{\cdot}118\ i a b)\ v^3 \text{ Killg. M.}$$

oder wenn man die beiden ersteren Glieder gegen das letztere vernachlässigt:

$$0{\cdot}118\ i\ a\ b\ v^3 \text{ Killg. M.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (91)$$

Die numerischen Rechnungen werden in der Folge zeigen, dass dieser Effektverlust höchstens 1 bis 2 Prozent von dem absoluten Effekt beträgt, daher kaum einer Beachtung werth ist.
