Theorie und Bau der Wasserräder

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1846

Effektverlust, welcher durch den stossweisen Eintritt des Wassers entsteht

urn:nbn:de:bsz:31-282850

Schwerpunkt i der Wassermasse über dem Punkte c Fig. 10 der Zelle befindet.

$g = 9{\cdot}808^{m}$ die Endgeschwindigkeit eines aus der Ruhe frei fallenden Körpers nach der ersten Secunde.

$q = Q \cdot \frac{e}{v}$ die Wassermenge in Kubikmetres, welche in einer Zelle nach beendigter Füllung enthalten ist.

Effektverlust, welcher durch den stossweisen Eintritt des Wassers entsteht.

Wenn wir uns mit einer Annäherung begnügen, und den Einfluss der Dicke des Strahles unberücksichtigt lassen wollen, können wir sehr leicht einen Ausdruck für den Effektverlust, welcher durch den stossweisen Eintritt des Wassers in das Rad entsteht, aufstellen, indem wir die Regel, welche in dem ersten Abschnitt Seite 10 aufgestellt wurde, in die analytische Sprache übersetzen. Thut man dies, so findet man für jenen Effektverlust folgenden Ausdruck:

$$1000 \cdot \frac{Q}{2g} \left\{ V^2 + v^2 - 2 V v \cos.\delta + 2g \left[\tfrac{1}{2} e \sin.\gamma + c \sin.(\gamma - \beta) - s\right] \right\} \quad (19)$$

wobei V die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher die Theilchen des mittleren Wasserfadens dem Umfang des Rades begegnen. Wenn die Dicke des Wasserstrahls und seine Tiefe unter dem Spiegel des Oberwassers bekannt sind, kann man die Geschwindigkeit jederzeit leicht bestimmen. Es kommt aber bei gewissen Rechnungen vor, dass diese Elemente zur Bestimmung von V nicht bekannt sind, und dann werden die Rechnungen bedeutend einfacher, wenn man sich erlaubt, statt der Geschwindigkeit, welche dem mittleren Wasserfaden entspricht, diejenige zu nehmen, welche dem untersten Faden des Wasserstrahles zugehört. Der Fehler, welcher entsteht, wenn man V in diesem letzteren Sinn nimmt, ist äusserst gering. Will man sich mit der Genauigkeit des Ausdruckes (19) nicht begnügen, sondern auf die Dicke des Strahls genau Rücksicht nehmen, so muss man den erwähnten Effektverlust auf folgende Weise berechnen.

Der Eintritt des Wassers in eine Zelle beginnt, wenn diese mit ihrer äusseren Kante mit der Oberfläche des Strahles zusammentrifft, und dauert so lange fort, bis jene Kante um eine Schaufeltheilung unter den Strahl gekommen ist. Dieses Bogenstück des Radumfanges, welches die äussere Kante einer Zelle während ihrer Füllung durchläuft, entspricht nur einem kleinen Centriwinkel am Mittelpunkte des Rades; wir können uns daher erlauben, jenes Bogenstück als eine gerade Linie anzusehen, $a\,b\,h$ Fig. (21) sei diese gerade Linie, a und b seien die Punkte, in welchen die obere und die untere Fläche des Strahles den Umfang des Rades durchschneiden, efg die Position einer Zelle in dem Augenblick, wenn ein gewisses Theilchen bei c den Umfang des Rades erreicht, $e_1 f_1 g_1$ die Position der gleichen Zelle, wenn das bei c eingetretene Theilchen die Oberfläche des in der Zelle bereits befindlichen Wassers bei l erreicht, und dasselbst durch Stoss seine relative Geschwindigkeit verliert.

Nennen wir

y die Tiefe des Punktes c unter der Oberfläche des Wassers im Zuflusskanal.

$\overline{ce}=\xi$ die Entfernung der äusseren Zellenkante von dem Eintrittspunkt des Theilchens.

$if_1=\zeta$ die Höhe des Wasserspiegels in der Zelle über f_1, in dem Augenblick, wenn das Theilchen bei l ankommt.

u die Geschwindigkeit des Theilchens bei c.

V_0 V_1 die Geschwindigkeiten der Theilchen bei a und b.

k einen Correktionscoeffizienten, zur Berechnung der Wassermengen.

t die Zeit, von dem Augenblicke an gemessen, in welchem die Zelle die Position efg einnimmt.

dq das Volumen der Wassermenge, welche im Zeittheilchen dt bei c eintritt.

Dies vorausgesetzt, ist, nach der Seite 8 angegebenen Regel, wenn man sie in die analytische Sprache übersetzt, die lebendige Kraft, welche durch den Stoss des Theilchens dq gegen die Wasserfläche bei l verloren geht

$$\frac{1000\,dq}{2g}\left\{u^2+v^2-2uv\cos.\delta+2g\left[\xi\sin.\gamma+c\sin.(\gamma-\beta)-\zeta\right]\right\} \quad (20)$$

Ferner ist:

$$dq=k.b.\frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,\gamma}\,u\,dy.dt.$$

und

$$u^2=2gy \text{ demnach } u\,dy=\frac{u^2\,du}{g}.$$

endlich

$$dt=\frac{d\xi}{v}.$$

Diese Werthe von $v\,dy$ und dt in den Ausdruck für dq substituirt, erhält man

$$dq=\frac{k}{g}\,b\,.\frac{\sin.\,\delta}{\sin.\,\gamma}u^2\,du\,.\frac{d\xi}{v}. \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Um nun die Wirkung zu finden, welche während der Füllungszeit der Zellen verloren geht, muss man den so eben gefundenen Werth von dq in den Ausdruck (20) substituiren, und diesen dann in Bezug auf ξ von

o bis e und in Bezug auf u von V_0 bis V_1 integriren. Die durch die Füllung einer Zelle verlorene lebendige Kraft ist demnach:

$$\frac{1000\,k\,b}{2g^2 v}\,\frac{sin.\,\delta}{sin.\,\gamma}\int_{u=V_0}^{u=V_1}\int_{\xi=o}^{\xi=e}\Big\{u^2+v^2-2\,u\,v\,cos.\,\delta+$$

$$2g\,[\xi\,sin.\,\gamma+c\,sin.\,(\gamma-\beta)]\Big\}\,u^2\,du\,d\xi-1000\,.\int\zeta\,dq.$$

Verrichtet man diese doppelte Integration, so findet man:

$$e\,.\,\frac{1000\,k\,b}{2g^2 v}\,\frac{sin.\,\delta}{sin.\,\gamma}\Big\{\tfrac{1}{5}(V_1^5-V_0^5)-\tfrac{1}{2}\,v\,cos.\,\delta\,(V_1^4-V_0^4)+$$

$$\tfrac{1}{3}(V_1^3-V_0^3)\,[v^2+2g\,(\tfrac{e}{2}\,sin.\,\gamma+c\,sin.\,(\gamma-\beta))]\Big\}-1000\int\zeta\,dq \quad (22)$$

Das letzte nur angedeutete Integrale ist auf alle Wassertheilchen auszudehnen, die sich am Ende der Füllung in der Zelle befinden.

Es ist daher:

$$\int\zeta\,dq=q\,s \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (23)$$

wenn q die Wassermenge bedeutet, die nach der Füllung in der Zelle enthalten ist. Für den Werth von q findet man durch Integration der Gleichung (21)

$$q=\frac{e}{v}\,.\,\frac{k\,b}{g}\,\frac{sin.\,\delta}{sin.\,\gamma}\,\tfrac{1}{3}\,(V_1^3-V_0^3) \;.\;.\;.\;.\;. \quad (24)$$

Substituirt man diesen Werth von q in (23), sodann den sich ergebenden Werth von $\int\zeta\,dq$ in (22), dividirt sodann den Ausdruck (22) und die Gleichung 24 durch $\frac{e}{v}$ so findet man für den Effektverlust, welcher durch den stossweisen Eintritt des Wassers entsteht, den Ausdruck:

$$\frac{1000\,k\,b\,sin.\,\delta}{2g^2\,sin.\,\gamma}\Big\{\tfrac{1}{5}(V_1^5-V_0^5)-\tfrac{1}{2}\,v\,cos.\,\delta\,(V_1^4-V_0^4)+$$

$$\tfrac{1}{3}(V_1^3-V_0^3)[v^2+2g\,(\tfrac{e}{2}\,sin.\,\gamma+c\,sin.\,(\gamma-\beta)-s)]\Big\}\;. \quad (25)$$

und für die $p\,1''$ dem Rade zuströmende Wassermenge Q

$$Q=\tfrac{1}{3}\,\frac{k\,b}{g}\,\frac{sin.\,\delta}{sin.\,\gamma}\,(V_1^3-V_0^3) \;.\;.\;.\;.\;. \quad (26)$$

Vermittelst dieses Werthes von Q findet man endlich aus (25):

$$\frac{1000\,Q}{2g}\left\{\frac{3}{5}\,\frac{V_1^5-V_0^5}{V_1^3-V_0^3}-\frac{3}{2}\,v\cos.\delta\,\frac{V_1^4-V_0^4}{V_1^3-V_0^3}+v^2+\right.$$

$$\left.2g\left(\frac{e}{2}\sin.\gamma+c\sin.(\gamma-\beta)-s\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

und dies ist der genauere Werth des Effektverlustes, der durch den stossweisen Eintritt des Wassers entsteht.

Dieser Ausdruk führt wiederum auf (19) zurück, wenn man annimmt, dass der Strahl unendlich dünn sei. Setzt man nämlich $\overline{ab}$ Fig. (21), gleich σ, und bezeichnet durch V die Geschwindigkeit, mit welcher die Theilchen im Halbirungspunkt von ab eintreten, so ist:

$$V_1=\sqrt{V^2+g\,\sigma\sin.\gamma}$$

$$V_0=\sqrt{V^2-g\,\sigma\sin.\gamma}$$

Entwickelt man diese Wurzelgrössen in Reihen, und vernachlässigt alle Glieder, welche zweite und höhere Potenzen von σ enthalten, so wird

$$V_1=V+\frac{1}{2}\,\frac{g\,\sigma\sin.\gamma}{V}$$

$$V_0=V-\frac{1}{2}\,\frac{g\,\sigma\sin.\gamma}{V}$$

Führt man diese Werthe von v, V_1 und V_0 in (26) und (27) ein, entwickelt die Potenzen, und vernachlässigt alle Glieder, welche zweite und höhere Potenzen von σ enthalten, so findet man für die Wassermenge

$$Q=k.b.\sigma\sin.\delta.V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und für den Effektverlust:

$$1000\,\frac{Q}{2g}\left\{V^2+v^2-2Vv\cos.\delta+2g\left[\frac{e}{2}\sin.\gamma+c\sin.(\gamma-\beta)-s\right]\right\} (29)$$

welcher Ausdruck mit (19) übereinstimmt.

Aus diesem Ausdruck (19) oder (29) kann man nun leicht mit aller Bequemlichkeit alles herauslesen, was in dem ersten Abschnitte hinsichtlich des Effektverlustes der bei dem stossweisen Eintritt entsteht, ausführlich gesagt wurde.

Für das unterschlächtige Rad mit Schaufeln ist zu setzen:

δ nahe $=o$, γ nahe $=o$, $c=o$, s nahe $=o$.

Der Effektverlust wird demnach:

$$1000\,\frac{Q}{2g}\,(V-v)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Für ein Rad mit radial gestellten Schaufeln ist $c = o$, und der Effektverlust wird:

$$1000 \frac{Q}{2g} \left\{ V^2 + v^2 - 2 V v \cos. \delta + 2g . \left[\frac{e}{2} \sin. \gamma - s \right] \right\} . \quad (31)$$

Für ein oberschlächtiges Rad ist γ nahe $= 180^0$, der Effektverlust wird demnach:

$$1000 \cdot \frac{Q}{2g} \left\{ V^2 + v^2 - 2 V v \cos. \delta + 2g . \left[c \sin. \beta - s \right] \right\} . \quad (32)$$

Was die Grösse s betrifft, so kann diese nur dann genau berechnet werden, wenn die Gestalt der Zelle genau bekannt ist. Der Ausdruck für s wird aber selbst für die einfachsten, ebenflächigen Zellen äusserst complizirt, so dass es zweckmässiger ist, in den aufgestellten Formeln den Werth von s gar nicht durch die Dimensionen der Zellen auszudrücken.
