Allgemeine Maschinenlehre

Redtenbacher, Ferdinand

[s.l.], [ca. 1842]

[Text]

urn:nbn:de:bsz:31-282889

Einleitung.

Die Maschinen dienen im allgemeinen dazu, mit Körpern eine Ortsveränderung vorzunehmen, oder an ihnen eine Formveränderung zu bewerkstelligen. Hierauf lassen sich alle Verrichtungen der Maschinen zurückführen.

Es kommt bei der Anwendung von Maschinen immer dreierlei in Betracht.

1.) Der Motor (z.B. Wasser, Dampf, Pferde etc.)

2.) Der Stoff, mit dem entweder eine Ortsänderung oder eine Formänderung vorgenommen werden soll.

3.) Die Maschine, die die Thätigkeit hervorbringt.

An der Maschine selbst unterscheiden wir folgende Haupttheile:

1.) der Receptor, auf den der Motor unmittelbar einwirkt.

2. das Werkzeug, das unmittelbar mit dem Stoff in Verbindung steht, z.B. der Mühlstein; der Kolben von der Pumpe. etc.

3.) der Mechanismus, der den Receptor mit dem Werkzeug in Verbindung setzt.

Gegeben ist nun der Motor, der Stoff u. was daraus werden soll.

Gesucht der Mechanismus.

Als wichtigste Grundlagen der Maschinenlehre können wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten u. das der Erhaltung der lebendigen Kräfte nennen.

Ein Inbegriff von Punkten, welche in einer wechselseitigen Beziehung zu einander stehen, nennt man ein System von Punkten.

Betrifft diese Beziehung blos das beharrliche Nebeneinandersein der Punkte, so ist es ein <u>geometr. System</u>, wie z.B. bei den Linien u. Flächen.

Wenn die Punkte in einem solchen Zusammenhange stehen, daß, wenn wir einen derselben veranlassen, eine gewisse Bewegung zu machen, auch alle übrigen Punkte auf eine gewisse Weise in Bewegung gerathen, so geben diese Punkte ein <u>geometr. mechanisches System.</u>

Bei einer Maschine ist der geometr. mechanische Zusammenhang aller Bestandtheile von der Art, daß die Bahnen, welche die einzelnen Punkte beschreiben, <u>geschlossene</u>

Linien sind u. ihre Gestalt von den auf die Maschine wirkenden Kräften ganz <u>unabhängig</u> sind

Die Ausmittlung dieser Curven ist nur eine geometr. Aufgabe.

Sind f. u. F die Curven, welche zwei Puncte einer Masch. beschreiben, a u. A die Orte, an w. sich die beiden Puncte in einem gewissen Augenblicke befinden; b u. B die Orte, wo w. sich dieselben Puncte in einem andern Augenblick befinden u. bezeichnen wir ab mit s, u. AB mit S, ferner mit a, b, c, d,, die constanten Abmessungen der Maschtheile, so ist

$$S = f(s, a, b, c, d \dots)$$

differentiren wir diese Gleichg:

$$d.S = \frac{d.f(s, a, b, c, d \dots)}{ds} ds$$

dividiren wir diese Gl. durch d.t, d. h. das Differential der Zeit, in welcher die Wege s u. S zurückgelegt worden sind, so erhalten wir:

$$\frac{d.S}{d.t} = \frac{d.f(s, a, b, c, d \dots)}{ds} \frac{ds}{dt}$$

bezeichnen wir nun durch V u. v die Geschw., mit w. die Wege AB u. ab zurückgelegt worden sind, so ist $V = \frac{dS}{dt}$ u. $v = \frac{ds}{dt}$

$$V = v\,\frac{d.f(s,a,b,c\ldots)}{ds}$$

u. wir setzen $\frac{d.f(s,a,b,c\ldots)}{ds} = F(s,a,b\ldots)$

so ist $V = v\,F(s,a,b,c\ldots)$

$$\frac{V}{v} = \frac{dS}{ds} = F(s,a,b,c\ldots)$$

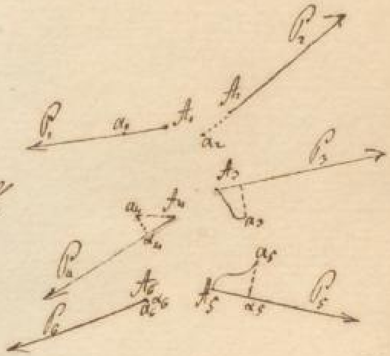
Hieraus ersieht man, daß das Verhältniß zweier der gleichzeitigen Geschwindigkeit zweier Punkte blos abhängig ist von den constanten Abmessungen der Maschine und einer veränderlichen Größe, durch welche der Ort eines bestimmten Punktes der Maschine u. seine Lage angegeben wird.

Das Princip der virt. Geschwindigkeit.

Damit die Kräfte, welche auf ein System von Punkten wirken, sich das Gleichgewicht halten, müssen zwischen den Intensitäten ihrer Wirkungen und den Bestimmungselementen ihres geometr. Zusammenhanges gewisse Bedingungen Statt finden, welche bekanntlich vermittels des Princ. der v. Geschw. aufgefunden werden können.

Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \ldots$ die Angriffspunkte der Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, die sich das Gleichgewicht halten. Wenn wir uns nun das System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition oder

Störung des Zusammenhanges. Man projicirt die Wege A_1a_1, A_2a_2 ..., welche die Angriffsp. wirklich zurück gelegt haben, auf die Richtungen der Kräfte; multiplicirt die Kräfte mit jenen Projectionen $A_1\alpha_1$, $A_2\alpha_2$, $A_3\alpha_3$ etc. u. vereinige diese Producte zu einer Algebr. Summe, indem man die Glieder mit dem Zeichen (+) versieht, welche sich auf Kräfte beziehen, deren Angriffspunkte vorwärts geschritten sind, u. das Zeichen (−) den übrigen Gliedern gibt.



Diese Summe = 0 gesetzt, liefert eine Gl., aus welcher jederzeit die Bedingungen des Gleichgewichts ausgemittelt werden können.

Ist das System von Punkten eine Maschine, so kann nur ein Punkt willkürlich verschoben werden, die Verschiebungen der übrigen Punkte hängen von der Masch. dieser einen ab. Bezeichnen wir durch Sp_1 die Projection des Weges, welchen der Angriffsp. der Kraft P_1 zurückgelegt hat; Sp_2 Sp_3, Sp_4 etc die Proj. ihrer Punkte, so müssen Gleichungen von folgender Form bestimmt werden:

$$\delta p_2 = a\,\delta p_1$$
$$\delta p_3 = b\,\delta p_1$$
$$\delta p_4 = c\,\delta p_1$$
$$\delta p_5 = d\,\delta p_1$$
$$\delta p_6 = e\,\delta p_1$$

wobei die Größen a, b, c, etc von den bekannten Abmessungen der Maschine des Systems u. von dem Ort abhängen, in welchem sich der Angriffsp. von P_1 befindet u. die Bedingung des Gleichgewichts

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 + P_4\delta p_4 + \ldots = 0$$

wird in diesem Falle sein:

$$\delta p_1 (P_1 + aP_2 + bP_3 + cP_4 + \ldots) = 0$$

Da nun δp_1 nach der Voraussetzung nicht $= 0$ ist, so bekommen wir:

$$P_1 + aP_2 + bP_3 + cP_4 + \ldots = 0.$$

Wenn das System von Punkten keine Maschine ist, sondern ein beliebiges geometr. System, so werden einige von den Größen $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3$ etc willkürlich genommen werden können, u. die übrigen müssten dann von diesen letzteren abhängen.

Nehmen wir an die Zusammensetzung habe es gestattet $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3$ willkürlich anzunehmen, so werden die übrigen Größen

$\delta p_4, \delta p_5, \delta p_6$ functionen sein von den ersteren u. gewissen Größen a, b, c. also

$$\delta p_4 = a\,\delta p_1 + b\,\delta p_2 + c\,\delta p_3$$
$$\delta p_5 = a_1\,\delta p_1 + b_1\,\delta p_2 + c_1\,\delta p_3$$
$$\delta p_6 = a_2\,\delta p_1 + b_2\,\delta p_2 + c_2\,\delta p_3$$

führt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + P_3\delta p_3 &+ P_4(a\,\delta p_1 + b\,\delta p_2 + c\,\delta p_3) \\ &+ P_5(a_1\delta p_1 + b_1\delta p_2 + c_1\delta p_3) \\ &+ P_6(a_2\delta p_1 + b_2\delta p_2 + c_2\delta p_3) \end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta p_1(P_1 + aP_4 + a_1P_5 + a_2P_6 \ldots) \\ &\delta p_2(P_2 + bP_4 + b_1P_5 + b_2P_6 \ldots) \\ &\delta p_3(P_3 + cP_4 + c_1P_5 + c_2P_6 \ldots) \end{aligned}\right\} = 0$$

da nun vorausgesetzt ist, daß $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3$ nicht $=0$, so kann dieser Gleichung nur Genüge geleistet werden, wenn die in den Klammern enthaltenen Ausdrücke verschwinden. Wir erhalten daher folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$$A\left\{\begin{aligned} &P_1 + aP_4 + a_1P_5 + a_2P_6 + \ldots = 0 \\ &P_2 + bP_4 + b_1P_5 + b_2P_6 + \ldots = 0 \\ &P_3 + cP_4 + c_1P_5 + c_2P_6 + \ldots = 0 \end{aligned}\right.$$

Hieraus sieht man, daß zum Bestehen des Gleichgew. 3 Bedingungen erfüllt werden müssen, weil wir angenommen haben, daß 3 Stücke willkürlich verschoben werden können. Hätten wir angenommen, daß von den Größen $\delta p_1, \delta p_2$ .. n willkürlich

wären, so würden wir n Bedingungsgleichungen erhalten. Wenn man aus den Angriffspunkten P_1 verschiebt, die Angriffspunkte von P_2, P_3 aber nicht, u. man wendet auf diese Verschiebung das Princip der virt. Geschw. an, so erhält man die erste von den Bedingungsgleichungen (A).
Verschiebt m. nur den Angriffspunkt von P_2, u. den von P_1 u. P_3 nicht, so erhält m. die 2te der Bedingungsgl. (A).
Verschiebt man blos den Agrffspt. von P_3, den von P_1 u. P_2 aber nicht, so erh. m. die 3te der Bedgsgl.

Man sieht also, daß die einzelnen Bedingsgl. auch durch specielle Verschiebungen gefunden werden können, was die Aufstellung der Gleichungen sehr erleichtert.

Wenn das System von Punkten aus festen oder gegeneinander beweglichen Körpern besteht, wie bei einer Maschine, u. man will die Pressungen bestimmen, welche an den Berührungspunkten der Körper vorkommen, so geschieht dies dadurch, indem man die Verbindung der Körper, deren wechselseitige Pressungen bestimmt werden sollen, aufhebt u. dafür Kräfte anbringt, welche dieselbe Richtung u. Intensität haben, wie jene Pressungen. Dadurch wird das ganze

11. System zerfällt, u. wenn man auf jeden derselben Theile das princ. der v. G. anwendet, ergeben sich zwei oder mehrere Bedingungsgleichungen, aus welchen die Pressungen berechnet werden können.

Besteht das System aus elastischen Körpern, u. will man hiebei die Spannungen u. Pressungen bestimmen, welche im Innern der Körper vorhanden sind, so muß man die Elasticitätskräfte berücksichtigen u. Verschiebungen im Innern der Körper vornehmen.

Da die Größen $\delta p_1, \delta p_2 \ldots$ Wege sind, die in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, nämlich in der Zeit t, während welcher die Verschiebung aller Punkte geschieht, so drücken die Verhältnisse $\frac{\delta p_1}{t}, \frac{\delta p_2}{t} \ldots$ die Geschwindigkeit aus, mit welcher sich die Angriffspunkte der Kräfte, nach ihren Richtungen geschätzt, bewegen, wenn eine Verschiebung vorgenommen wird. Bezeichnen wir mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$, diese Geschwindigkeiten u. führen diese Werthe in die allgemeine Gleich. des Gleichgewichts ein, nachdem wir dieselbe durch t dividirt haben, so erhalten wir:

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3 + \ldots = 0. \qquad 6)$$

die Gleich. spricht also aus, daß wenn Kräfte im Gleichgewicht sind, u. man einem dem System von Punkten eine Verschiebung gibt, so muß die algebraische Summe der Producte einer jeden Kraft in die Geschwindigkeit, mit welcher sich ihr Angriffspunkt nach der Richtung der Kraft bewegt, = 0 sein.

Man nennt das Product einer Kraft in die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes den Effect der Kraft. Wenn also Kräfte im Gleichgewicht sind u. es wird eine Verschiebung vorgenommen, bei welcher die einzelnen Kräfte Effecte entwickeln, so muß die algebraische Summe dieser Effecte = 0 sein.

Über die Bedeutung des Princips.

Wenn Kräfte, welche auf ein System von Punkten wirken, der Bedingungsgleichung der virt. Geschw. entsprechen, so ist damit keineswegs ausgesprochen, daß das System ruhen müsse; sondern nur, daß diese Kräfte nicht im Stande sind eine Bewegung einzuleiten, od. einen schon vorhandenen Bewegungszustand zu verändern.

Die Wirkung, wo eine wirkende Kraft hervorbringt, wird der Größe nach gemessen

j.

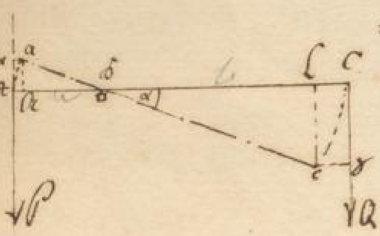
durch das Product aus der Kraft in den Weg, welchen der Angriffsp., nach der Richtung der Kraft geschätzt, zurücklegt.

Ist dieser Weg unendlich klein, so nennt man das Product das _Element_ der Wirkung der Kraft. Die einzelnen Glieder des Princips der virt. G. drücken demnach die Elemente der Wirkung aus, welche die verschiedenen Kräfte hervorbringen, die das System um unendlich wenig aus der Gleichgewichts-position verschieben, u. die ganze Gleichung drückt aus, daß die Summe sämmtlicher Elementar-wirkungen = 0 sein müssen. Kräfte, deren Angriffsp. bei irg. einer Bewegung zurück-schreiten sind hinsichtlich dieser Bewegung als Widerstände anzusehen, u. ihre Ele-mentarwirkungen, welche in der Rechnung als negative Größen erscheinen, kann man im Gegensatz mit der Wirkung der Kräfte, deren Angriffsp. vorwärts schreiten _Gegenwirkungen_ oder _Wider-stände_ nennen. Die Gleich. des Princ. d. v. G. spricht mithin aus: daß die Summe der Elemente der Wirkungen der Kräfte gleich ist der Summe der Elemente der Wirkungen der Widerstände, od. daß die totale Wirkg sämtlicher Kräfte = 0 ist, wenn sich die Kräfte das Gleichgewicht halten u. eine Bewegung od. Verschiebung vorgenommen wird.

Beispiele zur Erläuterung.

Nehmen wir einen Hebel an. Die Bedingungen des geometr. Zusammenhanges sind, daß AC eine starre Linie sei u. in B ein fester Stützpunkt sich befinde.

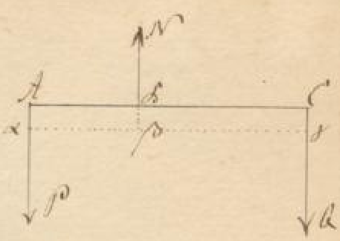
Das System sei im Gleichgewicht. Wir verschieben es um unendlich wenig, daß A nach α, u. C nach c kommt, so hat man:
AB = a, u. BC = b gesetzt.



$$-P(A\alpha) + Q(C\gamma) = 0$$
$$-P(\mathfrak{a}\alpha) + Q(\mathfrak{C}c) = 0$$
$$-P(a\sin\alpha) + Q(b\sin\alpha) = 0$$
$$-Pa + Qb = 0$$
$$Pa = Qb$$

Beispiel 2.

Es soll vermittels des Princ. der v. G. der Druck, den der Unterstützungspunkt B erleidet, bestimmt werden. Wir müssen statt dem festen Punkt eine Kraft N anbringen, um das ganze System um unendlich wenig bewegen zu können; da nun wenn wir eine Bewegung vornehmen, für und das Princ. zu einem veränderten Zustande. Die Verschiebung ist ganz beliebig; wir können das System z. B. in horizontaler Richtung rechts od. links verschieben, aber dann erhalten wir zufällig 0 = 0, woraus wir nichts sehen. – Aber verschieben wir es aufwärts nach $\alpha\beta\gamma$, so gibt das Princ.:



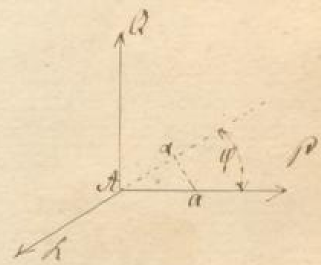
$$P(A\alpha) + Q(C\gamma) - N(B\beta) = 0$$

da aber $(A\alpha) = (C\gamma) = (B\beta)$, so ist

$$P + Q = N.$$

wie wir das schon aus der Statik kennen.

Beisp. 3.



Man hat ein System v. Kräften, wobei auf den frei beweglichen Punkt A die beiden Kräfte P u. Q senkr. auf einander u. eine (beliebige) Kraft R wirken. Das ganze ist im Gleichgew. u. man will hierauf das Princ. der v. G. anwenden.

Die Verschiebungen die wir hier vornehmen können sind vierlei Art; 1.) nach der Richtung der Kraft P, 2.) nach d. R. der K. Q u. 3.) nach der Richtg der Kraft R u. 4.) endlich nach jeder beliebigen Richtung hin.

Betrachten wir diese Fälle nach einander, so finden wir:

1)

Es kommt der Pkt A nach a, u. Aa sei $= s$.
so hat man: Wirkg der $P = Ps$

Wirkg v. $Q = 0$

W. v. $R = Rs\cos\varphi$ daher

$$Ps - Rs\cos\varphi = 0$$

$$Ps = Rs\cos\varphi \text{ od. } P = R\cos\varphi$$

2.

Es gehe der P. A nach a, u. $Aa = s$, so ist:

Wirkg der Kraft $P = 0$

W. d. K. $Q = Q(Aa)$

W. d. K. $R = R(A\alpha)$

$A\alpha = s\sin\varphi$ folglich:

$$Qs - Rs\sin\varphi = 0$$

$$Q = R\sin\varphi.$$

3.

Verschieben wir den P. A nach der Richtg der Kraft R nach a, u. setzen $Aa = s$, so ist:

Wirkg v. $R = R(Aa)$

W. v. $Q = Q(Aq)$

W. v. $P = P(Ap)$

$Aa = s$, $Aq = s\sin\varphi$, $Ap = s.\cos\varphi$ u. daher

$$-Rs + Ps\cos\varphi + Qs\sin\varphi = 0$$

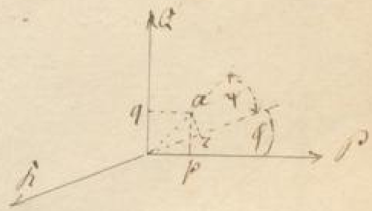
$$R = P\cos\varphi + Q\sin\varphi.$$

Durch Zusammensetzung v. (1, u. 2) hätte man dasselbe Resultat erhalten; u. zwar nämlich

$$P\cos\varphi = R\cos^2\varphi$$
$$Q\sin\varphi = R\sin^2\varphi$$
$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi = R.$$

2.

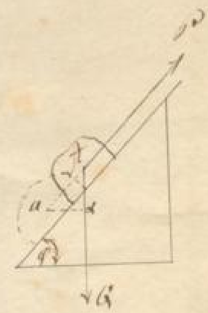
Verschieben wir endlich das System so, daß A nach a kommt u. PAa = ψ einem beliebigen Winkel ist, u. setzen Aa = s, so ergibt sich:



$$P(Ap) + Q(Aq) = R(Ar)$$
$$Ap = s\cos\psi, \quad Aq = s.\sin\psi, \quad Ar = s\cos(\psi-\varphi)$$
$$Ps\cos\psi + Qs.\sin\psi = Rs.\cos(\psi-\varphi)$$
$$P\cos\psi + Q\sin\psi = R\cos(\psi-\varphi)$$
$$= R(\cos\psi\cos\varphi + \sin\varphi\sin\psi)$$
$$\sin\psi(Q - R\sin\varphi) + \cos\psi(P - R\cos\varphi) = 0$$

Gilt nun ψ für einen Bestimmten, sowie es für einen jeden, so muß

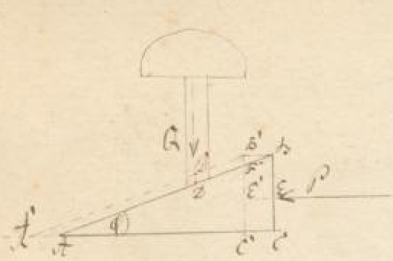
$Q - R\sin\varphi = 0$ u. $P - R\cos\varphi = 0$ sein
oder $Q = R\sin\varphi$, $P = R\cos\varphi$ werden.



Beispiel 4.

Auf einer schiefen Ebene befindet sich ein Körper, den die Kräfte P u. Q im Gleichgewichte halten, man soll hierauf das Prinzip anwenden.

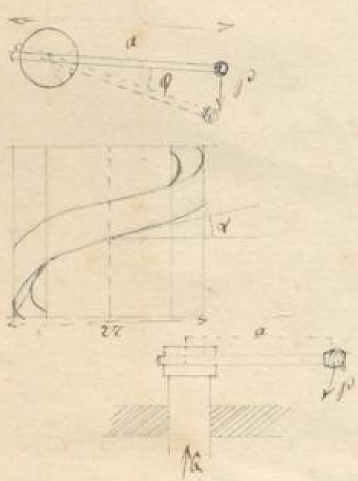
Man verschiebe die Last, so daß der Pkt A nach a kommt, so ist: $P(Aa) = Q(A\alpha)$,
$A\alpha = Aa\sin\varphi$; $P(Aa) = Q\,Aa\sin\varphi$,
$P = Q\sin\varphi$, welches die Bedingung für's Gleichgewicht ist.



Beispiel 5.

Das Princip angewendet auf ein System mit einem Keile.

$$P(EE') = Q(DD')$$
$$P(DD') = Q(D'F)$$
$$D'F = DD' \operatorname{tg}\varphi$$
$$P = Q \operatorname{tg}\varphi$$, die Gleichung fürs Gleichgewicht.



Beispiel 6.

Man soll vermittelst des Princips die Gleich. fürs Gleichgewicht finden für die Schraube. Die constanten Abmessungen sind a, $2r$.

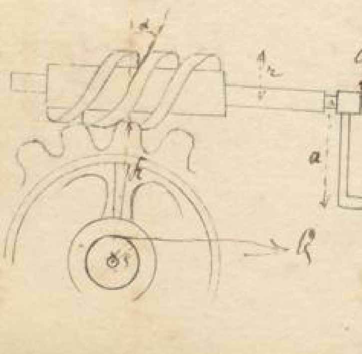
Weg, welchen der Angriffsp. v. P zurücklegt $= a\varphi$

" eines Punktes am äußeren Umfange einer Schraubengewindes ---- $= r\varphi$

" , den der Angriffsp. v. Q zurücklegt -- $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha$.

Daher $Pa\varphi = Q r\varphi \operatorname{tg}\alpha$

$Pa = Q r \operatorname{tg}\alpha$, welches die verlangte Gleichung ist.



Beispiel 7.

Für nebenstehendes System vermöge des Princips die Gleichgewichtsgleichung zu finden.

Weg, den der Angriffsp. v. P zurücklegt .... $= a\varphi$

" eines P. am Umfange der Schraube ---- $= r\varphi$

" " " " " des Rades .... $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha$

" " " " " der Trettwelle ... .. $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha \frac{\rho}{R}$

", welchen d. Angriffsp. v. Q zurücklegt .... — $= r\varphi \operatorname{tg}\alpha \frac{\rho}{R}$

daher: $Pa\varphi = Qr\varphi\, tg\alpha \frac{\varrho}{r}$

$P = \frac{r}{a}\frac{\varrho}{r}\, tg\alpha\, Q.$

Beispiel 8.

Für ein System, wie nebenstehendes, soll die Bedingung fürs Gleichgewicht aufgestellt werden. Es sei $AB = l$, $\angle ABC = \varphi$. So ist

$BC = l\cos\varphi$, $AC = l\sin\varphi$

Allein verschieben wir B nach b. u. A nach a, so ist $P(Bb) = Q(Aa)$. Nun ist:

$d.\,BC = d.\,l\cos\varphi = -\,l\sin\varphi\, d\varphi$

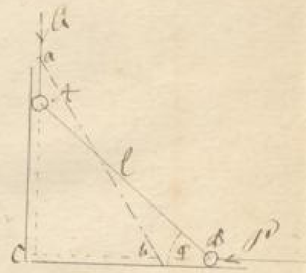
$d.\,AC = d.\,l\sin\varphi = l\cos\varphi\, d\varphi$

$Bb = l\sin\varphi\, d\varphi$; $Aa = l\cos\varphi\, d\varphi$ als unendlich kleine Theile von BC u. AC;

folglich $Pl\sin\varphi\, d\varphi = Q\, l\cos\varphi\, d\varphi$

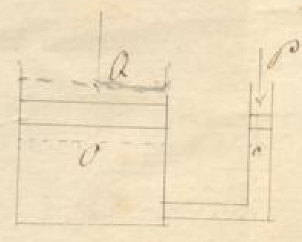
$P\sin\varphi = Q\cos\varphi$

$\frac{P}{Q} = cotg\,\varphi$; $\frac{Q}{P} = tg\,\varphi.$



Beispiel 9.

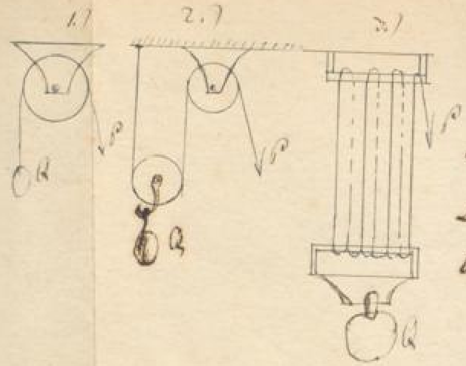
In dem System, das etwa eine hydraulische Presse vorstellen mag, die Bedingungen fürs Gleichgewicht zu finden.



Bezeichnen den kleinen Kolben Fläche ... $= s$

.. .. .. größte .. .. .. $= s\frac{O}{o}$

also $Ps = Qs\frac{o}{O}$, od. $Q = \frac{PO}{o}$



Beispiele vom Rollenzuge.

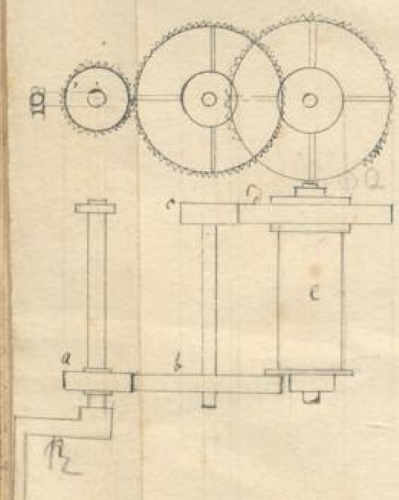
bei 1.) ist $P = Q$.

bei 2.) ist $P(2a) = Q(a)$ od. $Q = 2P$, $P = \frac{Q}{2}$

bei 3.) bekommen $P = \frac{Q}{n}$

Beispiele z. Räderwerken.

1.)



Man soll für nebenstehendes System vermöge des Princips d. v. G. die Gleichung fürs Gleichgewicht finden.

Die constanten Abmessungen seien:

Halbmesser der Kurbel ---- $= R$

" des Rades a ---- $= r$

" " " b ---- $= R_1$

" " " c ---- $= r_1$

" " " d ---- $= R_2$

" des Cylinders e ---- $= r_2$

der Wendungswinkel der Kurbel $= \varphi$

Nun ist:

Weg, den der Angriffsp. v. P zurückl. ---- $= R\varphi$

" " " Punkt am Umfange des Rades a .. ---- $= r\varphi$

" " " ...... b .. ---- $= r\varphi$

...... c ...... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}$

...... d ...... $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}$

.. .. der Welle e ---- $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}$

.. .. .. Angriffsp. v. Q .. .. $= r\varphi\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}$

folglich:

$$P R \varphi = Q r \varphi \frac{r_1}{\rho_1} \frac{r_2}{\rho_2} \text{ u.}$$

$$P = \frac{r}{\rho} \cdot \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} Q.$$

Da in der Gleich. nur verh. Größen vorkommen, so sollte man auch eine endliche Verschiebung voraussetzen können.

Man soll nun auch die Pressungen bestimmen, welche zwischen den Zähnen von je zwei Rädern statt finden. z. B. zwischen c u. d. Zu dem Ende denkt man sich das Rad d weg u. durch eine der Gegenwirkung gleiche Kraft N ersetzt, u. bewegt nun das System um unendlich wenig, so hat man:

2.

Die senkr. Abst. des Systemes seien:

Halbm. der Kurbel a ------- $= \rho$

" des Rades b ------- $= r$

" der Schraube d ------- $= r_1$

" des Rades c ------- $= \rho_1$

Neigungsw. der Schrb. d ----- $= \alpha$

Halbmesser des Rades e ------ $= \rho_2$

" " " f ---- $= r_2$

Winkelgeschw. der L. ---- $= \varphi$

Nun ist:

Weg, d. d. Angriffsp. v. P zurücklegt .... $= h\varphi$

" " ein P. am Umf. des Rades b .. $= r\varphi$

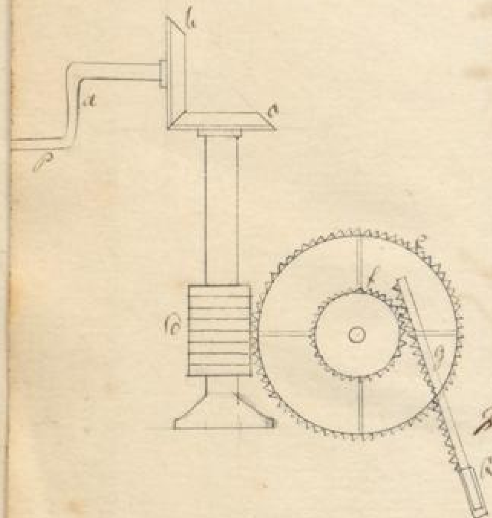
" " - - - - c .. $= r\varphi$

" ... ... der Schraube d .. $= r\varphi \frac{r_1}{\rho_1}$

" .... des Rades e ... $= r\varphi \frac{r_1}{\rho_1} tg\alpha$

" .... f ... $= r\varphi \frac{r_1}{\rho_1} tg\alpha \frac{r_2}{\rho_2}$

" .. die Zahnstange od. der Angriffsp. v. Q .. $= r\varphi \frac{r_1}{\rho_1} \frac{r_2}{\rho_2} tg\alpha$



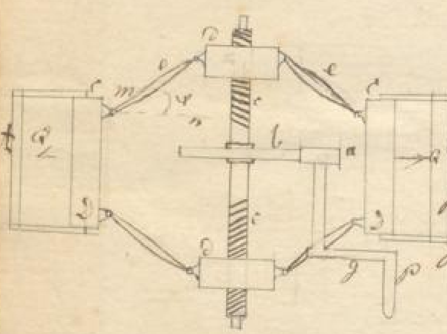
folglich:

$$Ph\varphi = Q\, r\varphi \frac{r_1}{\rho_1} \frac{r_2}{\rho_2} tg\alpha$$

$$P = \frac{r}{h} \cdot \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot tg\alpha\, Q.$$

Auch hier hätte man eine endlose Schraube anwenden können.

3.



Es seien A, B zwei fest miteinander verbundene Platten, zwischen welchen sich das mech. System befindet u. zum Zwecke hat die Platten CD an die ersteren anzupressen, ähnlich wie bei einer Münzpresse.

Die wesentl. Abmessungen sind:

Halbmesser der Kurbel g .... $= h$

" des Rades a .... $= r$

" " b .... $= r_1$

" der Schraube c .... $= r_2$

Neigungsw. der " c .... $= \alpha$

" " , dmn .... $= \varphi$.

Drehungsbogen der Kurbel . . . . . $= \psi$

Weg. den d. Angriffsp. v. P zurücklegt $= k\psi$

.. .. am Pt. am Umfang d. Zahnrads ... $= r\psi$

.. . . b .. $= r\psi$

.. . . Schraube c .. $= r\psi \frac{r_1}{R_1}$

.. .. .. inneren Pt. der Schraubenmutter (auf Ebene d. B.) .. $= r\psi \frac{r_1}{R_1} tg\alpha$

.. .. der Angriffsp. v. Q .. .. $= r\psi \frac{r_1}{R_1} tg\alpha\, tg\varphi$

daher fürs Gleichgewicht:

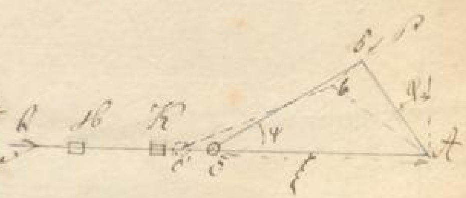
$$Pk\psi = 2Qr\psi \frac{r_1}{R_1} tg\alpha\, tg\varphi$$

$$P = \frac{r}{k} \frac{r_1}{R_1} tg\alpha\, tg\varphi \cdot Q$$

Beispiele mit verschiebbaren Stangen u. dergl.

1.

Das System ist von der Art, daß, wenn an B eine Last P thätig ist, der Pkt B, der mit dem festen Pkte A verbunden ist, in einem Kreisbogen sich nach b bewegen kann, u. dadurch die horizontale Stange HK in ihrer Lage verschoben u. der Widerstand Q überwunden wird. Der Pkt C kommt nach c.



Es sei der Winkel, den BA mit einer auf AC senkr. bildet $= \varphi$, $\angle BCA = \psi$, u. $AC = \xi$, ferner $AB = r$, $CB = l$.

Nun ist $l \sin\psi = r\cos\varphi$ u.

$l\cos\psi + r\sin\varphi = \xi$; ferner

$$l^2 = r^2\cos^2\varphi + (\xi - r\sin\varphi)^2$$
$$\xi - r\sin\varphi = \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}$$
$$\xi = r\sin\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}$$

Der Weg, den der Angriffsp. v. P zurücklegt ist $r d\varphi$; u. der Weg der Last Q ist nichts anderes als die unendlich kleine Änderung der Größe AC, $d\xi$ also haben wir für den gesuchten Weg $d.\xi$.

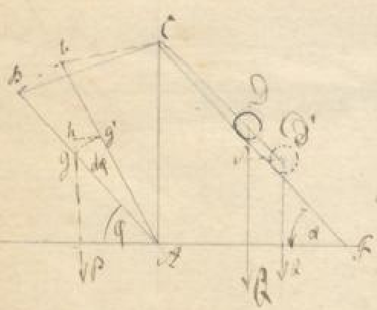
$$d\xi = r\cos\varphi\, d\varphi + \frac{-2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}};$$
$$= r d\varphi\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$

daher $P r d\varphi = Q d.\xi$

$$= Q r d\varphi\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$
$$P = Q\left(\cos\varphi + \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right)$$

Im Falle, dass l sehr groß ist gegen r, hätte man näherungsweise $P = Q\cos\varphi$.

2.



Es stelle AB etwa eine Fallthüre vor, deren Schwerp. in G sich befindet. Vermöge einer Last Q, die auf einer schiefen Ebene herabgleiten kann u. durch ein Seil an die Thür befestigt ist, kann die Thüre aufgezogen werden. Man soll die Bedingung des Gleichgew. angeben. Wir verschieben also das System um unendlich wenig, dass B nach b, u. D nach d kommt. Der Winkel z), den die Fallth. mit der horizontalen Linie macht, sei φ. der const. $\angle CBA = \alpha$. Nun ist:

$$P(Gh) = Q(Dd);$$

es sei $AG = a$, so ist $Gg = a\,d\varphi$;

$$Gh = Gg \cos\varphi = a \cos\varphi\, d\varphi$$

Um Dd zu bestimmen sei:

$$BC + CD = l, \quad AB = AC = b.$$

So ist Dd nichts anderes als die Änderung von BC. Es sei $BC = y = 2b \sin\tfrac{1}{2}(90-\varphi)$

$dy = -2b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\frac{d\varphi}{2}$, also

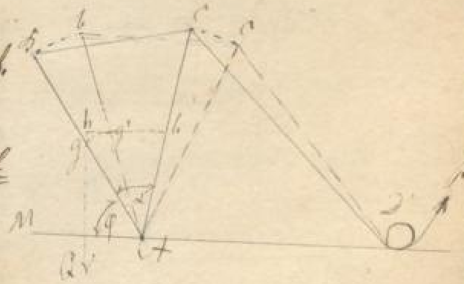
$Dd = b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\,d\varphi$ (blos numerisch).

u. $Pa \cos\varphi\, d\varphi = Q b \cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\, d\varphi \sin\alpha$

$$P = Q\,\frac{b}{a}\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(90-\varphi)\sin\alpha}{\cos\varphi}$$

3.

Ein mechanisches System ähnlich dem vorstehenden benützte man in Paris, um einen Obelisken aufzurichten. Es sei AB eine Stellung desselben, während des Aufziehens; AC sei ein Balken, der sich in einer vertikalen Ebene um den Punkt A drehen kann. Die Seile gehen von B nach C u. werden bei D aufgewunden mit der Kraft P, so daß der $\angle\alpha$ const. bleibt während der Drehung.



Man verschiebe die Punkte, so daß B nach b, u. C nach c kommt, so ist

$$Q(Gh) = Pd.\,CD.$$

Es sei $AG = a$, $AB = AC = b$, $AD = c$, $\angle BAM = \varphi$.

(Fig.) $CD^2 = b^2+c^2-2bc\cos(180-(\alpha+\varphi))$

$$CD = \sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}$$

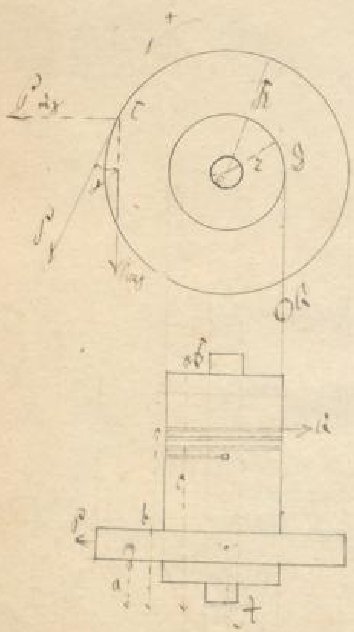
$$d.CD = -\frac{bc\sin(\alpha+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}}$$

$gh = a\cos\varphi\, d\varphi$; daher

$$\frac{Pbc\sin(\alpha+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}} = Qa\cos\varphi\, d\varphi$$

$$P = \frac{Qa}{bc}\,\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\varphi)}$$

als Gleichung fürs Gleichgewicht.



<u>Beispiel</u> mit Rücksicht auf Reibung.

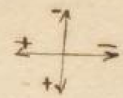
Man soll bestimmen, welche Kraft P nöthig ist, um die Last Q aufzuziehen, vermittelst des Princ. der virt. Geschw. eben mit Bezug auf Reibung. Es sei f der Reibungscoefficient.

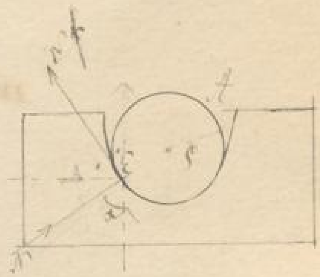
Zu dem Zwecke denken wir uns die Lager weg u. entsprechende Kräfte dafür angebracht. An A wirke N, an B dieselbe N_1. Es sei ferner R der Rad. des Rades; r der Welle, u. ρ des Zapfens.

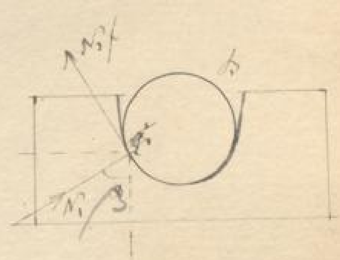
Als Unbekannte haben wir 1.) $\frac{P}{Q}$, 2.) den $\angle\alpha$, welchen N mit der Verticalen macht, 3.) den $\angle\beta$, welchen N_1 mit d. V. bildet; 4.) N, u. 5.) N_1. Um diese fünf Unbekannten zu ermitteln, sind auch fünf Gleichungen nothwendig, die wir folgendermaßen erhalten:

26.27.

Wir nehmen 1) eine verticale Verschiebung u. 2.) eine Horizontale an; u. nachdem wir die Kräfte in rechtw. zerlegt haben, sehen wir was für Kräfte Wege zurückgelegt haben.







	Horizontale Kräfte.	Verticale Kräfte.
P liefert	$P\sin\gamma$	$P\cos\gamma$
N	$-N\sin\beta$	$-N\cos\beta$
Nf	$Nf\cos\beta$	$-Nf\sin\beta$
N_1	$-N_1\sin\delta$	$-N_1\cos\delta$
$N_1 f$	$N_1 f\cos\delta$	$-N_1 f\sin\delta$
Q	0	Q

Bewegen wir also das Syst. senkrecht aufwärts, so sind die Projekt. der Wege der Horizont. Kräfte auf ihre Richtungslinie $=0$ u. folglich die algebraische Summe $=0$;

$$0 = P\sin\gamma - N\sin\beta + Nf\cos\beta - N_1\sin\delta + N_1 f\cos\delta \quad \mathrm{I.}$$

Bewegen wir das Syst. horiz., so sind die Proj. der Wege der vertik. Kräfte $=0$ u. daher

$$0 = P\cos\gamma - N\cos\beta - Nf\sin\beta - N_1\cos\delta - N_1 f\sin\delta + Q \quad \mathrm{II.}$$

Denken wir uns eine Axe durch den Punkt B u. welche durch A gelegt, lassen wir das System sich um diese Axe etwas aufwärts drehen, so erhalten wir zwei ferneren Gleichungen u. zwar:

wenn wir die Entfernungen der Angriffspte von P, Q u. N von dieser Axe = a, b, c setzen, so sind die statischen Momente:

III. $0 = aP\cos\gamma + Qb - (N\cos\alpha + Nf\sin\alpha)c$

u. für eine Drehung um die Axe durch B:

IV. $0 = Q(c-b) + P\cos\gamma(c-a) - (N\cos\alpha + Nf\sin\alpha)c$

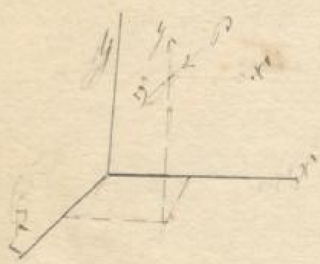
Und endlich durch eine Drehung um die Axe AD erhält m. die 5te Gl. wie folgt:

V. $0 = Ph - Qr - Nf\varrho - N_1 f\varrho_1$.

Mit Hülfe dieser 5 Gleichungen lassen sich auch die 5 genannten Unbekannten finden.

Die bisherigen Beispiele mögen hinreichen, die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit auf Systeme, welche starr sind, zu lehren.

Man hat noch eine andere allgemeine Formel aufgestellt, u. zwar für reine analytische Untersuchungen.



Nämlich: Es wirke auf den Pkt A eine Kraft P; man projic. den Pkt auf 3 rechtw. Coordinatenaxen; zerlege die Kraft P in drei mit Axen parallele Kräfte. Wenn der Weg von P in der unendlich kleinen Zeit $= \delta p$, der von X, Y u. Z $= \delta x$, δy u. δz ist,

29. so hat man $P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$;
allgemein ist aber $\Sigma P\delta p = 0$ folglich

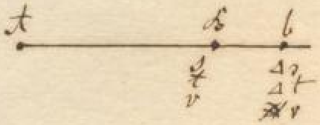
$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

welches die allgemeine Gleichung ist.

Von der Aufsuchung der Geschwindigkeit, des Weges u. der sich bewegenden Körpern.

Wenn eine Masse sich gleichförmig bewegt, so bewegt sie sich in Folge der Trägheit od. die Kräfte, die auf sie wirken, sind vollkommen den Widerständen gleich, die der Bewegung entgegen streben.

Es bewege sich nun eine Masse gleichförmig von A gegen B; der Weg AB sei $= s$, die Zeit $= t$ u. die Geschwindigkeit $= v$. Nun betrachte man die Bewegung noch einen Augenblick länger bis er auch b kommt, der unendlich kl. Weg sei $= \Delta s$, die Zeit Δt, u. die Geschw. $= \Delta v$.



Wir haben $s = vt$ u.

$$s + \Delta s = v(t + \Delta t),$$ ~~mit einander~~ abgezogen

gibt $\Delta s = v\Delta t$ d.h. $\frac{\Delta s}{\Delta t} = i =$ einer constanten Größe; da aber $\frac{s}{t} = v$, so ist auch $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ od. die Grenze $\frac{ds}{dt} = v$.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wenn sich ein Körper von A nach B bewegt mit gleichförmig beschleun. Geschwindigkeit, so ist bei der weitern Bewegung während den gleichen Zeitabschnitten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nicht mehr eine constante, sondern eine zunehmende od. abnehmende Größe. Je kleiner aber Δs od. Δt ist, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ der constanten v, d.h. je kleiner Δt ist, desto mehr kann man annehmen, daß die Bewegung die erreichte Geschwindigkeit während der Unendlichkeit von Δs als constant beibehalte; also wird sie die Grenze $\frac{ds}{dt} = v$. Ferner ist $\frac{ds}{dt} = f(t)$; $ds = f(t).dt$ &

$$s = \int f(t)dt.$$

Wenn s bekannt ist als $f(t)$, so ist auch v bekannt, da $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d.f(t)}{dt}$.

Wenn auf einen Körper, dessen Last Q ist, eine Kraft F wirkt eine Zeit t hindurch mit der Anfangsgeschwindigkeit $= 0$, so ist $v = g\frac{F}{Q}t$, für noch eine Zeit Δt ist:

$v+\Delta v = g\frac{F}{Q}(t+\Delta t)$ v. einander abgezogen:

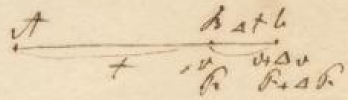
$\Delta v = g\frac{F}{Q}\Delta t$. u. $\frac{\Delta v}{\Delta t} = g\frac{F}{Q}$, die Grenze

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{F}{Q}.$$

Ungleichförmig beschleun. Bewegung,

wenn nämlich sich auch die Kraft ändert, die dem Körper eine Bewegung mittheilt.

Der Körper bewege sich von A nach b u. erreiche dort bei einer Kraft F die Geschw. = v. Bei einer weiteren Bewegung während der Zeit Δt gelange er in b bei einer Kraft $F+\Delta F$ eine Geschwindigk. $v+\Delta v$.



Wir haben aber:

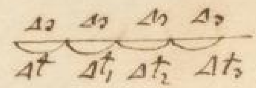
$\Delta v > g \frac{F}{Q} \Delta t$, wenn näml. die Kraft zunimmt;

$\Delta v < g \frac{F+\Delta F}{Q} \Delta t$, wie schon die Kraft $F+\Delta F$ auf den Körper gewirkt hätte.

Oder $\frac{\Delta v}{\Delta t} \frac{Q}{g} > F$ u. $< F+\Delta F$

u. für die Grenze ist $\frac{dv}{dt} = g \frac{F}{Q}$ oder wie oben, weil $dv = \frac{ds}{dt}$ ist,

$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \frac{F}{Q}$, wenn wir die Zeitabschnitte gleichgroß annehmen.



Wir hätten auch die Wege gleichgroß annehmen können u. die Zeitabschnitte veränderlich, aber das erstere ist das Gewöhnlichere.

die Masseneinheit werden wir annehmen, wo der Körper ein Gewicht hat von $19^{K}616$; nämlich ein Körper von diesem Gewicht legt in der ersten Secunde einen Weg von $9^{m},808$ zurück beim freien Fall. Hieraus folgt

$$\frac{Q}{2g} = M = 1 \text{ od. } Q = 2gM;\; g\frac{F}{2gM} = g\frac{F}{Q}.$$

Beispiele

zur Übung in der Anwendung der differential gleichungen.

Wir haben nämlich die Gleichungen:

$$\frac{ds}{dt} = v;\; \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{F}{Q} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}.$$

1.

Für eine constante Kraft F ist:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q};\; dv = g\frac{F}{Q}dt.$$

$$v = \int g\cdot\frac{F}{Q}dt = g\frac{F}{Q}t + C$$

Ist sie für $t=0$, $v=c$ gewesen, so ist

$$v = 0 + C$$

$$v - c = g\frac{F}{Q}\cdot t;$$

$$v = c + g\frac{F}{Q}\cdot t;$$

$$\frac{ds}{dt} = c + g\frac{F}{Q}\cdot t;\; ds = c\,dt + g\frac{F}{Q}t\cdot dt$$

$$s = ct + \frac{1}{2}t^2 g\cdot\frac{F}{Q} + b$$

wobei b der Weg bis zum Anfangspunkt der Zeit t ist.

Im Falle gar keine Kraft wirkt, also $F = 0$ ist, so hat man:

$$\frac{dv}{dt} = 0;\quad v = A,\ \frac{dz}{dt} = A;$$
$$z = At + B$$

wobei A u. B zwei constante Größen sind.

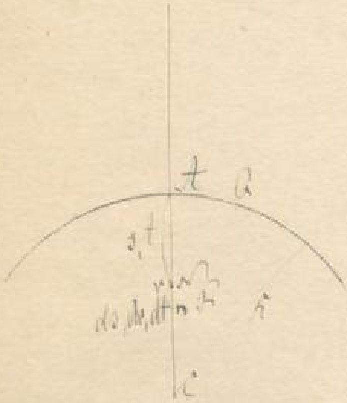
Beispiel 2.

Ein frei fallender Körper habe nach der Zeit t den Weg $AN = z$ zurückgelegt. Es sei Q die Kraft in Kilogr. ausgedrückt, welche in B auf ihn einwirkt vermöge der Attraction. Diese Kraft sei in $N = F$, so ist, wenn $AB = h$ u. $BC = R$:

$$F : Q = R^2 : (R+h-z)^2$$
$$F = \frac{QR^2}{(R+h-z)^2}$$
$$\frac{dv}{dt} = g\frac{QR^2}{Q(R+h-z)^2} = g\frac{R^2}{(R+h-z)^2};$$ ferner ist:
$$\frac{dz}{dt} = v$$ u. die beiden Gl. miteinander multipl.
$$v\,dv = g\frac{R^2}{(R+h-z)^2}dz,$$ mithin
$$\frac{v^2}{2} = gR^2\int\frac{dz}{(R+h-z)^2} = gR^2\frac{1}{R+h-z} + C$$
Da aber für $v=0$, $z=0$ ist, so erhält man:
$$0 = gR^2\frac{1}{R+h} + C;\quad C = -gR^2\frac{1}{R+h}$$
mithin $$\frac{v^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)$$
$$v = \pm R\sqrt{2g\left\{\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right\}}$$
ferner $$dt = \frac{dz}{v} = \frac{dz}{R\sqrt{2g\left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)}}$$
$$t = \frac{1}{R\sqrt{2g}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}}}$$

Beispiel 3.

Denken wir uns, ein Körper falle von einem Punkte der Oberfläche der Erde nach dem Mittelpunkt C. Nachdem er eine Zeit t gefallen, soll er eine Geschwindigkeit v besitzen u. einen Weg s zurückgelegt haben. Im Innern der Erde ist die Attraction der Entfernung vom Mittelpunkt direct proportional. Daher, wenn der Körper in A ein Gewicht Q hat u. AC = R, so hat man



$$Q : F = \frac{R^3}{R^2} : \frac{(R-s)^3}{(R-s)^2}\,; \quad F = \frac{Q}{R}(R-s)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{Q}\,\frac{Q}{R}(R-s) = \frac{g}{R}(R-s)\,;$$ es ist aber

$v\,dt = ds$, mithin $v\,dv = \frac{g}{R}(R-s)\,ds$ u.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{R}\left(Rs - \frac{s^2}{2}\right) + C$$

oder $v^2 = \frac{g}{R}(2Rs - s^2) + C$

für $s = 0$, ist $v = 0$, also $C = 0$, daher

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \sqrt{(2Rs - s^2)}$$

für $s = R$ erhält man:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(2R^2 - R^2)} = \sqrt{gR}.$$

Welche Geschwindigkeit aber besitzt der Körper, wenn er an dem entgegengesetzten Ende der Erde anlangt? also für $s = 2R$?

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(4R^2 - 4R^2)} = 0.$$

Also würde der Körper dadurch die Erde verlieren.

35. Man hat $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sqrt{(2rs-s^2)}$

$$\frac{ds}{\sqrt{(2rs-s^2)}} = \sqrt{\frac{g}{r}}\,dt$$

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(2rs-s^2)}} = t\sqrt{\frac{g}{r}} = -\operatorname{arc}\sin\frac{2r-2s}{\sqrt{4r^2-3r^2}} + C$$

$$= -\operatorname{arc}\sin\frac{r-s}{r} + C$$

für $t=0$, ist $s=0$, also $C = \operatorname{arc}\sin\frac{r}{r} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

also $t\cdot\sqrt{\frac{g}{r}} = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}(\sin = \frac{r-s}{r})$;

$$\operatorname{arc}(\sin = \frac{r-s}{r}) = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot t$$

$$\frac{r-s}{r} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2} - t\cdot\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$$

$$\frac{r-s}{r} = \cos(t\sqrt{\frac{g}{r}})$$

$$r-s = \cos(t\sqrt{\frac{g}{r}})\,r$$

$$s = r(1-\cos(t\sqrt{\frac{g}{r}}))$$

Für ein u. dasselbe s hat man unendlich viele t, folglich eine oscillirende Bewegung.

Eine ähnliche Bewegung kann erhalten werden dadurch, daß man einen Draht in A befestigt u. daran eine Last Q hängt. Seine natürliche Länge sei $AB = l$; vermöge des Gewichtes dehne er sich um $Bb = \lambda$ aus. Es sei a der Querschnitt u. ε der Elasticitätscoeff.. Die Kraft der Ausdehnung $f = a.\varepsilon\frac{\lambda-s}{l}$

$$P = f - Q = a\varepsilon\frac{\lambda-s}{l} - Q$$

$\frac{dv}{dt} = g\frac{a\varepsilon\frac{(\lambda-s}{l}-1)}{Q}$, u. $\frac{a\varepsilon g}{Ql} = \alpha$ gesetzt:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(\lambda-s) - g$$

$$v\,dt = ds$$

$$v\,dv = \alpha(\lambda-s)ds - g\,ds = (\alpha\lambda-g)ds - \alpha s\,ds$$

$$\frac{v^2}{2} = (\alpha\lambda-g)s - \frac{1}{2}\alpha s^2 + C,\quad C=0$$

$$v = \sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2}}$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2(\alpha\lambda - g)s - \alpha s^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{2(\alpha\lambda - g) - 2\alpha s}{2(\alpha\lambda - g)} \right) + C$$

$$0 = -\sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} + C$$

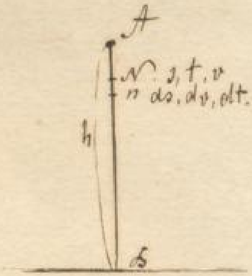
$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\alpha\lambda - g - \alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$\cos t\sqrt{\alpha} = \frac{\alpha\lambda - g - \alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$= 1 - \frac{\alpha s}{\alpha\lambda - g}$$

$$s = \frac{\alpha\lambda - g}{\lambda}\left(1 - \cos(t\sqrt{\alpha})\right).$$

<u>Beispiel 4.</u>



Wenn bei einem frei fallenden Körper Rücksicht genommen wird auf den Widerstand der Luft, u. die Schwere als gleich angesehen wird, so erhalten wir folgende Resultate.

Es sei mv^2 der Widerstand der Luft. Q sei das Gewicht des Körpers, P die Kraft welche ihn abwärts treibt.

$$P = Q - mv^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{P}{Q}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{Q - mv^2}{Q} = g - \frac{gmv^2}{Q} = g - \beta v^2$$

$$dt = \frac{dv}{g - \beta v^2}; \quad t = \int \frac{dv}{g - \beta v^2}; \quad \frac{1}{g - \beta v^2} = \frac{A}{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}} + \frac{B}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{g}} = B$$

$$t = \int \frac{dv}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} + v\sqrt{\beta})} + \int \frac{dv}{2\sqrt{g}(\sqrt{g} - v\sqrt{\beta})}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\beta}} \, \lg n(\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}) - \frac{1}{2\sqrt{g\beta}} \, \lg n(\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}) + C$$

$$C = 0.$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\beta}} \, \lg n \, \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}} .$$

$$e^{2t\sqrt{g\beta}} = \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}} ;$$

$$v = \frac{\sqrt{g}\, e^{2t\sqrt{g\beta}} - \sqrt{g}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\, e^{2t\sqrt{g\beta}}} .$$

Wenn t sehr groß wird, wird der Ausdruck immer mehr constant;

d. i. $v = \sqrt{\frac{g}{\beta}}$.

$$v\,dt = ds$$

$$v\,dv = ds\,(g - \beta v^2)$$

$$ds = -\frac{1}{2\beta} \, \frac{-2\beta v\,dv}{g - \beta v^2} .$$

$$0 = -\frac{1}{2\beta} \lg n\, g + C$$

$$C = \frac{1}{2\beta} \lg n\, g$$

$$s = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{g}{g - \beta v^2}$$

Beispiel 5.

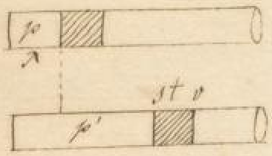
Es soll die Geschwindigkeit berechnet werden, mit welcher der kleine Cylinder sich aus dem größeren bewegt, wenn auf ihn die Spannkraft des sich im Moment in Gas verwandelnden Pulvers wirkt.

1.) Wir setzen voraus der größere Cyl. sei fest.

3.) Die Spannung ändere sich nach dem Mariotteschen Gesetz.

2.) Die Pulvermasse verwandle sich momentan in Gas.

4.) Wir abstrahiren von dem Luftwiderstand. Der Druck des Gases vor der Bewegung sei $= p$, u. nachdem der Weg s zurückgelegt worden $= p'$; Ω der Querschnitt des Rohres; l die Länge; λ die Länge der Pulverfüllung; P der Druck auf den bl. Cylinder nach der Zeit t od. dem zurückgelegten Weg s.



Wir haben zunächst:

$$p : p' = \Omega(\lambda+s) : \lambda\Omega$$

$$p' = \frac{p\lambda}{\lambda+s}$$

$$P = \Omega p' = \frac{\Omega p\lambda}{\lambda+s}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{Q}\,\frac{\Omega p\lambda}{\lambda+s}\;;\ \text{setzen wir}\ \frac{g\Omega p\lambda}{Q} = \beta$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\beta}{\lambda+s}\\ v\,dt &= ds\end{aligned}\right\}\ v\,dv = \frac{\beta\,ds}{\lambda+s}$$

$$\frac{v^2}{2} = \beta\,\mathrm{lgn}(\lambda+s) + C$$

für $s=0$ ist $v=0$

$$0 = \beta\,\mathrm{lgn}\,\lambda + C,\quad C = -\beta\,\mathrm{lgn}\,\lambda$$

daher $\dfrac{v^2}{2} = \beta\,\mathrm{lgn}\left(\dfrac{\lambda+s}{\lambda}\right)$.

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2\beta\,\mathrm{lgn}\,\frac{\lambda+s}{\lambda}}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\beta\,\mathrm{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda}}}\ \text{u.}\ t = \int\frac{ds}{\sqrt{2\beta\,\mathrm{lgn}\frac{\lambda+s}{\lambda}}}.$$

Setzen wir $\mathrm{lgn}\,\dfrac{\lambda+s}{\lambda} = y$, so ist

$$\frac{\lambda+s}{\lambda} = e^y,\quad \lambda+s = \lambda e^y,\quad s = \lambda(e^y-1),$$

$$ds = \lambda e^y\,dy,\ \text{daher}\ t = \int\frac{\lambda e^y\,dy}{\sqrt{2\beta y}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\beta}}\int y^{-\frac{1}{2}}e^y\,dy.$$

was noch zu integriren übrigt.

Beispiel 6.

Die Daten der vorigen Aufgaben bleiben, nur soll Rücksicht genommen werden auf das Zurücktreten des Rohres.

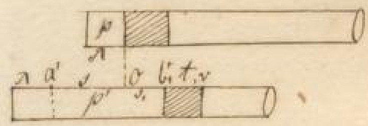
Es sei Q das Gewicht des Rohres.

q . . . des kleinen Cylinders

$ob_1 = s$, u. $Oa' = s_1$.

Geschwindigkeit der Kugel (d. h. d. C.) nach Zeit $t = v$;

. . . . des Rohres . . . . . $= v_1$;



p die Spannung des Gases am Anfang

p' . . . . nach der Zeit t

Ω der Querschnitt des Rohres.

Es ergibt sich:

$$p : p' = \Omega(s+s_1+\lambda) : \Omega\lambda$$

$$p' = \frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda}\;;\quad P = \Omega p' = \frac{\Omega p\lambda}{s+s_1+\lambda}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\cdot\frac{\Omega p\lambda}{q(s+s_1+\lambda)}\;;\quad \frac{dv_1}{dt} = g\frac{\Omega p\lambda}{Q(s+s_1+\lambda)}$$

Bei der Betrachtung dieser beiden Gleichungen finden wir, daß $\frac{dv}{dt}q = \frac{dv_1}{dt}Q$ od. $Q\,dv_1 = q\,dv$ u. $qv = Qv_1 \pm C$; weil für $v=0$, auch $v_1=0$ so ist $C=0$ u. $qv = Qv_1$; u. $q\frac{ds}{dt} = Q\frac{ds_1}{dt}$; $q\,ds = Q\,ds_1$; $qs = Qs_1 + C$, für $s=0$, $s_1=0$, also $C=0$, u. $qs = Qs_1$; $s_1 = \frac{q}{Q}s$;

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{\Omega p\lambda}{q}\cdot\frac{1}{s+\frac{q}{Q}s+\lambda} = g\frac{\Omega p\lambda}{q}\cdot\frac{1}{\lambda+(1+\frac{q}{Q})s}$$

Setzen wir $g\frac{\Omega p\lambda}{q} = \beta$ u. $1+\frac{q}{Q} = \gamma$, so erhält man $\frac{dv}{dt} = \frac{P}{\pi+\gamma s}$

$$\frac{v\,dt = ds}{v\,dv = \frac{P\,ds}{\pi+\gamma s}}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}(\pi+\gamma s) + C$$

$$0 = \frac{P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\,\pi + C$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(\frac{\pi+\gamma s}{\pi}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\pi}s\right)}\,*$$

$$v_1 = \frac{q}{Q}\sqrt{2\frac{P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\pi}s\right)}\,* \;;\; s = \frac{Q}{q}s'$$

$$= \frac{q}{Q}\sqrt{2\frac{P}{\gamma}\,\mathrm{lgn}\left(1+\frac{\gamma}{\pi}\frac{Q}{q}s_1\right)}$$

ferner ist $\frac{ds}{dt} = v$, $dt = \frac{ds}{v}$; * u.

$t = \int\frac{ds}{v}$; was aber bei dem jetzigen Fall auf eine eigenthümliche Funktion führt, für die man erst allgemeine Betrachtungen aufstellen müßte.

Beispiel 7.

Das vorige System beibehalten, nur daß das Rohr zwar beiderseits aber auf beiden Seiten geschlossen ist, so daß man die Kugel (d. h. der luftdicht schließende Cylinder) durch die Spannkraft des Gases zum Austritt getrieben wird, da sie der comprimirten Luft zurückzutreten u. also eine oscillirende Bewegung zu machen genöthigt wird. Endlich wird aber ein Moment eintreten, wo die Kugel u. das Wasser keine Bewegung mehr haben. Man soll diesen Moment durch eine Gleichung ausdrücken.

Es sei q das Gewicht des kl. Cyl. u. Q das des grossen; p u. p', π u. π' die Spannungen in den beiden Räumen; λ_1 die Länge des klein. Cylinders.

Man hat nun:

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad \frac{ds_1}{dt} = v_1;$$

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{q}, \quad \frac{dv_1}{dt} = g\frac{F'}{Q}$$

ferner verhält sich:

$$\pi : p = \Omega\lambda : (s+s_1+\lambda)\Omega$$

$$\pi = \frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda};$$

$$\pi_1 : p_1 = \Omega(l-\lambda_1) : \Omega(l-\lambda_1-s-s_1)$$

$$\pi_1 = \frac{p_1(l-\lambda_1)}{l-\lambda_1-s-s_1}, \text{ daher}$$

$$F = \Omega\pi - \Omega\pi_1 = \Omega(\pi-\pi_1)$$

$$F' = \Omega\pi - \Omega\pi_1 = \Omega(\pi-\pi_1) = F$$

$$F = \Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{g}{Q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+s_1+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-s_1}\right)$$

Es ist aber $\frac{dv}{dt}q = \frac{dv_1}{dt}Q$;

$vq = Qv_1$ ebenso $q\frac{ds}{dt} = Q\frac{ds_1}{dt}$, daher

$$qs = Qs_1 + (C=0); \quad s_1 = \frac{q}{Q}s.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{q}\Omega\left(\frac{p\lambda}{s+\frac{q}{Q}s+\lambda} - \frac{p_1(l-\lambda)}{l-\lambda_1-s-\frac{q}{Q}s}\right)$$

Setzt man hierin $g\frac{\Omega p\lambda}{q} = P$ u. $g\frac{\Omega p_1(l-\lambda)}{q} = P'$

So erhalten wir, wenn $1+\frac{q}{Q}=\gamma$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\beta}{s\gamma+\lambda} - \frac{\beta'}{l-\lambda_1-\gamma s}.$$

$$v\,dt = ds$$

$$v\,dv = \frac{\beta\,ds}{s\gamma+\lambda} - \frac{\beta'\,ds}{l-\lambda_1-\gamma s}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\beta}{\gamma}\,\lg nat(\lambda+\gamma s) + \frac{\beta'}{\gamma}\,\lg nat(l-\lambda_1-\gamma s)+C$$

$$0 = \frac{\beta}{\gamma}\,\lg nat\,\lambda + \frac{\beta'}{\gamma}\,\lg nat(l-\lambda_1)+C$$

$$C = -\frac{\beta}{\gamma}\,\lg nat\,\lambda - \frac{\beta'}{\gamma}\,\lg nat(l-\lambda_1)$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\beta}{\gamma}\,\lg nat\left(\frac{\lambda+\gamma s}{\lambda}\right) + \frac{\beta'}{\gamma}\,\lg nat\left(\frac{l-\lambda_1-\gamma s}{l-\lambda_1}\right)$$

$$v = \sqrt{2\frac{\beta}{\gamma}\,\lg nat\left(\frac{\lambda+\gamma s}{\lambda}\right) + 2\frac{\beta'}{\gamma}\,\lg nat\left(\frac{l-\lambda_1-\gamma s}{l-\lambda_1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\gamma}\left[\beta\,\lg n.\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right) + \beta'\,\lg n.\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}s\right)\right]}$$

$$v_1 = \frac{q}{Q}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\sqrt{\beta \ln\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}s\right)+\beta'\ln\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}s\right)}$$

$$= \frac{q}{Q}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\sqrt{\beta \ln\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\frac{Q}{q}s_1\right)+\beta'\ln\left(1-\frac{\gamma}{l-\lambda_1}\frac{Q}{q}s_1\right)}$$

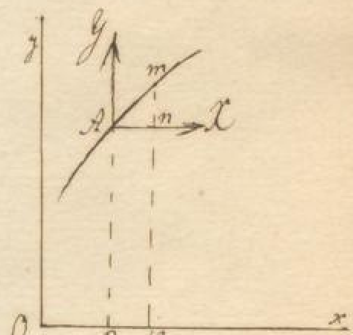
Nun ist $\frac{ds}{dt} = v$; $dt = \frac{ds}{v}$, $t = \int\frac{ds}{v}$, welches Integral auf die [illegible] Funktion führt.

Von der freien krummlinigen Bewegung.

Unter der freien krumml. Bewegung verstehen wir diej. Bewegung eines Punktes, der von Kräften verschiedener Richtung afficirt wird.

1.) Die Bahn des Punktes soll in einer Ebene liegen. Die verschiedenen Kräfte, die auf ihn wirken, geben eine Resultante R. Diese wollen wir in zwei rechtwinkliche Kräfte zerlegen.

Ferner setzen wir voraus, daß alle Massenpunkte parallele u. congruente Bahnen zurücklegen. Dann nehmen wir an, daß wenn der Punkt eine horizontale Bewegung annimt, solche geschehe, als wenn keine vertik. Kraft da wäre; u. wenn er sich vertikal bewegt, als ob keine horizontale Kraft da wäre.



Es seien X u. Y die rechtwink. Seitenkräfte, die auf den Punkt A wirken; Q das Gewicht des Körp.

$Op = x$; $Ap = y$

$Pp = dx$, $mn = dy$

Für die horizontale Bewegung ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{X}{Q} = \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$$

für die vertikale

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\,\frac{Y}{Q} = \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}.$$

die Größen X u. Y sind zuweilen constant, zuweilen Functionen von den Coordinaten.

Wir betrachten sie jetzt als Functionen von den Coordinaten.

Multipliciren wir obige Gleichungen mit 2dx u. 2dy, so erhalten wir $2dx\,\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\,\frac{X}{Q}\,dx$

$$2dy\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}\,Y\,dy$$, durch Addition

$$\frac{2dx\cdot d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}(Xdx + Ydy).$$

$$d.\frac{(dx^2+dy^2)}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}(Xdx + Ydy)$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + C$$

$dx^2 + dy^2$ ist aber der unendlich kleine Weg Am u. da Am = ds ist, so hat man:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + C$$

$$\frac{ds}{dt} = v\,;\quad v^2 = 2\frac{g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + C$$

$$\frac{Qv^2}{2g} = \int(Xdx + Ydy) + C$$

u. da $\frac{Q}{2g}$ die Masseneinheit ist:

$$Mv^2 = \int(Xdx + Ydy)$$

welches die lebendige Kraft ist.

Beispiel 1.

Es soll die Curve eines geworfenen Körpers bestimmt werden, ferner die Geschwindigkeit in jedem einzelnen Punkte der Curve.

Die Geschwindigkeit nach der ersten Dir. sei = c.

Es sei $OP = x$ u. $PM = y$.

Für diesen Fall haben wir $X = 0$

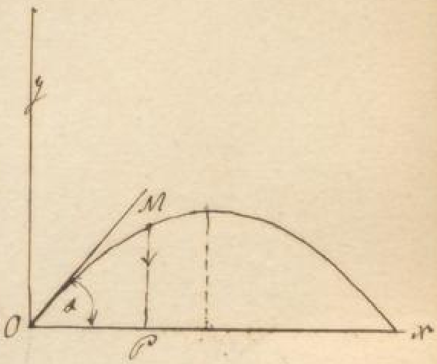
$Y = -g$, nämlich das Gewicht des Körpers zieht abw.

daher $\frac{d^2x}{dt} = 0$, od. $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt} = 0$

$$\frac{d^2y}{dt} = -g = \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}.$$

$$d.\frac{dy}{dt} = -g\,dt, \quad \frac{dy}{dt} = B - gt$$

u. $\frac{dx}{dt} = A$.



$\frac{dx}{dt}$ drückt die horizontale Geschwindigkeit aus. Für $t=0$ oder für den Pkt O ist die horizontale Geschw. $= C\cos\alpha = A$ u. die vertik. $= C\sin\alpha = B$; also hat man

$$\frac{dx}{dt} = C\cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = C\sin\alpha - gt$$

$$dx = C\cos\alpha\,dt$$

$$dy = C\sin\alpha\,dt - gt\,dt$$

$$x = D + C\cos\alpha\,t$$

$$y = E + C\sin\alpha\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Für $t=0$ ist aber $x=0$ u. $y=0$, daher die Constanten $=0$. u.

I $x = C\cos\alpha\,t$

II $y = C\sin\alpha\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$

Substituirt man t aus I in II:

$$t = \frac{x}{C\cos\alpha} \quad \text{also}$$

$$y = \frac{C\sin\alpha\,x}{C\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{C^2\cos^2\alpha}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha . x - \frac{1}{2}\frac{g}{C^2\cos^2\alpha}\,x^2$$

dies ist aber nur leicht selbst die Gleichung einer Kegelschnittlinie. Sucht man vermittels der allgemeinen Gleichung des 2ten Grades der Curvenlinien, so findet man, daß $4AC - B^2 = 0$, folglich ist die gesuchte Bahn eine Parabel.

Auf einfache Weise läßt sich der höchste Punkt der Bahn bestimmen, weil für diesen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist; also

$tg\alpha - \frac{g}{c^2\cos^2\alpha} x_1 = 0$, wenn x_1 die Abscisse für den Punkt ist.

$$x_1 = \frac{tg\alpha \, c^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha$$

Und um die Wurfweite zu finden, setzt man (die $Absc. \overset{gesucht}{=} 2x_1$) x. $y = 0$.

$$0 = x\,tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x^2$$

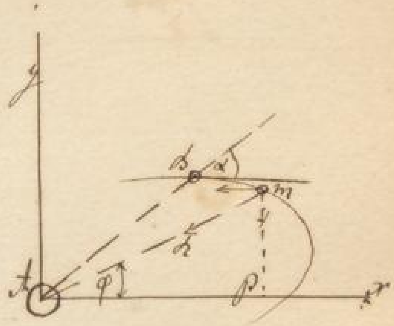
$$x^2 = 2x\,tg\alpha \cdot \frac{c^2\cos^2\alpha}{g}; \quad 0 = tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x$$

$$x = 2tg\alpha \frac{c^2\cos^2\alpha}{g} \cancel{tg\alpha} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{g} = 2x_1.$$

also ist die Curve symmetrisch.

Beispiel 2.

Betrachtung der Bewegung einer geworfenen Masse um einen attractiven Punkt. z. B. in A befinde sich die Sonne u. in B die Erde.



Es sei yAx ein rechtw. Coordinatensystem.

$AP = x$, $mP = y$; t die Zeit, nach welcher der Pkt B nach m kömmt.

Die Anziehungskraft R sei der Masse u. umgekehrt dem Quadrate der Entfernung proportional.

Setzen wir $Am = r$, $\angle mAP = \varphi$.

So haben $R = f\frac{mM}{r^2}$; ferner

f ist die Kraft, mit welcher sich zwei Masseneinheiten in der Entfernung = 1 anziehen.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{2m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{2m}$$

(da nämlich $g\frac{P}{Q} = g\frac{X}{Q}$, $\frac{Q}{2g} = m$, $\frac{Q}{g} = 2m$)

R würde zerlegt in:

$$X = -R\frac{x}{r}, \quad Y = -R\frac{y}{r}$$

$$X = -f\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Y = -f\frac{mM}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$= -fmM\frac{x}{r^3}; \quad Y = -fmM\frac{y}{r^3}$$

daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{2}fM\frac{x}{r^3}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{1}{2}fM\frac{y}{r^3}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}$$

Hieraus erhält man, durch Multipl. mit $\frac{2dx}{dt}$:

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2}fM\frac{2dx.x + 2ydy}{r^3}$$

$$d.\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -\frac{1}{2}fM\,\frac{d.(x^2+y^2)}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{2}fM\,.\frac{d.\,r^2}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{2}fM\frac{2r\,dr}{r^3}$$

$$= -fM\frac{dr}{r^2}.$$

daher $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = f\frac{M}{r} - A.$

Nun ist aber $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= f\frac{M}{r} - A \\ \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} &= f\frac{M}{r} - A \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Aus I erhält m. durch Mult. u. Subtr.:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$d.\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{dt} = -b$$

$$y\,dx - x\,dy = -b\,dt$$

Nun haben wir:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

$$dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$$

$$dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi$$

$$y\,dx = r\cos\varphi\sin\varphi\,dr - r^2\sin\varphi^2\,d\varphi$$

$$x\,dy = r\sin\varphi\cos\varphi\,dr + r^2\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$y\,dx - x\,dy = -r^2 d\varphi$$

also $r^2 d\varphi = b\,dt \ldots$ III

$dt = \frac{r^2 d\varphi}{b}$ dies in die 2te der II Gleich. subst. gibt:

$$b^2\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{r^4 d\varphi^2} = f\frac{M}{r} - A.$$

$$b^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = r^4 d\varphi^2\left(f\frac{M}{r} - A\right)$$

$$b^2 dr^2 = d\varphi^2\left(r^4\left(f\frac{M}{r} - A\right) - r^2 b^2\right)$$

$$b\,dr = r\,d\varphi\sqrt{r^2\left(f\frac{M}{r} - A\right) - b^2}$$

$$d\varphi = b\frac{dr}{r\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$\varphi = \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{fMr - 2b^2}{r\sqrt{-4b^2A + f^2M^2}}\right) + C$$

u. also $\sin(\varphi - c) = \frac{fMr - 2b^2}{r\sqrt{f^2M^2 - 4Ab^2}}$

$$r \sin(\varphi - c)\sqrt{\ldots}) - fMr = 2b^2$$

$$r = \frac{2b^2}{fM - \sin(\varphi \pm c)\sqrt{\ldots})}$$ oder

$$r = \frac{(2b^2 : fM)}{1 - \sqrt{1 - \frac{4Ab^2}{f^2M^2}})\sin(\varphi \pm c)}$$

Dies ist die Polargleichung einer Kegelschnittslinie, die allgemein heißt:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - k)}$$

Setzen wir $\frac{2b^2}{fM} = p$; $\sqrt{1 - \frac{4Ab^2}{f^2M^2}} = e$

u. bestimmen wir die constante k, daß

$\cos(\varphi - k) = \sin(\varphi - c)$ ist,

also $c - k = \frac{\pi}{2}$, $c = k + \frac{\pi}{2}$

so erhalten wir durch vorgenommene Transformation die allgem. Gleichg.

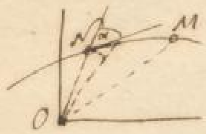
Wenn A positiv ist, so wird $e < 1$ u. die Curve ist eine Ellipse.

Wenn A negativ, so wird $e > 1$ u. die Curve eine Hyperbel.

Und wenn $A = 0$ wäre, was jedoch nicht leicht vorkommen dürfte, so würde $e = 1$ u. die Curve eine Parabel sein.

Um zu untersuchen, wann A diese Werthe annimmt, so bestimmen wir die Constanten, wie folgt:

Es sei $ON = h$, C die Geschw. nach der Tgt. in N.
also für $r = h$, ist $v = C$ u.



$$C^2 = f\frac{M}{h} - A$$

$$A = f\frac{M}{h} - C^2$$ allerdings für den Anfang der Bewegung.

Nun ist $C\,dt \sin\alpha = h\,d\varphi$

$$hC\,dt\sin\alpha = h^2 d\varphi$$

$$h^2 d\varphi = b\,dt$$

$$b\,dt = hC\sin\alpha\,dt$$

$$b = hC\sin\alpha$$

Ferner wollen wir einen Ausdruck für die Axe finden.

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{allgemein.}$$

$$1-e^2 = \frac{4Ab^2}{f^2M^2}, \quad p = \frac{2b^2}{fM}$$

$$a = \frac{2b^2}{fM}\cdot\frac{f^2M^2}{4Ab^2} = \frac{fM}{2A}.$$

Nun schließen wir:

A ist positiv, wenn $C < \sqrt{f\frac{M}{h}}$

" " negat. " $C > \sqrt{f\frac{M}{h}}$

" $= 0$ wenn $C = \sqrt{f\frac{M}{h}}$

Wenn wir annehmen, daß die Curve eine Ellipse sei, so wollen wir die ganze Umlaufszeit bestimmen.

Wir betrachten t als $f(r.)$

$$d\varphi = \frac{b\,dt}{r^2}$$

$$\frac{dr^2 + r^2\frac{b^2dt^2}{r^4}}{dt^2} = f\frac{M}{r} - A$$

6.

51. $dr^2 + r^2 \frac{b^2 dt^2}{r^4} = \frac{fM}{r} dt^2 - A dt^2$

$$dr^2 = dt^2\left(\frac{fM}{r} - A - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{dt^2}{r^2}\left(fMr - Ar^2 - b^2\right)$$

$$dr = \frac{dt}{r}\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}$$

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2}}$$

$$= -\frac{1}{2A}\,\frac{-2Ar\,dr + fM\,dr - fM\,dr}{\sqrt{\cdots}}$$

$$= -\frac{1}{2A}\,\frac{-2Ar\,dr + fM\,dr}{\sqrt{\cdots}} + \frac{fM}{2A}\,\frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$$

$$t = -\frac{1}{A}\sqrt{-b^2 + fMr - Ar^2} + \frac{fM}{2A}\,\frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\arcsin\left(\frac{2Ar - fM}{\sqrt{f^2M^2 - 4Ab^2}}\right) + \vartheta$$

$$\sin\left(\left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A}\right) - \vartheta\right)\frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \frac{2Ar - fM}{\sqrt{f^2M^2 - 4Ab^2}}$$

Die Änderung von t nach einem ganzen Umlauf sei T, daher:

$$\sin\left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta\right)\frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \sin\left(t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta\right)\frac{2A\sqrt{A}}{fM}$$

die Winkel müssen um 2π verschieden sein.

$$\left(t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta\right)\frac{2A\sqrt{A}}{fM} = \left(t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta\right)\frac{2A\sqrt{A}}{fM} + 2\pi$$

$$t + T + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta = t + \frac{\sqrt{\cdots}}{A} - \vartheta + 2\pi\frac{fM}{2A\sqrt{A}}$$

$$T = \frac{\pi fM}{A^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad T^2 = \frac{\pi^2 f^2 M^2}{A^3} = (\pi fM)^2 \frac{8a^3}{f^3M^3}$$

$$T^2 = \frac{8\pi^2 a^3}{fM} \quad \text{daher}$$

$$T^2 : T'^2 = a'^3 : a^3$$

Einige Bemerkungen aus der Geschichte der Mechanik des Himmels.

Keppler stellte die drei Hauptsätze auf:
1.) daß die Bahnen der Planeten Ellipsen seien.
2.) daß die von den Leitstrahlen beschriebenen Flächen, d.h. die Sectoren, den Zeiten proportional seien, die der Planet braucht, um den Bogen des Sectors zu durchlaufen.
3.) daß die Quadrate der Umlaufszeiten den 3ten Potenzen der großen Axen der beschriebenen Ellipsen proportional seien.

Spätere Beobachtungen zeigten, daß die Bahnen keine reinen Ellipsen seien, sondern durch die Störungen, die die Planeten selbst auf einander ausüben, Bahnen beschrieben werden, die aus lauter kleinen Bogenstücken von Ellipsen zusammengesetzt sind.

Keppler konnte auch blos angeben, daß die Bewegung so u. so statt finde, ohne jedoch den Grund davon angeben zu können. Nun bemerkte Newton, daß je weiter ein Körper vom Mittelp. der Erde entfernt werde, desto leichter werde er, aber dennoch immer noch ein Gewicht habe,

53. d. h. von der Erde angezogen werde.
Er schloß weiter, daß diese Beziehung sich auch noch auf den Mond erstrecke, daß ebenso die Erde von der Sonne angezogen werde u. endlich daß jeder Körper ein Vermögen besitze den andern anzuziehen.
Er hat also das Verdienst das wichtige Princip der Trägheit der Massen entdeckt zu haben.
Von ihm ist dann das Gesetz aufgestellt worden, daß sich die Anziehung zweier Körper verhalte, wie die Massen, u. umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen.

An der Untersuchung der vielfach zusammengesetzten Bahnen arbeiteten zuerst Euler u. später mit dem schönsten Erfolge Lagrange u. Laplace.
Bei diesen Berechnungen kamen ihnen gut zu Statten:
1.) daß die Excentricitäten der Bahnen sehr klein sind, so daß sie Kreisen nahe kommen.
2. daß die Flächen der Bahnen nur geringe Neigung gegen einander haben.
3.) daß die große Axe bei allen Ellipsen eine constante Größe ist.

Laplace fand, daß

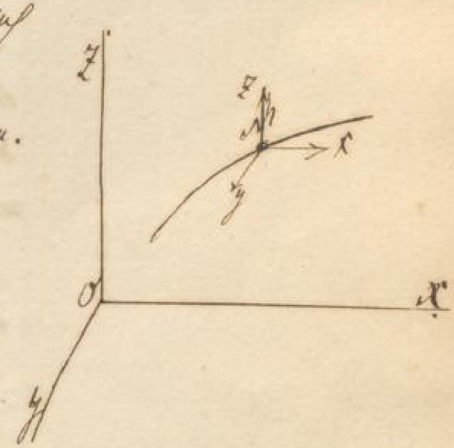
$$m_1\sqrt{a_1}\,e_1^2 + m_2\sqrt{a_2}\,e_2^2 + m_3\sqrt{a_3}\,e_3^2 + \ldots = \text{Constant.}$$

d.h. die Summe der Producte aus den Massen in Quadratwurzel aus der großen Axe u. in dem Quadrat der Excentricität gleich einer Constanten.

Auch die Frage suchten diese beiden Männer, ob nicht durch diese Störungen nach Jahrhunderten od. Jahrtausenden auf die jetzt vorhandene organische Welt auf den Planeten ein zerstörender Einfluß geübt werde? Sie fanden, daß die Unregelmäßigkeiten der Planeten nicht in einfachen Verhältnissen, sondern in sehr verwickelten zu einander stehen, und also jene Frage verneint. Es müßte denn ein unerwarteter Weltkörper in das Planetensystem treten, der gewaltsame Störungen verursachen könnte.

Betrachtung der Bewegung einer Masse im Raume.

Es sei $XOYZ$ ein rechtwinkl. Coordinatensystem. Wir zerlegen die Resultante der Kräfte, die auf den Punkt M wirken in 3 rechtw. Componenten nach den x, y u. z, sie seien X, Y u. Z.
Wir nehmen wieder an die Bewegung nach einer Richtung geschähe, als ob die beiden andern Kräfte gar nicht vorhanden wären.



Wir haben: da $Q = 2gm$

$$d\frac{\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{P}{Q} = g\frac{X}{2gm} = \frac{X}{2m}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{2m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{2m}$$

Beispiel.

Wenn ein Massentheilchen etwa in einem Krystall verschoben wird, so wirken dieser Verschiebung nach verschiedenen Richtungen verschiedene Widerstände entgegen.
Wir wollen daher diese entgegen wirkenden Kräfte $X = -\alpha x$, $Y = -\beta y$, u. $Z = -\gamma z$ setzen, so werden wir durch Substitution in obige Gleichungen erhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{2m}x = 0.$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta}{2m}y = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{2m}z = 0$$

Setzen wir $\frac{\alpha}{2m} = a$, $\frac{\beta}{2m} = b$, $\frac{\gamma}{2m} = c$

so ergibt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + cz = 0$$

Da wir jede Gleichung für sich integriren können, so folgt, wenn wir voraussetzen, daß die Bewegung nach der einen Richtung von den beiden andern unabhängig sei.

Durch Integration obiger Gleichungen erhält man:

$$x = A \sin at + B \cos at$$
$$y = A_1 \sin bt + B_1 \cos bt$$
$$z = A_2 \sin ct + B_2 \cos ct.$$

Wir sehen, daß die Grenzen der Kräfte, da die Sin. u. Cos. zur Grenze 1 haben, eine gewisse Grenze nicht überschreiten können, also eine mehr od. weniger oscillirende Bewegung zur Folge haben.

Unter der Voraussetzung, daß der Punkt bloß verrückt würde, ohne ihm eine anfängliche Geschwindigkeit mitzutheilen, $x = \xi$ für $t = 0$.

56. 57. $\frac{dx}{dt} = a(A\cos at + L \sin at)$
$0 = A.1$, also müssen $A, A_1, A_2 = 0$ sein.

Für den Fall, daß der Punkt einen Stoß erlitten, also eine anfängliche Geschwindigkeit gehabt hätte, ist für $t=0$,
$x = B\cos at$, $0 = B.1$ also müssen $B, B_1, B_2 = 0$ sein.
$y = B_1 \cos bt$
$z = B_2 \cos ct$

Hierher gehört z.B. die schwingende Bewegung des Äthers.

Überhaupt wären wir jetzt auf dem Standpunkte angelangt, wo wir die Probleme der mathem. Physik lösen könnten. Unser Ziel aber ist die Mechanik des Maschinenbaus.
Bei der Physik handelt es sich um Aufsuchung der Gesetze der Bewegung bei gewissen (speciellen) wirkenden Naturkräften.
Dagegen in der Mechanik sind die Wege u. die Geschwindigkeiten gegeben, man hat das System von Kräften zu ermitteln, welche nothwendig sind, die verlangte Bewegung zu erzielen.
In der Mechanik handelt es sich nun um Gleichungen fürs Gleichgewicht zwischen den activen Kräften u. den passiven Massen.

Aus obigen allgemeinen Gleichungen erhält man:

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z}{dt^2} =$$

$$= \frac{2}{m}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$d.\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{2}{m}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2}{m}\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{2}{m}\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C$$

Wenn wir für unsern speciellen Fall substituiren, so erhalten wir:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -(\alpha x dx + \beta y dy + \gamma z dz)$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

$$v^2 = C - \frac{1}{2m}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

Bewegung einer Masse auf vorgeschriebener Bahn.

Die Bahn sei z. B. ein Draht od. eine Röhre, in od. in dem sich der Körper bewegen muß, man soll die Geschwindigkeit des Körpers in verschiedenen Punkten bestimmen, wenn gegebene Kräfte auf ihn wirken.

Zur Lösung dieser Aufgabe verwandeln wir die Bewegung in eine freie. Dabei haben wir zu erwägen, daß in jedem Pkt der Bahn ein Widerstand gegen den Körper von der Bahn selbst ausgeübt wird, wir bezeichnen ihn, die

59. und normal auf die Curve wirkt, mit N. Die übrigen Kräfte seien durch die Achsen X u. Y dargestellt.

Es sei $OP = x$, $MP = y$, $AM = s$.

Nach horizontaler Richtung wirkt:

$X + N\sin\varphi$ u. nach vertikal.

$Y - N\cos\varphi$

daher haben wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X + N\sin\varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(Y - N\cos\varphi)$$

Um die Geschwindigkeit zu finden, elim. m. N. was geschieht, indem man die 1te Gl. mit $\cos\varphi$ u. die 2te mit $\sin\varphi$ multip. u. sie addirt.

$$\cos\varphi\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi) \quad \mathrm{I}$$

u. wenn man die erste mit $\sin\varphi$, die 2te $\cos\varphi$ u. von einander abzieht, erhält man:

$$\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2} - \cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(N + X\sin\varphi - Y\cos\varphi) \quad \mathrm{II}.$$

Nun ist aber $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, daher

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)$$

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)$$

$$d.\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{2}{2m}(X\,dx + Y\,dy)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{1}{2m}\int(X\,dx + Y\,dy) + C$$

Dies wäre also die Geschwindigkeit in dem Punkte M. — Wir suchen nun N.

vermittels der Gleichg. II auf ähnliche Art wie v bestimmt wurde. 60. 61.

Es ist $dy\frac{d^2x}{ds\,dt^2} - dx\frac{d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}\left(N + X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)$

$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds\,dt^2} = \frac{1}{2m}\left(N + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\right)$$

Es ist aber der Krümmungshalbmesser für den Punkt M: $\varrho = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$

$$dy\,d^2x - dx\,d^2y = \frac{ds^3}{\varrho};$$

$$\frac{ds^3}{\varrho}\cdot\frac{1}{ds\,dt^2} = \frac{N}{2m} + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$$

$$\frac{ds^2}{\varrho\,dt^2} = \frac{N}{2m} + \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$$

$$N = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} + \frac{2m}{\varrho}\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)$$

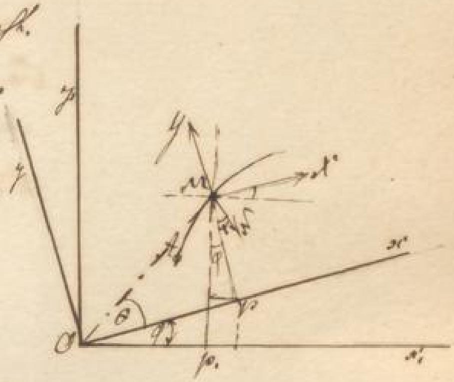
$$= Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} + \frac{2m\,v^2}{\varrho}.$$

Beispiel 1.

Man soll die Gesetze der Bewegung finden, wenn etwa bei einer Turbine die Wassermasse mit einer gewissen Geschw. in das langsam gehende Rad tritt, u. indem sie dadurch auf die krummen Schaufelflächen stößt, die Bewegung des Rades verursacht, welche Bewegung also auch das Wasser mitmachen muß.

Wir betrachten wieder die Bewegung als frei u. bringen nur auf den Schaufelflächen normale Kraft N an.

61. Um unsern Zweck zu erreichen, bedienen wir uns eines rechtw. Coordsystems, das fest ist u. nicht das die drehende Bewegung mitmacht.
yx beweglich; $y.x.$ fest. $Op_1 = x_1$, $Mp_1 = y_1$.
$AM = l$, $Op_2 = x_2$, $Mp_2 = y$.



Die Kräfte ∥ Ox_1 sind:
$-Y\sin\varphi + X\cos\varphi + N\sin(\varphi+\psi)$
Die Kräfte ∥ Oy_1 sind:
$Y\cos\varphi + X\sin\varphi - N\cos(\varphi+\psi)$
Es sei Q das Gewicht des bewegten Massentheils.
Also: $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}\left(X\cos\varphi - Y\sin\varphi + N\sin(\varphi+\psi)\right)$
$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}\left(X\sin\varphi + Y\cos\varphi - N\cos(\varphi+\psi)\right)$
$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{g}{Q}\left(X\cos\psi + Y\sin\psi\right)$
Wir setzen nämlich voraus, die drehende Bewegung sei als bekannt, u. wir haben es vorerst nur mit der einfachen Bewegung zu thun, die die genannten Kräfte hervorbringen.

Wir nehmen nun eine Transformation der Gleichung für das andere Axensystem vor.
Es ist, wenn $OM = \rho$, $\angle MOx = \theta$ gesetzt wird:
$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$
$x_1 = \rho\cos(\theta+\varphi)$; $y_1 = \rho\sin(\theta+\varphi)$
Nun ist $x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi$
$y_1 = y\cos\varphi + x\sin\varphi$
Um $d^2x_1 \ldots$ zu finden, müssen wir 2mal diff.

$dx_1 = \cos\varphi\, dx - x \sin\varphi\, d\varphi - dy \sin\varphi - y \cos\varphi\, d\varphi$

$dy_1 = \sin\varphi\, dx + x \cos\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dy - y \sin\varphi\, d\varphi$

Da wir voraussetzten, daß die drehende Bewegung gleichförmig sei, wobei φ eben $= \alpha t$ daher $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$, so ist $d^2\varphi = 0$; wird daher:

$$d^2x_1 = \begin{cases} \cos\varphi\, d^2x - \sin\varphi\, dx\, d\varphi - \sin\varphi\, d\varphi\, dx - x\cos\varphi\, d\varphi^2 - \\ - d^2y \sin\varphi - dy \cos\varphi\, d\varphi - dy\, d\varphi \cos\varphi + y \sin\varphi\, d\varphi^2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos\varphi\, d^2x - 2\sin\varphi\, dx\, d\varphi - 2\cos\varphi\, d\varphi\, dy - \\ - (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\, d\varphi^2 - \sin\varphi\, d^2y. \end{cases}$$

$$d^2y_1 = \begin{cases} \sin\varphi\, d^2x + \cos\varphi\, d\varphi\, dx + \cos\varphi\, dx\, d\varphi - x\sin\varphi\, d\varphi^2 + \\ + \cos\varphi\, d^2y - \sin\varphi\, d\varphi\, dy - \sin\varphi\, dy\, d\varphi - y\cos\varphi\, d\varphi^2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin\varphi\, d^2x + 2\cos\varphi\, dx\, d\varphi - 2\sin\varphi\, dy\, d\varphi - (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\, d\varphi^2 \\ + \cos\varphi\, d^2y. \end{cases}$$

Durch Multipl. u. Addit. erhält man:

$$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \cos\psi \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx\, d\varphi \sin\psi}{dt^2} -$$

$$- 2dy\frac{d\varphi \cos\psi}{dt^2} - (x\cos\psi + y\sin\psi)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d^2y \sin\psi}{dt^2}.$$

Es ist aber $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$ u. $\sin\psi = \frac{dy}{ds}$, daher:

$$\cos(\varphi+\psi)\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin(\varphi+\psi)\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dx\, d^2x}{ds\, dt^2} + 2\frac{dx\, dy\, d\varphi}{ds\, dt^2} -$$

$$- 2\frac{dy\, d\varphi\, dx}{ds\, dt^2} - \left(\frac{x\,dx + y\,dy}{ds}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d^2y\, dy}{ds\, dt^2}.$$

also haben wir auch:

$$\frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y}{ds\, dt^2} - \frac{x\,dx + y\,dy}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{g}{a}\left(\frac{X\,dx + Y\,dy}{ds}\right).$$

$$\frac{1}{2}\, d.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\, d.(x^2+y^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(X\,dx + Y\,dy)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - (x^2+y^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\int(X\,dx + Y\,dy) + C$$

63. Nun ist aber $\frac{d\rho}{dt} = v$ die relative Geschw., d. h. die Geschw. des Materialp., welche der Beobachter, der sich mit dem Rad herumbewegt, bemerkt. Ferner drückt $\frac{d\varphi}{dt} = \gamma$ die Winkelgeschwind. des Rades aus. Wir erhalten daher:

$$v^2 - r^2\gamma^2 = \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + C$$

$$v^2 = \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + r^2\gamma^2 + C$$

Zur Bestimmung der Constanten, haben wir, wenn die relative Geschw. in $A = v_0$ benannt ist u. $OA = r_0$ gesetzt wird:

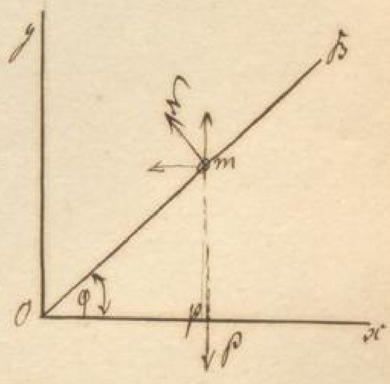
$$v_0^2 = -0 + r_0^2\gamma^2 + C$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2g}{Q}\int(Xdx + Ydy) + \gamma^2(r^2 - r_0^2)$$

Den ersten Theil würden wir erhalten haben, wenn wir blos die Bewegung an der Curve ohne Drehung des Rades betrachtet haben würden.
Dies ist auch die Gleichung für die Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Beispiel 2.

Es sei der Stab OB in O fest, doch so daß er sich in einer verticalen Ebene um den Punkt O drehen kann. An ihm gleite eine Masse auf u. ab, deren Gewicht = P ist; die Geschw. des Stabes sei gleichförmig; es soll also blos die Bewegung der Masse m untersucht werden.



Wir verwandeln wieder die Bewegung in eine freie, so daß eine Kraft N die Bahn ersetzt.

Es ist $op = x$, $mp = y$, $mo = r$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{P} N \sin\varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\left(\frac{N\cos\varphi - P}{P}\right) = g\frac{N}{P}\cos\varphi - g$$

durch Multipl. u. Add. erhält man:

I $\cos\varphi \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi \frac{d^2y}{dt^2} = -g\sin\varphi$

Nun ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

da die Bewegung gleichförmig, so ist $d\varphi$ constant.

also $d^2x = \cos\varphi\, d^2r - \sin\varphi\, d\varphi\, dr - \sin\varphi\, d\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi^2$

$d^2y = \sin\varphi\, d^2r + \cos\varphi\, d\varphi\, dr + \cos\varphi\, d\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi^2$

Wieder durch Multip. u. Add. erhält m.:

$$\cos\varphi\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\alpha^2$$

nämlich $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$ der Winkelgeschwindigkeit.

durch Substitution in I erhält m.:

II $\frac{d^2r}{dt^2} = r\alpha^2 - g\sin\varphi$.

Nun ist $d\varphi = \alpha\, dt$, u. $\varphi = \alpha t + \beta$,

wir können aber auch $\beta = 0$ setzen, d. h. daß für $t = 0$, $\varphi = 0$, die Bewegung geschieht in diesem Augenblick in der Horizontalebene.

Die Gleichg II erscheint daher unter der neuen Form $\frac{d^2r}{dt^2} = r\alpha^2 - g\sin\alpha t$.

diese Gleichung aber läßt sich nicht auf gewöhnliche Weise integriren; versuchen wir es daher durch die Methode der Variation der Constanten.

Integriren wir zuerst, als ob Ball sich in einer horizontalen Ebene bewegte.

$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\alpha^2$ u. es sei nun

$r = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{-\alpha t}$

denn setzen wir $r = e^{mt}$, so ist

$dr = m e^{mt} dt$

$d^2 r = m^2 e^{mt} dt^2$, $\frac{d^2 r}{dt^2} = m^2 e^{mt}$

für unseren Fall ist aber $m = \alpha$, daher

$r = \mathfrak{A} e^{\alpha t}$ u. $\mathfrak{B} e^{-\alpha t}$ thut auch Genüge;

Betrachten wir $\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{B}$ als Variable, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha(\mathfrak{A} e^{\alpha t} - \mathfrak{B} e^{-\alpha t})$$

$$0 = e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \alpha^2(\mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{-\alpha t}) + \alpha\left(e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$$

$$= \alpha^2 r + \alpha\left(e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$$

$$-\frac{g}{\alpha}\sin\alpha t = e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - e^{-\alpha t}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$2 e^{\alpha t}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{g}{\alpha}\sin\alpha t$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{g}{2\alpha} e^{-\alpha t}\sin\alpha t$$

$$\mathfrak{A} = -\frac{g}{2\alpha}\int(e^{-\alpha t}\sin\alpha t . dt)$$

$$\frac{g}{2\alpha}\sin\alpha t\, e^{\alpha t} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{g}{2\alpha}\int(e^{\alpha t}\sin\alpha t . dt)$$

Setzen wir $J = \int e^{\alpha t}\sin\alpha t \, dt$ u. integriren durch theilweise Integration, d. h. setzen wir $e^{\alpha t}dt = dv$, u. $\sin\alpha t = u$

$$v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}, \quad du = \cos\alpha t \, dt, \text{ daher}$$

$$J = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\alpha t - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos\alpha t \, dt$$

u. wiederholt durch theilw. Integr. erhält man, wenn $\cos\alpha t = u$, $du = -\sin\alpha t \, dt$;

$$e^{\alpha t}dt = dv, \quad v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$$

$$J = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\alpha t - \left\{\frac{1}{\alpha}\cos\alpha t \, e^{\alpha t} + J\right\}$$

$$J = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{g}{2\alpha}\cdot\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t) + \mathfrak{M}$$

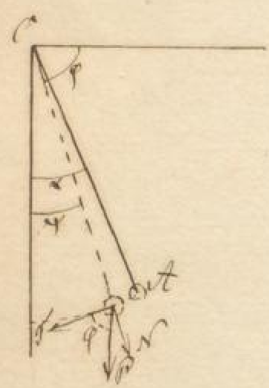
$$\mathfrak{K} = \frac{g}{2\alpha}\cdot\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}(\sin\alpha t + \cos\alpha t) + \mathfrak{N}$$

$$r = e^{\alpha t}\left\{\frac{g}{4\alpha^2}e^{-\alpha t}(\sin\alpha t + \cos\alpha t) + \mathfrak{N}\right\} + e^{-\alpha t}\left(\frac{g}{4\alpha^2}e^{\alpha t}(\sin\alpha t - \cos\alpha t) + \mathfrak{M}\right)$$

$$= \frac{g}{2\alpha^2}\sin\alpha t + \mathfrak{N}e^{\alpha t} + \mathfrak{M}e^{-\alpha t}$$

wodurch also r bestimmt ist.

Betrachtung über die Bewegung des Pendels.



Es sei an AC, einer steifen unbiegsamen Linie, ein Körper, dessen Gew. P ist, befestigt; in C sei der Drehpunkt des Pendels.
Im Augenblick der Ruhe wird das Pendel senkrechte Stellung einnehmen, aus dieser hebe man es nun um den $\angle\alpha$ nach A gehoben, nun so wird wir die Bewegung betrachten.

67. Lassen wir den Körper in A los, so wird er sich vermöge seiner Schwere der senkrechten Lage nähern. Nach dem ersten Augenblicke der Bewegung sei die Geschwindigkeit = dv; ferner sei AC = r, u. die Seitenkräfte v. P = N u. T.

Man hat daher:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{P} T, \quad \text{es ist aber}$$

$$T = P \cos\varphi \quad , \text{daher}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \cos\varphi \; ; \text{ u. da } \frac{d\varphi}{dt} = \text{Winkelgeschw.}$$

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v\,dv = g r \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\frac{v^2}{2} = + g r \sin\varphi + C$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, ist $v = 0$.

$$0 = + g r \cos\alpha + C$$

$$\frac{v^2}{2} = g r (\sin\varphi - \cos\alpha)$$

$$v = \sqrt{2gr}\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}.$$

oder da $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, $d\varphi = - d\psi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}, \quad v = - r \frac{d\psi}{dt}$$

$$- r \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{2gr}\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{r}} \cdot dt = - \frac{d\psi}{\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{r}} \cdot t = - \int \frac{d\psi}{\sqrt{(\sin\varphi - \cos\alpha)}}$$

dies führt wieder zu einer eigenthümlichen Funktion und lässt sich also durch Integr. von dieser Größe nicht durch einen geschlossenen

Ausdruck darstellen, wohl aber durch eine Reihe, wenn nämlich die Winkel φ u. α sehr klein sind, so daß man

$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, u. $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ setzen kann, u. die übrigen Glieder der Reihe vernachlässigt, dann ist

$\cos\varphi - \cos\alpha = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)$, daher

$$\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\,.\,t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2-\varphi^2)}}$$

$$\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,.\,t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{\varphi}{\alpha} + C$$

für $t = 0$ ist $\varphi = \alpha$, also $C = 0$.

u. also $t\,.\sqrt{\tfrac{g}{l}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{\varphi}{\alpha}$

folglich $\varphi = \alpha\cos\left(t\sqrt{\tfrac{g}{l}}\right)$

Bezeichnet T die ganze Schwingungszeit, so ist für $\varphi = 0$, $t = \frac{T}{2}$

$\frac{T}{2}\sqrt{\tfrac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$ u. $T = \sqrt{\tfrac{l}{g}}\,.\,\pi$,

Untersuchen wir dieselbe Bewegung nochmal, aber mit Rücksicht auf die Widerstände, die wir der 1ten Potenz der Geschwindigkeit proportional annehmen, also etwa $= \beta v = W$.

$$\frac{du}{dt} = g\,\frac{T - W}{P} = g\,\frac{P\cos\varphi - \beta v}{P}$$

$= g\cos\varphi - g\frac{\beta}{P}v$ od. wenn $g\frac{\beta}{P} = \lambda$ gesetzt wird

$= g\cos\varphi - \lambda v$

Wir haben wieder $\frac{ds}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$

$l\frac{ds}{dt} = -\,l\frac{d\varphi}{dt}$ b. $\frac{1}{1}$

$$v = -r\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -r\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

$$-r\frac{d^2\psi}{dt^2} = g\sin\psi + \lambda r\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\psi + \lambda\frac{d\psi}{dt} = 0$$

Wieder ein Ausdruck der nicht durch die gewöhnlichen Mittel integrirbar ist. Wenn aber ψ so klein, daß $\sin\psi = \psi$ so erhält man $\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{r}\psi + \lambda\frac{d\psi}{dt} = 0$ was sich integriren läßt; nämlich durch Substitutionen; daß man etwa $\psi = e^{mt}$ setzt u. m so bestimmt, daß es der Gleichung genüge. Es läßt sich dann auch die Schwingungszeit berechnen.

Von der Bewegung der Massen.

Bisher betrachteten wir die Bewegung einzelner Punkte, od. doch nur solcher Massen, die wir uns in einem Punkt vereinigt dachten; od. von Massen, deren Punkte alle parallele u. congruente Bahnen beschrieben. Dies ist aber sehr seltener Fall. — Wenn ein Körper z. B. sich um eine Axe dreht, so kann man nicht mehr gegen den Körp. od. die Masse hat die u. die Geschw., sond. jeder einzelne Punkt hat wieder eine besondere Geschwindigkeit, u. hiebei die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, gibt uns Anleitung

das D'Alembert'sche Princip.

Stellen wir uns ein System von Massentheilchen vor, die durch äußere einwirkende Kräfte in Bewegung gesetzt wird, so können wir uns wohl auch ein Massentheilchen im Innern des Systems denken, das sich bloß durch die Wirkung des Druckes der neben ihm liegenden Theilchen auf einer Bahn bewegt.

z. B. von A aus habe sich ein solches Massentheilchen nach m bewegt, dort eine Geschw. = v erlangt; nach der Zeit t u. nach Zurücklegung des Wegs = s, so wird es sich nach der Zeit dt mit einer Geschw. dv in n befinden u. einen Weg ds zurückgelegt haben. Offenbar wird aber Gleichgewicht bestehen, wenn wir tangential eine Kraft auf das Theilchen wirken lassen, u. d. Richtg welche gleich der ist, die der Beschleunigung der Geschwindigkeit entspricht.

Daher ist, wenn q die Masse des Theilchens, K die bewegende Kraft ist $dv = g\frac{K}{q}dt$ /.

u. $K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$; u. wenn $K_1, K_2 \ldots$ u. $q_1, q_2 \ldots$ d. h. d. i. dieselben für andere Punkte sind

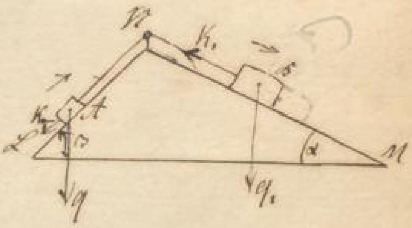
$K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv_1}{dt}$

$K_2 = \frac{q_2}{g}\frac{dv_2}{dt}$

$\vdots \qquad \vdots$

u. so für beliebig viele Punkte, u. wenn $P_1, P_2, P_3 \ldots$ die äußeren Kräfte sind: daher ist, sagten wir oben, wenn alle diese Kräfte entgegengesetzt angebracht werden, das System im Gleichgewicht.

Beispiel 1.



Auf zwei schiefen Ebenen befinden sich zwei durch ein Seil miteinander verbundene Körper A u. B; in N ist ein Ring, wodurch das Seil sich bewegen kann. Die Bewegung erfolge nach der Richtung LN u. NM, so daß in A u. B die Geschwindigk. = v u. einen Augenblick nachher dv ist.

Nun bringe ich eine Kraft $K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$ u. $K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv_1}{dt}$ entgegengesetzt an, so muß Gleichgewicht bestehen. Die Gleichgewichts-gleichung können wir nun vermittelst der statischen Momente oder vermittelst des Princ. der virtuellen Geschwindigkeit herleiten. – Wir thun das letztere.

Ist nun σ der unendlich kleine Weg, den q so haben wir:

$$-K_1\sigma + q_1\sigma\sin\alpha - K\sigma - q\sigma\sin\beta = 0$$

od. $0 = q_1\sin\alpha - q\sin\beta - (K+K_1)$

$$K+K_1 = q_1\sin\alpha - q\sin\beta;$$

substituirt man die Werthe von K u. K_1

$$\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}(q+q_1) = q_1\sin\alpha - q\sin\beta$$

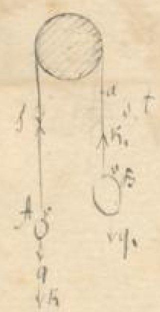
$$dv = g\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}dt$$

$$v = g\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}t + a$$

$$v = \frac{ds}{dt} = - - - - -$$

$$s = g\frac{(q_1\sin\alpha - q\sin\beta)}{q+q_1}\tfrac{1}{2}t^2 + at + b$$

<u>Beispiel 2.</u>



Über einen festen Cylinder ist ein Seil gelegt, an dem zwei Lasten hängen in A u. B, wo die Geschw. = 0 ist. Wir nehmen keine Rücksicht auf Reibung.

Sind q u. q_1 die Gewichte, K u. K_1 die der Bewegung entgegengesetzte Kräfte, so ist

$$K = \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$K_1 = \frac{q_1}{g}\frac{dv}{dt}$$, nun ist aber:

$$q_1 = K_1 + q + K$$

$$q_1 - q = K_1 + K = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{g}(q+q_1)$$

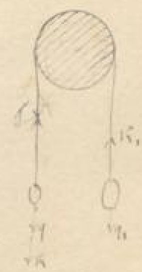
$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)$$

$$v = g\left(\frac{q_1-q}{q_1+q}\right)t + a.$$ u. der

$$v = \frac{ds}{dt} = g\left(\frac{q_1 - q}{q_1 + q}\right) t + a$$

$$s = g\left(\frac{q_1 - q}{q_1 + q}\right)\frac{t^2}{2} + at + b$$

Um die Spannung im Seile selbst zu finden, zerschneide man das Seil an der fraglichen Stelle u. bringe 2 entsprechende Kräfte T u. T dafür an.



$$T = q + K = q + \frac{q}{g}\frac{dv}{dt}$$

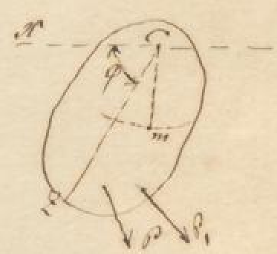
$$= q + \frac{q}{g} \cdot g\left(\frac{q_1 - q}{q_1 + q}\right)$$

$$= q\left(1 + \frac{q_1 - q}{q_1 + q}\right) = \frac{2q \cdot q_1}{q_1 + q}$$

Wenn die Gewichte gleich sind, so ist entweder gar keine Bewegung vorhanden, oder sie ist gleichförmig.

Beispiel 3.

Wir betrachten jetzt die drehende Bewegung eines Körpers um eine feste Axe C. Wir setzen voraus, dass der Körper nicht schwer sei, sondern in Folge der einwirkenden äußeren Kräfte P, P_1, P_2 etc die Bewegung annehme. Ziehen wir durch C eine horizontale feste CX u. im Körp. selbst CZ als bewegliche Linie, so soll φ den $\angle$ bedeuten, den sie mit einander einschließen nach der Zeit t, $d\varphi$ nach der Zeit dt, u. $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschw.



Man denke sich wieder ein kleines Massentheilchen im Innern, dessen Entfernung von der Axe $= \rho$ sei, u. das sich bewegen wird, weil eben der ganze Körper bewegt wird.

Nun frägt es sich nach dem Dalemb. Princip, welche Kräfte müssen wir hinzufügen, daß sie mit den vorhandenen im Gleichgewicht sind. Dies finden wir wie folgt: die Geschw. des Theilchens m ist nach der Zeit t $= \rho \frac{d\varphi}{dt}$ u. im nächsten Zeitelement ist die Geschwindigkeitsänderung $d.(\rho \frac{d\varphi}{dt})$, folglich $d.\rho \frac{d\varphi}{dt} = g \frac{k}{m} dt$, wenn k die diese Geschwindigkeitsänd. hervorbringende Kraft ist, u. m die Masse des Theilch.

$$k = \frac{m}{g} \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ u. für andere Theilchen

$$k_1 = \frac{m_1}{g} \rho_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$k_2 = \frac{m_2}{g} \rho_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Stellen wir nun die Gleichg. für Gleichgewicht auf, bezeichnen zu dem Zweck die Hebelarm. von C auf die Richtungslin. der Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ mit r, r_1, r_2; so hat man:

$$Pr + P_1 r_1 + P_2 r_2 + \ldots = k\rho + k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + \ldots$$

u. durch Substitution, erhält man:

75. $P z + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots = \frac{1}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(m\rho^2 + m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + \cdots\right)$

od. $\Sigma_1 P z = \frac{1}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2} S\rho^2 m$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\,\frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m}$$

$\Sigma_1 P z$ bedeutet die Kraft, die in der Entfernung = 1 von der Axe an einer Masse $M = S\rho^2 m$, die in jenem Abstand gedacht wird, wirkend, dieselbe Bewegung hervorbrächte, wie sie die anderen Kräfte zusammen hervorbringen.

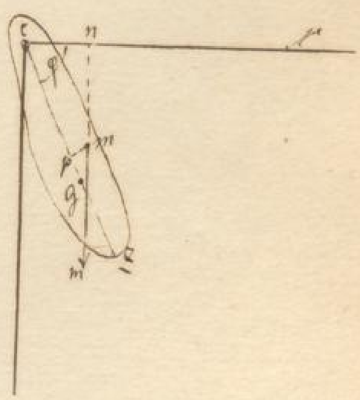
Wenn die Kräfte constant sind, so haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = g\,\frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m}\,t + C$$

$$d\varphi = g\,\frac{\Sigma P z}{S\rho^2 m}\,t\,dt + C\,dt$$

$$\varphi = \frac{1}{2} g t^2 \frac{\Sigma_1 P z}{S\rho^2 m} + Ct + D.$$

<u>Beispiel. 4</u>



Untersuchung der Bewegung des zusammengesetzten Pendels. CZ sei eine durch den Schwerp. G des Körpers gezogene Gerade, welche mit der Horizontalen CN einen variabeln φ bildet. Alle Körpertheilchen werden von senkrechten Kräften afficirt (die Schwere), welches hier die äußeren Kräfte sind. Wir haben nun in obiger Formel

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \frac{\Sigma_1 P_r}{S\rho^2 m}$ zu substituiren.
Für ein Massentheilchen m haben wir das Stat. Moment $= m(cn)$; setzen wir aber $cp = x$, $mp = y$, so ist:

$$cn = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$\Sigma_1 P_r = \Sigma_1 m(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

$$= \cos\varphi\,\Sigma_1 mx + \sin\varphi\,\Sigma_1 my$$

Wenn M die Masse des ganzen Körpers u. h die Entf. des Schwerp. von der Axe ist, so ist $\Sigma_1 P_r = Mh\cos\varphi$ daher

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{\Sigma_1 P_r}{\cancel{Mh\cos\varphi}}\; g\frac{Mh\cos\varphi}{S\rho^2 m}$$

$$2d\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{Mh\cos\varphi}{S\rho^2 m}\,\cancel{2d\varphi\cos\varphi}$$

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \;--\;—$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\frac{Mh\sin\varphi}{S\rho^2 m} + C$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{S\rho^2 m}{gMh}}$$

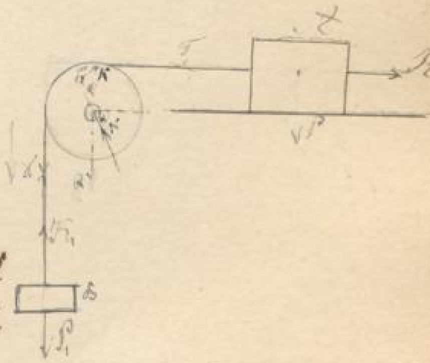
$$\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 gMh = \Sigma_1\rho^2 m$$

Letztere Gleichung wird häufig angewendet, um das Trägheitsmoment vermittelst der Beobachtung der Schwingungen eines Körpers zu berechnen, besonders bei unregelmäßig gestalteten Körpern.

Beispiel 5.

Ueber eine Rolle geht ein Seil, an dem eine Last P_1 hängt u. die Last P auf einer horizontalen Ebene hinziehen strebt. Wir nehmen die Rücksicht auf Reibung. Zu finden haben wir also

1.) die Bewegung der Massen überhaupt,
2.) die Spannungen S u. S_1 im Seile; 3.
3. der Druck, mit welchem der Zapfen in das Lager gedrückt wird.



Es sei die Winkelgeschw. der Rolle nach der Zeit $t = \theta$ ferner der Radius des Zapfens $= r$, der der Rolle R.

Wir zerschneiden das Seil in zwei Stücke u. bringen dafür die Kräfte S u. S_1 an.

Das Gewicht der Rolle sei Q; die an den Massentheilchen angebrachten entgegengesetzten Kräfte seien K, K_1, K_2 etc an R u. S seien K, K_1.

Wir finden fürs Gleichgewicht bei den drei einzelnen Partien

für I 1.) $S = K$

für II 2.) $S_1 + K_1 = P_1$

für III sollten wir eigentlich 6 Bedingungsgl. haben, wovon dreien geben aber $0 = 0$ u. somit erhalten wir nur folgende:

$$\left.\begin{aligned} 3.)\ & S - N\cos\alpha = 0 \\ 4.)\ & S_1 + Q - N\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \text{für Verschiebung}$$

da wir voraussetzen, daß die Rolle symmetrisch gebaut ist.

sei, so folgt, daß jedem Theilchen auf der einen Seite ein gleiches auf der andern Seite des Zapfens entspreche u. daß beide Zerlegung der daran angebrachten Kräfte $K, K_1 \dots$ die Summe der horizontalen $= 0$ u. die Summe der vertik. $= 0$ sei, also auf Verschiebung keinen Einfluß ausüben.

Dagegen in Bezug auf Drehung muß die Summe der stat. Momente berücksichtigt werden.

5.) $Th + (K\rho + K_1\rho_1 + K_2\rho_2 + \dots) = hT_1$

Nun haben wir die Werthe von $K\rho$ zu substituiren, so ist nämlich

$h\,d\theta = g \frac{K}{P}\,dt$ daher

$K = \frac{P}{g} \cdot h \frac{d\theta}{dt}$

$K_1 = \frac{P_1}{g} h \frac{d\theta}{dt}$

$k = \frac{m}{g} h \frac{d\theta}{dt}$

$k_1 = \frac{m_1}{g} h \frac{d\theta}{dt}$ etc

1.) $T = \frac{P}{g} h \frac{d\theta}{dt}$

2.) $T_1 = P_1\left(1 - \frac{h}{g}\frac{d\theta}{dt}\right)$

3.) $T = N \cos\alpha$

4.) $T_1 + Q = N \sin\alpha$

5.) $h(T_1 - T) = \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\,\Sigma\rho^2 m$

Aus 3 u. 4 folgt:

$N = \sqrt{T^2 + (T_1 + Q)^2}$ u.

$\sin\alpha = \frac{T_1 + Q}{\sqrt{T^2 + (T_1 + Q)^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{T^2+(T_1+Q)^2}}$$

Nun bleibt noch die Spannung T u. T_1 zu best.:
Aus (1) u. (5) erhält man:

$$r\left(P_1 - P_1\frac{r}{g}\frac{d\theta}{dt} - P\frac{r}{g}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\sum\rho^2 m.\right.$$

6.) $\frac{d\theta}{dt} = g\frac{rP_1}{rP + rP_1 + \sum\rho^2 m}$ analog wie wir fanden in der vorigen Aufgabe $\frac{d\theta}{dt} = g\frac{\sum Pr}{\sum\rho^2 m}$.

$$\theta = g\frac{rP_1}{rP + rP_1 + \sum\rho^2 m}\cdot t$$

$\theta = \frac{d\varphi}{dt}$, wenn φ den Drehungsbogen bedeutet

$$\frac{d\varphi}{dt} = g\frac{r^2 P_1}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}\cdot t$$

7.) $$\varphi = g\frac{rP_1}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}\frac{1}{2}t^2$$

Dies ist die Gleichung für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Es ist ferner

8.) $$T = \frac{r^2PP_1}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}$$

9.) $$T_1 = P_1\left(1 - \frac{r^2P_1}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}\right) = P_1\frac{r^2P + \sum m\rho^2}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}$$ folglich

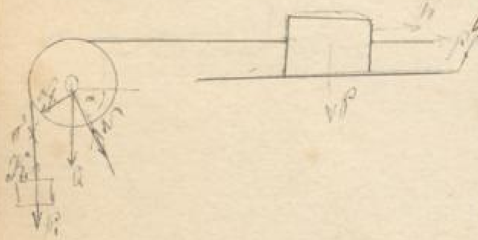
$$N = \sqrt{\left(\frac{r^2PP_1}{r^2P + r^2P_1 + \sum\rho^2 m}\right)^2 + \left(Q + \frac{P_1 r^2P + \sum m\rho^2}{r^2P + r^2P_1 + \sum m\rho^2}\right)^2}$$

Wir sehen hieraus, daß die Spannungen in Teile während der Bewegung constant sind, ebenso die Pressungen der Zapfenlager.

Diese Vorrichtung wurde benützt die Reibung zu bestimmen.

Dessen Morin's Versuche über die Reibung vermittels genannter Vorrichtung u. eines

Ich erwähnte, daß # der Scheibe der Rolle eine horizontalbewegende Scheibe gleichförmig aber excentrisch bewegte d. h. drehte. Am Umfang der Rolle war ein Stift (Kammen hatte der) befestigt, der also bei dem Umdrehen der Rolle eine Curve auf dem Papier beschreibt, auf der sich Alles berechnen läßt.



Dieselbe Aufgabe,

nur daß Rücksicht auf die Reibung genommen wird.

Wir haben also für die Reibung der Last P auf der horizontalen Ebene $= Pf$ u. für die Reibung im Zapfenlager eine $= Nf_1$ anzubringen

Wir erhalten also die Gleichungen:

1) $S = K + Pf$

2) $S_1 = P_1 - K$

3) $S_1 R - PR - SR - Nf_1 r = 0$ für Drehung

4) $N\sin\alpha - Nf_1\cos\alpha - S_1 - Q = 0$ für

5) $S - N\cos\alpha - Nf_1\sin\alpha = 0$ Verschiebung.

Aus 4 u. 5 ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} N\cos\alpha + Nf_1\sin\alpha &= S \\ N\sin\alpha - Nf_1\cos\alpha &= Q + S_1 \end{aligned}\right\} \text{quadrirt u. addirt}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{S^2 + (Q+S_1)^2}}{\sqrt{(1+f_1^2)}} \\ \sin\alpha &= \frac{Sf_1 + Q + S_1}{\sqrt{(1+f_1^2)}\sqrt{S^2+(Q+S_1)^2}} \\ \cos\alpha &= \frac{S - f_1(Q+S_1)}{\sqrt{(1+f_1^2)}\sqrt{S^2+(Q+S_1)^2}} \end{aligned}\right\}(6)$$

Substituirt man den Werth von Tang. so ergibt sich:

$$N = \frac{\sqrt{(\Pi + P f)^2 + (Q + P_1 - \Pi_1)^2}}{\sqrt{(1+f_1^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+f_1^2)}} \sqrt{\left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + P f\right)^2 + \left(Q + P_1 - \frac{P_1}{g} k \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

7.) $$k^2 P_1 \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} \int \rho^2 m + P k f - k P_1 + k^2 P \frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} +$$

$$+ \frac{f_1 r}{\sqrt{(1+f_1^2)}} \sqrt{\left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + P f\right)^2 + \left(Q + P_1 - \frac{P_1 k}{g} \frac{d\theta}{dt}\right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} (k^2 P_1 + \int \rho^2 m) + k P f - k P_1 f = - \frac{f_1 r}{\sqrt{(1+f_1^2)}} \sqrt{\cdots}$$

$\frac{\sqrt{(1+f_1^2)}}{f_1 r} \cdot (k^2 P + k^2 P_1) = A$ gesetzt u.

$\frac{\sqrt{(1+f_1^2)}}{f_1 r} \cdot (-k P f + k P_1 f) = B$ folglich

$$\frac{1}{g} \frac{d\theta}{dt} \cdot (A - B) = - \sqrt{\cdots}$$

$$\frac{1}{g^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (A^2 + B^2) - \frac{2}{g} \frac{d\theta}{dt} A.B. = \left(\frac{P}{g} k \frac{d\theta}{dt} + P f\right)^2 + \left(Q + P_1 + \frac{P_1 k}{g} \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

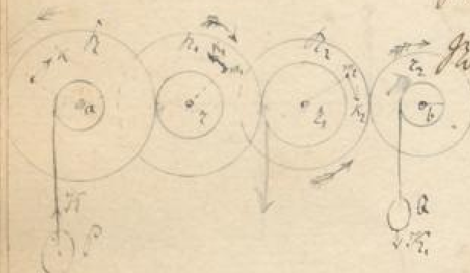
Entwickelt man diese Gleichung, bestimmt daraus $\frac{d\theta}{dt}$, integrirt dann u. findet θ ferner $\frac{d\theta}{dt}$ substituirt gibt N u. P, P_1.

Man sehen hieraus, daß wenn man Gleichungen aufstellen will, die nur irgend Nebenumstände berücksichtigen, die Sache selbst bei den einfachsten Systemen verwickelt wird, d. h. auf Weitläufigkeiten führt.

Beispiel,

wo mehrere Axen mit einander verbunden sind.

An der Welle, deren Rad. = a ist, hängt ein Gewicht P, das durch seine Abwärtsbewegung die Last Q an der Welle b aufzieht. Wir nehmen keine Rücksicht auf die Reibung. Nach der Zeit t sei die Winkelgeschwindigkeit



am Rande R = θ, so ist sie

" " R_1 u. r = $\frac{R}{r}\theta$

" " R_2 u. r_1 = $\frac{R}{r}\frac{R_1}{r_1}\theta$

" " r_2 u. b = $\frac{R}{r}\cdot\frac{R_1}{r_1}\cdot\frac{R_2}{r_2}\theta$

Nach dem Dalembert'schen Princip müssen wir zu den äußeren Kräften P u. Q diejenigen hinzufügen, die im Stande sind, die Geschwindigkeitsänderungen im Innern der Körper zu vernichten; diese Kräfte sind K, K_1, K_2 … Um durch das Princ. der virt. G. die Bedingungsgl. zu finden, lassen wir das System sich um ein kleines Zeitelement dt fortbewegen, nachdem wir es nach der Zeit t still gehalten haben.

Wir bestimmen zuerst die einzelnen Wege, welche die Angriffsp. der Kräfte zurücklegen:

83. Weg, den der Angriffspunkt von P u. Kr zurücklegt $= a\theta dt$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad K \quad \text{"} = \rho\,\theta dt$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad K_1 \quad \text{"} = \rho_1 \frac{r}{R}\,\theta dt$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad K_2 \quad \text{"} = \rho_2 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\,\theta dt$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad K_3 \quad \text{"} = \rho_3 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\,\theta dt$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad Kr_1 \text{ u. } Q \quad \text{"} = b\frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\,\theta dt$$

Erhalten zugleich auch die Kräfte von

$$Kr = \frac{P}{g} a \frac{d\theta}{dt}$$

$$Kr_1 = \frac{Q}{g} b \frac{d\theta}{dt}$$

$$K = \frac{m}{g}\rho \frac{d\theta}{dt}$$

$$K_1 = \frac{m_1}{g}\rho_1 \frac{r}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

$$K_2 = \frac{m_2}{g}\rho_2 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{d\theta}{dt}$$

$$K_3 = \frac{m_3}{g}\rho_3 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\frac{d\theta}{dt}$$

Die virtuellen Momente sind:

$$\text{von } P \text{ u. } Kr = (P - Kr)\,a\theta dt = \left(P - \frac{P}{g} a \frac{d\theta}{dt}\right) a\theta dt$$

$$\text{von } K = \int K\rho\,\theta dt = \int \rho^2 m \cdot \frac{1}{g} \cdot \theta dt \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{"} \quad K_1 = \int K_1 \rho_1 \frac{r}{R}\theta dt = \int \rho_1^2 m_1 \frac{1}{g}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \theta dt \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{von } K_2 = \int K_2 \rho_2 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\theta dt = \int \rho_2^2 m_2 \frac{1}{g}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 \theta dt \frac{d\theta}{dt}$$

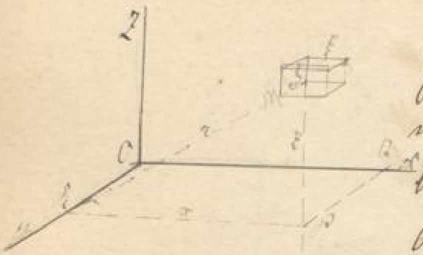
$$\text{von } K_3 = \int K_3 \rho_3 \frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\theta dt = \int \rho_3^2 m_3 \frac{1}{g}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 \theta dt \frac{d\theta}{dt}.$$

$$\text{"} \quad Kr_1 \text{ u. } Q = (Q + Kr_1)\, b\frac{r}{R}\frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\theta dt = \left(Q + \frac{Q}{g} b \frac{d\theta}{dt}\right) b\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 \theta dt.$$

Die algebraische Summe dieser Momente muss $= 0$ sein.

$$\theta dt\left[Pa - \frac{1}{g}\frac{d\theta}{dt}\left(Pa^2 + \int\rho^2 m + \int\rho_1^2 m_1\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \int\rho_2^2 m_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 + \int\rho_3^2 m_3\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 + Qb^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2\right) - Qb\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)\left(\frac{r_2}{R_2}\right)\right] = 0$$

Vom Moment der Trägheit.



Innerhalb dem Raume, den drei recht-winkl. Coordinatenebenen einschließt begrenzen, befindet sich ein Körper, der sich um die Axe Oy dreht.

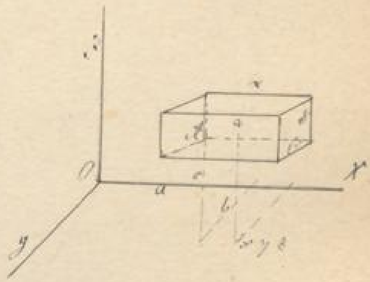
Es sei M ein Punkt im Innern des Körpers, ferner, wenn v. Perpend. von M auf die Coordinatenebenen fällt, $OQ = x$, Qy, $MP = z$ so ist, wenn sich der Pkt M zu einem unendl. kleinen Parallelepiped ausdehnt, dessen Seiten ξ, ζ u. v sind:

$M\xi = dx$, $Mv = dy$, $M\zeta = dz$.

Bezeichnen wir durch γ die Volumeneinheit, so ist, da $dx.dy.dz$ das Volumen, $dx.dy.dz.\gamma$ das Gewicht des Parallelepipeds; u. setzen wir die Entfernung v. der Drehaxe $MR = r$, so ist das Trägheitsmoment $= \gamma\, dx\, dy\, dz . r^2$ oder weil $r^2 = x^2 + z^2$, $\mu = \iiint \gamma (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ d.h. dieser Ausdruck muss dreimal integriert werden, einmal auf dx, dann auf dy u. dann auf dz oder in anderer Ordnung.

Beispiel 1.)

Das Trägheitsmoment eines Parallelepipeds auf die angegeb. Weise zu bestimmen.
Eine Kante desselben sei ∥ der Drehungsaxe.
Die Coordinaten des Scheitelpunkts $a\,b\,c$, die Dimensionen des Parallelepipeds α, β, γ.
Wir nehmen im Innern einen Punkt an, dessen Coord. $x\,y$ u. z seien.



Die Grenzen von diesen sind

$x = a$ bis $x = a+\alpha$

$y = b$ u. $y = b+\beta$

$z = c$ u. $z = c+\gamma$.

Nach obiger Formel ist, wenn π die Dichtigk. d. Masse ist:

$$\mu = \pi \int_{x=a}^{x=a+\alpha}\int_{y=b}^{y=b+\beta}\int_{z=c}^{z=c+\gamma} (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

$$\int x^2 dx + z^2\int dx = \tfrac{1}{3}x^3 + z^2 x$$

$$\tfrac{1}{3}\left((a+\alpha)^3 - a^3\right) + z^2\alpha$$

nämlich zwischen d. Grenzen a u. a+α, denn a substituirt u. abgezogen.

1.) in Bezug auf x, wodurch ein Stab ∥ Ox entsteht.

$$\mu = \pi \int_c^{c+\gamma}\int_b^{b+\beta}\left\{dy\,dz \int_a^{a+\alpha}(x^2+z^2)\,dx\right\} = \pi\int_c\int_b\left\{\tfrac{1}{3}\left((a+\alpha)^3-a^3\right)+\alpha z^2\right\}dz\,dy$$

2.) in Bezug auf y, wodurch eine Schichte ∥ der Ebene entsteht:

$$\mu = \pi\int_c\left[\left\{\tfrac{1}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right]+\alpha z^2\right\}.\,dz\int dy\right]$$

$$\int dy = y\,;\quad \begin{matrix} b+\beta \\ b \\ \hline \beta \end{matrix}$$

$$= \pi\int_c\left[\tfrac{1}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right]+\alpha z^2\right]dz.\,\beta$$

3.) in Bezug auf z, wodurch der ganze Körper entsteht.

$$\mu = \pi\left[\frac{\beta}{3}\left[(a+\alpha)^3-a^3\right]\int dz + \alpha\beta\int z^2 dz\right]$$

$$= \pi\left[\frac{\beta\gamma}{3}\left((a+\alpha)^3-a^3\right) + \frac{\alpha\beta}{3}\left((c+\gamma)^3-c^3\right)\right]$$

$$= \pi\,\frac{\beta}{3}\left[\gamma\left(3a^2\alpha+3a\alpha^2+\alpha^3\right)+\alpha\left(3c^2\gamma+3c\gamma^2+\gamma^3\right)\right]$$

$$\mu = \pi \frac{d\delta r}{3}\left[3a^2 + 3ax + x^2 + 3c^2 + 3cy + y^2\right]$$
$$= \pi \frac{d\delta r}{3}\left[3(a^2+c^2) + 3ax + x^2 + 3cy + y^2\right]$$

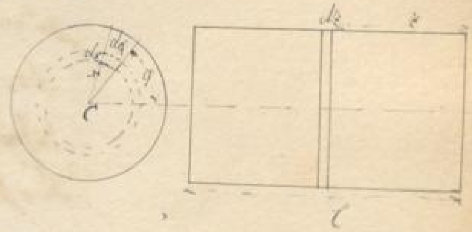
Das war der einfachste Fall, der sich denken läßt; denn in den meisten Fällen sind die x, y u. z nicht constant, sondern sie hängen ab von der Oberfläche des Körpers u. es müßten daher die Gleichungen der krummen Oberfläche eingeführt werden, was die Sache sehr weitläufig macht.
Braucht man das Trägheitsmoment eines Körpers absolut, dessen Form zu sehr unbekannt, so bestimmt man es mechanisch wie oben angegeben wurde vermittels Schwingungen.
Doch fügen wir noch ein Beispiel bei, das mit Hülfe des Polarcoordinatensyst. was in den meisten Fällen mit mehr Vortheil angewandt wird, gelöst werden soll. Nämlich das Trägheitsmoment eines Cylinders zu bestimmen, der sich um seine Axe dreht.
Zuerst denken wir uns eine Scheibe von der Dicke dz senkr. auf die Axe herausgeschnitten; denn beschreiben wir einen Kreis concentr.

mit den Radien x u. $x+dx$, so schneiden diese ein ringartiges Stück u. hieraus auch ein keilförmiges Stück, wobei die beiden Radien einen $\angle\, d\varphi$ miteinander bilden. Dieses Stück sei nun so klein, daß wir es als Parallelepiped betrachten können, in dem jeder Punkt gleich weit von der Axe entfernt ist, u. dessen Seiten $x\,d\varphi$, dx u. dz sind. Wir finden also

das Trägheitsmom. des kleinen Stückchens $= x\,d\varphi\, dx\, dz . x^2$

u. zwischen Grenzen $\mu = \gamma\int\int\int x^3\, d\varphi\, dx\, dz$.

Nun sei l die Länge des Cylinders u. R der Rad. so sind die Grenzen:



1) $z = 0$ u. $z = l$

2) $\varphi = 0$ u. $\varphi = 2\pi$

3.) $x = 0$ u. $x = R$.

$$\text{daher } \mu = \gamma \int_{x=0}^{x=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} x^3\, d\varphi\, dx \int_{z=0}^{z=l} dz$$

$$= \gamma l \int\int x^3\, d\varphi\, dx$$

1.) $\mu = \gamma l \int d\varphi \int x^3\, dx = \gamma l \int d\varphi \frac{R^4}{4}$

2.) $\mu = \gamma l \frac{R^4}{4}\int d\varphi = \gamma l \frac{R^4}{4} . 2\pi$

$= R^2\pi\, l . \gamma . \frac{R^2}{2}$

Wenn r der innere Halbmesser des hohlen Cylinders ist, so fängt x nicht mit $x=0$, sond. mit $x = r$ an u.

$$\mu = \gamma (R^2 - r^2)\pi l . \frac{R^2+r^2}{2}$$

Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Wir werden hier blos zeigen, wie dieses Princip durch Gleichungen dargestellt wird.

Es seien P_1, P_2, P_3 ......

Kräfte, die auf ein System von Massen wirken.

dp_1, dp_2, dp_3 ...

die Projectionen der Wege auf die Richtungen der Kräfte, welche deren Angriffspunkte zurücklegen.

R_1, R_2 .... Widerstände, die das System aufhalten.

dr_1, dr_2, dr_3 ......

differentiellen Wege ihrer Angriffspte auf die Richtungen derselben, nach einem unendlich kleinen Zeitelement, in welchem dp_1, dp_2 ... zurückgelegt worden sind.

m_1, m_2, m_3 ....

einzelne Massentheilchen.

u_1, u_2, u_3 ....

die Geschwind. dieser Massenth. in irgend einem bestimmten Augenblick.

v_1, v_2, v_3 ....

die Geschw. derselben Msstheilch. in einem andern Augenblick.

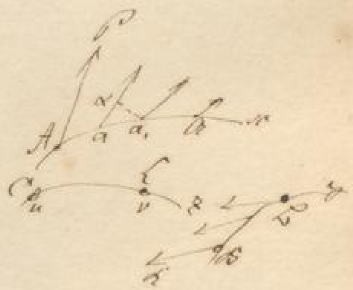
Dies vorausgesetzt, ist nun:

$$2\{\int P_1 dp_1 + \int P_2 dp_2 + \dots\} - 2\{\int R_1 dr_1 + \int R_2 dr_2 + \dots\}$$
$$= (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \dots) - (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \dots).$$
$$= (m_1(v_1^2 - u_1^2) + m_2(v_2^2 - u_2^2) + \dots)$$

89. u. folglich:

$$\Sigma \int P dp - \Sigma \int R dr = Smv^2 - Smu^2 = Sm(v^2 - u^2)$$

wobei die Integrationen auf diejenigen Wege auszudehnen sind, welche die Angriffsp. der Kräfte u. Widerstände zurück gelegt haben, während die Geschwindigkeiten aus u_1, u_2, u_3 ... in v_1, v_2, v_3 ... übergegangen sind.



Zur nähern Erläuterung obiger Gleichung fügen wir Folgendes bei.
Es seien Ax, By u. Cz die Bahnen der Angriffspunkte der Kraft P (die variabel sein kann), des Widerstandes R u. eines Massentheilchens, die Bewegung erfolge etwa von A nach a, ebenso nach b, u. so C nach c, wo sich u in v umgewandelt hat.
Hierbei ist $ax = dp$, $Pdp = Pax$.
u. $\int Pdp$ ist die Summe der Producte aus den verschied. Kräften P in die Projectionen ax. Ebenso ist es bei $\int Rdr$.
Wenn die Kraft tangential an die Bahn wirkt, so fällt ds, der wirkliche Weg, mit der Projection zusammen.
u. $\int Pdp = \int Pds$.

Wenn die Kraft P constant ist, so hat man

$$\int P ds = P\int ds = Ps.$$

Wenn P constant u. tangential ist,

$$\int P ds = Ps.$$

Wir werden $\int P ds$ die Wirkung der Kraft nennen.

$\int K ds$ Gegenwirkung des Widerstandes

$\Sigma m v^2$ die lebendige Kraft od. die Wirkungsfähigkeit der Masse.

u. das Princip werden wir kurz Grundsatz der Wirkung nennen.

Das Princip spricht aus:
die Differenz zwischen den Wirkungen der Kräfte u. den Gegenwirkungen der Widerstände ist gleich der Änderung der lebendigen Kraft, od. der Änderung der Wirkungsfähigkeit des ganzen Massensystems.

Wenn irgend eine Kraft einen ruhigen Druck ausübt, so bringt sie keine Änderung der Geschwind. u. folglich keine Wirkung hervor. Ebenso bringt Bewegung ohne Kraft keine Wirkung hervor. Es muss also gleichzeitig Bewegung u. Kraft vorhanden sein, wenn eine Wirkung sich zeigen soll. Die Begriffsfehler der Kraft

91. meisten Wege zurückgelegt u. die Produkte aus den Kräften u. die Wege geben die Größe der Wirkungen an.

Nun läßt sich dp auch durch ds u. φ ausdr.
also $Pdp = P\cos\varphi\, ds$; es ist aber
$P\cos\varphi$ = der tangentialen Kraft T
also $Pdp = Tds$, wozu wir auch durch Zerlegung der Kraft gekommen wären.

Den Winkel φ wollen wir mit $(\widehat{P,ds})$ d.h. mit ∠ zwischen der Richtung der Kraft u. dem Weg od. der Bahn, bezeichnen;
also $\int Pdp = \int P\cos(\widehat{P,ds})\, ds$.

Nun mögen Beispiele das Gesagte näher beleuchten.

Beispiel 1.

Eine (gewichtlose) Masse dreht sich um die Axe C. Die Winkelgeschw. sei θ in dem Augenblick, in dem wir die lebendige Kraft kennen lernen wollen.

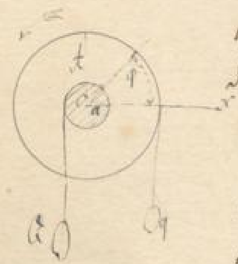
Die einzelnen Massentheilchen seien $m, m_1, m_2 \dots$
u. die ~~Winkelg~~ Geschw. derselben $\rho\theta, \rho_1\theta, \rho_2\theta \dots$
also $\Sigma m v^2 = m\rho^2\theta^2 + m_1\rho_1^2\theta^2 + m_2\rho_2^2\theta^2 + \dots$
$= \theta^2 \Sigma m\rho^2.$

wie dies auch dem Gesetz folgen muß da:

das Quadrat der Geschwind. (θ^2) mal der Masse d.i. für die Winkelgeschw. θ eine in einem Abst. von der Axe $=1$ vereinigte Masse welche $Sm\rho^2$ darstellt.

Beispiel 2.

Wenn bei nebenstehendem Syst. die Last Q an der Welle, deren Rad. $=a$, zieht, so zieht die Scheibe, deren Rad. $=A$, die Masse q auf. Der Schwerpunkt der Welle u. Scheibe liege in der Axe. Anfangs sei alles in Ruhe u. dann werde es freigelassen.



Nach einiger Bewegung bilde der Zeiger auf der Scheibe einen Winkel φ mit der festen Lo. Nun haben wir d. aufgest. Principien die allgemeine Gl. $\Sigma_1 \int P dp - \Sigma_1 \int R dr = Smv^2 - Smu^2$ für unseren Fall ist

$$\Sigma_1 \int P dp = \int Q a d\varphi = aQ\varphi$$

$$\Sigma_1 \int R dr = \int q A d\varphi = qA\varphi$$

$$Smu^2 = 0$$

$$Smv^2 = S\rho^2 m \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{Q}{2g} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{q}{2g} A^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

folglich

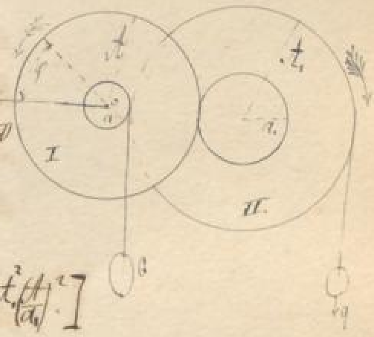
$$aQ\varphi - qA\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(Sm\rho^2 + \frac{Q}{2g} a^2 + \frac{q}{2g} A^2\right)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{(Qa - qA)\varphi}{Sm\rho^2 + \frac{Q}{2g} a^2 + \frac{q}{2g} A^2}$$

u. hiemit die Geschwindigkeit bestimmt.

Beispiel. 3.

Von einem ähnlichen Systeme, wie dem vorigen, soll die Geschw. bestimmt werden. Es sei das Moment der Trägheit von $I = Sm\rho^2$, u. das v. $II = Sm_1\rho_1^2$. Es werde durch das Sinken der Last q die Masse Q gehoben.



Für diesen Fall ist

$$\sum_0^1 \int P\,dp = \int q A \cdot \frac{A_1}{a_1}\, d\varphi = qA \cdot \frac{A_1}{a_1}\varphi$$

$$\sum_0^1 \int R\,dr = \int Q a\, d\varphi = aQ\varphi$$

$$S_0^1 m u^2 = 0$$

$$S_0^1 m v^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[S m\rho^2 + \left(\frac{A}{a_1}\right)^2 S m_1\rho_1^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2\right]$$

folglich:

$$\left(qA\frac{A_1}{a_1} - aQ\right)\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[S m\rho^2 + \left(\frac{A}{a_1}\right)^2 S m_1\rho_1^2 + \frac{Q}{2g}a^2 + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2\right]$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(qA\frac{A_1}{a_1} - aQ\right)\varphi}{S_0^1 m\rho^2 + S m_1\rho_1^2 + a^2\frac{Q}{2g} + \frac{q}{2g}A_1^2\left(\frac{A}{a_1}\right)^2}$$

$= \lambda\varphi$; u. wenn $\frac{d\varphi}{dt} = \theta$, so ist

$\theta^2 = \lambda\varphi$; $2\theta d\theta = \lambda d\varphi$

$d\varphi = \theta dt$ folglich

$2\theta d\theta = \lambda\theta dt$, $2d\theta = \lambda dt$

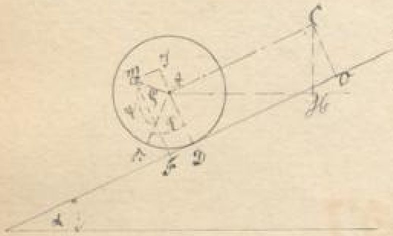
$\theta = \frac{1}{2}\lambda t = \frac{d\varphi}{dt}$

$\varphi = \frac{1}{4}\lambda t^2$

Die Bewegung steigt also im Verhältniß mit d. Zeit u. ist deshalb gleichförmig beschleunigt.

Beispiel 4.

Wir wollen die Geschwindigkeit suchen, welche ein auf einer schiefen Ebene herabrollender Cylinder hat, wenn er mit horizont. Axe in C in Ruhe war, frei gelassen wurde u. während einer Zeit t nach A gekommen ist. Wir beziehen einen Zeiger auf der Grundfl. des Cylind. an, der einen variabl. Winkel φ mit der auf der schief. Ebene Normalen AD bildet. Es sei Neigung der Ebene $= \alpha$; $OD = CA = \xi$, $AD = r$. die Ord. für ein Massentheilchen $OF = x$ u. $mF = y$; wenn AH horizont, so ist $\xi \sin\alpha = CH$; Q sei d. Gew. des Cylinders.



Wir suchen nun in allgemeine Gleichg

$$\Sigma \int P dp - \Sigma \int R dr = Smv^2 - Smu^2.$$

entsprechende Werthe zu substituiren.

Es ist $\Sigma \int P dp = Q\xi \sin\alpha$, denn der Angriffspunkt der Last Q hat den wirklichen Weg CA zurückgelegt u. dieser auf die Richtg der Last Q projicirt gibt $CH = \xi \sin\alpha$.

$\Sigma \int R dr = 0$ ist vorausgesetzt.

$Smu^2 = 0$ ebenfalls.

Um Smv^2 zu bestimmen, schlagen wir

95. folgenden Weg ein:

Es ist $x = \xi + \rho \sin(180 - (\varphi+\psi))$

$= \xi + \rho \sin(\varphi+\psi)$

$y = r \pm \rho \cos(\varphi+\psi)$

Differentiiren wir nun, wobei ρ u. ψ als constant angesehen werden müssen, da es sich nur um das Theilchen m handelt;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \rho \cos(\varphi+\psi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho \sin(\varphi+\psi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\rho\cos(\varphi+\psi)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\rho\cos(\varphi+\psi)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Es ist aber $d\xi = -r\,d\varphi$ (negativ, weil mit dem Wachsen von ξ, das φ kleiner wird)

$$\frac{d\xi}{dt} = -r\frac{d\varphi}{dt}, \text{ also } \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}$$

folglich $mv^2 = \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - 2\rho\cos(\varphi+\psi)\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right]m$

Für das Integrale, d.i. für die Summe der einzelnen Theilchen ist für den Augenblick, für den wir die Geschwind. kennen lernen wollen, φ constant; daher

$$\Sigma mv^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\Sigma m + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\Sigma m\rho^2 - \frac{2}{r}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \cancel{\cos(\varphi+\psi)}\,\Sigma m\rho\cos(\varphi+\psi)$$

Es ist aber $\rho\cos(\varphi+\psi) = AS$; da aber AS immer durch den Schwerpunkt geht so ist die Wirkung der Kraft in Bezug darauf $= 0$ u.

daher $\sum m \rho \cos(\varphi + \psi) = 0$ u. also

$$\sum m v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(\frac{Q}{2g} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sum m \rho^2\right)$$

für den Cylinder ist aber $\sum m \rho^2 = \frac{Q}{2g} \frac{r^2}{2}$

$\left(\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \pi r^4 c q ;\ \pi r^2 c . q = \frac{Q}{2g}\right)$; folglich:

$$\sum m v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \left(\frac{Q}{2g} + \frac{1}{r^2} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q}{2g}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \cdot \frac{Q}{2g}$$ u. endlich

$$Q \xi \sin\alpha = \frac{3}{4} \frac{Q}{g} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{4g}{3} \xi \sin\alpha = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$2\sqrt{\frac{g \cancel{\xi} \sin\alpha}{3}} \cdot \sqrt{\xi} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^{\cancel{2}}$$

$$2\sqrt{g \frac{\sin\alpha}{3}} \cdot \sqrt{\xi} . dt = d\xi$$

$$\int 2\sqrt{g \frac{\sin\alpha}{3}} . dt = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

$$t . 2\sqrt{g \frac{\sin\alpha}{3}} = 2\sqrt{\xi} + C$$

für $t = 0$ ist $\xi = 0$, also $C = 0$

u. folglich $\sqrt{\xi} = \sqrt{g \frac{\sin\alpha}{3}} . t$ oder

$$\xi = \frac{1}{3} g \sin\alpha . t^2$$

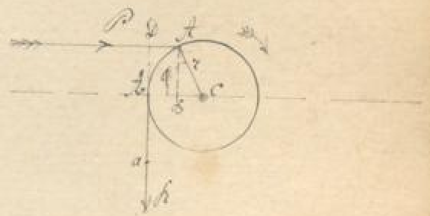
die Geschwindigkeit ist also der Zeit proportional u. daher gleichförmig beschleunigt.

9697.

Theorie der Kurbel u. des Schwungrades.

Diese Theorien war m. vor wenigen Jahren noch nicht im Stande aufzustellen; z. B. Langsdorf stellte 7 falsche Theorien auf. Erst seit dem man anfing das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte u. das Dalembert'sche Princip zu benützen, kann m. auf richtige Ansichten von der Sache.

Denken wir uns das bestehende einfache System von einer Welle C, die von einer Kurbel mit Lenkerstange, u. durch die in der sich immer ∥ bleibenden Schubstange wirkenden Kraft P ein Schwungrad umgedreht.



Die Masse des Schwungrades sei so groß, daß wir die Massen der einzelnen Elemente vernachlässigen können.

Es sei Jm_o^2 das Trägheitsmom. des Schwungrades

ω die Winkelgeschw. welche vorhanden war, da die Kurbel in A_o war.

θ die Winkelgeschw. nach dem der $\angle \varphi$ beschrieben.

Wir können nun das Gesetz für die Bewegung herleiten 1.)

durch das Princ. der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

$\Sigma. \int P dp - \Sigma. \int K dr = Smv^2 - Smu^2.$

Hierbei ist $Smu^2 = \theta_0^2 Sm\rho^2$

$Smv^2 = \theta^2 Sm\rho^2$

$Smv^2 - Smu^2 = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2.$

die wirkenden Kräfte sind als P in der Schubstange vereinigt; der wirkliche Weg, den der Angriffspt. von P in diesem Zeitraum zurücklegt ist A_0A u. auch die Richtung der Kraft gemessen. Es ist

$DA = A_0B = r \sin vers \varphi$ also

$\Sigma\, Pdp = P r \sin vers \varphi$

Alle Widerstände seien in der K vereinigt, die immer tangential an dem Kurbelzapfenkreis wirkt. Der Weg, den der ebenfalls in a gedachte Angriffspt. dieser K zurücklegt, ist $r\varphi$; also $\Sigma K dr = K r \varphi$; folglich:

$P r \sin vers \varphi - K r \varphi = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2$

2.) Nach dem Dalembert'schen Princip.

Hierbei müssen wir an jedem Massentheilchen m eine Last K entgegengesetzt anbringen, die die Geschwindigkeit des Theilchens aufhebt.

Setzen wir die statischen Momente an:

$P r \sin\varphi = A r + S\rho K$.

Nun ist aber $\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q}$, $\frac{Q}{g} = 2m$

u. $F = 2m\frac{dv}{dt}$; u. $\frac{dv}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt}$, also

$K = 2m.\rho\frac{d\theta}{dt}$, u. $S\rho K = 2\frac{d\theta}{dt} Sm\rho^2$

$P r \sin\varphi - A r = 2\frac{d\theta}{dt} Sm\rho^2$

Aber $\theta = \frac{d\varphi}{dt}$, $d\varphi = \theta dt$ giebt

$P r \sin\varphi\, d\varphi - A r\, d\varphi = 2\theta\, d\theta\, Sm\rho^2$

$P r \int\sin\varphi\, d\varphi - A r\int d\varphi = 2 Sm\rho^2 \int\theta\, d\theta$

$P r \sin vers\varphi - A r\varphi = 2 Sm\rho^2 \frac{\theta^2}{2} + C$

für $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$

$0 = \theta_0^2 Sm\rho^2 + C$

folglich $P r \sin vers\varphi - A r\varphi = (\theta^2 - \theta_0^2) Sm\rho^2 \ldots \mathrm{I}$

dasselbe Resultat wie oben.

3. <u>Durch Reduction der Massen.</u>

Wir beschreiben einen Kreis mit einem Rad. $= r$ u. in diesem Kreis denken wir uns eine Masse, die ein ebensogroßes Trägheitsmoment hat, als das Bewegungsrad. Diese Masse $M = \frac{Sm\rho^2}{r^2}$

Man zerlege die Kraft P in zwei nach der Richtg des Radius, welche aufgehoben wird, u. in eine tangentiale an den Kreis, welche letztere $= P\sin\varphi$ ist.

Wir haben $\frac{dv}{dt} = g\frac{F}{Q} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}$, ferner,

$v = r\theta$, $F = P\sin\varphi - k$, also

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{P\sin\varphi - k}{Sm\rho^2}\right) r^2$$

oben haben wir gefunden $\theta dt = d\varphi$

$$r\,\theta d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{(P\sin\varphi - k)\,r^2 d\varphi}{Sm\rho^2}$$

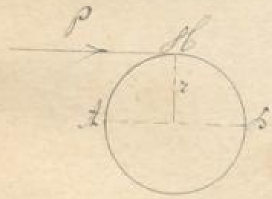
$$2\theta d\theta\, Sm\rho^2 = Pr\sin\varphi d\varphi - kr\,d\varphi$$

$$\theta^2 Sm\rho^2 = Pr\,\mathrm{sinvers}\,\varphi - kr\varphi + C$$

$$(\theta^2 - \theta_0^2)\,Sm\rho^2 = Pr\,\mathrm{sinvers}\,\varphi - kr\varphi$$

wie oben.

Früher hielt man irrig an der Idee, es müsste in b entsprechend dem größten statischen Momente, auch die größte Geschwindigkeit vorhanden sein, was aber irrig, u. daher zu falschen Theorien führte.



Fragen wir nun, welche Geschw. findet in b statt? setzt $\varphi = \pi$, $\theta = \theta_1$ zugeführt:

$$Pr\,\mathrm{sinvers}\,\pi - kr\pi = (\theta_1^2 - \theta_0^2)\,Sm\rho^2$$

$$2rP - kr\pi = \ldots\ldots$$

Wir sehen nun fest, daß alle halben Umdrehungen auf gleiche Weise vor sich gehen, daß also in a wieder dieselbe Geschwindigkeit wie in A statt finden wird. $\theta_1 = \theta_0$ sein.

Dies findet aber erst statt, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist. Dieser wird nach kurzer Zeit eintreten

100, 101. da die Geschwindigkeit des Schwungrades nur bis zu einer gewissen Grenze zunehmen kann. Für diesen Beharrungszustand haben wir:

$$2Pr - Kr\pi = 0$$

$$2P = K\pi$$

$$P = \frac{\pi}{2}K \quad \ldots\ldots\ldots \quad II$$

Dies in die Gleich. (I) substit. gibt:

$$\frac{\pi}{2} K r \sin vers\,\varphi - Kr\varphi = (\theta^2 - \theta_0^2)\, \Sigma m\rho^2$$

$$Kr\left\{\frac{\pi}{2} \sin vers\,\varphi - \varphi\right\} = (\theta^2 - \theta_0^2)\, \Sigma m\rho^2 \quad \ldots \quad III$$

In dieser Gleichung ist also das Gesetz der Bewegung im Beharrungsz. niedergelegt.

Wir ersehen daraus, daß ungeachtet der constanten Kraft P u. dem constanten Widerstand K eine ungleichförmige Bewegung statt findet.

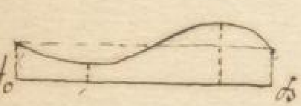
Diese Ungleichförmigkeit der Bewegung ist aber den Maschinen nachtheilig, daher stoßen wir jetzt auf die Frage: Welche Masse müssen wir dem genannten Schwungrade geben, damit der Unterschied zwischen der größten u. kleinsten Winkelgeschw., welche bei der Bewegung durch einen Halbkreis entsteht, eine ganz bestimmte Größe hat.

Die zur Berechnung kommende Ungleichheit

zi.

Kraft ist $\frac{\pi}{2} k \sin\varphi$ u. ist also abhängig von φ. Anfangs ist sie klein, so daß sie dem Widerst. k nicht das Gleichgewicht zu halten vermag; wächst aber bis $\frac{\pi}{2} k \sin\varphi_1 = k$: (wir setzen φ_1 u. φ_2 um diese Werthe von φ auszuzeichnen.) In A_0 setzten wir voraus hatte das Schwungrad die Geschwind. c_0; da aber die Kraft $\frac{\pi}{2} k \sin\varphi$ immer mehr zunimmt u. am Ende auch $= k$ dem Widerst. werden muß, so daß sich also die beiden Kräfte das Gleichgewicht halten würden u. das System gar keine Geschwindigkeit mehr hätte,* so muß für ~~diesen~~ Pkt, wo $\frac{\pi}{2} k \sin\varphi_1 = k$, $\frac{\pi}{2} \sin\varphi_1 = 1$, ein Minimum von Geschwindigk. statt finden, da es sich nur noch vermöge der Trägheit bewegt. Von hier an wird die Kraft größer als der Widerstand u. daher wächst auch die Winkelgeschwindigk. bis zum Pkt, wo nochmals $\frac{\pi}{2} k \sin\varphi_2 = k$ d. i. $\sin\varphi_2 = \sin(180-\varphi_1)$, u. hier hat die Geschw. ihr Maximum erreicht. Beistehende Curve mag dies versinnlichen. Der Halbkreis $A_0 B$ sei als Abscisse aufgewickelt u. die Winkelgeschw. als Ord. aufgetragen.

* wenn c_0 die Geschw. abnehmen



103. bei einer gleichf. Bewegung wäre θ immer gleich u. daher würde die Bewegung durch eine gerade Linie dargestellt; bringt man aber neue Massen an das Schwungrad, so nähern sich diese Schwankungen immer mehr der Geraden u. dies wollen wir nun untersuchen, wie:

durch Subtraktion von $\frac{\pi}{2}$ sin φ findet man $\varphi_1 = 39^\circ 32' 25''$ u. $\varphi_2 = (180 - 39^\circ 32' 25'')$

ferner $\frac{\pi}{2} \sin\varphi = 1$, $\sin\varphi = \frac{2}{\pi}$. folglich: wenn man $kr\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{invers}\varphi - \varphi\right)$ differentiirt hat, erhält man auch die Werthe für das Minim. u. Maximum, wie folgt:

$$kr\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right) = \Sigma m\rho^2 \frac{d.(\theta^2)}{d\varphi}$$

$$kr\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right) = 0, \text{ od. } \frac{\pi}{2}\sin\varphi = 1$$

$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}$, um zu sehen, ob dieser Werth ein Minim. od. Max. gibt, suchen wir

$$\frac{d(\theta^2)}{d\varphi^2} = kr\left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi\right),$$

woraus erhellt, daß, da der cos im ersten Quadr. positiv u. im 2ten negativ, für $\varphi = \frac{2}{\pi}$ ein Min. u. für $180 - \frac{2}{\pi}$ ein Maxim. Werth findet.

Setzen wir w u. W das Min. u. Max. der Geschw. so ergibt sich:

$$kr\left(\frac{\pi}{2} \sin\operatorname{vers}\varphi_1 - \varphi_1\right) = (w^2 - \theta_0^2)\Sigma m\rho^2$$

$$kr\left(\frac{\pi}{2} \sin\operatorname{vers}\varphi_2 - \varphi_2\right) = (W^2 - \theta_0^2)\Sigma m\rho^2$$ u. beide abgezogen von einander:

$$kr\left[\frac{\pi}{2}\left(\sin\operatorname{vers}\varphi_2 \cancel{+\varphi_2}\right) \cancel{+} - \sin\operatorname{vers}\varphi_1\right) \pm \cancel{\varphi_1}) - (\varphi_2 - \varphi_1)\right] = \Sigma m\rho^2 (W^2 - w^2)$$ u. ./.

folglich $Smp^2 = dr\left[\frac{\frac{\pi}{2}(\sin vers\, \varphi_2 - \sin vers\, \varphi_1) + \varphi_1 - \varphi_2}{W^2 - w^2}\right]$ 1005.

Es ist aber $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ d.

$\sin vers\, \varphi_2 = \sin vers(\pi - \varphi_1) = 1 - \cos(\pi - \varphi_1) = 1 + \cos\varphi_1$

$\sin vers\, \varphi_1 = \text{— — — — — —} = 1 - \cos\varphi_1$

also $\sin vers\, \varphi_2 - \sin vers\, \varphi_1 = 2\cos\varphi_1$ u. daher

$$Smp^2 = \frac{dr}{W^2 - w^2}\frac{\pi}{2}\left\{2\cos\varphi_1 - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \cancel{- \varphi_1 - \pi + \varphi_1}\right\}$$

$$= \frac{dr\pi}{W^2 - w^2}\left(\cos\varphi_1 - \frac{1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)$$

Um die Formel numerisch zu berechnen

hat man $\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \sin\varphi_1^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}$.

$\frac{2}{\pi} = 0,6365$; $(0,6365)^2 = 0,405132$;

$\sqrt{1 - 0,405132} = \sqrt{0,594464} = 0,77125$.

also $\cos\varphi_1 = 0,77125$.

$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} = \frac{100,91944}{140} = 0,5606$.

d. $-0,5606 \mp 0,7712 = \cancel{1,2726}$ $\cancel{0,7896}$ $= 0,2106$

$\cancel{1,2726}\ 0,2106 \cdot \pi = 0,66147$ daher

$$Smp^2 = 0,66147\frac{dr}{W^2 - w^2}$$

Unter mittlerer Geschwindigkeit verstehen wir diejenige, mit welcher sich die Kurbel gleichförmig in der Zeit durch den Halbkreis bewegen würde, in der sie mit ungleichförm. Geschw. einen Halbkreis zurücklegt.

Es sei C die mittlere Kurbelgeschw.

so ist: $W = (1 + \frac{1}{n})C$, $w = (1 - \frac{1}{n})C$ ./.

1605.

d. $\left.\begin{array}{l} W+w = 2C \\ W-w = \frac{2}{n}C \end{array}\right\} \quad W^2-w^2 = \frac{4}{n}C^2$

$$Sm\rho^2 = 0,66147\,\frac{kr}{4C^2}\,n = 0,16536\,\frac{kr}{C^2}\,n$$

In der Praxis ist gewöhnlich die Anzahl der Umdrehungen in 1 Minute gegeben.
Die Anzahl sei z. B. $= i$ gegeben, so ist

$$C = \frac{2\pi i}{60}$$

$$Sm\rho^2 = 0,16536\,\frac{kr \cdot n}{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 i^2}$$

$$= 15,08\,\frac{kr}{i^2}\,n$$

Theorie der Kurbel mit Rücksicht auf die an der Schubstange u. am Schwungrad wirkenden Massen.

Es treibe z. B. eine Dampfmaschine eine Mahlmühle.

Wir setzen voraus:

1.) Es drücke eine constante Kraft von unten auf die Kolbenfläche u. dann dieselbe von oben.

2.) Ohne Rücksicht auf Reibung geht die [illegible]

3.) Am Umfange des Kurbelkreises wirke ein constanter Widerstand.

4.) Mit der Schwungradwelle stehen die drehende Systeme in Verbindung.

[illegible]

5.) Die Schubstange sei so lang, daß im Verhältnis mit der Kurbel, daß wir annehmen können, die Schubst. bewege sich immer vertikal.

Ferner Annahmen sind:

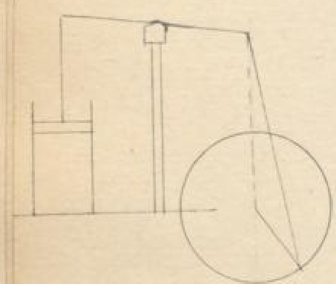
m Masse des Kolbens u. der Kolbenstange.

m_1 " der Schubstange.

$\Sigma\mu\rho^2$ Trägheitsmom. des Balanciers in Bezug auf seine Axe.

$\Sigma\mu_1\rho_1^2$ " des Schwungrades.

$\Sigma\mu_2\rho_2^2$ die auf eine Entfernung 1 von der Schwungradwelle reduc. Massen, welche etwa noch mitbewegt werden.



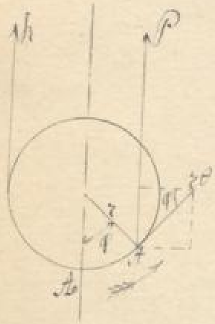
P der Druck auf den Kolben.

K der Widerstand, den die zu treibende Maschine der Bewegung entgegensetzt, reducirt auf den Kurbelkreis.

ω_0 die Winkelgeschw. in A_0.

ω " " welche dem $\angle\varphi$ entspricht.

l die Länge des Balanciers.



Wir fragen nun, um wieviel hat sich die lebendige Kraft geändert, während der Bewegung durch den Winkel φ d.h. von A_0 bis A.

Wir haben dazu nur entsprechende Werthe in $\Sigma\int Pdp - \Sigma\int Kdr = \Sigma mv^2 - \Sigma mu^2$ zu substituiren. Es ist

$\Sigma\int Pdp = Pr \operatorname{sinvers}\varphi$ ./.

107. $\Sigma_1 \int h\,dz = hz\varphi$

$$S m u^2 = \theta_0^2 S\mu_1\rho_1^2 + \theta_0^2 S\mu_2\rho_2^2$$

$$S m v^2 = \begin{cases} m(z\theta\sin\varphi)^2 + S\mu\rho^2\left(\frac{z\theta\sin\varphi}{\ell}\right)^2 + \\ + m_1(z\theta\sin\varphi)^2 + \theta^2 S\mu_1\rho_1^2 + \theta^2 S\mu_2\rho_2^2 \end{cases}$$

$$= \theta^2\left[S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2 + \sin^2\varphi\, z^2\left(m + m_1 + S\mu\rho^2\tfrac{1}{\ell^2}\right)\right]$$

daher:

$$Pz\sin\text{vers}\,\varphi - hz\varphi = \begin{cases}(\theta^2 - \theta_0^2)(S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2) + \\ + \theta^2 z^2\sin^2\varphi\left(m + m_1 + \frac{1}{\ell^2}S\mu\rho^2\right).\end{cases}$$

Wenn $m + m_1 + \frac{1}{\ell^2}S\mu\rho^2 = M$ gesetzt wird, so hat man die Gleich.:

$$Pz\sin\text{vers}\,\varphi - hz\varphi = (\theta^2 - \theta_0^2)(S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2) + z^2\theta^2\sin^2\varphi\, M \quad \text{I.}$$

Wir stellen nun wieder eine Gleichg für den Beharrungszustand auf, wobei für $\varphi = \pi$, $\theta = \theta_0$ sein muss.

$$2Pz - hz\pi = 0$$

$$P = \frac{\pi}{2}h \text{ .... II}$$

$$zh\frac{\pi}{2}\left(\sin\text{vers}\,\varphi - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = (\theta^2 - \theta_0^2)(S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2) + z^2\theta^2\sin^2\varphi\, M \text{ .. III.}$$

Um das Max. u. Minim. zu bestimmen, ist $\frac{d(\theta^2)}{d\varphi} = 0$, also

$$zh\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}d\varphi\right) = (S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2)2\theta d\theta + $$
$$+ z^2 M\sin^2\varphi\, 2\theta d\theta + z^2\theta^2 M 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi;$$

$$\frac{2\theta d\theta}{d\varphi}\left(S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2 + z^2 M\sin^2\varphi\right) =$$
$$= zh\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}\right) - z^2\theta^2 M\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$2\theta\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{zh\frac{\pi}{2}\left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{1}{2}z^2\theta^2 M\sin 2\varphi}{S\mu_1\rho_1^2 + S\mu_2\rho_2^2 + z^2 M\sin^2\varphi}.$$

Bezeichnen wir mit α den Werth von φ, für welchen θ ein Minim. wird, u. durch w die zugehörige Winkelgeschw.; ebenso durch β u. W die entsprechenden Werthe für das Maximum, so ist

$$\left.\begin{aligned} 2k\frac{\pi}{2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) &= r^2 w^2 M \sin 2\alpha \\ 2k\frac{\pi}{2}\left(\sin\beta - \frac{2}{\pi}\right) &= r^2 W^2 M \sin 2\beta \end{aligned}\right\} \text{IV}$$

u. ferner aus (III)

$$2k\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) = (w^2 - c_0^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 w^2 \sin^2\alpha\, M$$

$$2k\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \frac{2\beta}{\pi}\right) = (W^2 - c_0^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 W^2 \sin^2\beta\, M.$$

u. durch Subtraction:

$$2k\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha)\right) =$$
$$= (W^2 - w^2)(\Sigma\mu_1\rho_1^2 + \Sigma\mu_2\rho_2^2) + r^2 M W^2 \sin^2\beta - r^2 w^2 M \sin^2\alpha$$

$$\Sigma\mu_1\rho_1^2 = \frac{2k\frac{\pi}{2}\left(\sin vers\,\beta - \sin vers\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha)\right) - r^2 M (W^2\sin^2\beta - w^2\sin^2\alpha)}{W^2 - w^2} -$$
$$- \Sigma\mu_2\rho_2^2 \ldots \text{V}$$

Es sei C die mittlere Winkelgeschwind. der Kurbel.

Es soll $W - w = \frac{1}{n}C$ sein u. nehmen wir

$$\left.\begin{aligned} &\text{dass}\quad \tfrac{1}{2}(W + w) = C \quad \text{so ist}\quad W = C\left(2 + \tfrac{1}{n}\right)\tfrac{1}{2} \\ &\text{u.}\quad \ldots\quad w = C\left(2 - \tfrac{1}{n}\right)\tfrac{1}{2} \\ &\text{u.}\quad —\quad W^2 - w^2 = \tfrac{2}{n}C^2 \end{aligned}\right\} \text{VI}$$

Numerisches Beispiel.

Es soll das Trägheitsmoment eines Schwungrades bestimmt, das mit einer Dampfmaschine von 40 Pferdekräften in Verbindung steht. Dabei soll der Unterschied zwischen der größten u. kleinsten Geschwindigkeit eine bestimmte Größe haben.

Die Formel ist nach obiger Herleitung

$$Sm\rho^2 = 15,08 \frac{k r n}{i^2}$$

Es sei $r = 1,8^m$ also $i = \frac{1,8 \cdot 60}{2 \cdot \pi} = 17,2$

ferner $n = 40$. u. endlich:

$$k r \cdot \theta = 75 \cdot 40$$

$$k r = \frac{75 \cdot 40}{1,8} = 1666 \text{ u. folglich}$$

$$Sm\rho^2 = 15,08 \cdot \frac{1666 \cdot 40}{(17,2)^2} = 3396^{\text{Kilogr.}}$$

Da wir oben schon viele Massen vernachlässigt haben, so können wir bei der Bestimmung der Dimensionen des Schwungrades auch die Trägheitsmomente der Arme des Rades außer Acht lassen.

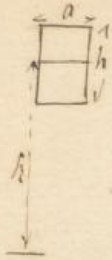
Wir erhalten, wenn R den Radius des Rades ist

$$\frac{Q}{2g} R^2 = Sm\rho^2 = 3396$$

$$Q = \text{Masse des Rades} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 3396}{R^2}$$

wenn $3,5 = R$ angenommen wird, ist

$Q = 5439^{\text{Kilogr.}}$ ferner ...



Wenn a die Dicke u. h die Höhe des Radringes
u. 7200 Kilogr. das Gewicht eines Kubikmeters Gußeisen ist:

$$ah \cdot 2R\pi \cdot 7200 = 5439 \quad \text{u. wenn } h = 2a$$

$$7200 \cdot a \cdot 2a \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = 5439$$

$$a = \sqrt{\frac{5439}{7200 \cdot 4 \cdot 7{,}5 \cdot 3{,}14}} = 0{,}131^m$$

also $a = 0{,}131^m$ u.

$h = 0{,}262^m$.

2^tes Numerisches Beispiel

mit Rücksicht auf die Massen der Schubstange etc.

Oben haben wir die Formeln aufgestellt:

$$kr\frac{\pi}{2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = M w^2 \sin 2\alpha$$

$$kr\frac{\pi}{2}\left(\sin\beta - \frac{2}{\pi}\right) = M W^2 \sin 2\beta$$

$$G_{\mu}\rho_1^2 = \frac{kr\left(\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha)\right)^2 M\left(W^2\sin^2\beta - w^2\sin^2\alpha\right)}{W^2 - w^2} - G_2\rho_2^2.$$

Der Übereinstimmung wegen, setzen wir wieder

$$W = C\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad w = C\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$W + w = 2C$$
$$W - w = \frac{2}{n}C \quad \text{u.} \quad W^2 - w^2 = \frac{4}{n}C^2$$

Die Dampfmaschine habe wieder 40 Pferdekraft
ferner sei:

$n = 40$

$l = 2{,}744^m$

Höhe der Colonne in der Mitte $0{,}828^m$

Dicke derselben $0{,}06^m$.

111. Länge der Schubstange $5,2^m$

Querschnitt " " $0,329^{\square m}$

Durchmesser des Kurbelbolzens $0,856^m$

Höhe - - - - $0,15^m$

Querschnitt - - - - $0,3755^{\square m}$

Gewicht des Lokomotives . . . 7200^{kgr}

daher Gewicht des Kolbens 621^{kgr}

" der Schubstange 1255^{kgr}

" des Balanciers 1963^{kgr}

Man hat ferner

$$M = m + m_1 + \frac{S w^2}{l^2} = \frac{1}{2g}\left(621 + 1255 + 1963 \cdot \frac{(5,488)^2 + (8,18)^2}{(2,744)^2}\right)$$

$$M = 130.$$

$$Kr = 1666.$$

Es sei $l = 1,8$ daher

$$W = 1,8\left(1 + \tfrac{1}{40}\right) = 1,845$$

$$w = 1,8\left(1 - \tfrac{1}{40}\right) = 1,75$$

$$W^2 = 3,403, \qquad w^2 = 3,063$$

Für die Bestimmung von α u. β ergibt sich

$$\sin\alpha - \frac{2}{\pi} - \frac{2Mw^2}{Kr\pi}\sin 2\alpha = 0$$

$$\frac{2Mw^2}{Kr\pi} = \frac{2 . 130 . 3,063}{1666 . 3,141} = 0,15207$$

also $\sin\alpha - 0,63653 - 0,15207 \sin 2\alpha = 0$

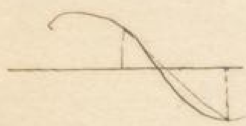
$\sin\beta - 0,63653 - 0,16895 \sin 2\beta = 0$

führen wir endlich statt $\beta = \pi - \beta_1$ ein so

ergibt sich $\sin\beta_1 - 0,63653 + 0,16895 \sin 2\beta_1$.

Am einfachsten findet sich nun α u. β aus den aus den beiden Gleichungen durch die regula falsi bestimmen. 112. 113.

Setzen wir z. B. $\alpha = 45^\circ$, so ergibt sich; wenn wir den dadurch sich ergebenden Werth als Ordinate y zu α als Absc. einer Curve ansehen:



$$0,7071 - 0,63653 - 0,15207 = y_0$$

$$\alpha_0 = 45.;\ y_0 = -0,0815$$

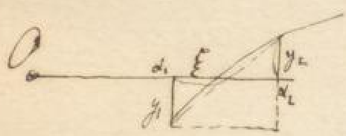
Da aber nur für $y = 0$ α einen Wurzelwerth der Gleichung gibt, so fahren wir fort andere Werthe für α zu substituiren.

$$\alpha_1 = 50^\circ,\ \sin 50 = 0,7660,\ \sin 2\alpha = 0,9848.$$

$$0,7660 - 0,63653 - 0,15207 \cdot 0,9848 = y_1$$

also für $\alpha_1 = 50$, $y_1 = \mp 0,0203$

ferner $\alpha_2 = 55^\circ$, $\sin 55 = 0,8192$; $\sin 110 = 0,9385$



$$0,8192 - 0,63653 - 0,15207 \cdot 0,9385 = y_2$$

$$y_2 = +0,0399$$

so ist $\xi : y_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) : (y_1 + y_2)$

$$\xi = \frac{y_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{(y_1 + y^2)} = \frac{+0,0203 \cdot 5}{0,0203 + 0,0399} = 1^\circ 41'.$$

also ist der Wurzel naher Werth ist

$$\alpha_1 + \xi = 51^\circ 41'.$$

Ebenso verfahren wir mit β. und substituiren nach Versuchen etwa 30°, so wird:

$\sin 30 = 0,5000$, $\sin 2\beta = 0,866$, also:

$$0,500 - 0,63653 + 0,76495 \cdot 0,866 = y$$

$y = 0,0094$ also $\beta = 30$ genügend.

112, 113. Substituiren wir endlich:

$$\mathrm{sinvers}\,\beta - \mathrm{sinvers}\,\alpha = \mathrm{sinvers}(180-30) - \mathrm{sinvers}\,51^0 41' =$$
$$= 1,4860.$$

$$\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha) = 1,0920$$

$$\mathrm{sinvers}\,\beta - \mathrm{sinvers}\,\alpha - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha) = 1,4860 - 1,0920 = 0,3940$$

$$kr.\frac{\pi}{2}(0,3940) = 1031,0794$$

$$r^2 M\cdot(W^2 \sin^2\beta - w^2 \sin^2\alpha.) = -1520,4375$$

Betrachtung über den Stoß.

Wie ist der Grundsatz der lebendigen Kräfte zu gebrauchen, wenn Stöße auf unelastische Körper vorkommen?
Während dem Stoß ändert sich plötzlich die lebendige Kraft u. diese Änderung muß auch zu dem

$$\Sigma\int P dp - \Sigma\int Q dq = \Sigma m(V^2 - u^2)$$ hinzugefügt werden.

Wir bestimmen dies durch das Carnot'sche Princip. Es seien

$m_1, m_2, m_3 \ldots$ die verschied. Massen des Syst.

$$\begin{array}{lll} U_1 & U_2 & U_3 \dots \\ V_1 & V_2 & V_3 \dots \\ W_1 & W_2 & W_3 \dots \end{array}\Bigg\}$$ die Geschw. vor dem Stoß auf 3 senkrecht. Axen zerlegt.

$$\begin{array}{lll} u_1 & u_2 & u_3 \dots \\ v_1 & v_2 & v_3 \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 \dots \end{array}\Bigg\}$$ die Geschw. nach denselben Axen nach dem Stoße.

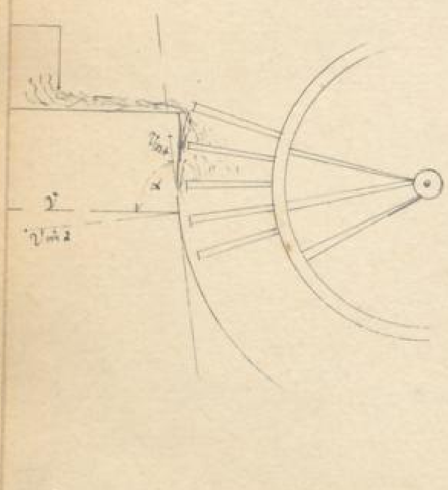
Die Verluste an leb. Kr. der einzelnen Massentheile:

$$\mu_1 \{(U_1-u_1)^2+(V_1-v_1)^2+(W_1-w_1)^2\}$$
$$\mu_2 \{(U_2-u_2)^2+(V_2-v_2)^2+(W_2-w_2)^2\}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Der Gesammtverlust also

$$= S\,\mu \{(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2\}$$

Zu bemerken ist, daß diese Gleichung nur in den Fällen praktisch anwendbar ist, wo man die Geschwind. des Systems nach dem Stoße ganz genau kennt.



1. Beispiel.

Untersuchung der Bewegung eines Wasserrades, auf dessen Schaufeln das Wasser mit Stoß ankommt.

Die Geschw. des Rades ändern sich nicht, folglich ist in der Masse des Rades auch kein Verlust an leb. Kraft.

Dagegen das Wasser muß, wenn es auf die Schaufel gestoßen, die Geschw.

 des Rades annehmen.

Die Geschw. des Rades sei v.

" mit der das Wasser anlangt sei V.

Letztere zerlegen w. in 2 rechtw., in einen tangentiale u. in eine nach der Richtg des Radius; erstere ist $V\cos\alpha$, letztere $V\sin\alpha$.

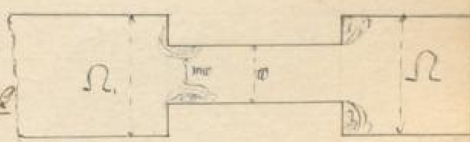
Wenn also in der Sec. ein Wasservolum zu 1000 Kilogr. verbraucht, so ist die Masse $1000\,\frac{Q}{2g}$ u. der Verlust a. leb. Kraft $= \frac{1000\,Q}{2g}\left\{(V\cos\alpha - v)^2 + (V\sin\alpha - 0)^2\right\}$

$$= \frac{1000\,Q}{2g}\left(V^2 + v^2 - 2Vv\cos\alpha\right)$$

2. Beispiel.

Bewegung des Wassers in einer Röhre mit schroffwechselnden Verengungen.

Stöße kommen vor bei dem Ausfluss von Ω in ω, u. wieder von ω in Ω.



Wenn man eben in der Sec. eine Masse $\frac{1000\,Q}{2g}$ durchfließt, so ist, – wenn ferner u u U die Geschw. in den 3 Durchschnitt sind u. m der Contractionscoeffic. ist, $m\omega$ der verengte Durchschnitt u. w sei die Geschw. in demselben – :

$$\frac{1000\,Q}{2g}\left\{\left(\frac{Q}{m\omega} - \frac{Q}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\omega} - \frac{Q}{\Omega}\right)^2\right\}$$

Nämlich $Q = m\omega w$; $Q = \omega u$, $Q = \Omega U$

$$w = \frac{Q}{m\omega}, \quad u = \frac{Q}{\omega}, \quad U = \frac{Q}{\Omega}.$$

Die allgemeine Gleichung mit Rücksicht auf den Stoß wäre also

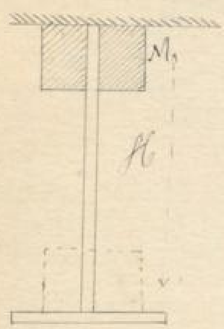
$$\Sigma_1 \int P dp - \Sigma_1 \int Q dq = \tfrac{1}{2} m (v^2 - u^2) + \tfrac{1}{2}\mu\left[(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2\right].$$

Für den Beharrungszustand der Maschine, wobei also $v = u$ hat man ganz einfach die Gleichg:

$$\Sigma_1 \int P dp = \Sigma_1 \int Q dq,$$

in welcher Gleich. keine Massen erscheinen, was im ganzen Bereich des Maschinenwesens eine bedeutende Einfachheit herbeiführt.

Über die Festigkeit der Materialien hinsichtlich der Stöße.



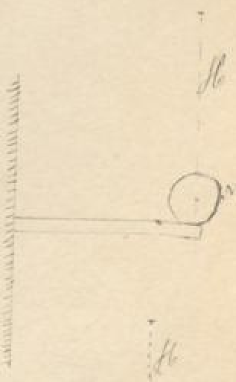
Wenn z. B. ein Stab in senkrechter Lage unten ein Gewicht zu tragen hat, so ist die absolute Festigkeit dem Querschnitt proportionell.
Anders ist es aber, wenn unten eine Platte fest mit dem Stabe verbunden ist u. man auf diese ein Gewicht (etwa einen schweren hohlen Cylinder) herabfallen läßt.
Es sei während dem Stoß w das maxim. der Spannung; M sei das Gewicht des Stoßend

117. Beispiel. V das Volumen des Stabes, ε der Elasticitätscoeffic.; h die Höhe, von der der Körper fällt, so ist

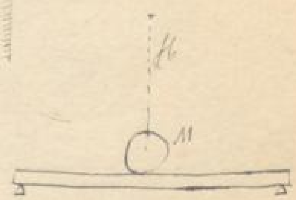
$$\omega = \sqrt{\frac{2Mh\varepsilon}{V}}$$

also hat der Querschnitt keinen Einfluß, sondern je größer das Volumen, desto kleiner die Spannung.

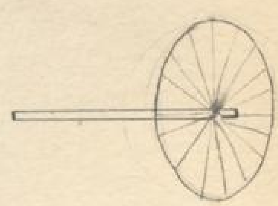
2.) Ebenso überraschend ist die Gleichung für einen horizontalen Stab, der in einer Wand befestigt: hiebei ist $\omega = 3\sqrt{\frac{2Mh\varepsilon}{V}}$.



u. 3.) Wenn derselbe an beiden Enden unterstützt ist, ebenfalls $\omega = 3\sqrt{\frac{2Mh\varepsilon}{V}}$.



4.) Beim Stoß während drehender Bewegung ergibt sich; wenn z.B. an einer Welle ein Schwungrad in Bewegung ist u. plötzlich die Welle festgehalten würde, so würde beim Überschreiten des Maxim. von Torsionsfestigkeit ein Abdrehen erfolgen.



Wenn V das Volumen der Welle; C die anfängliche Geschw.; τ ein Elastic.coeffic. für Drehung; $\Sigma m\rho^2$ das Trägheitsm. des Schwung=

werden u. S das Maxim. der Torsions-festigkeit, so ist

$$S = \Theta_0 \sqrt{\frac{2 t S m \varrho^2}{g \mathfrak{A}}}$$

wobei angenommen ist daß größeren Belastungen der Welle eine größere Festigkeit entspricht.

Allgemeine Theorie

der

Maschinen.

§. 1.

Jede mechanische Operation besteht entweder in einer Ortsveränderung oder in einer Formveränderung eines Körpers.

Wir sind nicht im Stande Körper zu schaffen, wohl aber besitzen wir die Fähigkeit, die Gesetze kennen zu lernen, nach welchen die Naturkräfte auf ihre eigenthümliche Weise wirken; und die Technik lehrt uns die Mittel ausfindig machen, durch es wir d. Naturkräfte verwalten können, daß sie mit den Naturprodukten gerade diejenige Veränderung vornehmen, durch welche sie (die Rohstoffe) an die Orte geschafft werden, wo wir sie brauchen, oder in Produkte (der Industrie od. der Kunst) verwandelt werden, welche für unsere materiellen u. geistigen Zwecke nützlich u. nothwendig sind.

§. 2.

Will man mit einem Körper eine mechan. Operat. vornehmen, so muß m. mit einer gewissen Kraft auf denselben einwirken. denn 1.) muß der zu verändernde Körper überhaupt in Bewegung gesetzt, also seiner Masse od. den einzelnen Theilchen derselben Geschwindigkeit ertheilt werden, u. 2.) wirken allen Veränderungen, welche m. mit d. Körp. vorn. will, gewisse Kräfte entgegen, die überwunden werden müssen.

Hat m. z. B. einen Körper in horizontaler Richtung auf einer Schleife oder einem Wagen fortzuschaffen, so ist im ersten Falle die Reibung, welche die Bahn verursacht, u. im 2ten Fall die Zapfenreibung, so wie auch der Widerstand, der durch das Eindringen der Räder in die Bahn entsteht, zu überwinden. Soll ein Körp. gehoben werden, so muß das Gewicht desselben (d. h. die Kraft, mit wo. die Erde den Körp. anzieht) überwunden werden. Bei allen Formänderungen der Körper, welche durch

Hobeln, Feilen, Sägen, Drehen, Meißeln, Schlagen, Spinnen, Weben, &c. geschehen, müssen die Molekularkräfte, die jeder andern Gestaltung der Theilchen entgegen stehen, überwältigt werden.

§. 3.

Die Kräfte, welche zur Überwältigung anderer angewandt werden können, haben immer ihren Sitz in gewissen Stoffen, u. können in der Natur nie isolirt vor. Die Materie besteht aus einem positiven Bestandtheil, welchen wir die Masse nennen, u. einem activen, dem wir den Namen Kraft beilegen. Weder der eine noch der andere Bestandtheil kann von dem andern wirklich getrennt werden, jeder nur getrennt gedacht werden.

Diejenigen Stoffe od. Körper, welche im Stande sind, auf äußere Körper eine bedeutende Wirkung auszuüben, werden Motoren (Beweger) genannt. Jeder in Bewegung befindliche Körper kann einem andern Bewegung mittheilen, indem er seine eigene allmählig verliert. Solche Motoren sind z. B. das Wasser der Flüsse,

u. Wasser u. die bewegte Luft (d. Wind.)

Körper können ferner durch äußere auf sie einwirkende Kräfte zu Motoren werden, wie z. B. Wasser, wenn es durch die Anziehung der Erde von einem höheren zu einem tiefern gelangt. (Mühle) Brunnenbau; oder ein Elektromagnet, durch die elektromagnetische Kraft einer Batterie; od. eine Stahlfeder, wenn sie zusammengepreßt worden ist.

Es können aber auch d. Körper durch die ihnen ursprünglich innewohnende Kraft, wenn sie entwickelt wird, auch außen zu wirken, zum Motor werden, wie dies insbesondere beim Wasserdampf der Fall ist oder bei den chemischen Kräften.

§. 4.

Bei den zahlreichen Veränderungen, welche in d. Natur ohne unsere Mithilfe, ohne unsere Veranlassung entstehen, wirkt der Motor gewöhnlich unmittelbar auf einen andern Körper ein, der dadurch eine Veränderung erleidet, u. dann ist diese von allerlei Zufälligkeiten abhängig, wie z. B. bei der Bewegung des Wassers in einem

Flüssigkeiten der Fall ist, deren Atome u. Theile [illegible] Veränderungen ausgesetzt sind.

Soll daher mit d. Körp. eine ganz bestimmte Form- od. Ortsveränd. vorgenommen werden, so wird dies fast nie durch unmittelbare Einwirkung eines Motors geschehen können, sondern es ist nothwendig, den Motor mit dem zu verändernden Körper durch ein gewisses System von Zwischenkörpern, welches alle Willkürlichkeit u. Zufälligk. der Beweg. aufzuheben im Stande ist, u. nur eine dem Zweck der Veränd. angemessene Bewegung gestattet, in Verbindung zu setzen.

Dieses Körpersystem bildet die Maschine.

§. 5.

Bei jeder mechanischen Operation kommen also zwei Arten von Körpern vor:

1.) der Motor od. der active Körper.

2.) der zu verändernde Körper.

3.) die Maschine, welche die Verbindung zwischen beiden herstellt.

§. 6.

Zu jeder Maschine muß wenigstens ein Bestandtheil vorkommen, auf welchen der Motor zunächst einwirkt u. die Wirkung desselb unmittelbar aufnimmt.
Bei einem Wasserrad sind es die Schaufeln, od. Zellen, auf welche Motor unmittelbar einwirkt. Bei einer Dampfmaschine ist es der Kolben, auf welch. der Dampf drückt.
Diesen Bestandtheil wollen wir Receptor nennen.
Alle Bestandtheile, welche zusammen wirken müssen, damit der Motor auf die zweckmäßigste Weise dem Receptor seine Wirkung mittheilen kann, bilden die Kraftmaschine.

§. 7.

Bei jeder Maschine muß wenigstens ein Bestandtheil vorkommen, der auf den zu verändernden Körper unmittelb. einwirkt, u. mit demselben dasj. Funktionen durchführt, welche die zu verrichtende Arbeit erfordert.
Diesen Körper wollen wir das Werkzeug nennen.

Ist die nähere Operation verschieden, so sind gewöhnlich mehrere Werkzeuge, die gleichzeitig, nacheinander folgend wirken müssen, notwendig.

Alle diese Werkzeuge werden dann gewöhnlich zu einem Ganzen vereinigt, u. bilden ein System, welchem wir den Namen <u>Werkzeugsystem</u> od. <u>Arbeitsmaschine</u> beilegen wollen. Oft sind sogar eine ganze Reihe von solchen Arbeitsmaschinen nötig, u. diese bilden wieder ein Ganzes, welches wir ein <u>System von Arbeitsmaschinen</u> nennen wollen. Bei einer Pumpe, die zum Heben des Wassers dient, sind der Kolben u. die Ventile die Werkzeuge, die Pumpe selbst ist eine Arbeitsmaschine.

Die verschied. Maschinen, welche in den Eisenwerken vorkommen, nämlich die Hammer-Walzwerke, Blechscheren, Ziehbänke, Gebläse etc bilden ein System von Arbeitsmaschinen. die Hämmer des Hammerwerkes, die Walzen des Walzwerkes sind die einzelnen Werkzeuge. Ein sehr klares Beispiel eines Systems von Arbeitsmaschinen, bietet eine mechanische Weberei, Spinnerei,

§. 8.

Bei jeder Maschine, so wie bei jedem Maschinensystem, muß ein Mechanismus vorkommen, welcher den Rezeptor od. die Kraftmaschine mit dem Werkzeuge od. der Arbeitsmaschine od. mit allen Maschinen des ganzen Systems v. Arbeitsmaschinen in Verbindung bringt, um die Kraft des Motors nach allen Punkten hinzuleiten, wo es. gearbeitet werden soll.
Diesen Mechanismus wollen wir die Transmission nennen. Er besteht gewöhnlich aus vielen Rädern, Wellen oder überhaupt aus Bestandtheilen, die zur Fortleitung u. Verwendung der Bewegung geeignet sind.

§. 9.

Eine vollständige einfache Maschine besteht also aus:

1.) dem Rezeptor
2.) dem Werkzeuge
3.) einem Verbindungsmechanismus.

Eine zusammengesetzte vollständige Maschine besteht aus:

1.) der Kraftmaschine
2.) der Arbeitsmaschine
3.) einem Verbindungsmechanismus

Ein vollständiges Maschinensystem enthält:

1.) eine od. mehr Kraftmaschinen
2.) eine gewisse Anzahl v. Arbeitsmaschinen.
3.) einen Verbindungsmechanismus zw. d. Transmission.

§. 10.

Wenn irgend eine mechanische Operation ausgeführt werden soll, so ist zunächst und allein gegeben:

1.) der Motor
2.) der zu verändernde Körper
3.) was mit letzterem durch die Veränd. geschehen soll, u. wozu er geschafft werden soll; — das Mittel durch welches die Operation ausgeführt werden kann, d. h. die Maschine muß erdacht werden.

Es wird z. B. verlangt durch Wasser (Motor) Getreide (der zu veränd. Stoff) in Mehl (was aus dem Stoff werden soll) zu verwandeln; od. mit Dampf Baumwolle u. Seide zu spinnen, oder mit Sägen Bretter aus Balken zu schneiden.

§. 11.

Die Einrichtung des Triebwerks wird zwar durch die Natur des Motors zum Theil bedingt, aber nicht vollkommen bestimmt, denn es kann für jeden Motor unzählig viele Triebwerke ausfindig machen.

Die Einrichtung u. Bewegung des Werkzeugs oder der Arbeitsmaschine wird zum Theil durch die Natur des zu verwend. Stoffes u. durch die Eigenschaften des Dinges, welches aus der Arbeit hervorgehen soll, bedingt, aber wieder nicht vollk. bestimmt. Man kann z. B. aus einem Balken durch Auseinandertreiben von Keilen, od. durch Auseinand. v. Schneiden, od. durch Anw. von geradlinigen od. kreisförmigen Sägen zu Brettern machen; oder man kann Eisenstäbe durch Schmieden, od. durch Walzen zwischen Walzen hervorbringen.

Hat man sich über die Einrichtung der Kraft- u. Arbeitsmaschine entschieden so kann auch der Verbindungsmechanismus noch auf unzählige Arten hergestellt werden.

Es ist also die Construct. einer Maschine oder eines Maschinensystems, wobei irgend eine mechanische Operation bewerkstelligen soll, eine bestimmte Aufgabe, die unendlich verschied. Auflösungen fähig ist, u. es kommt jederzeit darauf an, die vollkommenste dieser Auflösungen aufzufinden zu machen.

§. 12.

Eine mechanische Operation wird um so vollkommener ausgeführt,

1. je vollkommener die Qualität des Produktes ist, welches aus dem Rohstoff gewonnen werden soll.
2.) je geringer die Quantität des Motors ist, welche eine bestimmte Quantität Produkte liefert.
3.) je kleiner die Anschaffungskosten u. Unterhaltungskosten der Maschine oder des Maschinensystems sind.

Wir wollen nun sehen, von welchen Umständen, diese 3 Hauptbedingungen abhängen.

§. 13.

Die Qualität des Produkts wird vorzüglich durch die Wahl des Werkzeuges oder der Arbeitsmaschine bedingt. Je mehr diese durch ihre Einrichtung u. Bewegungsart der Natur des zu verarbeit. Stoffes u. der Art der Veränderungen, welche mit demselb vorzunehmen, und angemessen sind, je genauer u. zweckmäßiger sie alle ihre Bewegungen ausführen, desto besser wird die Qualität des Produktes ausfallen.

Gewöhnlich geht der Arbeit durch Maschinen die Handarbeit voraus, u. die Werkzeuge welche bei letzterer benützt werden, bilden den Ausgangspunkt für die Construction der Arbeitsmaschine. Gewöhnlich ist es aber für den Übergang von der Handarbeit zur Maschinenarbeit nöthig, erstere in einfache Operationen aufzulösen, zu theilen u. für jede dieser Operationen ein besonderes Werkzeug od. eine besondere Arbeitsmaschine ausfindig zu machen.

§. 14.

Die Quantität des Motors, welche für eine bestimmte mechanische Operation nothwendig ist, d.h. der Kraftaufwand richtet sich theils nach der Größe der Operation selbst, vorzüglich aber auch nach der Einrichtung u. Bewegung des Zeugwerks.

Die vorzüglichste Motoren durch zweckmäßig eingerichtete Zeugwerken, ist der wichtigste Gegenstand für die ganze Industrie.

den die Rohstoffe haben an u. für sich keinen Werth u. nur ihre Gewinnung u. Verarbeitung vermittelst der Kräfte gibt ihnen Werth.

Dieser richtet sich vorzüglich nach dem Kraftaufwand, welcher bei der Gewinnung u. Verarbeitung angewendet wurde. Die Industrie wird daher in dem Maße Fortschritte machen, als man in der Benützung der Naturkräfte größere Fortschritte machen wird.

§. 15.

Die Beschaffungs- u. Unterhaltungskosten eines Maschinensystems od. einer Maschine richten sich vorzüglich nach

1.) der größern od. geringern Einfachheit des ganzen Zusammenhanges aller Maschinenbestandtheile.

2.) nach der Natur u. Quantität des Materialaufwandes für die Herstellung der Maschine.

3.) Nach der Genauigkeit u. Vollkommenheit in der Ausführung.

§. 16.

Wenn eine Maschine nur von Zeit zu Zeit und zwar nur vorübergehend zu benützen ist, u. die grössere od. geringere Vollkommenheit ihrer Construct. keinen wesentlichen Einfluß hat auch die Menge u. Güte der Arbeit, welche mit derselben verrichtet werden soll, wird man vorzüglich darauf bedacht sein die Anschaffungskosten zu vermindern u. es wird in diesem Falle eine minder vollkommen construirte aber wohlfeile Maschine ihrem Zwecke am besten entsprechen. Wenn dagegen eine Maschine continuirlich zu arbeiten hat, einen bedeutenden Kraftaufwand zu ihrer Bewegung bedarf, u. sowohl die Quantität als Qualität der Producte, welche sie liefern soll, von dem Grade der Vollkommenheit in der Construction der Maschine abhängt, darf man die Anschaffungskosten nicht scheuen, denn es wird auch selbst eine sorgfältig ausgeführte Maschine nicht so bedeutende Unterhaltungskosten verursachen: [illegible] ist.

§. 17.

Für den Maschinenbau sind vorzüglich folgende Kenntnisse u. Fertigkeiten erforderlich:

1.) Geometr. Kenntnisse u. insbesondere ein ausgebildetes Vermögen sich räumliche Gegenstände klar vorstellen zu können, u. dieselben richtig zu verzeichnen.

Diese geom. Kenntnisse sind vorzüglich für die Aufsuchung der zweckmäßigsten Zusammensetzungen der Maschinentheile von besonderer Wichtigkeit.

2.) die allgemeinen Grundsätze der Statik u. Mechanik, indem vermittelst derselben:

a.) die Widerstände ausgemittelt werden können, durch welche die entsprechende Einrichtung der Motoren bestimmt werden kann.

b.) diej. Formen u. Dimensionen für die Maschinenbestandtheile bestimmt werden, bei welchen sie mit dem geringsten Materialaufwand die hinreichende Festigkeit erhalten.

c.) der Kraftaufwand, für welchen

für irgend eine mechan. Operation nothwendig ist, beurtheilt od. berechnet werden kann.

3.) Kenntniss der Stoffe, welche durch die Maschine bearbeitet werden sollen, u. der Materialien aus welchen die Maschinenbestandtheile zu verfertigen sind.

4.) Kenntniss aus dem Bauwesen für die Herstellung der Wasserbauten, der Maschinenfundamente u. der Fabrikgebäude.

Die vorzüglichsten Fertigkeiten, welche der Maschinenconstructeur besitzen soll, sind:

1.) Fertigkeit im genauen Zeichnen

2.) Fertigkeit in den verschied. Arbeiten u. Operationen, welche bei der Ausführung der Maschinenbestandtheile u. Aufstellung der Maschinen vorkommen.

Das Messen der Wirkungen der Kräfte.

Die unmittelbare Äußerung einer Kraft ist immer ein Zug oder ein Druck, u. kann jederzeit gemessen werden, indem man ein Gewicht angibt, welches auf eine Unterlage einen ebensogroßen Druck ausübt, als jene Kraft. Durch einen Druck allein aber wird noch keine Arbeit verrichtet, sondern erst dann, wenn der Punkt, auf welchen der Druck ausgeübt wird, auch nach der Richtung der Kraft fortschreitet. Die Größe der Arbeit, welche eine Kraft verrichtet, od. die Größe der Wirkung, welche sie hervorbringt, ist offenbar zu schätzen:

1.) nach der Größe des Druckes, oder Zuges, mit welch. die Kraft wirkt,
2.) nach der Länge des Weges, den der Angriffspunkt der Kraft nach der Richtung derselben zurücklegt.

Wirkt also eine Kraft P mit unveränderlicher Intensität u. in ihrer eigenen Richtung fortschreitet u. einen Weg s zurücklegt, so ist die Größe der Wirkung der Kraft dem Produkt Ps proportional; u. wenn man als Einheit die Wirkung (der Kraft)

dig. nimmt, für welche dieses Produkt = 1 ist. 138.
so wird durch dasselbe die Größe der Wirkung im Vergleich mit der als Einheit angenommenen ausgedrückt. Wir werden in der Regel die Kräfte in Kilogrammen u. die Wege in mètres ausdrücken, u. werden für das Produkt Ps die Benennung Kilogramme Mètres (Km) gebrauchen.

Jede Arbeit kann mit d. Erheben eines Gewichts auf e. gewisse Höhe verglichen werden; denn wenn z. B. eine Kraft von 10^k durch einen Weg von 3^m wirkt also eine Wirkung $= 10^k 3^m = 30^{km}$ hervorbringt, so ist diese genau ebensogroß, als wenn ein Körper dessen Gewicht 10^k beträgt, auf eine Höhe von 3^m erhoben würde. Diese Vergleichungen der Wirkungen der Kräfte mit dem Erheben von Lasten ist aber für das Messen der Wirkungen nicht nothwendig, sond. gibt nur eine anschauliche Vorstellung von der Größe der Wirkung.

Um von größeren Wirkungen der Kraft eine deutl. Vorstell. zu bekommen, als jene ist, welche durch den Zahlenwerth des Produkts Ps hervorgerufen wird, ist es allmählig übereingekommen, diese Wirkungen mit jenen zu vergleichen, welche ein Pferd von gewöhnlicher Stärke hervorzubringen vermag. Man hat zu diesem Endzwecke

139. ein Pferd v. mittlerer Stärke angenommen, welches im Stande ist einen Widerstand von 75^{Kgr} in jeder Sec. durch einen Weg v. 1^{m} zu überwinden. Die Wirkung dieses idealen Pferdes ist also

$$p.\ 1''\ 75^{km}$$

u. man kann nun jede Wirkung Ps auch dadurch bestimmen, indem man angibt, wie viele Pferde durch eine Sec. wirken müssten, um eine Wirkung hervorzubringen, die dem Prod. Ps gleich kommt. Nennt man N die Anzahl dieser Pferde, so ist

$$75\,N = Ps \quad u. \quad N = \frac{Ps}{75}$$

Die Einführung der Pferdekraft zum Messen größerer Wirk. ist bei der Erfindung der Dampfmaschinen geschehen, weil diese anfänglich meistens solche Maschinen zu bewegen hatten, die früher v. Pferden getrieben wurden.

Daß durch das Product aus d. Druck, der eine Last erhebt, u. den Weg, durch welchen der Angriffspunkt derselben fortschreitet, u. der Zeit in allen Fällen die Größe der Wirkung der Last, so wie auch die Größe der Arbeit, welche sie dadurch verrichtet, gemessen wird, wird vorzüglich erst dann klar, wenn man die Arbeiten vermittels der Maschine betrachtet.

Wenn eine Kraft nicht mit constanter Intensität wirkt, sond. sprungweise oder continuirlich veränderl. ist, kann man natürlich ihre Wirkung nicht durch ein einziges Produkt ausdrücken.

Nehmen wir an eine Kraft wirke continuirl. veränd. durch einen gewissen Weg s, theilen wir diesen in sehr kleine oder unendl. kl. Theile $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$,
ferner bezeichnen wir durch

$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots \quad P_n$$

die Intensitäten, mit welchen die Kraft in dem Augenblicke wirkt, in welchem ihr Angriffspunkt die Wege $s_1\ s_2\ s_3 \ldots$ zu beschreiben beginnt; so werden die Produkte

$$P_1 s_1 \quad P_2 s_2 \quad \ldots \quad P_n s_n$$

näherungsweise die einzelnen Wirkungen ausdrücken, während der ganze Weg

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s$$

zurückgelegt wird.

Um die Wirkung einer veränd. Kraft zu bestimmen, muss also das Gesetz bekannt sein, nach welchem sich die Kraft verändert, so wie ihr Angriffspunkt fortschreitet, oder es muss wenigstens für eng aufeinanderfolgende Zeitaugenblicke der Bewegung die Intensität der Kraft u. die während dieses Zeitmoments zurückgelegten Wege bekannt sein.

Wenn z. B. der Angriffspunkt dieser Kraft einen Weg von 1^m zurücklegt, u. m. weiß entw. aus Beobachtungen od. aus theoretischen Betrachtungen, daß die Intensität der Kraft:

10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20 Kilogr.

betrug, als der Angriffspunkt einen Weg von

$0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,7;\ 0,8;\ 0,9;\ 1,0^m$

zurückgelegt hatte, so wird m. annäherungsweise die gesamte Arb. der Kraft finden, wenn m. annimmt, daß jede der obigen Kräfte durch $0,1^m$ gewirkt hat, u. m. erhält dann:

$$1,0 + 1,1 + 1,2 + 1,3 + 1,4 + 1,5 + 1,6 + 1,7 + 1,8 + 1,9 + 2,0 = 16,5^{km}$$

Ist das Gesetz, nach welchem die Kraft veränderlich ist durch eine Formel ausgedrückt, u. als Funkt. des Weges bekannt, so kann m. die Arb. d. Kraft durch eine Annäherungsmethode z. B. Simpson'sches Verfahren od. vermittelst der Methode der Integralrechnung berechnen.

Um die Simpson'sche Formel anzuwenden wird man den ganzen Weg, für welchen die Wirkung zu berechnen ist, in eine gerade Anzahl Theile theilen. Es sei e ein solcher Theil. Hierauf wird m. aus der Formel, indem m. in dieselbe für den Weg die Werthe 0; 1e; 2e ... ne setzt, die entsprechenden Intensitäten $P_0, P_1 \ldots$ berechnen u. dann erhält man durch folgende Formel die ganze Wirkung W der Luft:

$$W = \tfrac{1}{3} e \left\{ P_0 + P_n + 4(P_1 + P_3 + P_5 + \ldots) + \right.$$
$$\left. + 2(P_2 + P_4 + P_6 + \ldots) \right\}.$$

Wer mit d. Elementen der Integralrechnung vertraut ist, wird es aber vorziehen durch wirkliche Integration die Lösung zu machen.

Ist P die Intensität der Luft (als Funkt. des Weges) nachdem der Angriffspkt. derselben einen Weg s zurückgelegt hat, welcher von irgend einem Pkte. an der geraden Linie an, auf welcher d. Luft wirkt u. in der der Angriffspkt. fortschr. zu rechnen ist; ds der unendl. kleine Weg, den der Angr. der Luft zurücklegt, so ist

$$P\,ds$$

die unendl. kleine Wirkung, welche dem Weg ds entspricht, u.

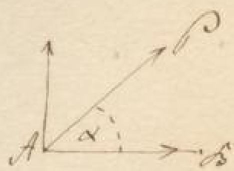
$$\int_{s_0}^{s_1} P\,ds \quad \text{die totale Wirkung,}$$

welche die Kraft hervorbringt, während ihr Angriffspkt. den Weg $s_1 - s_0$ zurücklegt.

Was bis jetzt über die Berechnung der Wirkung gesagt worden ist, gilt auch für den Fall, wenn der Angriffspunkt eine krumme Linie beschreibt, vorausgesetzt, daß die Kraft immer nach der Richtung der Tangente an d. krumme Linie wirkt.

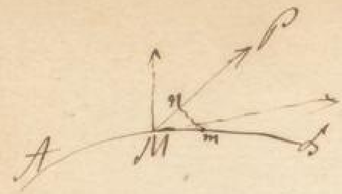
Wenn der Angriffspunkt einer Kraft nicht nach ihrer Richtung schief fortschreitet, so muß man, um die Wirkung der Kraft zu finden, den wirklich beschriebenen Weg auf die Richtung der Kraft projiciren u. das Produkt aus der Kraft u. die Projection bilden.

Wenn z. B. eine Kraft P mit der Linie AB, auf welcher ihr Angriffspunkt fortschreitet, einen $\angle \alpha$ bildet, so ist die Wirkung nicht $P \cdot AB$, sond. $P \cdot AB \cos\alpha$; denn zerlegt man die Kraft P in 2 Kräfte, $P\cos\alpha$ u. $P\sin\alpha$, so ist klar, daß letztere, da ihr Angriffspunkt nach ihrer Richtung gar nicht fortrückt, keine Wirkung hervorbringen kann u. daß dagegen die erstere eine Wirkung $P\cos\alpha\, AB$ hervorbringt.



Es ist aber $AB \cos\alpha$ die Proj. des Weges AB auf die Richtung der Kraft.

Wenn der Angriffspunkt einer veränderl. Kraft P eine krumme Linie beschreibt u. es wirkt die Kraft nicht nach der Richtung



der Tangente, so ist das Element der Wirkung, welches d. Kraft hervorbringt, während der Weg Mm beschrieben wird gleich

$$P \cdot Mn,$$

wenn Mn die Projection von Mm auf P vorstellt. Setzt man $\sphericalangle PMm = \varphi$, den die Richtung der Kraft mit d. Richtung der Tangente an die krumme Linie bildet u. $Mm = ds$, so ist

$$Mn = ds \cos\varphi$$

u. das Element der Wirkung der Kraft

$$= P\,ds \cos\varphi$$

u. endlich die Totalwirkung während der Weg $AB = s$ beschrieben wird

$$\int_0^s P\,ds \cos\varphi$$

Es ist aber auch $P \cos\varphi$ die Kraft, welche nach d. Richtung der Tangente der Curve wirkt, wenn man P in eine normale u. in eine tangentiale Kraft zerlegt.

Eine Kraft, deren Angriffspunkt nicht nach der Richtung der Kraft fortschreitet, sondern im Gegentheil zurückweicht, ist für diese Bewegung als ein Widerstand zu betrachten. Da eine solche Kraft der Bewegung entgegen wirkt, so wollen wir diese entsprechende Wirkung eine Gegenwirkung nennen.

Zur Übung in der Berechnung der Wirkung der Kräfte u. Gegenwirkung der Widerstände mögen vorläufig folgende Aufgaben dienen.

1te Aufgabe.

Um auf einer geradl. horiz. Strecke fortzuziehen, ist nach den Erfahrungen eine Zugkraft nothwendig die $\frac{1}{20}$ des Gewichts des Wagens u. seiner Belastung beträgt. Wenn nun das Gewicht eines Wagens samt Belastung 4000^k beträgt, wie gross ist die Wirkung um diesen W. durch eine Strecke von 1000^m fortzuschaffen.

Auflösung

Die erforderliche Zugkraft ist $= \frac{4000}{20} =$ $= 200^k$ u. der Weg durch welchen sie wirken muss, ist 1000^m mithin die Wirkung

$$W = 200 \cdot 1000 = 200000^{km}$$

2te Aufgabe.

Ein Körper, dessen Gewicht P ist, soll gehoben werden, so dass sein Schwerpunkt um H höher zu liegen kommt; wie gross ist die dazu erforderliche Wirkung.

Auflösung

Denken wir uns den Körper in kleine Volumentheilchen getheilt u. nennen wir durch

$$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \ldots \quad p_n$$

die Gewichte der Materie, welche in diesen

Volumentheilchen enthalten p; durch

$$\zeta_0 \; z_0 \; z_1 \; z_2 \; \ldots \; z_n$$

die Abstände dieser Theilchen u. des Schwerpunkts des Körpers von einer horiz. Ebene u. zwar vor dem Heben; durch

$$\zeta'_0 \; z'_0 \; z'_1 \; z'_2 \; z'_3 \; \ldots \; z'_n$$

ebenso die Abstände derselben Punkte von der Ebene nach dem Heben begreifen; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkt:

$$P\zeta_0 = p_0 z_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots$$

$$P\zeta'_0 = p_0 z'_0 + p_1 z'_1 + p_2 z'_2 + \ldots$$

hieraus folgt durch Subtraktion u. Berücksichtigung dass $\zeta'_0 - \zeta_0 = H$

$$PH = p_0(z'_0 - z_0) + p_1(z'_1 - z_1) + p_2(z'_2 - z_2) \ldots$$

Betrachten wir aber jedes ein Glied, welches rechts des Gleichheitsz. vorkommt, z. B. das erste $p_0(z'_0 - z_0)$ so überzeugen wir uns leicht, daß dasselbe die Wirkung ausdrückt, die erforderlich ist, um das Gewicht p_0 auf die Höhe $z'_0 - z_0$ zu erheben, gerade wie auch die krumme Linie beschaffen sein mag, welche das Theilchen p_0

während des Hebebens beschrieben hat.

Die Summe der Cylinder rechts, d. h. also die Summe der Wirkungen, die zum Heben sämtlicher Gewichte, auch um der Höhe letzteren, auf die Höhe

$$(z_0'-z_0),\ (z_1'-z_1),\ (z_2'-z_2) \dots$$

nothwendig ist, u. da diese Summe

$$= Ph$$

gleich d. Produkt aus dem totalen Gewicht des Körpers u. die Höhe der Hebung des Schwerpunktes gleich ist, so findet m. also die Wirkung, welche zum Heben eines Körpers nothwendig ist, wenn m. das Gewicht des Körpers mit der Höhe multipl., auf w. der Schwerpunkt gehoben werden soll.

Wenn also keine Reibung vorhanden wäre, so würde zum Heben eines Körpers vermittelst einer schiefen Ebene genau eine ebenso große Wirkung nöthig sein, wie zum Heben i. freier Luft.

3. Aufgabe.

Ein Körper soll über eine schiefe Ebene hinaufgezogen werden, durch eine mit derselben $\parallel$ wirkende Kraft; man soll mit Berücksichtigung der

Reibung die hiezu erforderliche Wirkung berechnen.

Auflösung

Q sei das Gewicht der Last
P die Kraft mit der schiefen Ebene wirkende Last,
α der Neigungswinkel der Ebene gegen d. Horiz.
f der Reibungscoefficient.
s der Weg, durch welchen der Körper gezogen werden muß, damit sein Schwerpunkt um h höher zu liegen kommt.

Dies vorausgesetzt ist $Q \cos\alpha$ die Last des Körp. gegen d. schiefe Eb.;

$Q \cos\alpha\, f$ die Last, welche mit der schiefen Eb. wirken muß, um die Reibung zu überwinden.

$Q \sin\alpha$ die Last, mit welcher der Körper durch sein Gewicht dem Hinaufziehen entgegenwirkt, demnach:

$$P = Q \sin\alpha + Q \cos\alpha\, f$$

Nun ist aber:

$$Ps = \frac{Ph}{\sin\alpha}$$

die Wirkung, welche nothwendig ist, um den Widerstand P längs des Weges s zu überwinden; wir erhalten daher

$$Ps = Qh + Qh f \cotg\alpha = Qh(1+f\cotg\alpha)$$

Wenn keine Reibung vorhanden wäre, betrüge die Wirkung Qh.

4te Aufgabe.

Man soll die Wirkung berechnen die nothwendig ist, um einen Stab um eine gewisse Länge auszudehnen.

Auflösung.

Es sei:

l die ursprl. Länge des Stabes

O sein Querschnitt

E der Elasticitätscoeffic. des Materials, woraus der Stab besteht.

λ die Länge, um welche der Stab ausgedehnt werden soll.

Die Kraft, welche zum Ausdehnen nöthig ist, wächst in dem Maße, als die Verlängerung zunimmt. Beträgt diese:

$$E\frac{O}{l}\cdot\xi\ ;$$

um die Ausdehnung $d\xi$ fortzusetzen, ist daher eine Wirkung $E\frac{O}{l}\xi d\xi$ nothwendig u. daher die ganze Wirkung, welche eine Verlängerung λ hervorbringt

$$\int_0^\lambda E\frac{O}{l}\xi\, d\xi = E\frac{O}{l}\int_0^\lambda \xi\, d\xi = E\frac{O}{l}\frac{\lambda^2}{2}\ .$$

5te Aufgabe.

Man soll die Wirkung bestimmen die erforderlich ist, um das Wasser, welches in jeder Secunde im Mittel auf einer Quadratmeile Erdoberfläche niederfällt, zur Höhe der Wolken zu erheben.

Auflösung.

Nach den meteorologischen Beobachtungen ist die Wassermenge, welche in unserer Gegend in einem Jahre herabfällt aus den Wolken, im Stande, eine Wasserschichte von etwa $0,5^m$ Höhe zu bilden. Die mittlere Höhe der Wolken ist $= 1200^m$; eine Quadratmeile hat $(4000)^2 = 16000000^{qm}$. Die Wassermenge, welche also jährlich auf eine Quadratmeile herabfällt, ist demnach $0,5 \cdot 16000000 = 8000000^{cbm} =$
$= 8000000000^{Klgr}$; also ist die Wassermenge, welche per Sec. im Mittel auf eine Quadratmeile herabfällt $= \dfrac{8000000000}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 253^{Klgr.}$

Ebenso ist also auch die Wassermenge, welche durch das Verdampfen in jeder Sec. auf 1200^m Höhe gehoben werden muss u. die hierzu erforderliche Wirkung ist $253 \cdot 1200 = 303600^{km}$. Diese

151. Wirkung ist = derjenigen, welche

$$\frac{303600}{75} = 4048$$ Pferde in einer Stunde hervorbringen. Die ganze Erdoberfläche beträgt 9266000 □Meil.; wenn man also annehmen, daß durch die Wassermenge, welche in einem Jahr auf die Erdoberfläche herabfällt, diese mit einer Wasserschichte von 0,5 m Höhe bedeckt würde, so ist die Wirkung, welche im Mittel in jeder Sec. aufzuwenden ist, um die in einer Sec. auf der ganzen Erdoberfl. verdampfte Wassermenge bis zur Höhe der Wolken zu erheben gleich derjenigen, welche

$$9266000 . 4048 = 37589728000$$

Pferde in einer Sec. hervorbringen.

Anmerkg. Auf je $\frac{16000000}{4048} = 3965$ □m Oberfläche ist 1 Pferdekraft nöthig.

Bedeutung der lebendigen Kraft einer Masse.

Ist P eine Kraft, die mit unveränd. Intensität durch einen Weg s auf einen Körper wirkt, dessen Gewicht Q u. dessen Masse $m = \frac{Q}{2g}$ ist; v die Geschwind., welche der Masse mitgetheilt wird, nachdem der Weg s zurückgelegt ist, so ist, wenn anfangs die Masse keine Geschwindigk. hat

$$Ps = \frac{Q}{2g} v^2 = mv^2$$

Nun ist aber Ps die Wirk. der Kraft auf den Körp. u. $\frac{Q}{2g} v^2$ od. mv^2 die lebendige Kraft der Masse m; man sieht also daß durch diese letztere die Wirk. gemessen wird, welche erforderlich ist, um einer Masse m eine gewisse Geschwindigkeit mitzutheilen.

Hat anfängl. die Masse eine gewisse Geschwind. v_0 erhalten u. die Kraft P durch einen Weg s auf sie einwirkt, so wird die Geschwindigk. v am Ende des Weges s durch folgende Gleichung bestimmt $Ps = m(v^2 - v_0^2) = mv^2 - mv_0^2$.

153. Wenn also eine Masse m durch eine continuirliche u. mit unveränd. Intensität wirkenden Kraft P eine Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ mitgetheilt ist, so ist dazu eine Wirkung erforderlich, die durch die Differenz der lebendigen Kraft ausgedrückt wird.

Wenn eine Masse $m = \frac{Q}{2g}$ eine gewisse Geschw. v, also auch eine gewisse lebendige Kraft mv^2 besitzt u. man läßt dieselbe einen constant. Widerstand R entgegenwirken, bis die Geschwind. der Masse ganz verschwindet, so vermag sie diesen Widerstand R durch einen Weg s zu überwinden, der durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$Rs = mv^2$$

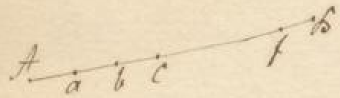
Wir haben Rs die Wirkung, welche die Masse hervorbringt u. mv^2 ihre ursprüngliche lebendige Kraft u. man sieht hieraus, daß die Wirkungsfähigkeit, welche in einer Masse enthalten ist, die eine bestimmte lebendige Kraft mv^2 besitzt, durch diese gemessen wird.

Wenn die Masse m auf den Widerstand[?] k wirkt bis ihre Geschwindigk. v_0 geworden ist, u. wir bezeichnen durch b_0 den Weg, den der Angriffspkt von k od. den die Masse zurücklegt, während sie die Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ erleidet, so ist

$$k b_0 = m(v^2 - v_0^2) = mv^2 - mv_0^2$$

Die Wirkung $k b_0$, welche also eine Masse m hervorbringt, indem sie eine Geschwindigkeitsänd. $v - v_0$ erleidet, wird also durch die Änderung $m(v^2 - v_0^2)$ ihrer lebendigen Kraft gemessen.

Wenn die Kraft, die auf e. Masse wirkt nicht constant ist, sond. mit veränderl. Intensität wirkt, so ergeben sich ähnliche Resultate. Es sei z. B. AB die gerade Linie, nach welcher eine Masse durch eine Kraft fortbewegt wird,



Wenn die Masse in A, a, b, c ... f angekommen ist, sei die Intensität der Kraft:

$$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_{n-1}$$

u. die die Geschwind. der Masse v_0 v_1 v_2 ... v_n; setzen wir ferner:

$Aa = b_0$, $bc = b_1$ ... $fB = b_n$ u. nehmen wir diese Wege sehr klein an, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in jedem einzelnen Intervall Aa, ab, bc die Intensität d. Kraft als const. ansehen, u. zwar im ersten Intervall Aa gleich p_0, im 2ten ab = p_1 etc.

Unter d. Voraussetz. ist aber die leb. Kraft in jedem einz. Beginnzeitp. gleich der Wirkg., welche die Kraft in d. Intervallen hervorbringt. Wir erhalten daher:

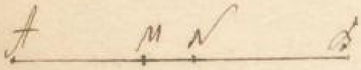
$$p_0 b_0 = m(v_1^2 - v_0^2)$$
$$p_1 b_1 = m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$p_2 b_2 = m(v_3^2 - v_2^2)$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$p_{(n-1)} b_{(n-1)} = m(v_n^2 - v_{n-1}^2)$$

u. wenn wir diese Gleichung summiren, so ergibt sich:

$$p_0 b_0 + p_1 b_1 + p_2 b_2 \ldots + p_{n-1} b_{n-1} = \sum_1 pb = m(v_n^2 - v_0^2)$$

Nun ist aber $p_0 b_0 + p_1 b_1 + \ldots = \sum pb$ die Summe aller Elementarwirk. der Kraft, d.h. die totale Wirk., welche sie auf die Masse ausgeübt hat, u. $m(v^2 - v_0^2)$ ist d. Änderung der leb. Kraft, die dadurch entstanden ist; woraus also hervorgeht, daß durch diese letzte Größe d. Wirk. bestimmt wird, die erforderl. ist, um durch eine constante od. variable Kraft in einer Masse eine bestimmte Geschwindigkeitsänderung hervorzubringen.

Jene Summe $\sum pb$ wird um so genauer die Wirk. d. Kraft darstellen, je kleiner d. Intervalle $b_0, b_1 \ldots$ genommen werden, u. wenn diese ∞ kl. genommen werden, Läßt man jetzt die Summe $\Sigma.p\delta s$ sich in ein Integral verwandeln, so erhält m. den vollst. genauen Werth der Arb. d. Kraft.



Setzt m. $AM = s$, $MN = ds$ u. bezeichnet durch p die Intensität der Kraft M, so ist pds das Element der Arb., wie sie im Intervall MN hervorbringt; u. wenn m. $AB = R$ setzt, so ist:

$$\int_0^R pds$$

die totale Arb., welche d. Kraft hervorbringt, während sie v. A bis B auf d. Masse m wirkt, u. wenn m. durch v_0 die Anfgs. u. v die Endgeschw. bez., erhält man:

$$\int_0^R pds = m(v^2 - v_0^2)$$

Wenden wir uns nun zu dem allgem. Falle, wenn auf irgend ein Massensystem Kräfte wirken od. Widerstände, um die Arb. zu bestimmen, d. nöthig sind, um ein solches Massensystem v. einem Bewegungszustand in einen andern zu versetzen.

Es seien:

$P \quad P_1 \quad P_2 \; \ldots$

wachsend. Kräfte, die i. irg. v. Ausgangsl. der Bewegung auf das Massensystem einwirken.

$R \quad R_1 \quad R_2 \; \ldots$

verschied. Widerstände in gleichen Zeitaugenblicken thätig.

ds ds_1 ds_2

die Projec. der unendl. kl. Wege, resp. die Angriffsp. der Kräfte P, P_1, P_2 ... die in einem auf die Zeit t folgenden Zeitmoment zurücklegen.

dr dr_1 dr_2 ...

die entsprechenden Projec. der unendl. kl. Wege, resp. die Angriffsp. der Widerstände R, R_1, R_2 ... in d. gleichen Zeitmom. zurücklegen.

u_0 u_1 u_2 ... } die Geschw. einzelner Massentheilchen m_0 m_1 m_2 ...
v_0 v_1 v_2 ... }
in zwei bestimmten Zeitmoment. entsprech. Bewegung.

Dies vorausgesetzt ist:

$m_0 u_0^2 + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + \dots = \sum m u^2$ die totale lebend. Kraft des Massensystems im 1ten, u.

$m_0 v_0^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots = \sum m v^2$

die totale leb. Kraft im 2ten Zeitmoment;

endlich:

$m_0 (v_0^2 - u_0^2) + m_1 (v_1^2 - u_1^2) + \dots = \sum m (v^2 - u^2)$

die Änderung der leb. Kraft des ganzen Massensyst. während dieser 2 Zeiten.

Nach d. Grundsatz der Erhaltung der leb. Kraft ist aber die totale Änderung der leb. Kraft eines Massensystems gleich der Summe der Wirk. sämtlicher Kräfte weniger der

Summe der Wirk. sämtlicher Widerstände.

Die erstere dieser Summe ist:

$$\int K_0 dp_0 + \int K_1 dp_1 + \int K_2 dp_2 + \ldots = \sum_i \int K dp$$

die letztere dieser Summen ist:

$$\int k_0 dr_0 + \int k_1 dr_1 + \int k_2 dr_2 + \ldots = \sum_i \int k dr$$

Wir erhalten demnach:

$$\sum_i m(v^2 - u^2) = \sum_i \int K dp - \sum_i \int k dr$$

Aus allem diesem geht nun die Bedeutung der leb. Kräfte hervor; sie drückt nämlich einerseits die Größe der Wirkung aus, d. h. was, um ein Massensystem in denjenigen Bewegungszustand zu versetzen, in welchem es sich befindet; andererseits wird durch die lebend. Kraft eines Massensyst. die Größe der Wirkung ausgedrückt, welche dasselbe hervorzubringen vermag, wenn es Widerstände überwindet, bis sein Geschwindigkeit ganz vernichtet wird.

Die Masse kann also Wirk. in sich aufnehmen u. ebensogroße Wirk. als sie aufgenommen hat, wieder abgeben.

Hierdurch ist also die rein passive Natur der Masse ausgesprochen; indem bedingungsgegesetzt wird, daß die Masse keine Arbeit aus sich selbst während der Bewegung schaffen kann.

Man nehme ein Massensyst., das in Bewegung ist ohne daß keine Kräfte u. Widerstände einwirken, od. solche die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten, so kann sich die in der Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit d.h. ihre leb. Kraft nicht ändern, d.h. es ist in diesem Bewegungszustande

$$\sum m(v^2 - u^2) = 0$$

In diesem Zustande können zwar d. Geschwind. einzelner Massentheilchen sehr veränderlich sein, es ist aber nicht möglich, daß die Geschwind. aller Massentheile gleichzeitig größer od. kleiner ausfallen würden, als sie in irgend einem Augenblicke sind. Wenn das Massensyst. bloß aus rotirenden Massentheilen besteht, u. bloß vermöge der Trägheit seine Bewegung fortsetzt, ohne Änderung der leb. Kraft, so ändert sich die Geschwindigkeit zwar nicht.

Die Bewegung jedes Theils erfolgt also mit gleichförm. Geschwind. Wenn dagegen in den Systemen Massen vorkommen, die abwechselnd sinken u. gehoben werden müssen, kann keine gleichförm. Bewegung statt finden.

Auch diese Bewegung wird [illegible], wenn keine Kräfte u. Widerstände auf sie einwirken, od. solche, die sich das Gleichgewicht halten, drückt das eigenthümliche Verhalten der Materie aus, das mit dem Worte „Trägheit" bezeichnet wird. Die nachfolgenden Aufgaben dienen zur Erläuterung des Vorgetragenen.

1.te Aufgabe.

Man soll die Wirkung berechnen, um einen Wagen, der mit Belastung 2000k wiegt, in eine Geschwindigkeit v. 2m Sekunde u. in diesen Bewegungszustand zu versetzen.

Auflösung

Um einen Wagen auf horizontaler Bahn mit einer gewissen Geschwindigk. fortzubewegen, sind vom Anfang der Bewegung an zweierlei widerstehende Kräfte nothwendig. Es muß nämlich die Reibung überwunden werden, die an den Achsen der Räder sich äußert, so wie auch ein gewisser Widerstand, den die Bahn durch das Eindringen der Räder verursacht. Ist die Zugkraft gerade hinreichend, um diese beiden Widerstände zu überwinden, so ist selbe hinreichend den Wagen in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, wenn überhaupt einmal Bewegung vorhanden ist; um aber die Geschwi

anzuhalten, muß d. aufgew. Wirk. Kraft größer sein als gerade zur Überwindung jenes Widerstandes nöthig ist.
Die Wirk., welche erforderl. ist, um der Masse $\frac{2000}{2g}$ des Wagens eine Geschwindigk. von 2^m zu ertheilen, ist nach dem Vorhergehenden gleich der leb. Kraft, also $= \frac{2000}{2g} \cdot 2^2 = \frac{2000}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 4 =$
$= 408^{km}$. Diese Wirk. ist also ebensogroß als jene, welche die Hebung einer Last von 408^k auf 1^m erforderte.

2te Aufgabe.

Wie groß ist die Wirk., um einer Kanonenkugel von 10^k Gewicht eine Geschwind. von 200^m zu ertheilen?

Lösung.

Die leb. Kraft einer solchen Kugel ist: $\frac{10}{2g} \cdot 200^2 = 20387^{km}$ u. ebenso groß ist auch die gesuchte Wirkung.

3te Aufgabe.

Wie groß ist die Wirk., welche in der Masse eines Schwungringes eines Schwungrades enthalten ist, wenn das Gewicht des Ringes 5000^k u. seine Geschw. 6^m beträgt?

Auflösung.

Die in der Masse $\frac{5000}{79}$ enthaltene leb. Kraft od. Wirkungsfähigk. beträgt

$\frac{5000}{79} \, 6^2 = 9174^{km}$. Diese Zahl durch die Ziffer 75 dividirt, gibt 122 Pferdekraft, d.h. die Wirkungsfähigk., welche in dieser Schwungmasse enthalten ist, ist ebensogroß als jene, welche 122 Pferde ($à \, 75^{km}$) in einer Sec. oder ein Pferd in 122 Sec. hervorzubringen vermag.

Wenn an d. Axe des Schwungrades ein Seil befestigt u. herumgewickelt u. an dieses eine Last von 3000^k angehängt würde, so bietet sich die Frage dar, bis auf welche Höhe das Schwungrad diese Last zu heben im Stande wäre.

Bezeichnen wir durch h diese Höhe, so ist 3000h die zum Heben erforderliche Wirk. u. diese muß der leb. Kraft des Schwungrades gleich sein.

Man hat daher:

$$3000\,h = 9174, \text{ woraus}$$
$$\text{folgt } h = 3{,}058^m.$$

4te Aufgabe.

Wenn bei einer Rammmaschine ein Rammklotz von 250^k Gewicht von einer Höhe von 4^m auf einen bereits in der

162. 163. Erde befindl. Pfahl herabfällt, u. dieser durch den Schlag um 0,03m tiefer in das Erdreich eindringt, wie groß ist die Last, welche dieser Pfahl zu tragen vermag, ohne durch dieselbe tiefer einzusinken.

Auflösung.

Unter der Voraussetzung, daß die totale lebendige Kraft 250^k, welche im Rammklotz in dem Momente enthalten ist, wo derselbe mit dem Pfahl zusammentrifft, ganz auf das Eintreiben des Pfahles wirkt, u. nicht durch den Stoß, noch durch das Zusammendrücken des Pfahles etc. verloren gingen, würde die Gleichung

$$250 \cdot 4 = 1000$$

den auf vorläufig noch unbekannten Widerstand K, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt, durch einen Weg v. 0,03m zu überwinden haben; es ist demnach zu setzen:

$$1000 = 0{,}03 K, \quad K = 3333^k$$

Dieser Werth ist aber auch die Tragkraft des Pfahles, denn diese ist gleich dem Widst., den das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt.

5te Aufgabe.

Wenn mit einer Feuerspritze in jeder Sec. 10^k auf 20^m Höhe getrieben werden sollen, wie groß ist die Wirkung, welche hiezu in jeder Sec. nothwendig ist.

Auflösung.

Damit das Wasser eine Höhe von 20^m erreicht, muss es (abgesehen vom Luftwiderstand) die Mündung des Zuleitrohres wenigstens mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{2.9,81.20}$ verlassen. Um diese Geschwindigkeit zu leisten, muss in jeder Sec. einer Wassermenge von 10^k eine Geschwind. von $\sqrt{2.9,81.20}^m$ ertheilt werden.

Die entsprechende Wirk. ist daher:

$$\frac{10}{2.9,81}\left(\sqrt{2.9,81.20}\right)^2 = 10.30 = 300^{km}$$

Diese Wirkung ist aber gleich jener, welche $\frac{300}{75} = 4$ Pferde in 1 Sec. hervorbringen.

6te Aufgabe.

Die Wassermenge, welche ein Fluss oder Bach in jeder Sec. liefert, betragen 1000^k u. die Geschw. des Wassers im Fluss sei $= 3^m$, wie groß ist die Wirkung, welche in dieser Wassermasse enthalten ist.

165.

Auflösung.

Die leb. Kraft dieser Wassermenge ist $\frac{1000}{2g} \cdot v^2 = 458,7^m$ u. ebensogroß ist auch die in dieser Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit, welche an einem bestimmten Ort des Flußbettes in jeder Art nutzbringend gemacht werden kann.

Allgemeine Eigenschaften der Motoren.

Die Kräfte kommen in der Natur nicht isolirt vor, sond. jederzeit in inniger Verbdg. mit mater. Stoffen. Diese mat. Stoffe sind zu zeigen Kraftäußerungen, die durch die ihnen innewohnende Kräfte sich selbst u. andere Körper zu bewegen vermögen. Diej. Körper, welche diese Eigenschaft in einem hoh. Grade besitzen, werden vorzugsw. Motoren genannt.

Jeder Motor besteht also aus einem passiven Princip der Masse u. aus ein activen der Kraft. Ein Motor verhält sich zu einer [illegible] trägen

Masse, wie ein selbstleuchtender Körper zu einem dunkeln. Ein dunkler Körper, der von einer Lichtquelle beleuchtet worden ist, ist mit einer trägen Masse zu vergl., die durch eine andere in Bewegung gesetzt worden ist, u. dadurch die Fähigkeit erlangt hat, auf andere trägen Massen, bewegend einzuwirken. Wollte man die Worte „todt" u. „lebendig" brauchen, in dem Sinn, daß alles, was nicht fähig ist eine Thätigkeit zu entwickeln, „todt" u., was im Stande ist, eine Wirk. hervorzubringen, „lebendig" genannt würde, so wäre eine ruhige träge Masse ein todter u. ein Motor od. eine in Bewegung befindl. Masse ein lebendiger Körper zu nennen.

Es gibt im allgemeinen 3 verschiedene Motoren:

1. Körper, die bereits durch eine Ursache in Bewegung gesetzt worden sind. Zu diesen gehören insbesondere die Massen in den Flüssen u. Strömen, u. die bewegte Luft, der Wind.

2. Körper, die sich unter Umständen befinden, daß sie durch äußere Kräfte in Bewegung gesetzt u. dadurch auf

167. andere Körper (als Motoren) bewegend einwirken können. Dahin das Wasser, welches als Regen (durch die Schwere) zur Erde fällt, in Bächen u. Flüssen (durch die Schwere) sich sammelt, u. von den höher gelegenen Punkten nach der Niederung zufließt.

3.) Körper, welche durch eine denselben innewohnende Kraft (Wärme, Molekularkraft, organische od. Lebenskraft) befähigt sind, auf ihre eigene Masse u. auf die von äußern Körpern bewegend einzuwirken. Dahin die thierische Kraft u. der Mensch.

Damit ein Körper für unsere Zwecke als Motor dienen kann, muß er aber durch die, ohne äußere Mithilfe fortwährend wirksame Thätigkeit der Naturkräfte, dazu gemacht werden. Denn wenn wir einen Körper zu einem Motor künstlich machen wollten, würden wir eine Kraftentwicklung anwenden, die genau so groß wäre, als jene welche dieser Körper im günstigsten Falle, wieder abzugeben im Stande wäre.

Für unsere Zwecke sind aber

sehr vortheilhaft, einen künstlichen Motor zu machen. Um z. B. eine Uhr in Bewegung zu erhalten, können wir mit der Hand eine Spiralfeder zusammenwinden, wozu eine gewisse Wirkung nothwendig ist, die die Feder in sich aufnimmt, u. dann bei der Rückkehr in ihre natürliche Gestalt auf das Räderwerk einwirkt, um die verschied. Reibungen zu überwinden.
Oder wir können einen Körper auf eine gewisse Höhe heben, wodurch derselbe dann im Stande ist, bei seiner Niederbewegung bis an den Ort, in welchem er sich vor dem Heben befand, wiederum eine Wirk. zu entwickeln, die jener gleichkommt, die zum Heben nothwendig war.

Allein wir machen diese künstlichen Motoren nicht in der Absicht, an Kraft zu gewinnen, sond. nur um für eine gewisse Wirkung, einen Motor zu erhalten, der genau nur eine ebenso große Wirkung wiederum abzugeben vermag, als jene ist, welche zu seiner Bildung nothwendig war, die jedoch nur zu gewissen Anwendungen zweckmäßig ist. Stellten wir z. B. bei einer

Wäre keine treibende Feder oder kein aufgezogenes Gewicht vorhanden, so müßten wir bei jeder Schwingung des Pendels u. der Unruhe mit einer äußeren Kraft in das Getriebe einwirken, was einmal nicht leicht mit der gehörigen Pünktlichkeit geschehen könnte, andererseits sehr unbequem wäre.

Diese künstlichen Motoren, sind Kraftmagazine, die für viele Zwecke sehr nützlich sind. Wo es sich aber darum handelt größere Wirkungen ununterbrochen hervorzubringen, sind sie nicht anwendbar, sondern man muß in diesem Falle, die natürl. Motoren, Wasser, Dampf, Pferde, etc. anwenden. Die künstlichen Motoren unterscheiden sich von den natürlichen dadurch, daß jene durch eine uns zu Gebote stehende Naturkraft, diese durch eine freie Thätigkeit der Naturkraft, ohne unsere Mithilfe gebildet werden kann.

In jedem Motor ist nur eine gewisse Wirkungsfähigkeit enthalten, u. wenn der motorische Körper diese Wirkungsfähigkeit ganz abgegeben hat, erlischt, indem er [illegible]

Wasser in Bewegung setzte und gewisse Widerst. überwältigte, tritt er wieder in die Reihe der todten und trägen ~~Kräfte~~ u.

Die thier. Motoren machen zwar in dieser Beziehg. eine Ausnahme, weil durch den Lebensprozeß immer wieder Wirkungsfähigkeit hervorgerufen wird, allein gerade dadurch, daß der thier. Organismus, wenn er auch äußere Wirkg. hervorbringt, sich erschöpft u. daß eine Veränderung die abgegeb. Wirkg. durch den Lebensprozeß ersetzt werden müssen, zeigt sich eine große Analogie zwischen den thier. Motoren u. den unorganischen.

Es ist also ein allgem. richtig, daß in jeder Quantität eines jeden Motors eine bestimmte Wirkungsfähigkeit enthalten ist. Eine bestimmte Quantität Wasser, die eine gewisse Geschwind. besitzt oder auf einer gewissen Höhe sich befindet; eine gewisse Quant. Dampf, der eine bestimmte Spannung besitzt; eine gewisse Quantität in Bewegung befindlicher Luft, ein Mensch; ein Pferd, eine zusammengepreßte Feder &c. vermögen alle nur eine gewisse Wirkung hervorzubringen.

Wenn ein Motor e. gewisse Wirk. entwickelt, muß m. die totale Wirk., welche derselbe hervorbringt, wohl unterscheiden von jener, welche er auf äußere Dinge überträgt. Es ist nämlich die totale Wirkg gleich derj., welche der Motor entwickelt. müßte, um seine Eigene, seinen Bewegungs= od. sonstigen Zustand zu verändern, mehr derj., welche er nach außen überträgt. Die erstere dieser Wirkgen kann m. die innere, die andere die äußere Wirkg nennen.

Wenn z.B. ein Cbmeter Wasser auf 1^m^ Höhe sich befindet, so ist in demselben eine totale Wirkung von 1000 . 1 = 1000^km^ enthalten; wirkt nun dieses Wasser auf ein unterschlächtiges Wasserrad u. fließt von demselben mit einer Geschw. von 2^m^ weg, so ist jene totale Wirkgsfähigkeit nicht vollständ. dem Wasserrad mitgetheilt worden, da in dem mit einer Geschw. wegfließenden Wasser noch eine Wirkgsfähigkeit enthalt. ist, welche erforderl. war um dem Wasser die Geschw. zu ertheilen, welche es beim Abfluß noch besitzt. Die an das Wasserrad abgegeb. Wirk. ist die äußere, die in dem Wasser

auf zurückbleibende, die innere Wirkung.
Noch klarer zeigt sich dies bei Thier. Motoren; z.B. die totale Arb., welche d. Thier. Organism. eines Pferdes entwickelt, wenn es einen Wagen zieht, wird z. Theil zur Bewegg. des Körpers des Pferdes verwendet (innere Arb.), zum Theil zum Fortziehen des Wagens (äußere Arb.).
Nur in dem einen Falle, wo die eine Geschwindigkeit verschwindend klein ist, (was bei Thier. Motoren nie der Fall sein kann), ist die äußere Arb. gleich der totalen. Wenn z.B. Wasser auf ein Turbine wirkt, u. dieselbe ohne alle Geschw. verläßt, also als totale Kraft Masse am Anfange des Rades erscheint, ist die ganze in dem Wasser wohnende gewesene Arb. an d. Rad abgegeben worden.

Wenn ein Motor auf ein Receptor wirkt, muß sowohl der Druck der auf diesen ausgeübt wird, wie auch die Wirkung, als Druck mitgetheilt wird, von der Geschwind. des Recept. abhängen, u. der Druck des Motors auf den Receptor ist eine Funkt. der Geschwd. Dieser Druck ist am größten, wenn die Geschwind. = 0, nimmt allmählig ab, wenn die Geschwind. wächst, u. verschwind. zuletzt ganz. Wenn z.B. ein Arbeiter ein Rad vermittelst einer Kurbel bewegt, vermag er bei gleicher Geschwindigkeit den größten Druck auf d. Kurbelgriff auszuüben, wenn dieser ohne Bewegung ist. So wie die Bewegung des Kurbelgriffs schneller geht, nimmt der Druck den der Arbeiter auszuüben vermag, immer mehr ab, indem die innere Kraft, od. die Zeit welche nöthig, um die Glieder des Körpers immer schneller u. schneller zu bewegen, beständig wächst, während die absolute Wirkungsfähigkeit des Arbeiters wenigstens nicht über eine gewisse Grenze sich steigern kann.

Bei einer gewissen Geschwind. des Kurbelgriffes vermag die Hand gar nicht mehr der Bewegung zu folgen, u. der Druck hört ganz auf.

Ein anderes Beispiel zur Erläuterung obigen Satzes bietet ein unterschlächtiges Wasserrad dar. Wenn die Schaufeln des Rades ruhen, ist der Druck, den das an dies. anschlagende Wasser ausübt am größten, er nimmt allmählig ab, so wie die Schaufeln schneller gehen, u. verschwind. ganz, wenn einmal die Schaufeln so schnell gehen, als das Wasser fließt.

Bei einer Dampfmaschine nimmt der Druck des Dampfes aus 2 Gründen ab, so wie die Geschw. des Kolbens wächst; einmal, weil bei einem schnellern Gang der Maschine mehr Dampf auf den Kolben wirkt, was zur Folge hat, daß die Spannung im Kessel abnehmen muß; u. dann auch bei einem schnellern Gange der Maschine, der Dampf mit größerer Geschw. durch die Zuleitungskanäle strömen.

Bei Motoren, die eine große träge Masse haben, wie bei Menschen u. Thier. Kräften, ist die Ursache der Abnahme des Druckes, der auf den Receptor ausgeübt wird, wenn dessen Geschwind. zunimmt, in dem Umstande begründet, daß jeder Motor nur eine gewisse totale Wirkungsfähigkeit besitzt, wo. unter. zum Theil od. ganz zur Bewegung der Masse des Motors nothw. ist, daß daher die Wirkg. nach außen u. der Druck auf den Receptor vermindert werden ... Geschw. abhängen müssen.

Die Kräfte von u. für sich sind mit Zunahme der Geschwind., sond. nur die Vorrichtungen, welche Massen auf Massen ausüben, wenn sie mit an-gleichen Geschwind. zusammentreffen; Ja wenn m. im Stande wäre die Bewegungen der Körperwelt bis zu der Bewegung der Atome zu verfolgen, würde m. nie in den Fall kommen, Kräfte von Geschwindigk. abhängig anzunehmen; denn in letzter Fassung würden alle Bewegungen, durch abweichende d. repulsive Molekularkräfte, die nur v. der Entfernung der Molek., nicht aber v. ihrer Geschw. abhängen, hervorgebracht.

Wenn z. B. 2 Körp. zusammenstoßen, so ist die wechselseitige Pressung an der scheinbaren Berührungsstelle nichts anderes, als die Abstoßung der Theilchen an der Berührungsstelle des einen Körpers gegen die Theilchen des andern Körpers. Je größer nun die Differenz der Geschw. ist, mit welcher sich d. beiden Körper begegnen, desto mehr nähern sich die Moleküle an den scheinbaren Berührungsstellen, u. desto stärker stoßen sie sich ab.

Die Wirk. eines Molecüls auf sich selbst u. auf and. äußere Körper, könnte nur dann vollständig entwickelt u. erklärt werden, wenn es überhaupt möglich wäre, die Bewegung eines Körpers od. mehrerer auf einander einwirkender Körper, bis auf die Bewegung ihrer Atome zu verfolgen, fällt also mit dem allgem. physikalischen mechanischen Problemen zusammen; dessen Lösung alle Erscheinungen der unorganischen (u. vielleicht der organischen?) Natur umfassen würde.

Die angeführten allgemeinen Eigenschaften der Motoren genügen aber hinreichend, um sich von der Wirk. dersel. auf Maschinen einen klaren Bild machen zu können, u. einige für die Theorie der Maschinen sehr wichtige Sätze aufstellen u. begründen zu können.

Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Motoren.

1.) Die Kräfte kommen in der Natur nicht isolirt vor; sind jederzeit in Verbindung mit Körpern od. Substanzen.

2.) Körper od. Substanzen, w. im Stande sind, Wirk. hervorzubringen, (welche Widerstände durch gewisse Wege zu überwinden) nennt man Motoren oder Erreger.

177. Ein Meteor besteht, wie schon früher bemerkt, aus einem passiven Princ. der Masse u. einem activen der Luft.

3.) Es gibt dreierlei Arten von Meteoren.

a. Körper od. Substanzen, welche sich im Zustand der Bewegung befinden. (Ständige Meteoren).

b.) Körper, welche sich unter Umständen befinden, daß sie durch gewiße äußere Kräfte in Bewegung gesetzt, u. dadurch bewegend auf andere einwirken können.

c. Körper, welche durch eine denselben inwohnende Kraft (Wärme, Molecularkräfte, organische od. Lebenskraft) befähigt sind, auf ihre eigene Masse u. auf die von äußeren Körp. bewegend einzuwirken.

4. Es gibt natürliche u. künstliche Meteoren; die natürl. sind diej., welche durch die ohne unsere Mithilfe fortwährend wirksame Thätigk. der Naturkräfte entstehen. Unter den künstl. dagegen verstehen wir diej., welche wir mit Anwendung ~ eigens dazu natürl. Meteore hervorbringen können.

5.) die Wahl, welche im künstl. Motor zu entwick. verwend., ist ebenso gestaltet dies., als der natürl. hergeben müßte, um dasselbe hervorzubringen.

6.) die künstl. Motoren werden nicht in der Absicht gemacht, um Kraft zu gewinnen, sond. nur um einen Motor zu erhalten, dessen Wirkungsart für irgend einen Zweck passender ist, als ein natürlicher.

7.) Jeder bestimmte motorische Körper od. jede bestimmte motor. Anlage enthält eine gewisse Wirkungsfähigkeit in sich (absolute Wirkfähigk.).

8.) Wenn ein Motor thätig ist, betracht. die totale Wirkung, welche derselbe entwickelt, auch der Wirkg., welche er auf äußere Körper hervorbringt (äußere W.) u. welche er auf sich selbst u. seine Masse ausübt, (innere W.).

9.) Der Druck eines Motors auf einen Leiter ist im Allgem. eine Funkt. der Geschwind. des Letztern.

Allgemeine Eigensch.

des geometr. Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile.

Da durch die Maschine zwischen dem Motor u. dem zu verarbeit. Körper jederzeit eine ganz bestimmte Verbindung hergestellt werden muß, damit die Werkzeuge, welche auf den zu verarbeitenden Körp. einwirken, gerade nur diejen. Kräfte von Bewegungen ausüben können, w. der Natur der zu verrichtenden mechanischen Operation angemessen sind, so müssen alle Maschinenbestandtheile einen Zusammenhang haben, der von Wirkungsweise des Motors u. von der Gegenwirkung der Widerstände, welche der zu verarbeit. Körp. verursacht, ganz unabhängig sind. Oder mit andern Worten: Der geometr. Zusammenhang der Maschinenbestandtheile muß von der Art sein, daß die Gestalt der Bahnen, welche die einzelnen Punkte der Maschine beschreiben, blos allein durch den Zusammenhang bedingt werden, u. von der Wirkung des Motors u. den

Widerständen ganz unabhängig sind.
Ja selbst die Verhältnisse der Geschwind. mit w. sich d. einz. Pkte u. ihren Bahnen bewegen, müssen einzig u. allein durch den gesamten Zusammenhang bedingt werden, so daß wenn z. B. u u. v die Geschw. bezeichnen, mit w. sich zwei Pkte in d. gleichen Augenbl. bewegen u. die Maschine durch was immer für eine Ursache bewegt wird, $\frac{u}{v}$ nur allein v. den Abmessungen der Maschinenbestandtheile u. von der Beschaffenheit der festen Punkte abhängen.

Wenn man z. B. eine Wassermühle betrachtet, die vermittelst Wasserräder getrieben wird, so sehen wir, daß bei derselben um-drehende Bewegung vorkommt u. das Verhältniss der gleichz. Geschwind. zweier belieb. Punkte ist eine absolute Constante es mag die Mühle schnell od. langsam gehen, das Räderwerk mag durch das Wasser od. eine andere Kraft bewegt werden. Die Bahnen, in die einz. Pkte der beweglichen Bestandtheile beschreiben, sind durchweg Kreise.

Betrachten wir hingegen eine Säge, die durch eine gewöhnliche Dampfmaschine bewegt wird, so zeigt es sich daß die Bahnen, welche die verschied. Punkte beschreiben, theils Kreise theils gerade Linien sind, theils sehr zusammengesetzte krumme Linien.

Aber ihre Gestalt bleibt dieselbe, die Maschine mag schnell od. langsam gehen, sie mag durch Dampf bewegt werden, od. durch irgend eine Kraft, welche auf irgend einen Punkt der Maschine einwirkt.

Das Verhältniß der gleichzeitigen Geschwind. zweier Punkte dieser Maschine, ist aber nicht constant, sondern ändert sich mit der Stellung der Maschine, ist aber ebenfalls wie bei der Mühle von den Kräften u. Widerständen total unabhängig.

Da bei der Verwendung, die eine Maschine auf einen Körper hervorbringen soll, die Arbeitsth. immer eine gewisse Reihe von Bewegungen durchzumachen haben, um die Umwandlung des Rohstoffes zu bewerkstelligen, dann wiederum in ihre anfängliche Position zurückkehren, u. denselben Kreislauf von neuem beginnen;

so sind im Allgem. die Curven, welche die einz. Theile einer Masch. beschreiben geschlossene Linien.

Nennen wir die Wege, die die einz. Punkte u. ihre Curven zurücklegen, von den Punkten an, in welchen sie sich befinden, wenn der Receptor in einer gewissen Position sich befindet u. auch den Weg, den der Letztere beschreibt, von diesem Orte an, u. nennen wir dann σ den Weg, den irgend ein Theil zurücklegt, wenn der Receptor um s weiter gegangen ist, bezeichnen, so wie dann a, b, c, d .. die constanten Abmessungen der Maschinenbestandtheile, so ist im Allgemeinen:

$$\sigma = f(s, a, b, c \dots)$$

Laufen in der Maschine allein rotirende Bewegungen vor, so ist das Masch. $\frac{\sigma}{s}$ constant. Für solche Maschinen ist daher

$$\sigma = s\, f(a, b, c.)$$

Im Allgem. ist aber

$f(s, a, b, c \dots)$ eine

periodisch wiederkehrende Function.

Beharrungszustand der Maschinen.

Aus dem so eben erklärten allgemeinen Eigensch. der Motoren folgt, daß die Geschwind. einer Maschine, die durch irg. e. Motor bewegt wird, nie eine ∞ große Geschwindigk. annehmen kann; selbst dann nicht, wenn m. alle Hindernisse der Bewegung (Reibung etc.) ganz beseitigen könnte; denn wenn einmal die Geschwindigk. der Maschine u. mithin auch die des Zeigerpunktes jene gewisse Grenze erreicht hat, verschwindet der Druck auf denselben ganz u. gar, u. es kann daher von diesem Augbl. an keine weitere Zunahme der Geschwind. eintreten. Zu diesem Resultate gelangt m. auch vermittelst der allgem. Gleich. der leb. Kräfte.

Nehmen wir an, daß auf die Maschine nur eine einzige Kraft P wirke (der Druck des Motors auf d. Zei.), welche aber eine Funkt. der Geschw. ihres Angriffspunktes ist, die mit der Zunahme der Geschwind.

allmählig erlahmt u. zuletzt ganz
0 würde, wenn die Maschine anfinge in Ruhe
wär; so haben wir, um die Gleich.
der Bewegung aufzustellen, nur die Wirk.
der Kraft P also $\int P ds$, der leb.
Kraft sämmtlicher Massen: $\Sigma m v^2$ gleich
zu setzen:

$$\int P ds = \Sigma m v^2.$$

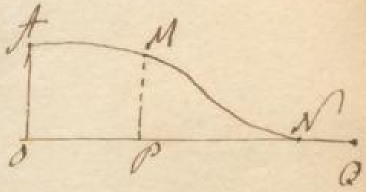
Da nun auch die Maschine gewisse
Widerstand äußert, so muß anfangs
die Geschw. von 0 angefangen, fort-
wachsen, so wie aber mit der Zeit also
auch mit dem Weg, den d. Angriffspunkt d. P zurücklegt
die Geschw. zunimmt, wird P immer
kleiner u. kleiner.

Es sei a der Weg, den der Angriffspunkt
v. P zurückgelegt hat, bis zu dem Augenblick,
in welchem P verschwindet, so ist:
$\int_0^a P ds$ die Wirk. welche dem System bis
dahin mitgetheilt worden ist, u. wenn wir
durch c die Geschw. jedes einzelnen Massentheilchens
in dies. Augenblick bezeichnen, so ist $\Sigma m c^2$
die leb. Kraft, welche jene Wirk. hervorgebracht
hat; wir erhalten daher:

$$\int_0^a P ds = \Sigma m c^2.$$

Da aber nun bei der Fortsetzung der Bewegung P fortwährend 0 bleibt, so wird, wenn b einen beliebigen Weg bezeichnet, der größer als a ist $\int^b P ds$ immer $= \int^a P ds$ bleiben. Es kann also die leb. Kraft des Massensystems nie größer als Smc^2 werden.

Wir können uns den Werth von $\int P ds$ auch durch geometr. Betrachtung anschaulich machen; wenn wir die Wege, welche der Angriffspunkt zurücklegt, als Abscissen auftragen u. die entsprechenden Werthe von P als Ordinaten, so wird das Gesetz nach welchem sich P mit s ändert, durch eine Curve AMN ausgedrückt, die bei N (wenn $ON = a$) mit der Abscissenlinie zusammenfällt u. sich nicht mehr von derselben entfernt. Setzen wir $OP = s$, $ON = a$, $OQ\,(>a) = b$; so ist $\int_0^s P ds$ gleich dem Flächeninhalt der Figur $OAMP$; $\int_0^a P ds$ gleich d. Flächeninhalt der Fig. $OAMNO$; $\int_0^b P ds$ gleich dem Flächeninh. $AMNQO$. Da aber von N bis Q keine Fläche mehr vorhanden ist, so ist, überhaupt wenn $b > a$



$$\int_0^b P ds = \int_0^a P ds$$

Nachdem wir nun bewiesen haben, daß selbst dann keine ∞ große Geschwindigkeit in der Maschine eintreten kann, wenn gar keine Widerstände vorhanden sind, so ist dieß um so viel mehr der Fall, wenn solche da sind.

Der Hauptsatz, daß d. Geschwind. nie über eine gewisse Grenze hinaus kommen kann, liegt aber auch in den Nebenumständen der Bewegung, sond. ist in der Wirkungsart der Motoren begründet.

Wenn der Druck eines Motors auf einen Zeugtheil unveränd. wäre, so würde doch ∞ große Geschw. mit der Zeit in die Maschine eintreten können, wenn auch ihrer Bewegung gewisse Hindernisse entgegenwirken; wenn aber die Geschwindig. einer Maschine nicht über eine gewisse Grenze hinaus kann, so muss der Bewegungszustand innerhalb gewisser Grenzen verbleiben u. es ist nun die Frage, von welcher Art dieser Zustand sein wird. Wenn die Kraft u. die Widerstände, welche auf die Maschine einwirken, kein bestimmtes Gesetz befolgen, sond. unregelmässig bald stärker bald schwächer wirken, zu Zeiten sogar gar nicht wirken, darf kein regelmäßiger Zustand der Bewegung eintreten.

Wo dagegen die Kraft u. die Widerstände regelmäßig wirken, so muß, nachdem einmal die Bewegung eine Zeit gedauert hat, entw. ein unveränd. od. ein gesetzmäßig veränderlicher, periodischer, wiederkehrender Bewegungszustand eintreten. Dieser Bewegungszustand, in welchen die Maschine zuletzt geräth, nennen wir den <u>Beharrungszustand</u>, u. dieser ist also entweder

1. unregelmäßig oder
2. regelmäßig

u. wenn das letztere statt findet

a. unveränderlich, gleichförmig,
b. periodisch, veränderlich.

Gewöhnlich tritt der Beharrungszustand kurze Zeit nach dem Beginn der Bewegung ein, u. erst wenn derselbe eingetreten ist, fängt die Maschine an regelmäßig zu arbeiten.

Bewegung einer Maschine bis der Beharrungszustand eintritt.

Die Bewegung der Maschine beginnt, wenn der Druck des Motors auf den Zapfen im Stande ist, sämtliche Widerstände der Maschine zu überwinden. Würde dieser Druck nie größer werden, als nothwendig um mit den Widerständen ins Gleichgewicht zu treten, so würde sich die Maschine nie bewegen.

Die Bedingung des Beginnens der Bewegung einer Maschine ist daher, daß das Moment des Druckes, welchen der Motor auf den Zapfen auszuüben vermag, größer werden könne als der auf den Zapfen reducirte Widerstand.

Wenn wir z. B. eine große Mühle mit 10 Mahlgängen durch eine sehr kleine Dampfmaschine treiben wollten, so müßte vielleicht der Druck des Dampfes auf jeden Quadratcentim. des Kolbens 10 Atm. betragen, um die Widerstände der Maschine überwinden zu können. Diese Dampfmaschine zeigt nun die

Mühle in Bewegung setzen können oder nicht, je nachdem die Belastung des Sicherheitsventils pr. Quadratcm kleiner oder größer als 9 Atm. ist. (1 K abgerechnet wegen des absoluten Drucks auf 1 □ctm.). Ist die Belastung z. B. nur 4 Atm. so wird sich der im Kessel gebildete Dampf vermehren, bis er durch seine Spannkraft auf jeden Quadratcm. des Sicherheitsvent. einen Druck von 5 K ausübt; dann wird das Ventil gehoben, so weit, daß aller Dampf, der in einer gewissen Zeit gebildet wird, entweichen kann. Die Mühle wird aber ruhig stehen bleiben. Wenn dagegen das Sicherheitsventil mit einem Druck von 9 oder mehr Kilogr. belastet wird, wird die Spannung des Dampfes allmählig auf jeden □cm einen Druck von 10 Kilogr ausüben, ehe daß das Ventil gehoben wird, u. die Mühle wird in Bewegung kommen.

Um sich eine klare Vorstellung zu machen, wie die Bewegung einer Maschine beginnt, u. wie sie fortschreitet bis der Beharrungszustand eintritt, ist es am zweckmäßigsten einige specielle Fälle zu betrachten, indem es kaum möglich ist, bei der Verschiedenartigkeit der Wirkungsweise der verschied. Motoren den Gegenstand im Allgemeinen zu behandeln.

Nehmen wir als erstes Beispiel an, daß eine Mahlmühle durch ein Pferd vermittelst eines Göpels (Manège) getrieben werden soll. Um die Widerstände, welche das Zerreiben der Getreidekörner verursacht, sowie auch die Widerstände, welche die verschiedenartigen Reibungen der Maschine verursachen, zu überwinden, wird an dem Hebel des Göpels, an welchem das Pferd ziehen soll, eine gewisse Zugkraft z. B. = 75k nothwendig sein. Wenn nun das Pferd zu ziehen beginnt, werden anfangs die Stränge sich weit ausdehnen, bis auf ihrem Befestigungspunkt ein Zug von 75k entsteht. In dem Moment, in welchem diese Zugkraft eintritt, hält sie den Widerständen der Maschine gerade das Gleichgewicht; damit aber eine Bewegung entsteht, muß die

191. Zugkraft auch mehr wachsen. Ist diese
z. B. 80 Kgr. geworden, so werden davon
75 Kgr gerade hinreichen, dem Widerstand
das Gleichgewicht zu halten, u. der
Überschuß von 5 Kgr wird auf sämtliche
Massen der Maschine so einwirken, als
wenn die Maschine gar keinen Widerstand
verursachte, sond. bloß ein System von
trägen Massen wäre, auf welche eine
Kraft von 5 Kgr. wirkt. Die Massen
müssen daher in Bewegung gerathen.
Wenn wir nun annehmen, daß das Pferd
durch 2 Minuten mit 80 Kg anzieht, so
wird während dieser Zeit die Geschwind.
der Maschine fort u. fort zunehmen, das
Pferd muß aber immer schneller u.
schneller gehen, u. wenn es im Stande
wäre, bei jeder Geschwind. eine Zugkraft
auszuüben, die größer als 75 Kg wäre,
müßte die Geschw. der Maschine über
alle Grenzen wachsen.
Nehmen wir nun an, daß das Pferd,
nachdem die Bewegung durch 2 Minute
gedauert hat, plötzlich schwächer u.
genau mit 75 Kg anzieht, so ist nun diese
Zugkraft wiederum im Stande dem
Widerstand der Maschine das Gleichgew.

zu halten; es hätte kein Überschuß an Kraft vorhanden, der eine weitere Beschleunigung der Masse der Maschine hervorbringen könnte, sie wird also mit der am Ende der 2 Min. vorhandenen Geschwindigkeit vermöge der Trägheit ihre Bewegung fortsetzen, u. wenn das Pferd fort u. fort mit 75 k anzieht so wird dieser Bewegungszustand fortdauern.

Es ist also dann ein gleichförmiger Beharrungszustand eingetreten.

Wenn das Pferd nun während einer Minute mit 80 k Zugkraft anzieht, u. am Ende dieser Zeit mit 75 k seine Zugkraft fortsetzt, so tritt schon nach der ersten Minute ein Beharrungszustand ein, u. wobei aber d. Geschwind. der Maschine u. des Pferdes kleiner sein wird als in dem vorigen Fall, denn im ersten Fall hat der Überschuß von 5 k durch 2 Minut. die Masse der Maschine beschleunigt; im 2ten Fall aber nur während einer Minute.

Aus diesem Beispiele sehen wir folgendes:

1.) Die Bewegung der Maschine beginnt in dem Moment, wo die Kraft im Stande ist, die Widerstände zu überwinden:

2.) die Geschwind. der Maschine nimmt so lange zu, als die Kraft stärker wirkt, als zur Überwindung der Widerstände nothwendig ist, indem der Überschuß an Kraft nichts zu thun hat, als die Massen der Maschine zu beschleunigen.

3.) der Beharrungszustand tritt in dem Augenblick ein, von welchem an kein Überschuß an Kraft vorhanden ist; wenn also die Kraft anfängt u. fortfährt gerade nur so stark zu wirken als zur Überwindung der Widerstände nothwendig ist.

Beim Beginn der Bewegung u. beim Beginn des Beharrungszustandes, so wie auch während der ganzen Dauer desselben, ist also die Kraft mit den Widerständ. im Gleichgewicht.

Wenn das Pferd im Beharrungszustand nicht immer gleichstark angeht, sond. manchmal stärker, manchmal schwächer als 75 k, so wird

die Maschine überraschend schneller
u. langsamer gehen.

Als zweites Beispiel wollen wir eine Wassermühle betrachten, die durch Wasser vermittelst eines unterschlächtigen Wasserrades bewegt werden soll.

Nehmen wir an, daß am Umfang des Rades ein Druck von 1000 k erforderlich sei, um die sämtlichen Widerstände, welche der Bewegung entgegenwirken, zu überwinden. Wir können uns also die Widerstände der Maschine ganz weg denken, wenn wir am Umfang des Rades einen Widerstand von 1000k anbringen.

Nehmen wir an, daß anfangs der Schützen des Rades geschlossen sei, so daß kein Wasser auf das Rad fließen kann, u. daß dem Wasserrad immer gleichviel Wasser zugeleitet werden könne.

Wird nun der Schützen geöffnet, so beginnt das Wasser gegen das Rad hinzuströmen, u. in dem Moment, in dem das erste Wassertheilchen das Rad erreicht, wird auf die Schaufeln, welche es trifft, ein Druck ausgeübt. Diesem ersten Theilchen folgen andere nach. Die Zahl der gleichzeitig an die

Schaufeln anschlagenden Wassertheilchen,
u. mithin auch der Druck, welcher auf
dieselben ausgeübt wird, nimmt allmählig
zu u. wenn überhaupt die Wassermenge,
welche der Kanal ud. Fluss liefern kann,
hinreichend groß ist, u. das Wasser-
rad nicht zu klein gemacht ist, so wird
der Druck auf die Schaufeln nach einiger
Zeit = 1000^{k} werden, u. von diesem
Augenblick an auch größer werden
müssen, weil dem Wasser fort u. fort
Wasser zufließt u. diesem durch die
Schaufeln der Weg zum Abfließen
versperrt ist.
In dem Augenbl., in w. der Druck des
Wassers gegen die Schaufeln beginnt größer
als 1000^{k} zu sein, beginnt die Maschine
ihre Bewegung, indem der in jedem
Augenbl. vorhandene Überschuß der
Kraft die Masse der Maschine beschleunigt.
In dem Maße als die Geschwind.
der Schaufeln zunimmt, kann mehr u.
mehr Wasser abfließen, so lange
aber die wegfließende Wasser-
menge kleiner ist, als die zufließende,
sammelt sich vor dem Rade immer mehr
u. mehr Wasser an. Der Druck auf
die Schaufeln nimmt einerseits zu,

so wie sich mehr Wasser aus den Schaufeln
ansammelt, andererseits wächst dieser
Druck, wird daher in einem gewissen
Moment ein Maxim. erreichen, u. von
da an allmählig abnehmen, bis er wieder
1000tt beträgt. Bis zu diesem Moment
hat nun die Geschwind. der Maschine zu-
genommen, kann sich aber von da an
nicht mehr ändern, weil kein Über-
schuss von Druck mehr vorhanden u. die
zufliessende Wassermenge der abfliessenden
gleich geworden ist.

Es tritt also ein gleichförm. Beharrungs-
zustand ein.

Die Erscheinungen welche sich zeigen bis
der Beharrungszustand eintritt, sind der
Hauptsache nach folgende:

1.) die Bewegung der Maschine be-
ginnt, wenn die Kraft zum erstenmal
den Widerst. das Gleichg. hält.

2.) der Druck auf die Schaufeln wächst an-
fangs, nachdem die Bewegung begonnen
hat, erreicht nach einiger Zeit
ein Maxim. u. nimmt von da an all-
mählig ab, bis er genau das 2te
Mal dem Widerstand das Gleichgew. hält.

3. Bis zu diesem Augenblick sind die
Massen der Maschine beschleunigt worden.

4.) Der Beharrungszustand tritt ein, wenn zum 2tenmal Kraft u. Widerstand ins Gleichgew. getreten, u. wenn die zufließende Dampfmenge der abfließende gleich geworden ist.

Als 2tes Beispiel wollen wir annehmen, daß dieselbe Mahlmühle durch eine Dampfmaschine bewegt werden soll.

Wir nehmen an, daß im Kessel immer gleichförmig fortgeschürt werde, daß also in gleichen Zeitintervallen gleich viel Dampf (dem Gewichte nach) erzeugt u. gleichviel Wasser verdampft werde.

Die Dampfmaschine soll zur Verwandlung der geradlinigen auf u. niedergehenden Bewegung in eine rotirende, mit Balancier, Schubstange, Kurbel u. Schwungrad, so wie auch mit einem Mechanismus für die Zu- u. Ableitung des Dampfes versehen sein. Dieser Mechanismus hat aber zur Folge, daß die Kraft, mit welcher auf den Kolben gewirkt werden muß, um sämtliche Widerstände, so wohl der Dampfmaschine, als auch der Mahlmühle zu überwinden, von der Stellung des Kolbens abhängen wird.

Sie ist am kleinsten, wenn derselbe sich in der mittleren Stellung befindet, nimmt allmählig zu, so wie sich der Kolben der höchsten u. tiefsten Stellung nähert. u. ist in dieser Stellung selbst unendlich groß, weil die Schubstange u. die Kurbel in dieselbe gerade Linie fallen.

Nehmen wir an, daß auf jeden □cm. des Kolbens ein Druck von 3 k wirken müßte, um sämtliche Widerstände zu überwinden, wenn der Kolben sich der mittleren Stellung befindet, u. nehmen wir an, daß der Kolben anfänglich in diese Stellung gebracht wurde. So wie nun unterdessen Kessel geheizt wird beginnt die Dampfentwicklung. Es sammelt sich immer mehr Dampf im Kessel an, seine Spannkraft wächst allmählig u. wird endlich (vorausgesetzt, daß das Sicherheitsvent. stark genug belastet ist) nach einiger Zeit so groß, daß auf □ctm. der Kesselwand u. des Kolbens ein Druck von 3 k ausgeübt wird. Da aber in diesem Moment noch kein Dampf abfließen kann, so muß die Spannung noch weiter zunehmen. Die Maschine wird aber ihre Bewegung beginnen, so wie die Spannung nur um das Unbedeutendste größer geworden ist als 3 k pr. 1 □cm.

199. Ueber die Erzeugung der Maschinen genau verfolgen ist aber selbst mit Zuhilfnahme der Ziffern u. Jahrg. nicht möglich; um so viel weniger durch unmittelbare Beobachtung der Verh. Aber so viel sieht man leicht ein, daß anfangs so lange die Maschine noch einen langsamen Gang hat, mehr Dampf gebildet wird, als vermittelst der Maschine aus dem Kessel entfernt wird. Die Spannung des Dampfes muß daher bis zu einem gewissen Grade zunehmen. Es wird z. B. nachdem das Schwungrad die erste Umdrehung gemacht hat, der Druck des Dampfes auf jeden □cm. 3,6 Kg nach der 2ten Umdrehung 3,3, nach der nach der 3ten 4,6 nach der 4ten 4,1 Kg betragen. Ist aber einmal die Geschwind. der Maschinen so groß geworden ist, daß die Dampfmenge welche durch die Maschine bei einer Umdrehung aus dem Kessel entfernt wird, ebenso groß ist, als diej. die in ders. Zeit producirt wird, so kann in der Spannung des Dampfes, so wie auch in der Geschwind. der Maschin

(bei der Zeit einer Umdrehung) keine Änderung mehr eintreten, obschon dann der Beharrungszustand eingetreten, der aber nicht gleichförmig, sondern periodisch veränderlich ist, indem zwar alle Umdrehungen der Schwungräder in gleicher Zeit geschehen, die Geschwindigkeit der einzelnen Stellen der Maschine aber nicht constant sein können.

Wir können uns durch graphische Darstellung die Erscheinungen, welche bei der Bewegung einer Maschine vorkommen, versinnlichen.

Da es hinlänglich ist die Bewegung eines einzelnen Punktes zu kennen, um die aller übrigen zu bestimmen, so wollen wir die Bewegung eines Punktes des Zeigers deutlich zu machen suchen.

Zu diesem Behufe vergleichen wir mit zwei Curven, indem wir den Weg, den der Zeiger zurücklegt, als Abscisse auftragen, u. in der einen Curve den Druck der Motoren auf den Zeiger, in der andern die Geschwindigkeit des letzteren, als Ordinate auftragen.

In Fig. 1 ist das Gesetz dargestellt, nach welch. sich bei d. Masch., die zuletzt einen gleichförmigen Beharrungszustand annimmt, der Druck des Motors auf den Zeugpt. ändert.

Fig. 2 stellt das Gesetz der Geschwind. des Zeugpts dar.

Der Druck wächst zuerst von 0 bis od ehe daß sich die Maschine bewegt. Sobald die Bewegung beginnt, wächst der Druck noch weiter fort. Es wird ein Maximum, wenn der Zeigpt. den Weg ob zurückgelegt, u. nimmt dann wieder allmählig ab. Ist der Weg des Zeugpts = oc geworden, so ändert sich der Druck bei der Fortsetzung der Bewegung nicht mehr, (daher ist yz eine zur Abscissenlinie # Linie.) u. es ist der gleichförmige Beharrungszustand eingetreten.

Die Geschwind. des Zeugpt. ist anfangs = 0, nimmt allmählig zu bis der Beharrungszust. eingetreten ist, u. ändert sich dann nicht mehr. daher ist Su # zur Abscissenlin.

Fig. 3. stellt d. Gesetz dar, nach welch. sich im Allgem. der Druck des Motors auf den Zeugpt. ändert, wenn zuletzt ein period. Beharrungszustand eintritt.

In Fig. 4.) stellen d. beiden Curven die Geschw.-änderungen von 2 verschied. Maschinen mit

period. Beharrungszustand der.

Die Geschwindigkeiten des Motors und der Arbeitsm. schwanken um einen gewissen mittleren Zustand, der durch die punktirte L. fig. 5 dargestellt ist.

Auch die Geschw. bei jed. Masch., deren Bewegungsdruck fig. 6 dargestellt ist, schwanken um gewisse mittlere Werthe herum, welche durch die punkt. L. angedeutet sind. Beider Masch., auf welche sich die obere Curve bezieht, wird die Geschwind. des Zst. nie mehr gleich 0 wenn einmal die Bewegung eingetreten ist. Bei der Maschine, deren Beweg. durch die untere Curve dargestellt, wird die Geschwind. des Zustd. im Beharrungszustd. period. = 0.

Fig. 5

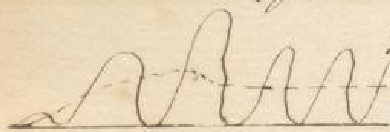


Fig. 6.

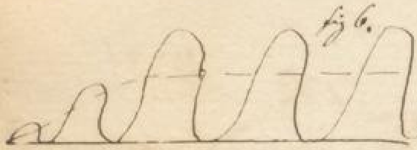


Fig. 5 stellt das Bewegungsgesetz einer Masch. dar, bei welcher d. Zst. nicht nur im Beharrungszust. sond. auch während der Einleitung der Bewegung verschwindend keine Geschwind. verliert. Das gleiche ist der Fall bei der Maschine, deren Bewegungszustand fig. 6 darstellt.

Die Zeit, welche verfließt bis der Beharrungszustand der Bewegung eintritt, hängt vorzüglich von der Größe der Massen der Maschine ab, u. von den Kräften u. Widerstd., welche in der Zeit der Bewegung auf die Masch.

einwirken. In der Regel tritt der Beharrungszust. schon nach einigen Radumdr. ein.

Obgleich es nicht möglich ist, die Bewegung der Maschine bis zum Beharrungszustand in jedem Falle genau zu verfolgen, so wird es doch zweckmäßig sein, durch einige Beispiele den Gegenstand zu erläutern.

Eine gew. Mahlmühle wird durch Wasser vermittelst eines unterschlächt. Wasserrades getrieben, es soll die Bewegung berechnet werden.

Es sei K der auf d. Umfang des Rades reduc. constante Widerstd. der Masch., welcher demnach gleich ist dem Druck, der am Umfang des Rades wirken muß, um die Widerstände der Maschine zu überwinden.

M die auf den Umfang des Rades reduc. Masse aller beweg. Bestandth. der Masch. Man denke sich diese Masse einerseits des auf die Schaufeln strömenden Wassers, andererseits den Widerst. K wirkend gemacht werden könnte, würde sie sich genau so bewegen wie die Schaufeln des Rades. Dem Rade strömen immer gleichviel Wasser zu u. es sei m die in jeder Sec. auf das

Rad mittl. Wassermenge.

V die Geschw., mit welcher das Wasser gegen die Schaufeln strömt.

v die Geschw. der Schaufeln, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat.

P der Druck, welcher auf die Schaufeln ausgeübt wird, der Wassermenge m u. der Differenz $(V-v)$ der Geschw. des Wassers u. der Schaufeln proportional, wir können daher setzen:

$$P = A . m (V-v)$$

wobei A als eine Constante zu betrachten ist.

Die Schaufeln werden sich eben genau so bewegen, wie die Masse, wenn auf sie die Kraft P u. der Widerstand R einwirkt.

Bezeichnen wir dann dv die Änderung der Geschw. des Rades in dem Zeitelement dt, welches auf die Zeit t folgt (t vom Anfang der Bewegung an gerechnet) so ist die Diff-gleich. der Bewegung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{P-R}{M} = \frac{1}{2} \frac{A . m (V-v) - R}{M}$$

hieraus folgt:

$$\frac{dv}{Am(V-v)-R} = \frac{dt}{2M} \quad \text{od.} \quad \frac{dt}{2M} = \frac{dv}{(AmV-R)-Amv}$$

Das Integral dieser Gleich. ist

$$\frac{t}{2M} = -\frac{1}{Am} \lg nat \left[(AmV - k) - Amv\right] + C$$

für $t=0$, ist aber $v=0$, demnach

$$0 = -\frac{1}{Am} \lg nat (AmV - k) + C$$

diese Gleich. von der vorhergeh. abgezogen folgt:

$$\frac{t}{2M} = \frac{1}{Am} \lg nat \frac{AmV - k}{AmV - k - Amv}$$

u. hieraus findet man:

$$v = \left(V - \frac{k}{Am}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}\right)$$

Nachdem die Bewegung einige Zeit gedauert hat, wird $e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}$ sehr klein, vorzüglich dann, wenn M ~~sehr~~ klein u. m sehr groß. Ist dieser Zeitpunkt eingetreten, so kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$v = V - \frac{k}{Am}$$

diese Gleichg drückt also die Geschwindigk. aus, welcher sich die Geschwindigk. des Rades ohne Ende nähert, aber sie doch nie vollkommen erreicht.

Strenge genommen tritt also der gleichförmige Beharrungsz. gar nicht ein, sondern dieser ist nur die Grenze, welcher sich die Bewegung ohne Ende nähert.

Wenn aber einmal bei dem Wasser

wenn t … $e^{-\left(\frac{Am}{2M}\right)t}$ nur noch $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ …
beträgt, kann m. für die Praxis annehmen, daß der Beharrungszustand wirklich eingetreten sei. Theoretisch betrachtet ist es aber auf jeden Fall, daß m. kein Moment angeben kann, in welchem der Beharrungszustand wirklich eintritt.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$K = Am(V-v)$$

woraus m. sieht, daß sich der Druck des Wassers auf die Schaufeln stets für den Widerstande nähert, od. mit andern Worten: Kraft u. Widerstand nähern sich immer mehr u. mehr dem Gleichgewichtszustand.

Über die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand.

Bedingungen, unter welchen ein solcher Zustand eintritt.

Damit ein gleichförm. Beharr. der Bew. eintreten kann, (d. h. daß die Geschwind. in jed. Augenblick unveränderl. bleibt) muß der gewonn. Zusammenhang von der Art sein, -

207. daß das Verhältniß der Geschwind. zweier Punkte nur allein von den constant. Verh. der Maschinenbestandtheile abhängt.

Ist eine solche Masch. unter der Einwirk. eines Motors u. gewisser Widerstände in Bewegung gerathen u. tritt nach Verlauf einer gewissen Zeit, zwischen dem Druck des Motors auf die Bewegt. u. den verschied. Widerständ., welche die Beweg. der Maschine u. der zu speisenden Körper verursachen, ein bleibender Gleichgewichtszustand ein, so beginnt von diesem Augenblick an eine durchaus gleichförmige Bewegung aller Theile.

Es ist zwar denkbar, daß in diesem Gleichgewichtszustande die Kräfte u. Widerst. mit veränderl. Kraft wirken z. B. die Kraftmaschine mit einem sehr empfindlichen Regulator versehen wäre, welcher mehr od. weniger Wasser od. Dampf auf sie einwirken läßt, wenn sich die Widerstände ändern. In der Wirklichkeit ist dies aber nicht der Fall, sondern sowohl die Kräfte als die Widerstände, wirken bei dieser Maschine im Bewegungszustande immer mit constanter Intensität.

Nennen wir nun P den Druck, welchen der Motor auf den Rec. ausübt.

$k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots$ die verschied. Widst., welche die Reibung der Maschinenbestandth. verursachen.

Q der Hauptwiderstand, den der zu überwindende Körper verursacht,

$v, w_1, w_2, w_3 \ldots$ u die Geschwind. der Angriffspunkte, so ist nach dem Princ. der virtuell. Geschw. die Bedingungsgleich. zwisch. jener Kraft u. jenen Widerständen:

$$Pv = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 \ldots Qu.$$

Diese Gleichg zeigt, daß wenn bei einer Maschine ein gleichförmiger Beharrungszustand eingetreten ist, der Effect des Motors gleich der Summe der Effecte sämtlicher Widerstände ist.

Wären keine Nebenhindernisse der Bewegg vorhanden, wäre also $k_1 = k_2 = k_3 \ldots = 0$ so würde jederzeit

$$Pv = Qu$$ sein, d. h. der Effect welchen die Werkzeuge hervorbringen ist gleich dem Effect, welchen der Motor dem Rec. abgibt. Da aber die Nebenhindernisse nie ganz beseitigt werden können, so kann die Maschine nie den

totalen Effect, welchen sie vom Motor empfangen hat, auch die Werkzeuge übertragen, sondern nur ein Theil desselben.

Wir sehen hieraus, daß in der Maschine selbst keine Wirkungsfähigkeit enthalten ist, denn diese werden durch den Effect gemessen u. der Effect kann durch die Maschine nicht vergrößert werden, sondern im Gegentheil vermindert sie durch ihre Reibungen einen Theil des ihr mitgetheilten Effectes u. gibt nur den übrig bleibenden Rest an die Werkzeuge ab. Es ist also unmöglich eine Maschine zu construiren, vermittelst welcher z.B. ein Pferd eine ganze Spinnerei treiben könnte, weil hiezu ein vielmal größerer Effect nothwendig ist, als jener ist, den ein Pferd hervorbringt, u. weil eine Maschine, wie sie auch eingerichtet, einen ihr mitgetheilten Effect nie vergrößern kann. Eine Maschine ist in Bezug auf die Art u. Weise wie sie einen ihr mitgetheilten Effect auf die Maschin. arbeitenden Theile überträgt, ohne denselben zu vergrößern, mit einer Wasserleitung zu vergleichen, welche das aufgenommene Wasser fortleitet u. an verschied. Stellen u. größere oder kleinere Quantität mit grösserer od. kleinerer Geschwind. wieder abgibt. In einer Wasserleitung fließt das Wasser in den verschied. communicirenden Röhren von dem Reservoir nach den verschieden Punkten hin, wo man desselben bedarf. Bei der Masch. fließt hingegen der Effect durch die verschied. Maschinenbestandtheile von der Kraftquelle (dem Motor) nach allen den Punkten hin, an welchen Widerstände überwunden werden müssen.

Würde m. eine Wasserleitung so genau anlegen, daß an den Verbindungsstellen der Röhren, oder durch die Röhrenwände selbst gar kein Tropfen Wasser entweichen würde, so würden gewiß aus allen den Öffnungen, die zum Abfluß des Wassers bestimmt sind, ebenso viel ausfließen, als in dieselbe hineingeleitet wird. Ebenso würde eine Masch. ohne Nebenhindernisse den ganzen Effect, welchen sie empfangen hat, auf die Punkte übertragen, an welchen die Werkzeuge arbeiten.

Die Vortheile, welche eine Maschine gewährt.

Diese bestehen bloß darin, daß sie den Effect von der Effectsquelle auf die arbeitenden Punkten hinleitet, den empfangenen Effect in Partialeffecte auflöst, die Faktoren dieser Partialdifferentiale (Druck u. Geschwind.) gehörig vergrößert od. verkleinert; u. endlich zugleich die Bewegung des Receptors in jene der Werkzeuge verwandelt.

Aber der größte Vortheil, den die Masch. gewähren, liegt in der Möglichkeit, durch sie die [illegible] Motoren der unorganischen Natur für alle Arbeiten dienstbar machen zu können. Mit einer Masch. wird es möglich durch eine sehr schwache Kraft einen ungeheuren Effect hervorzubringen; es ist hiezu nur nothwendig einen geometrischen Zusammenhang zu erfinden, bei welchem ein gewisser Punkt eine äußerst langsame Bewegung macht, während ein anderer sich schnell bewegt. Lässt man auf letztere jetzt eine schwache Kraft wirken u. setzt man den ersten mit dem Körper in Berührung, auf welchen ein heftiger Druck ausgeübt werden soll, so wird geschehen, was man gewünscht hat. Mit einer Maschine wird also immer möglich eine sehr langsame Bewegung in sehr schnelle zu verwandeln; man muß sich aber gefallen lassen, daß da wo die schnelle Bewegung entsteht, nur ein schwacher Widerstand überwunden werden kann.

Jeder natürl. od. künstl. Motor ist Schwankungen seiner Kraftäußerung.

Die letztern werden gewöhnlich bemerkt, wenn man nur ganz unbedeut. kleine Wirkungen continuirlich oder in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen bedarf. Dies geschieht durch ~~einen~~ Mechanismus, welcher aus dem Kraftäußerungen die Wirkung nur tropfenweise ablaufen läßt, wie dies z. B. bei einer Uhr durch die Hemmung geschieht.

Ein sehr wichtiger Vortheil,

 den die Maschinen gewähren besteht auch darin, daß man durch sie eine große Anzahl Werkzeuge derselben Art gleichzeitig funktioniren lassen kann, wie dies z. B. bei der Spinn- u. Webmaschine der Fall ist.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit des Receptors.

Da die Masch. selbst keinen Effect produciren kann, u. sich nach der Größe des Effectes, welche die Masch. empfangen hat, die Größe der Arbeit richtet, welche sie verrichten kann; so ist es von sehr großer Wichtigkeit die Einrichtung u. Bewegung des Recept. so anzuordnen, daß demselben durch eine gewisse Quantität von dem thätigen Motor ein möglichst großer Effect mitgetheilt wird.

Nennen wir v die Geschwind. des Recept., $f(v)$ den Druck des Motors auf den Receptor, E den Effect, der dem Recept. mitgetheilt wird, so ist

$$E = f(v).v.$$

Da nun dieser Ausdruck bei einer Zunahme von v, wegen des Faktors v wächst, aber wegen des Faktors $f(v)$ abnimmt, weil wie wir schon wissen, der Druck des Motors auf den Rezeptor abnimmt, wenn die Geschwind. desselben wächst u. sogar verschwindet, wenn $f(v) = 0$ (was der Fall ist, wenn die Geschwind. des Rezeptors eine gewisse Grenze erreicht; so muß es eine gewisse Geschwindigkeit geben, bei welcher E ein Maxim. wird. Um diese vortheilhafteste Geschwindigkeit ausfindig zu machen, muß für jeden einzelnen Motor u. Rezeptor der Faktor $f(v)$ bekannt sein. Ist dies der Fall, so ergiebt sich die vortheilhafteste Geschwind., wenn man den Ausdruck für E differentiirt u. $\frac{dE}{dv} = 0$ setzt; demnach durch die Auflösung der Gleichung

$$f(v) + v.\frac{d.f(v)}{dv} = 0$$

Vortheilhafteste Anordnung eines Maschinensystems hinsichtlich der Benutzung des Motors.

Die absolute Wirkungsfähigkeit, welche in einem Motor enthalten ist, soll so viel wie möglich in ihrer Gänze auf die arbeitende Stelle übertragen werden; es ist aber der absolute Effekt, welcher in d. Motor enth. ist, gleich dem Effekt, welchen der Receptor empfängt, mehr dem Effekt, welcher noch in dem Motor enthalten ist, wenn er aufgehört hat auf die Maschine zu wirken u. dieselbe verläßt. Dies gilt auch für thierische Motoren. Dieser letztere Effekt soll also so klein als möglich ausfallen, damit der erstere so groß als möglich wird. Der Motor soll daher den Receptor an dem tiefsten Punkt u. ohne alle Geschwindigkeit verlassen. Der Dampf soll, nachdem er die Maschine verläßt, nur noch eine möglichst schwache Spannkraft besitzen.

Der Effekt den der Recept. empfangen hat, ist gleich dem Effekt, der durch die Reibung verloren geht, mehr dem, der durch Stöße u. Vibrationen verloren geht, mehr dem Effekte, welcher auf die arbeitenden

Punkte der Werkzeuge übertragen wird. Damit also der letztere möglichst ganz ausfalle, muß man die Reibungen, Stöße, Vibrationen zu vermeiden suchen.

Vortheilhafteste Geschwindigkeit des Werkzeuges

Die Qualität des Produktes, welches eine Maschine liefert, hängt theils von der Einrichtung, theils von der Geschwindigkeit der Werkzeuge ab.

Es ist z. B. bei einer Mehlmühle die Geschwindigkeit der Steine für die Güte des Mehles nicht gleichgültig. Gehen die Steine zu langsam, so entsteht nur ein Quetschen der Körner, u. es wird kein feines Mehl gebildet; gehen die Steine zu schnell, so entsteht zwischen denselben eine Erhitzung wodurch das Mehl einen unangenehmen Geruch erhält. In manchen Fällen ist auch die Quantität der Produkte, die eine Maschine mit einem gewissen dem Zwecke mitgetheilten Effekte liefert, von der Geschwind. der Werkzeuge abhängig. Eine langsam gehende Brettersäge leistet z. B. mit dem gleichen Kraftaufwand weniger als eine schneller gehende.

Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit bei einer Maschine im Beharrungszustand der Receptor u. das Werkzeug die vortheilhaftesten Geschwind. annehmen.

Damit der Recept. u. das Werkzeug die vortheilhafteste Bewegung annehmen, sind im Allgem. 2 Hauptbedingungen zu erfüllen.

1.) Muß ein Mechanismus ermittelt werden, welcher den Receptor mit dem Werkzeug verbindet, und die Wege, welche sie zurücklegen, wenn m. die Maschine durch irgend eine Kraft verschiebt, sich so verhalten wie die Geschwindigkeiten, die der Receptor u. das Werkzeug im Beharrungszustand annehmen sollen.

Nennen wir V u. U die beiden letzteren Geschwindigkeiten u. u die Geschw., mit welcher sich das Werkzeug bewegt, wenn jene des Recept. v ist, so muß also

$$\frac{v}{u} = \frac{V}{U}$$ sein.

Wenn z. B. eine Mahlmühle durch ein unterschlächtiges Wasserrad zu treiben ist, so soll der Erfahrung zu Folge, die Geschwind. des Läufers am Umfange 10m betragen, um eine gute Qualität Mehl zu erhalten. Es ist also $U = 10$ gegeben.

Ferner zeigt die Theorie u. bestätigt die Erfahrung, daß die Schaufeln des Wasserrades mit einer Geschw. gehen sollen, die halb so groß ist als jene des gegen die Schaufeln strömenden Wassers. Ist also letztere $= 4^m$, so müssen die Schaufeln mit 2^m sich bewegen, es ist also $V = 2^m$.

Nun muß man ein Räderwerk ersinnen, welches das Wasserrad so mit dem Mühlstein verbindet, daß das Verhältniß der Umfangsgeschwind. dieser beiden Bestandtheile nämlich $\frac{v}{u} = \frac{V}{U} = \frac{10}{2} = 5$ wird, d. h. es muß ein Pkt am Umfang des Steines immer 5mal schneller gehen, als ein Pkt am Umfang des Rades.

2.) Wie man auf der Prax. eine solche Constr. des Motors einrichten sollen, bis derselbe die [illegible] Geschwindigkeit annimmt. Diese [illegible] für das Motors wird durch die Bedingung bestimmt, daß der Effect des Motors der Summe aller Effecte der Widerstände gleich sein muß. Wenn z. B. die Summe der Effecte aller Widerstände bei einer Mahlmühle (mit 2 Steinen) 900^{km} beträgt, muß der Effect

$A\,m\,(C-c)\,c$, welchen das Wasser dem Rad mittheilt, wenn ersteres eine Geschw. C u. letzteres eine Geschw. c besitzt, u. pr Secund. eine Wassermenge m einwirkt, jenen 900^{km} gleich sein; man hat daher

$$A\,m\,(C-c)\,c = 900,$$ woraus

$$m = \frac{900}{A(C-c)c}$$;

Ist aber (nach der Lehre vom Stoße des Wassers gegen eine Schaufel) $A = 2$ u. für den vortheilhaftesten Bewegungszustand $C = 4$; $c = 2$. demnach

$$m = \frac{900}{2 . (4-2)^2} = 112,5$$

Bezeichnen wir durch Q das Gewicht der Wassermenge, deren Masse $= m = 112$ ist, so ist

$$m = \frac{Q}{2g} \quad , \text{ also } Q = 2\ mg = 2197^{\text{Kilogr.}}$$

d. h. es müssen in jeder Sek. $2,197^{\text{Cubikm.}}$ Wasser dem Rade zugeleitet werden, u. dann wird dieses die verlangte Geschwind. von 2^m an u. deshalb am Umfang des Rades eine Geschw. von 10^m.

Das Wasserrad muß natürlich die hinreichend große Abmessungen erhalten, damit auch dasselbe jene Wassermenge gut einziehen kann.

Verfahren, welches bei der Construction einer Maschine zu beobachten ist.

Wenn eine Maschine construirt werden soll, welche zur Verrichtung irgend einer mechanischen Operation dienen soll, so ist zunächst nur gegeben:

1.) der Motor
2.) der zu verändernde Stoff
3.) was aus dem Stoff entstehen soll, oder was an ihm geschafft werden soll, u. die Maschine muß genau erfunden werden.

Um nun eine Übersicht zu verschaffen, von den Verfahren, welches bei der Construction einer Maschine zu beobachten ist, wollen wir zunächst 3 Fälle unterscheiden:

1.) Fall. Wenn die Operation, welche die Maschine verrichten soll, so einfach ist, daß ein einziges Werkzeug hinreichend ist.

2.ter Fall. Wenn die Operation mehr zusammengesetzt ist, so daß eine Arbeitsmaschine nothwendig wird.

3.ter Fall. Wenn eine sehr complicirte Operation ausgeführt werden soll, welche ein System von Arbeitsmaschinen nothwendig macht.

Über die Maschinen mit periodischem Beharrgszustand.

Wenn d. gesam. Geschw. der Masch. bestandth. von der Art ist, daß das Verhältniß der Geschwindigkeiten nicht von je zwei beliebigen Punkten der Masch. constant ist, wenn dieselbe durch irgend eine Kraft bewegt wird, sondern wenn dies. Verhältniß entweder von je 2 Punkten od. von einigen Paaren von Stellen, im Laufe der Bewegung sich ändert, welche von der relativen Stellung der Maschbestandth. abhängt, so tritt in der Wirklichkeit immer ein period. wiederkehrender

Beharrungszustand ein. Dieser Zustand tritt auch ein, wie auch die Maschine construirt sein mag, wenn die Kräfte u. Widerst. mit gemeins. veränderl. Intensität wirken, u. sich nicht in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten.

Um uns nun der Beweg. einer solchen Masch. im Beharrungszstd eine klare Vorstellung zu machen, können wir uns sämtliche Widerstände, die der Beweg. entgeg. wirken, vereinigt denken u. dafür auf den Zeiger einen gewissen Widerstand wirkend annehmen, der so gross ist als die Kraft, welche in jedem Augenblick auf den Zeigpt. wirken müsste, um sämtlichen Widerstdn das Gleichgewicht zu halten. Dieser Widerstand, den wir mit R bezeichnen wollen, kann auf statisch. Grunds. u. am zweckmässigst vermittelst des Princips der virt. G. leicht gefunden werden.

Es sei P der Druck, den der Motor auf d. Zei. in dem Mom. ausübt, in welchem der auf den Zei. reduc. Widerstand = R ist. Wir können also die Maschine nun als ein träges Massensystem ansehen, auf welches 2 im Allgem. period. veränderl. Kräfte P u. R wirken, die einen gemeinsch. Aufhängepunkt oder verschied. Richtungen haben.

Es ist allerdings theoretisch denkbar, daß P u. K im Augenblick der Beweg. gleich groß wären. In diesem Fall würden sich die Kräfte P u. K in jedem Augenblick aufheben, u. die Beweg. der Masch. würde bloß durch die Trägheit sich fortsetzen, als wirkten gar keine Kräfte auf sie ein. Die lebend. Kräfte der Masch. bleiben daher immer gleich groß, obgleich sich die Geschw. einzelner od. auch aller Theile beständig ändern könnten.

In der wirklich. Arbeiten aber ist bei Masch. mit gleichförm. Beharrungszustand der Fall, daß in jedem Augenbl. P = K (u. überdies P u. K constant).

Nehmen wir nun an, daß P u. K veränderl. sind, aber immer wieder denselben Werth annehmen, wenn der gemeinsch. Angriffspunkt u. dess. Bahn seine Lage zurückkehrt. Dann entwickelt die Kraft P während jed. dieser Perioden eine gleichgroße Wirkung u. K eine gleichgroße Gegenwirkung, u. diese beiden Wirk. müssen gleich sein, indem nach Verlauf von jeder Periode die Massen der Masch. wieder dieselbe Geschwindigkeit (od. wenigstens dieselbe totale lebendige Kraft) besitzen müssen.

Denn wenn in einer Periode eine Geschwindigkeitszunahme der Maschine entstünde, so müßte dies auch in allen folgenden Perioden geschehen, u. die Geschwind. der Masch. müßte fortwährend wachsen, was gegen die Voraussetzung ist, daß ein Beharrungszustand eingetreten sei.

Ist also ein Beharrungszustand vorhanden, so ist die Wirk., welche der Motor dem Zeug. während einer Periode ertheilt, gleich der Gegenwirk., welche der Widerst. R in gleich. Zeit entwickelt, u. die Geschwind. aller Theile der Masch. sind am Anfang jeder Periode dieselben.

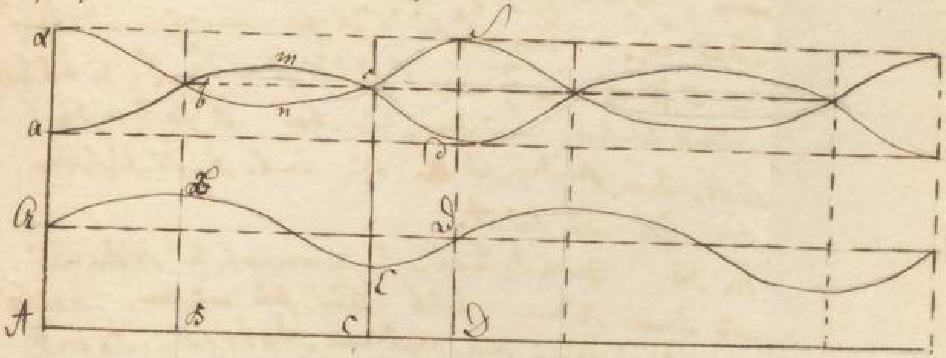
Innerhalb der Perioden, wird abwechselnd $P \gtrless R$ sein, denn fortwährend kann P weder größ. noch kleiner als R sein, weil im ersten Fall die Geschwind. der Maschine während der ganzen Periode wachsen, im letztern Fall abnehmen müßte. Es könnten also am Ende der Perioden nicht dies. Geschwind. vorhanden sein, die am Anfang vorhanden waren.

So lange $P > R$, wirkt auf die Masch. eine Kraft $(P - R)$ zu Gunsten der Bewegung. Die Massen der Maschine werden also beschleunigt; es wird die Wirkungsfähigkeit des Massensystems erhöht. Während $K > P$ ist, also die Kraft nicht im Stande den Widerstand zu überwinden, wirkt der Bewegung der Maschine eine Kraft $(K - P)$ entgegen; die Geschw. der Masch. nimmt ab, u. die Massen verlieren wieder an Wirkungsfähigkeit.

Zwischen den Momenten, in denen $P > K$ u. $K > P$ wird, ist auch $P = K$; Kraft u. Widerstand halten sich also das Gleichgewicht, u. die Maschine bewegt sich in dem Augenblick vermöge ihrer Trägheit so fort, als wenn gar keine Kraft auf sie einwirkte.

Da nun, so lange $P > K$ ist, die Geschwind. der Masch. wächst, in dem Aug. aber, in welch. $K > P$ wird, langsamer zu gehen anfängt, so tritt in diesem Moment (in welchem $P = K$ ist) ein Max. der Geschw. ein. Da ferner so lange $P < K$, die Geschw. der Masch. beständig abnehmen muß, bis P wieder $= K$ geworden ist, u. [illegible] größer als K zu werden, so tritt in diesem Übergangsmomente ein Minim. der Geschwind. ein. Innerhalb einer ganzen Periode können mehrere Max. u. Minim. der Geschw. vorkommen, u. in diesem Falle würde es im Allgemeinen ein absolutes Max. u. ein absol. Minim. geben.

225. Um die Erscheinungen, welche bei der Bewegung der Masch. mit periodischem Beharrungszustd. eintreten, anschaulich zu machen, kann folgende Fig. dienen, welche sich auf eine Masch. bezieht, bei welcher innerhalb der Periode ein Max. u. ein Min. der Geschwdgkt. eintritt.



Die Curve 𝔄𝔅ℭ𝔇 repräsentirt das Gesetz, nach welchem sich die lebendige Kraft des Maschinensystems ändert. Die Abscissen sollen den Weg ausdrücken, den der Zapf. vom Anfg der Bewegg zurückgelegt hat, u. die Ord. die entsp. leb. Kraft. αbcδ sei die Curve, welche d. Gesetz darstellt, nach welchem sich der Druck des Motors auf den Zapfen ändert.
abcd soll das Gesetz darstellen, nach welch. sich der auf d. Zapf. reduc. Widerst. der Masch. ändert.
Wir wollen diese Curven der Kürze halber mit J, R u. K bezeichnen, um damit anzuzeigen,

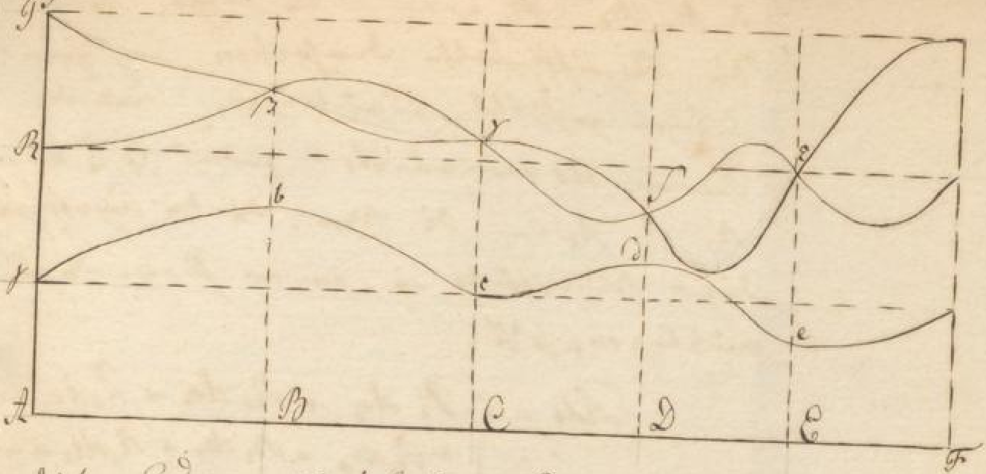
ein deutl. anzuzeigen, daß sich die erste auf die Geschw., die zweite auf die Kraft, die 3te auf den Widerstand bezieht.

Von A bis B ist $P > R$ u. die lebendige Kraft nimt daher immer zu. In B beginnt $R > P$ zu werden, die Curven R u. P durchschneiden sich daher in b u. d. leb. Kraft ist bei B ein Maximum. Bis der Zei. nun Weg AC gelegt hat, tritt das Minim. der leb. Kraft ein. Von B bis C ist fortwährend $R > P$; bei C ist $R = P$; von C bis D ist $P > R$; die leb. Kraft wächst daher wieder, u. bei D haben die Kraft, der Widerstd u. die leb. Kraft dieselben Werthe wie bei A.

Da die Wirk. d. Kraft u. d. Gegenwirk. des Widerstds für einen jeden Zeit gleich sein müssen, so müssen die Flächenräume der Figuren AabcD u. AαbcD gleich groß sein, es muß daher sein:

Fläche Aab + Fläche cdD = Fläche bmcn.

Man würde sich sehr irren, wenn man glaubte, daß das Max. der leb. Kraft in dem Moment eintreten müßte, wenn $P - R$ den größten Werth, u. das Minim. wenn $P - R$ den kleinst. Werth hat. Die Minim. u. Max. treten ein, wenn $P = R$ ist, wie wir früher gesehen haben, u. wie auch die Fig. zeigt.



Diese Curve zeigt das Bewegungsgesetz innerhalb einer Periode, wenn 2 Minima u. Maxima kommen.

Nennen wir l den Weg, den der Zapf. in der Periode zurücklegt, so ist $\int_0^l P ds$ die u. $\int_0^l R ds$ die Gesammtwid. des auf den Zapf. reduc. Gesammtwiderstandes u. die Bedingungsgleichung des period. Beharrungszustd. ist:

$$\int_0^l P ds = \int_0^l R ds, \text{ od } \frac{\int_0^l P ds}{l} = \frac{\int_0^l R ds}{l}.$$

Bei einer Masch. mit period. Beharrgszst. ist daher der mittlere Druck des Motors nach d. Zap. gleich dem mittleren auf den Zap. reducirten Widerstand der Maschine.

Nennen wir $R_0, R_1, R_2 \ldots$ die verschied. Nebenwiderstde u. $R_0, R_1, R_2 \ldots$ die Hauptwiderstände der Masch., durch deren Überwindung die nützliche Arbeit hervorgeht. Ferner $dx_0, dx_1, dx_2 \ldots$

(w)

u. dr_0 dr_1 dr_2 ... die Wege, welche die Angriffspunkte derselben, auf ihren Richtungen geschätzt, zurücklegen, wenn der Zeiger um ds fortrückt. Endlich l_0 l_1 l_2 ... r_0 r_1 r_2 ... die Wege, die die Angriffspunkte dieser Widerstände in einer Periode zurücklegen, so ist:

$$K ds = \left\{ \begin{array}{l} Q_0\, dr_0 + Q_1\, dr_1 + Q_2\, dr_2 + \dots \\ + R_0\, dr_0 + R_1\, dr_1 + R_2\, dr_2 + \dots \end{array} \right\}$$

$$\int_0^s K ds = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{l_0} Q_0\, dr_0 + \int_0^{l_1} Q_1\, dr_1 + \int_0^{l_2} Q_2\, dr_2 + \dots \\ + \int_0^{r_0} R_0\, dr_0 + \int_0^{r_1} R_1\, dr_1 + \int_0^{r_2} R_2\, dr_2 + \dots \end{array} \right\}$$

Die erste dieser Gleich. bestimmt den auf den Zeiger reducirten Widerstd K, die letztere zeigt, daß die Gegenwirkung des Gesammtwiderstandes K gleich ist der Summe der Gegenwirkungen aller Partialwiderstände.

Vergleichung der Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustande, mit den Masch., die einen periodischen Beharrgs-zustand annehmen, hinsichtlich der Art, wie sie den Effect übertragen.

Bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustande ist (in diesem Zustand) die auf den Receptor wirkende Kraft in jedem Augenblicke der Bewegung mit den Widerst. im Gleichgew., u. d. Beweg. der Masch. erfolgt so, als wirkten gar keine Kräfte auf sie ein. Der Druck des Motors auf den Receptor wird durch den auf d. Rec. wirkenden Gesammtwiderstd der Masch. u. die Geschw. im Beharrgszstd. durch die Quantität des wirkenden Motors bestimmt.

Die Massen der Masch. haben nur einen Einfluß auf die Zeit, welche verfließt bis der Beharrgszust. eintritt. Die Geschwind. in diesem Zustd ist aber von den Massen der Masch. ganz unabhängig.

Bei diesen Maschinen wird in jedem Zeitmoment von d. nützl. Widerstandsarbeit

eine ebensogroße Wirkung abge-
geben als der Zeit. empfängt. Aus der
Maschine fließt also sozusagen in jedem Augen-
blick eine ebensogroße Wirkung ab, als ihr zu
ist, welche hineingeleitet wird. Die Art
u. Weise, wie diese Maschine diese Wirkung,
welche der Zeit. empfängt an die arbeitende
Stelle überträgt, kann man sich durch die Be-
wegung des Wassers eines Flusses verdeutlichen,
der durch einen See geht. Hat der See einen
gleichförmigen Wasserzufluß, so fließt in jed.
Augenblick ebensoviel Wasser aus demselben,
als in den Augenblick hineinfließt u. die
Wassermenge des Sees bleibt ungeändert.

Bei einer Maschine mit period. Kraftz-
ufluß gibt diese zwar in jeder Periode
eine ebensogroße Wirkung ab, als sie
während einer Periode empfängt. Wenn sie
mehr empfängt als sie abgibt, sammelt sich der
Unterschied in den Massen der Masch. an, ihre
leb. Kraft, d. ihre Wirkungsfähigkeit nimmt zu,
u. zwar gerade um ebensoviel als
der Unterschied zwischen d. empf. u. abgegeb.
Wirkg. beträgt. Wenn sie mehr abgibt
als empfängt, geschieht dies auf Unkosten
der lebendigen Kraft der Massen, indem
ihre Wirkungsfähigkeit, um ebensoviel ab-
nehmen muß, als die Differenz zwischen

 der abgegeb. u. empf. Wirkg beträgt.

Bei diesen Masch. haben d. Massen nicht nur einen Einfluss auf die Zeit, wo verfliesst, bis der Beharrungszustand eintritt, sondern auch auf den Grad der Ungleichförmigkeit der Bewegung im Beharrungszustande. Sie selbst die Wirkung, welche d. Zei. innerhalb einer Periode empfängt, hängt von der Massen der Maschine ab. Nur die Differenz zwischen der während einer ganzen Periode empfangen u. abgegeben Wirkung ist von der Massen unabhängig u. immer gleich 0, wenn durch die Vergrösserung der Massen die Widerstände der Maschine nicht geändert werden.

Bei diesen Maschinen ist der Druck P des Motors auf den Zapf. nicht in jed. Augenblick gleich dem Widerstande Q, sond. bald grösser, bald kleiner als dieser Widerstand. Dagegen ist der mittlere Druck: $\frac{\int_0^e P ds}{l}$, der auf den Zei. wirkt, gleich dem mittlern Widerstand $\frac{\int_0^e Q ds}{l}$, welcher dem Zapf. entgegen wirkt.

Nennt m. t die Zeit einer Periode, so ist der mittlere Effekt, welcher in jeder Sec. dem Zapf. mitgetheilt wird, gleich $\int_0^e P ds = \int_0^e Q ds$ demnach auch:

$$\frac{\int_0^l P\,ds}{t} = \frac{\int_0^l R\,ds}{t} = \frac{\int_0^{l_0} Q_0\,dr_0}{t} + \frac{\int_0^{l_1} Q_1\,dr_1}{t} + \frac{\int_0^{l_2} Q_2\,dr_2}{t} \dots$$

d. h. es ist der mittlere Effekt, welchen der Recept. empfängt, gleich der Summe der mittleren Effekte sämmtlicher Widerstände.

Beide Arten von Maschinen übertragen also die ihnen mitgetheilten Effekte an die verschied. Widerstandsquellen, ohne im Stande zu sein, aus sich selbst einen Effekt zu produciren. Es liegt also in keiner Maschine ein aktives Princip, sondern dieses ist nur in dem Motor vorhanden. Die Theile der Maschine sind ebenso wenig im Stande eine Wirkung zu produciren, als die Röhren einer Wasserleitung Wasser zu erzeugen.

Der mittlere Druck und die mittlere Geschwindigkeit des Receptors.

Der mittlere Druck des Motors auf den Recept. richtet sich bei der zweiten Art v. Masch. nach dem mittl. auf d. Rec. reduc. Gesammtwiderst. u. die mittl. Geschwind. d. Rec. wird durch die Änderung der auf denselb. wirkenden motorischen Thätigkeit bedingt.

Wenn z. B. bei einer Mahlmühle, die vermittels eines unterschlächt. Wasserrads bewegt wird, continu. eine gewisse Wassermenge einwirkt, so tritt nach einiger Zeit d. Beharrungszstd ein, u. in diesem ist der Druck des Wassers auf die Schaufeln genau gleich dem ges. auf d. Schaufeln reduc. Widerstd der Masch. Läßt man nun zweimal so viel Wasser zuström. auf das Radschaufeln so wird die Geschwind. der Masch. zunehm. bis neuerdings ein Beharrgszstd eintritt. In diesem ist aber der Druck des Wassers genau ebensogroß als in d. ersten Fall, obgleich nun die doppelte Wassermenge auf das Rad wirkt.

Gleiches zeigt sich auch bei einer Dampfmaschine, wenn z. B. jene Mahlmühle durch Dampf getrieben wird u. es wird in dem Kessel in jeder Sec. 1 K Wasser in Dampf verwandelt, so tritt ein Beharrgszst ein, in welch. d. mittlere Druck d. Dampfes gegen den Kolben dem gesamten auf denselben reducirten Widerstand gleich ist, u. der Kolben wird eine Geschwind. annehmen, so daß das vom Kolben per 1'' beschriebene Volumen, gleich demj. Vol. ist, welches ein K Dampf bei einer Spannung die im Cylinder herrscht, gleich ist. Wenn nun im Kessel stärker geheizt wird, u. z. B. in jeder Sec. 2 K Wasser in Dpf verwandelt werden, so wird nach einiger Zeit wieder ein ein neuer Beharrungszustand eintreten, in welchem aber die Spannung des Dampfes genau ebenso gross ist als im ersten. Dagegen wird nun die mittlere Geschwind. des Kolbens offenbar doppelt so gross sein. Man mag also auch so viel Dampf erzeugen, so wird dies (wenn d. Geschw. eingehalten ist) keinen Einfluss haben auf die Spannung des Dampfs, also keinen auf den Druck der auf den Kol. (den Kolben) wirkt, indem dieser immer dem mittleren Widerstande gleich bleibt, dagegen wird aber die mittlere Geschwind. des Kol. zunehmen, um so grössere Quantitäten mot. Substanz auf denselben einwirkt.

Es ist der mittlere Effekt, welcher dem Kolben mitgetheilt wird

$$= \frac{\int_0^l P\,ds}{t} = \frac{l}{t}\,\frac{\int_0^l P\,ds}{l} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{P},$$ wenn der mittlere Druck $\frac{1}{l}\int_0^l P\,ds = \mathfrak{P}$ u. die mittlere Geschwind. $= \frac{l}{t} = \mathfrak{E}$ gesetzt wird.

Der mittlere Druck, d. dem Kol. mitgetheilt wird, ist also gleich dem Produkt aus dem mittleren Druck des Motors auf den Kol. u. die mittl. Geschw. desselben.
Der mittl. Druck hängt nach den gegeb. Erläuterung von dem ganzen Zustand u. von den Widerständen ab, welche der Bewegung entgegen wirken; ist aber unabhängig von der Quantität der motor. Substanz, d. auch d. Maschin. erzeugt. Dagegen wird die mittlere Geschw. $\mathfrak{E}$ durch diese Geschwindigkeit gerade bestimmt.

Die Massen als Regulatoren der Bewegung.

Bei der Construction einer Masch. wird verlangt, daß ein Massensystem, dessen Zus.hang gegeben, od. nach der Natur der auszuführenden Operation ermittelt worden ist, auf eine vorgeschriebene Weise bewegt werde. Die Curven, welche die Pkte beschreiben u. d. Verhält. der Geschw. der einz. Pkte werden schon durch den genannt. Zus.hg bestimmt. Damit aber eine Masch. vollk. ihrem Zwecke entspreche, wird ferner verlangt, daß ihre absolute Geschw. eine gewisse Größe habe. Die Beweg. der Masch. ist also in allen u. jeder Beziehung vorgeschrieben u. die Umstände (vorzüglich der Kräfte u. Massen) müssen bestimmt werden.
Das Problem der Constr. ist also geradezu das Gegentheil von dem Problem der Physik u. Astronomie, bei welch. verlangt wird, die Beweg. d. Massen zu berechnen, auf welche gewisse gegebene Kräfte einwirken. Hier sind die Kräfte u. Massen gegeben u. die Gestalt der Bahnen, der einzelnen Punkte, so wie ihre Geschwind. müssen ausgemittelt werden; dort sind die Bahnen u. die Geschwind. gegeben u. die

Kräfte, so wie auch die Massen müssten bestimmt werden.

Um eine ganz bestimmte Beweg. u. Effekten hervorzubringen, sind die Massen sehr nothwendig. Bei einer Masch. mit gleichförm. Beharrungszust. hätten zwar die Massen der Maschine (als solche) keinen Einfluss auf die Bewegung im Beharrungszust., wenn in der That immer gleich viel motor. Kraft auf den Rec. einwirkt u. die Widerstände von den verarbeiteten Effekten vollkommen unverändert bleiben. Allein in der Wirklichkeit ist dies nur annäherungsweise der Fall.

Wenn nun eine Änderung in der Wirkung d. Motors od. in den Widerständen zufällig eintritt, so wird die Geschwd. der Maschine grösser od. kleiner werden, als sie im Beharrungszustande ist, u. da es sowohl für die Benützung des Motors als für die Thätigkeit der Werkzeuge nachtheilig ist, wenn sich die Geschwind. von der vortheilhaften (welche im Beharrungszustand vorhanden sein soll) entfernt; so muss man Mittel anwenden um jede merkliche Abweichung von jener vortheilhaftesten Geschwind. zu beseitigen. Dies geschieht aber durch die Massen der Maschine; denn je grösser die Massen sind, (od. genauer gesprochen, je grösser die auf den Zapfen reducirte Masse ist) desto kleiner wird die Änderung der Geschwind. ausfallen, wenn

237. Kraft u. Widerstand sich auch einige Zeit nicht das Gleichgewicht halten

Nennen wir für eine Maschine, die eines gleichförmigen Beharrungszustandes fähig ist, V die Geschw. des Zeigers, u die Geschw. irgend eines Maschinenpunktes, so ist $\frac{u}{V}$ nur allein von den constanten Abmessungen der Maschinenbestandtheile u. denjenigen Abmessungen abhängig, die den Ort des Punktes, dessen Geschw. u ist, in dem Körper, welchem er angehört, bestimmen. Setzen wir $\frac{u}{V} = i$, so ändert sich i nicht mit der Zeit, sondern nur, wenn man zu einem andern Punkte der Masch. übergeht. Für eine solche Masch. ist daher die leb. Kraft

$$\Sigma m u^2 = \Sigma m v^2 i^2 = v^2 \Sigma m i^2$$ u. es ist $\Sigma m i^2$ die auf den Zeiger reducirte Gesammtmasse. Nennen wir wie früher P den Druck des Motors auf den Zeiger; R den Gesammtwiderstand der Masch. auf d. Zei. reduc.; c die Geschw. des Zei. im Beharrungszust.; v die Geschw. dieses Punktes, nachdem durch einen Weg s die Kraft P mit dem Widerstand R nicht im Gleichgewicht geblieben ist, so hat man:

$$\int_0^s (P-R)ds = v^2 \Sigma m i^2 - c^2 \Sigma m i^2 \text{ mithin}$$

$$v^2 - c^2 = \frac{\int_0^s (P-R)ds}{\Sigma m i^2}$$

Aus dies. Gleich. ersieht m. (was d. auch oben bezw.)
klar ist, daß die Änderung der Geschw. der Masch.
die entsteht, wenn für einige Zeit d. Kraft
P u. der Wid. R nicht gleich groß sind, von den
Massen der Maschine abhängt. Sind die Massen
groß so fällt jene Änderung klein aus; sind
die Massen klein, so wird sie groß. M. sieht also,
daß selbst bei dieser Masch. die Massen als
Regulatoren dienen. Weil aber bei
denselben nur sehr kleine Schwankungen
in dem Werthe von P u. R vorkom., so bilden
die zur Herstellung des gewöhnl. Geschw.
nöthigen Bestandtheile schon eine hinreichend
regulirende Masse. Nur in dem Fall,
wenn ein sehr hoher Grad von Gleichförmigk.
verlangt würde, ist es vortheilh. zu jenen
vorerwähnten Massen noch eine besondere
hinzuzufügen, u. dies geschieht gewöhnlich
durch ein sogenanntes Schwungrad.

Bei einer Masch. mit period. Beharrungsz.
bringt es i. der Regel m. dem ganz. Zwecke, daß
nicht alle Punkte gleichzeitig mit gleichförmiger
Geschw. sich bewegen können. Bei der
Construkt. dieser Masch. sucht man nun so viel,
daß nur ein gewisse Hauptwelle mit
einer gewiss. gleichförm. Geschw. sich bewegt, die
Werkzeuge u. dgl. ihre Funktion am
zweckmäßigsten verrichten. Wollte m. diese

239. Unannehmlichkeit nicht machen, so würde die Einrichtung außerordentlich erschwert. Um nun in jener Hauptwelle eine möglichst gleichf. Energie hervorzubringen, wenn auch abwechselnd P, R u. PR ist, versieht man sie mit einem Schwungrade, welches man so groß macht, daß die lebendige Kraft desselben die Summe der lebendigen Kräfte aller übrigen Massen überwiegt.

Um den Einfluß eines solchen Schwungrades auf die Energie der Maschine zu bestimmen, setzen wir:

P den Druck des Motors auf die Kurbel.

R den Widerstand der Maschine auf d. Zahnrad.

θ_0 die Winkelgeschw. des Schwungrades in irgend einem Zeitmoment einer der Perioden.

θ_1 „ „ „ „ in irgend einem andern Zeitmoment der Periode.

φ_0 den Winkel, den ein mit d. Rad beweglicher Radius mit einer Vertikallinie bildet, wenn die Winkelgeschw. θ_0 ist.

φ_1 den analogen ∠ für die Geschw. θ_1.

φ u. θ die ähnlichen Größen bei irgend einem Zeitmomente innerhalb derjenigen, in welchen θ_0, θ_1, φ_0 u. φ_1 gelten.

$\Sigma m\rho^2$ das Moment der Trägh. des Schwungrads.

v die Geschw. irgend eines Massentheilchens der ganzen Maschine.

ds den Weg, den der Zahn. zurücklegt, wenn sich das Schwungrad um $d\varphi$ weiter bewegt.

Die Winkelgeschw. ist $\frac{v}{\theta}$ eine funkt. von φ u. von den const. Abmessungen der Maschinenbestandth.

Setzen wir also:

$$\frac{v}{\theta} = f(\varphi)\,; \quad v = \theta f(\varphi).$$

ferner ist $\frac{ds}{d\varphi}$ eine ganz andere funkt. von φ.

Wir können demnach setzen:

$$\frac{ds}{d\varphi} = F(\varphi)\,; \quad ds = F(\varphi)\, d\varphi$$

Die leb. Kraft aller Massen, mit Ausnahme der Masse des Schwungrades, wird nun ein Ausdruck von der Form:

$$\sum m\,\theta^2 (f(\varphi))^2 = \theta^2 \sum m (f(\varphi))^2$$ sein müssen.

Wir erhalten daher:

Lebendige Kraft der Masse des Schwungrades $= \theta^2 \int \rho^2 dm$

" " aller übrigen Massen $= \theta^2 \sum m (f\varphi)^2$

totale lebende Kraft . . . $= \theta^2 \{ \int \rho^2 dm + \sum m\, f\varphi^2 \}$

Änderung der lebenden Kraft des ganzen Systems während die Geschw. θ von θ_0 in θ_1 übergeht:

$$\theta_1^2 \{ \int \rho^2 dm + \sum m (f\varphi)^2 \} - \theta_0^2 \{ \int \rho^2 dm + \sum m (f\varphi_0)^2 \} =$$

$$= (\theta_1^2 - \theta_0^2) \int m \rho^2 dm + \theta_1^2 \sum m (f\varphi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi)^2$$

Wirkung der Kraft P innerhalb dieser Zeit $= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} P\, F(\varphi)\, d\varphi$

" des Widerstds R . . . . $= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R\, (F\varphi)\, d\varphi$

Nach dem Grundsatze der leb. Kräfte haben wir also

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi = (\theta_1^2-\theta_0^2)\cdot S\rho^2\,dm + \theta_1^2\sum_1 m(f\varphi)^2 - \theta_0^2\sum_1 m(f\varphi)^2$$

u. hieraus folgt:

$$\theta_1^2-\theta_0^2 = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi - \left[\theta_1^2\sum m(f\varphi_1)^2 - \theta_0^2\sum_1 m(f\varphi_0)^2\right]}{S\rho^2\,dm}$$ oder auch

$$S\rho^2\,dm = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(P-R)(F\varphi)\,d\varphi - \left[\theta_1^2\sum m(f\varphi_1)^2 - \theta_0^2\sum_1 m(f\varphi_0)^2\right]}{\theta_1^2-\theta_0^2}$$

Hieraus sieht m., daß die Änderung der Winkelgeschwind. des Schwungr. belieb. klein gemacht werden kann, wenn das Trägheitsmoment hinlänglich groß gemacht wird; man kann also die Bewegung der Hauptwelle durch Schwungmassen reguliren u. dadurch die Bedingung eines gleichförmigen Bewegungszustandes dieser Welle mit jeder belieb. Genauigkeit erfüllen.

Berechnung der Schwungmasse für eine Maschine mit period. Beharrungszustande.

Vermittelst der zuletzt gefund. Gl. kann m. das Trägheitsmoment berechnen, welches ein Schwungrad besitzen muß, um einen bestimmten Grad der Gleichförmigkeit zu erhalten in der Bewegung der Schwungradwelle. Nehmen wir an, daß nach jeder halben Umdrehung des Schwungrades-eine neue Periode beginnt u. wofern wir den $\angle\, \varphi$ vom Anfang der Periode an, so ist am Anfang d. Periode $\varphi = 0$, u. am Ende $\varphi = \pi$.

Da im Schwerpunkt der Bewegung die Wirkung welche der Treiber in einer Periode ausübt, gleich der Bewegungsgröße der totalen Widerstände ist, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\pi} P\, F(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi} R\, F(\varphi)\, d\varphi \quad \ldots (1.)$$

Diese Gl. folgt aus der früher aufgestellten: denn da die Geschwind. am Anfg. u. am Ende einer u. derselben Periode gleich groß sein sollen, so ist, wenn wir θ_0 die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades für den Anfang der Bewegung setzen, für $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$, u. für $\varphi = \pi$, θ ebenfalls $= \theta_0$; ferner muss sein:

$$f(\varphi) = f(\pi), \text{ u. ist daher:}$$

$$\theta_1^2 \sum_1 m\,(f\pi)^2 - \theta_0^2 \sum m\,(f\varphi)^2 = 0$$

$$\theta_1^2 - \theta_0^2 = 0$$

od. die Gleich. (A) verwandelt sich demnach in (1.).

Die allgemeine Gleich. der Beweg., wenn der $\angle\, \varphi$ zurückgelegt worden, ist folgende:

$$\int_0^{\varphi} (P-R)\, F(\varphi)\, d\varphi = (\theta^2 - \theta_1^2) \int \rho^2\, dm + \theta^2 \sum m (f\varphi)^2 - \theta_0^2 \sum m (f\varphi)^2$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so ergibt sich:

$$(P-R)\, F(\varphi)\, d\varphi = 2\theta\, d\theta \int \rho^2\, dm + 2\theta\, d\theta \sum m\,(f(\varphi))^2 + \theta^2\, d.\frac{\left(\sum m\,(f\varphi)^2\right)}{d\varphi} . d\varphi \quad \ldots (3.)$$

für das Maximum oder Minimum. Der Winkelgeschwind. ist $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$. Wir erhalten daher zur Bestimmung der φ, bei welchen die größten u. kleinsten Geschw. eintreten, folgende Gleich.:

$$(P-R)\cdot F(\varphi) = \theta^2 \frac{d.\sum m\,(f(\varphi))^2}{d\varphi} \quad \ldots (4)$$

Um vermittelst dieser Gl. die Werthe von φ zu bestimmen, welche dem Max. od. Minim. der Geschw. entsprechen, müsste man aber die größten u. kleinsten Geschwindigkeiten bekannt sein. Bezeichnen wir durch φ_m u. θ_m zusammengehörige Werthe von φ u. θ, so müssen φ u. θ_m sowohl der Gleich.(2) als auch der Gleich.(4) entsprechen, u. man erhält daher:

$$\int_0^{\varphi_m} (P-R)\,F(\varphi)\,d\varphi = \frac{(\theta_m^2-\theta_0^2)}{2}\int \rho^2 dm + \theta_m^2 \sum m\,(f(\varphi_m))^2 - \theta_0^2 \sum m\,(f\varphi_0)^2.$$

$$(P-R)\cdot F(\varphi_m) = \theta_m^2\,\frac{d.\sum m\,(f(\varphi_m))^2}{d\varphi_m}$$

u. wenn man θ_m eliminirt:

$$\int_0^{\varphi_m} (P-R)(F\varphi_m)\,d\varphi = \frac{(P-R)\,F\varphi_m}{\frac{d.\sum m (f\varphi_m)^2}{d\varphi_m}}\cdot\left\{\int \rho^2 dm + \sum m\,(f\varphi_m)^2\right\} - \theta_0^2\left\{\int\rho^2 dm + \sum m\,(f(\varphi_0))^2\right\} \quad (5)$$

Diese Gleich. kann aber noch nicht zur Bestimmung der größten u. kleinsten Geschw. dienen, da in derselben die am Anfang vorhandene unbekannte Winkelgeschw. des Schwungrades θ_0, d.h. die Geschw. mit welcher sich das Schwungr. gleichförmig bewegen müsste, um in der Zeitdauer der Periode eine halbe Umdrehung zu machen. Wenn wie diese Mittelgrösse $\mathfrak{L}$, heißt:

$$(6.) \quad \ldots \; \mathfrak{L} = \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\theta}} \quad \text{od.} \quad \pi = \mathfrak{L} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\theta}$$

Es ist aber vermöge (2.)

$$(7.) \quad \ldots \; \theta = \sqrt{\frac{\int_0^{\varphi} (P-Q)\, F\varphi\, d\varphi + \theta_0^2 \left(\Sigma_1 m\, (f\varphi_0)^2 + \int \rho^2 dm \right)}{\int \rho^2 dm + \Sigma_1 m\, (f\varphi)^2}}$$

Diesen Werth von θ in (6) eingeführt, giebt:

$$(8.) \quad \ldots \; \pi = \mathfrak{L} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left[\frac{\int_0^{\varphi} (P-Q)\, F\varphi\, d\varphi + \theta_0^2 \left(\Sigma_1 m\, (f\varphi_0)^2 + \int \rho^2 dm \right)}{\int \rho^2 dm + \Sigma_1 m\, (f\varphi)^2} \right]}}$$

Angenommen, daß die hier angedeutete Integration ausgeführt werden könnte, erhielte man eine Gleich., aus welch. θ_0 berechnet werden könnte, wenn $\int \rho^2 dm$ bekannt wäre. Das ist aber nicht der Fall, denn zum Behufe der Bestimm. dieser Grösse dient ja die ganze Untersuchung. Denken wir uns aus (8.) den Werth von θ_0^2 berechnet, so wird derselbe als Function von $\int \rho^2 m$ erscheinen.

Bezeichnen wir durch α den $\angle$, welcher dem absoluten Maxim. W u. durch β den $\angle$, der dem absoluten Minim. der Mittelgeschw. entspricht, so erhalten wir vermöge (2)

$$(9.) \quad \begin{cases} \int_0^{\alpha} (P-Q)(F\varphi)\, d\varphi = (W^2 - \theta_0^2) \int \rho^2 dm + W^2 \Sigma_1 m (f\alpha)^2 - \theta_0^2 \Sigma_1 m (f\varphi_0)^2 \\ \int_0^{\beta} (P-Q)\, F\varphi\, d\varphi = (W^2 - \theta_0^2) \int \rho^2 dm + w^2 \Sigma_1 m\, (f\beta)^2 - \theta_0^2 \Sigma_1 m (f\varphi_0)^2 \end{cases}$$

Die Differenz dieser zwei Gleich. giebt:

$$\int_0^\alpha (P-R)(F\varphi)\,d\varphi = (W^2-w^2)\int\rho^2 dm + W^2\Sigma m(f\alpha)^2 - w^2\Sigma m(f\beta)^2 \;\dots\; 10.$$

Um den Grad der Gleichförmigk. des Ganges festzusetzen, wird nun die Differenz zwischen der größten u. kleinsten Winkelgeschw. angegeben. Setzen wir also:

$$W - w = \varpi \;\dots\; (11.)$$

Die vier Gleich. (5, 8, 9, 11) enthalten die vollständ. Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Durch Elimination von θ_0 aus (5) u. (8) erhält man eine Gleich. zwischen Fm u. $\int\rho^2 dm$.

Durch Eliminat. von θ_0 aus (8) u. d. beiden Gleich. (9) ergeben sich 2 Gleich. zwischen α, W u. $\int\rho^2 dm$ u. zwischen β, w u. $\int\rho^2 dm$ u. wenn aus diesen mit Berücksichtigung von (11) W u. w eliminirt wird, resultirt eine Gleichung zwischen α, β u. $\int\rho^2 dm$. Es ergeben sich also durch alle diese Eliminationen, vorausgesetzt, daß sie ausführbar wären, zwei Endgleichungen von der Form:

$$f(Fm, \int\rho^2 dm) = 0$$

$$F(\alpha, \beta, \int\rho^2 dm) = 0$$

oder weil der ersten dieser Gleich. die Werthe α u. β genügen müssten, so erhält man

$$f(\alpha, \int\rho^2 dm) = 0$$

$$f(\beta, \int \rho^2 dm) = 0$$

$$F(\alpha, \beta, \int \rho^2 dm) = 0$$

u. aus diesen 2 Gleich. lassen sich die Unbekannten α, β u. $\int \rho^2 dm$ bestimmen.

Annaeherungsmethode
zur
Bestimmung der Schwungmasse.

Wir werden uns die Arbeit sehr erleichtern, wenn wir annehmen, dass die grössten u. kleinsten Winkelgeschw. um gleich viel von der mittleren abweichen. Diese Annahme kann man sich erlauben, da in der Anwendung überhaupt keine namhafte Ungleichförmigkeit gestattet wird. Setzen wir also:

$$W = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{i} = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$
$$w = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{i} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

wobei nun i eine Zahl ist, durch welche der Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung bestimmt wird.
Dann erhalten wir zur Bestimmung von α u. β wegen (4) folgende Gleichgn.:

$$(P-R)\,F(\alpha) = \varepsilon^2\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \cdot \frac{d.\left[\Sigma m\, f(\rho)^2\right]}{d\alpha}$$
$$(P-R)\,F(\beta) = \varepsilon^2\left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \cdot \frac{d.\left[\Sigma m\, (f\rho)^2\right]}{d\beta}$$

u. die Gleich. (10) gibt dann:

$$\int_\rho^\alpha (P-R)\,\mathfrak{F}\varphi\,d\varphi = \frac{4}{i}\mathfrak{L}^2 \int \rho^2 dm + \mathfrak{L}^2\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \sum_1 m\,(f\alpha)^2 - \mathfrak{L}^2\left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \sum_1 m\,(f\beta)^2.$$

u. hieraus folgt:

$$\int \rho^2 m = \frac{i}{4\mathfrak{L}^2}\left\{\int_\rho^\alpha (P-R)\,\mathfrak{F}\varphi\,d\varphi - \mathfrak{L}^2\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^2 \sum_1 m\,(f\alpha)^2 - \left(1-\frac{1}{i}\right)^2 \sum_1 m\,(f\beta)^2\right]\right\}$$

Wenn die Massen der Maschinenorgane, die den gemischt. Zusammenhang bilden, sehr klein gegen die Massen des Schwungrades sind, so können wir:

$$\sum_1 m\,(f\varphi)^2 = 0$$

setzen, u. dann erhalten wir zur Bestimmung von α u. β vermöge (4) die Gleich. $(P-R)\,\mathfrak{F}\varphi = 0$ u. zur Bestimmung von $\int m\rho^2$ erhalten wir:

$$\int \rho^2 dm = \frac{i}{4\mathfrak{L}^2}\int_\rho^\alpha (P-R)\,\mathfrak{F}\varphi\,d\varphi.$$

Vortheile, w. e. Schwungrad bei Maschinen gewaehrt, welche sehr ungleichformige wirkende Wiederstaende zu überwinden haben.

Bei vielen Operationen ist der Widerstand, den die Masch. zu überwinden hat, bald sehr groß, bald sehr klein, oft sogar für längere Zeit = 0.

Diese Operat. erfordern im Ganzen oft keinen sehr großen Effekt, aber die Masch. muß im Stande sein, von Zeit zu Zeit einen sehr heftigen Druck auszuüben, od. innerhalb sehr kurzer Zeit eine sehr energische Wirkung hervorzubringen. Dieß ist vorzüglich bei den meisten Bearbeitungen der Metalle der Fall. Bei dies. Masch. wird gewöhnl. schon der geometr. Zus.hg. so angeordnet, daß durch einen mäßig starken Druck auf den Rezeptor, ein sehr heftiger Widerstand an den Angriffspunkten der Werkzeuge überwunden werden kann.

Versieht m. aber eine solche Masch. mit einem Schwungrad, so gewinnt m. mehrere sehr wesentliche Vortheile:

1.) Kann m. einen sehr continuirlich wirkenden Motor benützen, u. dessen Wirkung in der Zeit in welcher die Masch. nur einen geringeren od. keinen Widerstand zu überwinden hat,

249. durch das Schwungrad aufgespeicherte Kräften.

2tens erhält durch das Schwungrad der Masch. die Fähigkeit, daß sie für kürzere Zeit viel größere Widerstände zu überwinden im Stande ist, als wenn kein Schwungrad vorhanden ist. Denn wenn z. B. der Motor dem Receptor in jeder Sec. regelmäßig nur einen Effekt v. 75 K.m. ertheilt, so würde vielleicht die Maschine ohne Schwungrad nur im Stande sein, einen Widerstand von 1000 K zu überwinden. Versieht man sie aber mit einem Schwungrad, so wird m. es leicht dahin bringen, daß die Masch. einen Widerstand von 2000 K bis 5000 K u. auch mehr für kurze Zeit zu überwinden vermag. Dann braucht nur die Masch. kürzere od. längere Zeit leer laufen zu lassen, bis sich eine hinreichend große Wirkungsfähigkeit im Schwungrade angesammelt hat.

3) Kann m. mit derselben Masch. u. mit demselben vielleicht nicht sehr kräftigen Motor, Widerstände von sehr verschiedener Größe überwinden, wie aus dem Vorhergehenden erhellt.

4tens wird durch das Schwungrad der Gang der Masch. regelmäßiger. Die Geschwind. des Receptors entfernt sich nicht so viel von der vortheilhaftesten Geschwind.; eine gleich große Quantität motorischer Substanz wird daher der Masch. eine größere Wirkung ertheilen, d. h. es wird daher der Motor vortheilhafter benützt werden. Die größte Wirkungsfähigkeit, die das Schaufelrad aufzunehmen vermag, wird durch die Geschwind. des Zugtaues bestimmt, bei welcher der Druck auf dasselben ganz aufhört, od. mit den Widerständen, welche der Masch. entgegen wirken, ins Gleichgewicht gekommen ist.

Wenn z. B. die Masch. durch ein unterschlächt. Wasserrad getrieben wird, so ist die größte Geschw., welche die Schaufeln annehmen können, etwas kleiner als die Geschw. des Wasserstr. Bei einer Dampfmaschine tritt die größte Geschw. des Kolbens ein, wenn die Spannung des Dampfes im Kessel nur noch etwas größer ist, als der Druck, welcher von Seite des Condensators od. von der atmosphärischen Luft der Bewegung des Kolbens entgegenwirkt.

Da es aber für die Bewegung der Luft, nicht gut ist, wenn die Geschw. der Schaufelräder zu hoch wird, so muß sein Kraftmoment eine angemessene Größe haben, die sich auf folgende Weise berechnen

251. Ursache.

Die Masch. beginn beginnt nun nach Verlauf von T Sec. zu arbeiten u. arbeitet innerhalb jedes solchen Zeitintervalles durch t Sec. Zu Anfang der Zeiten T u. t ist das Max. u. am Ende der Zeit t das Minim. der Winkelgeschw. vorhanden.

Ersteres sei θ', letzteres θ_0 u. die mittlere sei L.

Der Effekt, welchen per 1 sec. die Masch. vom Recept. empfängt, sei E.

Das Trägheitsmoment des Schwungrades sei $S\rho^2 dm$.

Wenn wir annehmen, daß die Geschw. der Masch. sich nie bedeutend von ihrem mittl. verhältnißmäßig entfernt, können wir die Wirkungen, welche die Masch. v. d. Motor empfängt, der Zeit proportional machen.

In der ganzen Periode empfängt die Masch. einen Effekt TE u. dieser Effekt wird, wenn wir von den Reibungen der Masch. abstr., in der Zeit t von den arbeitenden Punkten verschluckt.

Während der Zeit t empfängt aber die Masch. einen Effekt tE ~~u. dieser Effekt wird, wenn wir von den Reibungen der Maschine abstrahiren, in der Zeit t von den arbeitenden Punkten verschluckt.~~ Es ist demnach:

(1.) $$T\mathcal{E} = t\mathcal{E} + (\theta_1^2 - \theta_0^2)\int \rho^2 dm.$$

Während der Zeit $T-t$ verliert die Masse keinen Effekt, empfängt aber eine Wirkung $= (T-t)\mathcal{E}$, u. diese bewirkt eine Änderung $(\theta_1 - \theta_0)$ der Winkelgeschw. des Schwungradschwerpunktes, man hat daher:

(2.) ... $$(T-t)\mathcal{E} = (\theta_1^2 - \theta_0^2)\int \rho^2 dm$$

welche Gleich. mit (1) identisch ist.

Aus (1) folgt nun:

$$\int \rho^2 dm = \frac{(T-t)\mathcal{E}}{\theta_1^2 - \theta_0^2}$$

Setzen wir $\theta_1 = \mathcal{E}'\left(1 + \frac{1}{i}\right)$

$\theta_0 = \mathcal{E}'\left(1 - \frac{1}{i}\right)$

indem wir auf die Annahme arbeiten, daß die mittlere Geschwind. mit dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_1)$ aus der größten u. kleinsten Geschwind. übereinstimmt, was im allgem. nur ungefähr der Fall ist, so erhalten wir:

$$\theta_1^2 - \theta_0^2 = \mathcal{E}'^2 \frac{4}{i}$$

u. es wird: $$\int \rho^2 dm = \frac{\mathcal{E}(T-t)}{4\mathcal{E}'^2} i$$

das Trägheitsmoment, welches das Schwungrad erhalten muß, damit die Diff. aus der größten u. kleinsten Geschwind. nur den $\frac{2}{i}$ ten Theil der mittleren Geschwind. betrage, ist also proportional:

1.) der Zeitdifferenz $(T-t)$, in welcher die Masch. nicht arbeitet.

2.) dem Effekt E, welchen die Masch. zu [illegible]

3.) der Zahl i, welche den Grad der Geschwind. bedingt u. umgekehrt proportional dem Quadrat der mittlern Winkelgeschw.

Nennen wir Q das Gewicht des Schwungrades u. R den Halbmesser desselben, so ist näherungsw. $\int \rho^2 dm = \frac{Q}{2g} \cdot R^2$; wir erhalten daher auch:

$$\frac{Q}{2g} \cdot R^2 = \frac{(T-t)E}{4\,\mathfrak{L}^2} \cdot i \text{ u.}$$

hieraus:

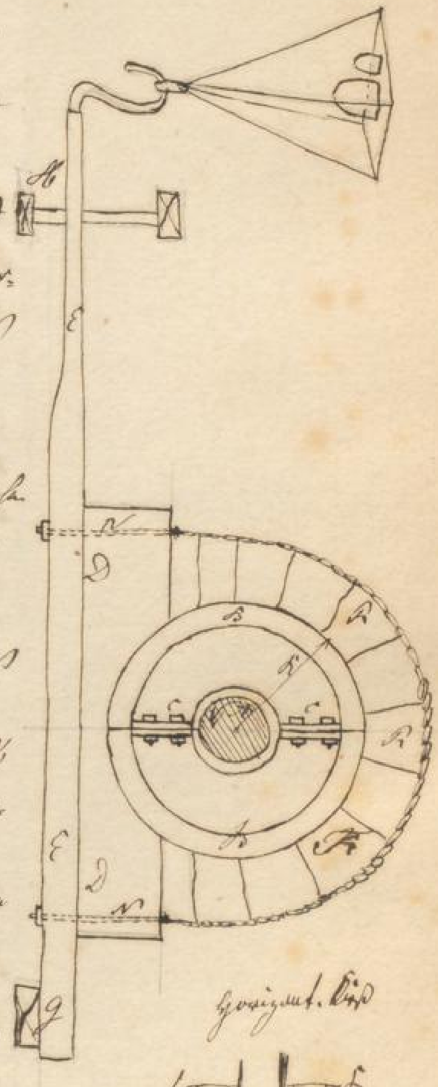
$$Q = \frac{(T-t)E\,g\,i}{2\,\mathfrak{L}^2 R^2}$$

wodurch das Gewicht des Schwungrades bestimmt wird.

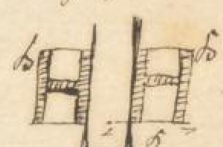
Lehre von der Anwendung des Dynamometers

Beschreibung des Dynamometers.

Auf die Welle A einer Maschine, wird eine zusammenhängende (feste) Scheibe B von Holz B vermittelst der Schrauben C, C befestigt; darauf wird vermittelst des Balkens E E, der in [illegible] Stück Fh, ein nach der Scheibe geformtes Holz angepreßt. Bewegt sich nun die Welle durch Drehung um ihre Axe, so wird der Apparat die Bewegung mit zu machen genöthigt sein, d. h. der Arm EE wird an dem obern Pflock H anschlagen, u. die Welle wird in Folge der [illegible] des Motors die Reibung überwinden. Auch durch die Latte u. Schraubenbolzen N, N, werden die Hölzer F an die Scheibe angepreßt. Legt man Gewichte in die Wagschale, so wird man es dahin bringen können, daß der Wagebalken wieder die horizontale Lage einnimmt.



Horizont. Schnitt



Beispielsweise wurde ein solcher Versuch an der Hauptwelle einer Mahlmühle gemacht. Zu dem Ende mußte die Welle

Verbindung des Zapfens mit den Wellzapfen aufgehoben werden.

Es sei F der Reibungswiderstand,

L die Länge des Hebelarms im Wagebalken vom Mittelp. der Welle bis zum Aufhängepunkt der Wagschale.

Q das Gewicht auf der Wagschale.

q das Gewicht des Wagebalkens, der Hälse R

q_1 das Gewicht der Wagschale u. der Schnur.

l die Entfernung des Schwerpunkts des Wagebalkens u. des angehängten Gegengewichtes vom Mittelpunkt der Welle.

n die Anzahl der Umdrehungen der Welle in der Minute.

Es ergibt sich nun für die horiz. Stellung:

$$RF = ql + (Q+q_1)L$$

$$F = \frac{ql + (Q+q_1)L}{R}$$

$$E^{km} = \frac{(ql + (Q+q_1)L) \cdot 2R\pi \cdot n}{R \cdot 60}$$

$$N \text{ (Anz. d. Pferdekräfte)} = \frac{E^{km}}{75} = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} \cdot n(ql + (q_1+Q)L)$$

Wird durch an G angehängte Gewichte der Schwerpunkt des Wagebalkens in die ~~Mitte~~ Axe der Welle gebracht, so fällt l weg u. es ergibt sich

$$N = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} n(q_1+Q)L$$

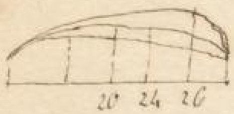
Gewöhnlich genommen ist R beliebig, aber in der Formel erscheint es nur mit F.

Erläuterungen über die Resultate die m. hiebei erhält.

Wenn der Messungsbalken horizont. gestanden u. man schraubt den Frein fester, so wird, ~~so wird~~ der Balken wieder eben umschlagen, u. das Rad langsamer gehen; wir legen Gewicht in Wagsch. bis der Balk. wieder horizontal, bemerkt sich dies Gewicht u. die Anzahl der Umdrehungen. Auf ähnliche Weise stellt m. noch mehr Versuche an u. kann nun die erhaltenen Resultate graphisch zusammenstellen, wenn m. nämlich einen Centimet. als Einheit nimmt, die Anzahl der Umdrehungen als Abscissen, u. die Effecte als Ordinaten aufträgt. Es würde sich z. B. ergeben daß bei 20 Umdrehungen ein Max. von Effect statt findet.

Ferner kann m. mit diesem Apparat untersuchen, bei welcher Wassermenge der beste Nutzeffect zum Vorschein kommt; gewöhnlich beträgt der Nutzeffect von 20 bis 75 % des absoluten Effects, der von der Wassermenge u.

u. dem Gefälle abhängt. Man ersieht aus den Beobachtungen wiederum Curven, wobei der absolute Effect als Abscisse u. der Nutzeffect als Ord. aufgetragen wird. Aus allem dem geht hervor, wie wichtig dieser Apparat für genauere Untersuchungen der Wirkungen der Maschinen ist u. daß es allein hierdurch möglich, sich von der Richtigkeit einer Theorie u. ihrer Anwendbarkeit auf die Praxis, zu überzeugen.

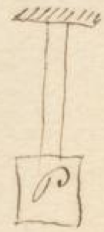


M. Eigentlich sollten wir jetzt die Lehre von den Motoren u. Receptoren vornehmen, da aber letztere selbst schon Maschinentheile in sich schließen, deren Kenntniß vorausgesetzt werden muß, so gehen wir zunächst zur Theorie der einzelnen Maschinentheile über.

Hiebei dient als Grundlage die Lehre von der Festigkeit der Material. diese ist für den Maschinenbauer wichtig, weil er sonst entweder zu viel Masse, wodurch mehr Reibungen entstehen, verwendet, u. das kostspielige Material verschwendet; oder er soll die einzelnen Theile zu schwach, wenn jedoch selten geschieht, wodurch die ganze Maschine un-brauchbar, leichter zerstörbar wird.

1.) Ueber die Ausdehnung u. das Zusammenziehen elast. Stäbe.

Ein Stab sei in verticaler Richtung oben befestigt u. trage unten ein Gewicht P. Es sei l seine Länge,

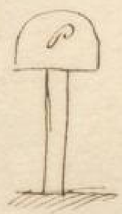


Ω der Querschnitt

Δl die Verlängerung

ε der Elasticitätscoefficient.

Die Versuche zeigen, daß



$$\Delta l = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Pl}{\Omega} \qquad (0.)$$

Diese Formel gilt wenigstens innerhalb gewisser Grenzen auch für das Zusammen-pressen.

Bei größeren Belastungen ist die Aus-dehnung größer, als die Zusammendrück-barkeit.

Wenn man an einen solchen Stab ein Gewicht anhängt, so wird er sich aus-dehnen; nimmt man es wieder weg, so zieht er sich wieder zusammen. Die Last, nach deren Wegnahme er seine ursprüngliche Gestalt vollkommen wieder annimmt, nennt man Elasticitätsgrenze; die

Belastung bei der ein Stab reißt, bestimmt seine absolute Festigkeit. Als Maßeinheit wird die Kraft in Kilogramm ausgedrückt, die an einem Stab vom Querschnitt eines Quadratcentimeters zu zerreißen nöthig ist.

Nennen wir z. B. die betreffende absolute Festigkeit eines Materials p, so ist für einen Körper vom Querschnitt Ω

$$P = p\Omega$$

NB. Beim Maschinenbau kann man gewöhnlich von dem Gewichte des Körpers abstrahiren.

Aus obigen Formeln ergibt sich auch:

$$P = \frac{\varepsilon \Omega \Delta l}{l} = \varepsilon \Omega \frac{\Delta l}{l}$$

$$l = \frac{\varepsilon \Omega \Delta l}{P}$$

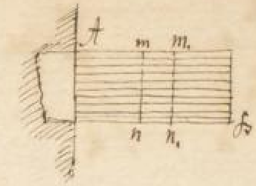
Relative Festigkeit

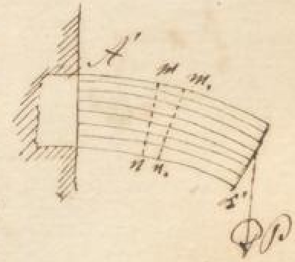
oder Festigk. gegen das Zerbrechen.

(S. Kayser Statik §§. 188 ...)

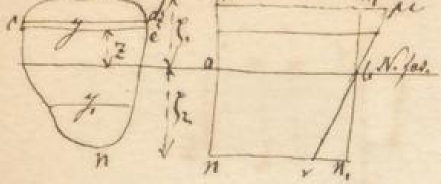
Das Zerbrechen kann auf mannigfaltige Weise geschehen, wir betrachten jedoch hier nur stabähnliche Körper.

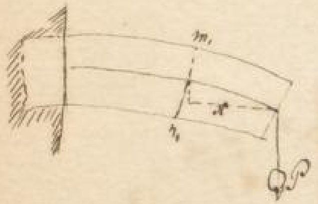
Hat ein in einer Wand befestigter Balken anfangs horizontal, nimmt er durch Anhängung einer Last P die gekrümmte Gestalt A'B' an. Denkt m. sich nun diesen Stab in einzelne sehr kleine parallelepipedische Würfeln od. Fasern zerlegt, so werden innerhalb der anfangs ‖ Querschnitten mn, m_1n_1, nach der Biegung aber zusammenlaufenden Querschnitten, die Fasern sich theils ausgedehnt, theils verkürzt haben, u. nach derselben R., es wird ein Theil Kräfte geben, die die Molecule zusammenzuziehen d. h. in ihre ursprüngliche Lage zurück zu bringen streben; ein anderer Theil aber werden abstoßende, auseinanderdrückende Kräfte wirken. Mit diesen beiden Arten von Kräften muß nun die Kraft P im Gleichgewicht sein. Offenbar muß es aber zwischen den beiden Theilen von Fasern eine geben, die unverändert geblieben u. diese nennen wir Neutralfaser.





Die Bedingungsgleichungen fürs Gleichgewicht sollen nun vermöge des Princips der virtuellen Geschwindigkeit hergeleitet werden.





Wir brauchen zu dem Zwecke sehr mannigfaltige Verschiebungen vorzunehmen; doch nehmen wir nur zwei, was wir auch folgendes ... gezeigt haben:
Wir denken uns die übrige Masse des Stabes starr u. nur innerhalb der beiden Querschnitte die bezeichneten Kräfte thätig.

Ferner seien die Kräfte fürs Zusammenpressen ebensogroß als fürs Ausdehnen.

Ferner sind die Annahmen gemacht:

L die Länge des Stabes

$ce = y$

p die auf die Flächeneinheit des Querschn. bezogene Spannung, welche in dem Punkte m entspricht u.

π dieje auf die Flächeneinh. bezogene Spannung, welche dem Querschnitte $m_1 n_1$ entspricht.

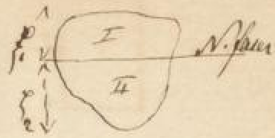
Man hat demnach

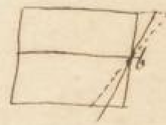
$$p : \pi = \zeta_1 : z$$

$$\pi = \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z \quad \text{u.}$$

$$y\,dz\,\pi = y\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z$$

Wir verschieben nun das ganze in horizontaler Richtung nach der rechten Seite, so daß also das virtuelle Moment von $P = 0$ ist; dagegen für die Kräfte im Querschnitt hat man:





$$\int_0^{\zeta_1} y\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z \overset{(I)}{} = \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z \overset{(II)}{}$$

$$\int_0^{\zeta_1} y z\,dz = \int_0^{\zeta_2} y_1 z\,dz$$

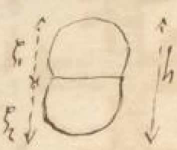
Ferner drehen wir das abgeschnittene Stück um den Punkt b, so werden die einen Fasern noch ein wenig ausgedehnt, die andern zusammengepreßt. Hierfür erhält man:

$$\int_0^{\zeta_1} y\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z^2 + \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz \left(\frac{p}{\zeta_1}\right) z^2 = Px$$

$$\frac{p}{\zeta_1}\left\{\int_0^{\zeta_1} y\,dz\,z^2 + \int_0^{\zeta_2} y_1\,dz\,z^2\right\} = Px = M \quad (2)$$

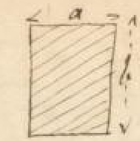
d.h. die Summe der statischen Momente der Elasticitätskräfte muß immer gleich sein dem stat. Moment der Last P.

Unsere ferneren Untersuchungen werden sich nur auf stabförmige Körper beziehen, deren Querschnitte sich immer in zwei congruente Theile zerlegen lassen, so daß $\zeta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{2} h$ ist:



$$\frac{p}{\zeta_1} = \frac{2p}{h}$$

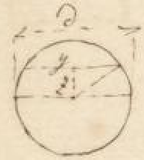
$$\frac{2p}{h} \int_0^{\frac{1}{2}h} y z^2\,dz = Px \quad (3)$$



Für ein Parallelepiped hat man

$$M = \frac{4p}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} a\, z^2\, dz$$

$$= \frac{p}{6}\, a\, b^2 \qquad (4)$$



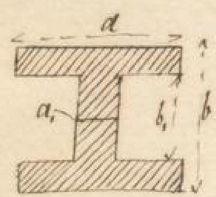
Für einen Körper, dessen Querschnitt ein Kreis, hat man, da

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2$$

$$y = \sqrt{d^2 - 4z^2}$$

$$M = \frac{4p}{d}\int_0^{\frac{d}{2}} z^2\sqrt{d^2-4z^2}\, dz$$

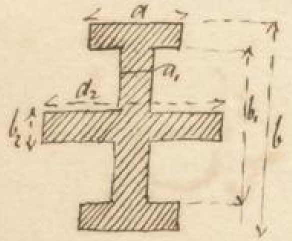
$$= \frac{p\pi}{32}\, d^3 \qquad (5)$$



Für nebenstehenden Querschnitt hat man:

$$M = \frac{4p}{b}\int_0^{\frac{1}{2}b_1} a_1 z^2 dz + \frac{4p}{b}\int_0^{\frac{1}{2}b} a\, z^2 dz$$

$$= \frac{p}{6b}\left\{a_1 b_1^3 + a\left(b^3 - b_1^3\right)\right\} \qquad (6)$$

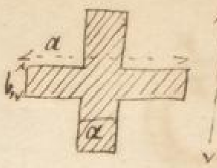


Für beistehende Fig. ergibt sich folgendes:

$$M = \frac{4p}{b}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}b_2} a_2 z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}b_2}^{\frac{1}{2}b_1} a_1 z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}b_1}^{\frac{1}{2}b} a\, z^2 dz\right\}$$

$$(7)\; M = \frac{p}{6b}\left\{a_2 b_2^3 + a_1\left(b_1^3 - b_2^3\right) + a\left(b^3 - b_1^3\right)\right\}$$

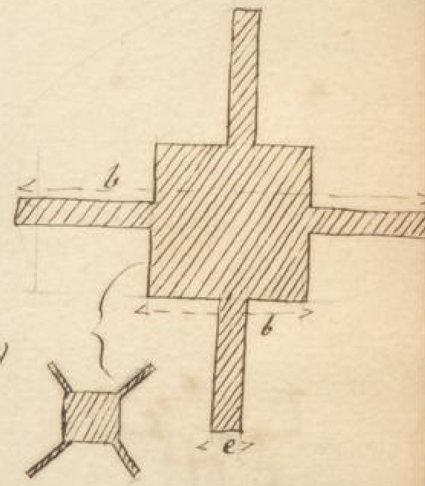
Für diesen Querschnitt hat m. man in die vorige Formel zu substituiren:



$$a = a \qquad b = b$$
$$a_1 = a \qquad b_1 \;\; b$$
$$a_2 = a_1 \qquad b_2 = b_1$$

$$M = \frac{p}{6b}\left\{ a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3) \right\} \quad (8)$$

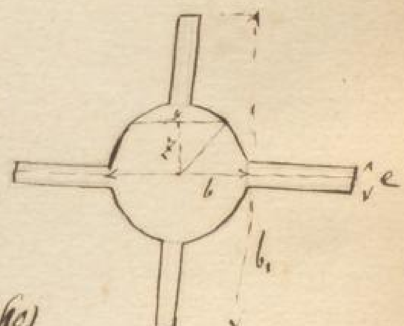
Für Stäbe von beistehendem Querschnitt ist:



$$M = \frac{4p}{b_1}\left\{ \int_0^{\frac{1}{2}e} b_1 z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}e}^{\frac{1}{2}b} b z^2 dz + \int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b_1} b z^2 dz \right\}$$

$$M = \frac{p}{6}\left\{ \frac{b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3}{b_1} \right\} \quad (9)$$

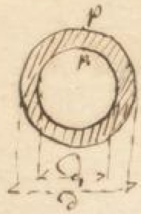
Für Stäbe von diesem Durchschnitt ist, da



$$y = 2\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - z^2}$$

$$M = \frac{4p}{b_1}\left\{ \int_0^{\frac{b}{2}} 2\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2 dz + \int_0^{\frac{1}{2}e} (b_1 - b) z^2 dz + \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e z^2 dz \right\}$$

$$M = \frac{p}{6}\left\{ 0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3 \right\} \quad (10)$$



Für einen hohlen Cylinder erhält m.

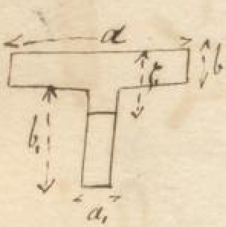
$$M = \frac{4p}{\delta}\int_0^{\frac{1}{2}d} 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2\,dz - \frac{4p_1}{\delta_1}\int_0^{\frac{1}{2}d_1} 2\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2\,dz$$

u. da $p : p_1 = d : d_1$

$p_1 = \frac{p d_1}{d}$ so ist

$$M = \frac{4p}{\delta}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}d} 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2\,dz - \int_0^{\frac{1}{2}d_1} 2\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - z^2}\cdot z^2\,dz\right\}$$

$$M = \frac{\pi}{32}\,\frac{d^4 - d_1^4}{d} \qquad (11.)$$



Für unsymmetrische Körper muß zuerst die Lage der Neutralachse bestimmt werden, hierzu ζ_1 die Entfernung derselben von der obern Kante.

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 b_1^2 + 2a_1 b b_1}{ab + a_1 b_1} \qquad (12)$$

Es muß nun:

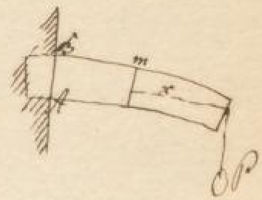
$$\int_0^{\zeta_1 - b} a_1 z\,dz + \int_{\zeta_1 - b}^{\zeta_1} a z\,dz = \int_0^{b_1 + b - \zeta_1} a_1 z\,dz \quad \text{sein.}$$

$$M = \frac{p}{\zeta_1}\left\{\int_0^{\zeta_1 - b} a_1 z^2\,dz + \int_{\zeta_1 - b}^{\zeta_1} a z^2\,dz + \int_0^{b_1 + b - \zeta_1} a_1 z^2\,dz\right\}$$

$$M = \frac{p}{3}\left\{\frac{a\zeta_1^3 - (a - a_1)(\zeta_1 - b)^3 + a_1(b_1 + b - \zeta_1)^3}{b_1 + b - \zeta_1}\right\} \qquad (12)$$

Bestimmung der Bruchfläche oder des Maxim. der Spannung.

Es handelt sich hier bloß um Körper von constantem Querschnitt.



Oben schon haben wir gesehen, daß immer

$M = Px$ sei; aber bei Betrachtung aller aufgestellten Formeln sehen wir, daß p (die Spannung im Pkt m) überall als Factor erscheint, so daß also auch

$Px = p$ Funct. (der Querschnittsform)

Da diese Function constant ist, so wird Px am größten, wenn x am größten; x erreicht aber bei (seinem Wachsen bis zur) der Ebene AB (Befestigungsebene) seinen größten Werth, folglich hat in dieser Fläche die größte Spannung statt, u. daher ist dieß die Bruchfläche.

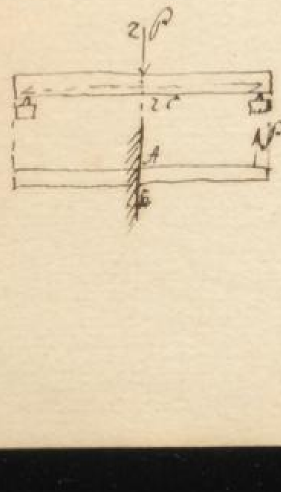
Um den Stab an dieser Stelle abzubrechen, muß daselbst die absolute Festigkeit des Materials überwunden werden. (Da da aber hier zum Zusammendrücken eine größere Kraft erforderlich, als zum Auseinanderziehen, so ist im Allgem. auch eine größere Kraft als bloß zur Überwindung der ~~d~~ absoluten Festigkeit erforderlich.)

Es sei der größte Werth $p = K$, die Länge des Stabes $= c$, so ist:

$Pc = k \, f(t)$ (der Querschn. Abmessungen).

Gewöhnlich will man aber wissen, welche Last, kann der Stab mit Sicherheit tragen, also fragt es sich, den wie vielten Theil der gemeinten größten Belastung kann man ihm auch die Länge auflegen?
Bei Guß u. Schmiedeeisen weiß man, daß es $\frac{1}{12}$ dessen; bei Holz $\frac{1}{20}$; bei Buchholz aber nie über $\frac{1}{30}$.
Gewöhnlich wird dem der Witterung ausgesetzten Holze vielleicht nicht mehr als $\frac{1}{100}$ aufgebürdet.
Nennen wir P die Belastung, welche wir einem Stabe wirklich auflegen, u. iP die Belast. bei welcher der Bruch erfolgt, so ist

$$\left.\begin{aligned} iPc &= k\, f(t)(\text{Querschnittsabmess.}) \\ Pc &= \frac{k}{i}\, f(t)(\;\ldots\ldots\;) \end{aligned}\right\} (13)$$



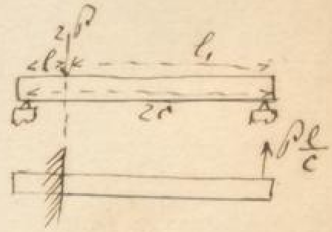
Für einen an beiden Enden unterstützten u. in der Mitte belasteten Balken können wir die Sache auf den vorigen Fall zurückführen, wie folgt.
Nehmen wir eine Stütze weg u. bringen wir eine Kraft P aufwärts dafür an,

271. u. denken wir uns den Balken in der Mitte eingemauert, so haben wir

$Pc = iRc = k$ fest (der Ausschlt.-Abweich.)

$Rc = \frac{k}{i}$ fest (d. Aussch. . .) (14.)

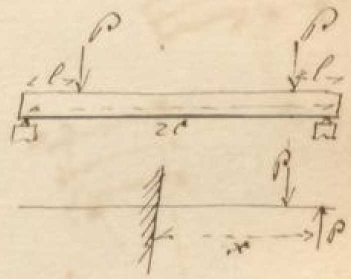
Wenn der auf beiden Seiten unterstützte Balken die Last nicht in der Mitte, sondern in der Entfernung l od. l_1 von den Stützpunkt. zu tragen hat, so erhält man



$\frac{Pl}{c} l_1 = k$ fest (d. Ausschltt.Abweich.)

$R\frac{l l_1}{c} = \frac{k}{i}$ fest. (d. Ausschlt.abw.) (15.)

Fragen wir bei einer Belastung, wie sie die Figur zeigt, wie groß ist die Spannung in irgend einem Punkte? so ergibt sich



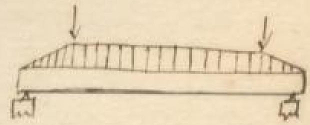
$Px - P(x-l) = p$ fest (der Ausschlattabweich.)

$Pl = p$ fest (d. A. Abw.)

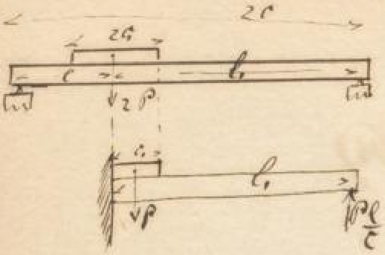
$Pl = k$ fest (. . .)

$Rl = \frac{k}{i}$ fest (d. A. Abweich.) (16.)

Wenn man die Spannungen graphisch dargestellt erhält m. beistehende Figur.



Für beistehenden Fall, wo die Belastung nicht in einem Punkt, sondern auf einer ausgedehnteren Fläche ruht, hat man

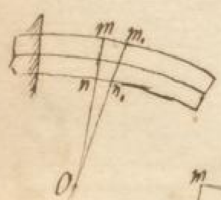


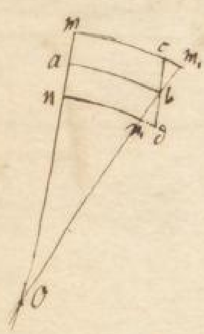
$$M = \frac{Pl}{c}\cdot l_1 - \frac{Pc_1}{2}$$

$$= P\left(\frac{ll_1}{c} - \frac{c_1}{2}\right)$$

$$(17.)\quad Q\left(\frac{ll_1}{c} - \frac{c_1}{2}\right) = \frac{K}{i}$$ Gst. (der Bruchfestigkeit).

Untersuchungen über die Gestalt eines gebogenen Körpers.





Kennen wir die Gestalt der Neutralfaser, so ist das übrige auch bekannt. Trägt man von der Neutralfaser ab, gibt uns auch das Maß der ursprünglichen Länge der übrigen Fasern an. Ziehen wir durch b die Linie $cd \parallel mo$, so ist cm_1 die Größe, um die sich die obersten Fasern ausgedehnt; und db das Stück, um das die untersten verkürzt wurden.

Es ist nun

$\triangle\, Oab \sim bcm_1$ daher

$Oa : ab = bc : cm_1$

und da $Oa = \rho$, dem Krümmungshalbmesser ist,

bc nach der früheren Bezeichnung $= l_1$; auch: ./.

$$\rho : ab = \zeta_1 : cm.$$

$$cm. = (ab)\,\frac{\zeta_1}{\rho}$$

früher hatten wir aber

$$\Delta l = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{Pl}{\Omega}$$, daher

$$(cm.) = \frac{1}{\varepsilon}\,(ab)\,p$$

weil $\frac{P}{\Omega}$ = der Spannung in der Flächeneinheit = p ist.

u. folglich $\frac{1}{\varepsilon}(ab)\,p = (ab)\,\frac{\zeta_1}{\rho}$ oder

$$\frac{p}{\zeta_1} = \frac{\varepsilon}{\rho}$$

führen wir diesen Werth von $\frac{p}{\zeta}$ in die Gleich. (2) u. (3) ein, so erhalten wir für einen Stab von irgend einem Querschnitt

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\left\{\int_0^{\zeta_1} y\,z^2\,dz + \int_0^{\zeta_2} y_1\,z^2\,dz\right\} = Px$$

$$\frac{2\varepsilon}{\rho}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}h} y\,z^2\,dz\right\} = Px$$

Setzen wir $\int_0^{\zeta_1} y\,z^2\,dz + \int_0^{\zeta_2} y_1\,z^2\,dz = \alpha$

u. $2\int_0^{\frac{1}{2}h} y\,z^2\,dz = \beta$

so ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\,\alpha = Px$$

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\,\beta = Px$$

Vorausgesetzt, daß α u. β d.h. daß die Querschnitte constant sind.

Wir wollen jetzt bloß die letztere in der Anwendung häufiger vorkommende Gleichung halten.

Zunächst, wissen wir, daß

$$\rho = -\frac{ds^3}{dx\, d^2y}$$

Dabei nehmen wir dx als constant an u. die Curve sei concav gegen die Abscissenaxe, daher der Ausdruck negativ.

Nun ist $\frac{1}{\rho}\varepsilon\beta = -\frac{dx\, d^2y}{ds^3}\beta\varepsilon$ oder

$$Px = -\varepsilon\frac{dx\, d^2y}{ds^3}\beta$$

Die Integration würde auf Funct. von besonderer Art führen, aber, da der Balken vorausgesetzt sich nur sehr wenig biegt, so dürfen wir $dx = ds$ setzen u. erhalten somit

$$Px = -\varepsilon\beta\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$Px\,dx = -\varepsilon\beta\, d.\frac{dy}{dx}$$

$$-\varepsilon\beta\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C \quad (n)$$

Für die Bestimmung der Constanten haben wir, da die Tangente an die Curve im Pkt b ∥ der Abscissenaxe, $\frac{dy}{dx}$ für den Pkt $b = 0$ u. $x = c$ der Länge des Stabes, folglich

$$0 = \frac{Pc^2}{2} + C$$ diese von (n) abgezogen

gibt $-\varepsilon\beta\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}P(x^2 - c^2)$ u. daraus

$$\frac{1}{2} P(x\,dx - c^2 dx) = - \varepsilon \beta\, dy$$

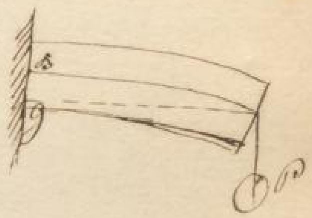
$$\frac{1}{2} P\left(\frac{x^3}{3} - c^2 x\right) = - \varepsilon \beta y + C$$

für $x = 0$ ist $y = 0$, daher $C = 0$

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon \beta}\left(c^2 x - \frac{1}{3} x^3\right) \quad \text{------} \; (18)$$

Dies ist die Gleichung einer der elastischen Linie.

In der Anwendung tritt jedoch häufig die Frage vor, welche Dimensionen muß man einem Balken oder Stab geben, damit er sich bei gegeb. Belastung nur um eine gewisse Größe senkt?

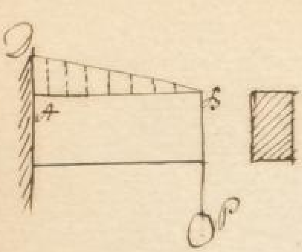


Setzen wir $BD = Y$, für $x = c$, so ist $y = Y$ u. daher

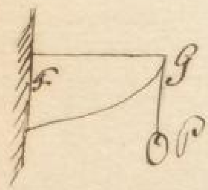
$$Y = \frac{P}{2 \varepsilon \beta}\left(c^3 - \frac{1}{3} c^3\right) = \frac{1}{3} \frac{P c^3}{\varepsilon \beta} \quad (19)$$

wo nämlich der Querschnitt des Balkens constant ist, u. dann setzen wir auch, daß die Dehnung dem Zuwachs der Länge proportional ist.

Über die Körperformen die in allen Querschnitten eine gleiche Festigkeit gegen das Zerbrechen darbieten.



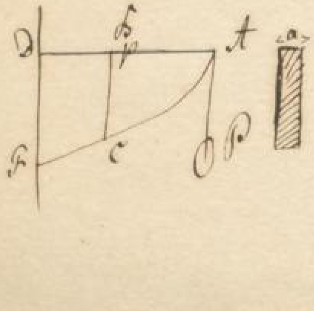
Für den Balken AB haben wir gefunden, daß die Spannung, od. die Kraft, welche den Balken abzubrechen strebt, wächst von B bis A, wie es die Ordinat. der geraden Linie BD darstellen. Es ist also offenbar je näher an A desto mehr od. je näher an B desto weniger Masse ist nothwendig u. man ist daher auf die Form geleitet, wie sie obige Fig. zeigt.



Wir haben aber gehabt

$$Px = p\, Fl. \text{(der Querschnittsfläche)}$$

diese Gleich. bleibt auch für die neue Form, wenn die Linie als Spannungen u. Pressungen von G bis F proportional mit x wächst.



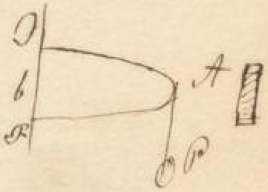
Nehmen wir $AB = x$, $BC = y$, $AD = c$, $DF = b$ u. setzen wir voraus, daß p für jeden Schnitt von AD derselbe als constant sei, so erhalten wir aus Gleich. (14)

$$Px = \frac{p}{6} a y^2$$ folgende zwische

zwischen x u. y:

$$y^2 = \frac{6P}{ap}\,x \qquad (20.)$$

welches die Gleich. der Curve darstellt, nach welcher der Balken od. Stab abgeschnitten, u. zwar ist es die Gleich. einer Parabel.



Nebenstehende Form kommt gewöhnlich bei Gabelarbeiten Theilen; bei Balanciers, etc. Wir stellen nun die Frage, welche Dimensionen muss der Stab an der Befestigungsstelle DP haben? Für diesen Durchschnitt hat man nur in die Formel (20) für $y = b$, u. $x = c$ zu substituiren, so ergibt sich:

$$b^2 = \frac{6P}{ap}\,c \qquad (21)$$

Hat man nun b, respect. den Durchschnitt, der zum voraus gewisse Verhältnisse bei verschied. Mater. zwischen der Höhe u. Dicke Statt finden (z.B. bei Stein 1:2, 1:3, bei Gusseisen 1:5, 1:10, 1:16 Dicke : Höhe) so kann man zur Construct. der Parabel übergehen.

Ein Zahlenbeispiel soll die Durchschnittsbestimmung voraus näher beleuchten.

Es soll für einen Gußeisenstab
$P = 5000$ Kgr., $c = 150^{ctm}$

$p = \frac{a}{12} = 236$ sein, so hat man

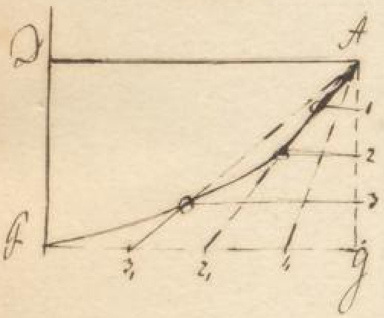
wenn die Höhe $b = 12a$ angenommen wird:

$$144a^2 = \frac{6 . 5000}{a . 236} . 150$$

$$a^3 = \frac{30000}{144 . 236} . 150$$

$a = 5{,}02^{centim.}$ u. $b = 62^{ctm.}$

<u>Construction der Parabel.</u>



Von D aus wird bis A die Länge u. bis F die Höhe aufgetragen, das Parallelogramm DG beschrieben; die Linie AG in beliebig viele gleiche Theile u. FG in ebensoviele unter sich gleiche Theile getheilt, dann die Punkte wie 1, 2, 3, mit A durch gerade Linien verbunden, aus den Punkten 1, 2, 3 ... # FG Linien gezogen, welche auf den vorigen Curvenpunkte abschneiden.

Da aber die Ausarbeitung nach einer genauen Curve oft zu umständlich wäre, so wählt man eine annähernde

279. ferner, durch gerade Linie begrenzt, welche man erhält, wenn man an die Parabel im Punkt B eine Tangente zieht u. $\frac{b}{2}$ von A senkrecht abwärts trägt.

Aus den beiden Gleich.

$$y^2 = \frac{6P}{a\beta}x$$

$$b^2 = \frac{6P}{a\beta}c$$

erhält man durch Division

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{c}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{c}x$$

eine Gleichung für die Parabel, deren Parameter durch die einfachen Dimension des Balkens od. Stabes gegeben ist.

Um jene Construct. als richtig nachzuweisen, welche wir oben als die gewöhnliche Annäherungsform bezeichneten, erwägen wir nur, daß $\frac{dy}{dx}$ die trig. Tangente des Winkels ist d.h. eines Winkels, den die Tangente an einen belieb. Parabelpunkt mit der Abscisse macht u. daß, wenn wir die Gleich. $y^2 = \frac{b^2}{c}x$ differentiren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{2c}\cdot\frac{1}{y}$$ erhalten.

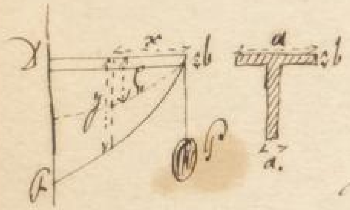
Für den Punkt K des Befestigungsquerschnitt ist

$$tg\,\alpha = \frac{b}{2c}$$

Nun ist $AB = b - KK$

$$= b - c\,tg\,\alpha = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

also $AB = \frac{b}{2}$ (22.)



Für breitere Formen würde die genaue Rechnung auf große Schwierigkeiten führen, oder man müsste für dem Verhältniss günstige Annahmen machen, so wären das Resultat in der Ausführung zu schwer zu erreichen. Aber aus den Gleich. (12) u. 12'

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1y^2 + 2a_1by}{ab + a_1y}$$

$$Px = \frac{p}{3}\,\frac{a\xi_1^3 - (a-a_1)(\xi_1 - b)^3 + a_1(y + b - \xi_1)^3}{y + b - \xi_1}$$

könnte auf Annahme eines x, y bestimmt werden.

In den meisten Fällen aber kann man genügend wie folgt verfahren:

Man nehme zwischen den Querschnitts-dimensionen der Befestigungsfläche DF passende Verhältnisse an, u. berechne nach den Formeln (12) u. (12') die Dimens. dieses Querschnittes, u. bezeichnen dann die den selben Form bis zu dem Endpunkt des Stabes eine Parabel.

Beispiel.

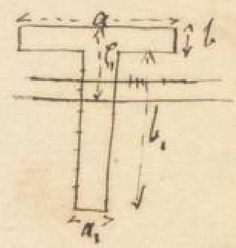
Es sei

$b = b$

$a_1 = b$

$a = 4b$

$b_1 = 8b$ daher



aus (12') $\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 b_1^2 + 2a_1 b b_1}{ab + a_1 b_1}$

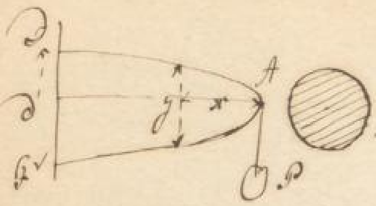
$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{4\cdot1^2 + 1\cdot8^2 + 2\cdot1\cdot1\cdot8}{4\cdot1 + 1\cdot8}\cdot b = 3{,}5b$$

ferner $P_c = \frac{p}{3}\,\frac{a\zeta_1^3 - (a-a_1)(\zeta_1-b)^3 + a_1(b_1+b-\zeta_1)^3}{b_1+b-\zeta_1}$

$$= \frac{p}{3}\cdot\frac{4\cdot3{,}5^3 - (4-1)(3{,}5-1)^3 + 1(8+1-3{,}5)^3}{8+1-3{,}5}\cdot b^3$$

$$= 17{,}6\,p\,b^3$$

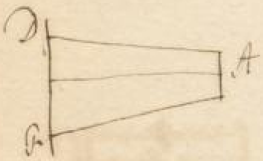
$$b = \sqrt[3]{\frac{P_c}{17{,}6p}} \qquad (23.)$$



für andern Zuspitzen vorkommende ist beistehende, deren Durchschnitte Kreise sind.

Für einen Cylinder hatten wir oben

$$Px = \frac{\pi}{32} p \cdot y^3.$$



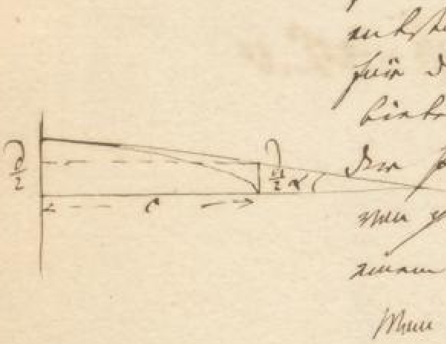
u. wenn die Spannungen in jedem Querschnitt gleich sein sollen, so ist p constant u. wenn c die Länge des Körpers u. d der Durchm. im Befestigungsquerschnitt ist:

$$Pc = \frac{\pi}{32} p \cdot d^3 \qquad (24)$$

u. ferner $\frac{x}{c} = \frac{y^3}{d^3}$

$$y = d \sqrt[3]{\frac{x}{c}} \qquad (25.)$$

Die Gleichung für eine Parabel, daher ist der Körper ein aus der Parabel entstandener Rotationskörper, der jedoch für die Ausführung Schwierigkeiten darbietet. Deshalb ist man auch hierbei in der Praxis auf eine annähernde Form von geraden Linien begrenzt (ähnlich einem abgestumpften Kegel) gekommen.



Man erhält diese Form, wenn man in D u. F Tangenten u. von A die Senkrechte zieht. Aus der Gleichung erhält man $\frac{\frac{1}{2}dy}{dx} = tg\,\alpha$. Nun ist

$$\frac{\frac{1}{2}dy}{dx} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{c y^2}, \text{ u. ferner}$$

$$1 : tg\alpha = 2c : \frac{d}{2}$$

$$tg\alpha = \frac{d}{4c}$$ daher

$$\frac{d}{4c} = \frac{1}{6}\,\frac{2d^3}{c d^2}$$ u. da

$$c : \frac{d_1}{2} = 1 : tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{d_1}{2c}$$ folglich hieraus

$$\frac{d_1}{2c} = \frac{1}{6}\,\frac{2d^3}{c\,d^2} = \frac{2}{6}\,\frac{d}{c}$$

$$d_1 = \frac{4c\;d}{6\;c} = \frac{2}{3}\,d \qquad (26.)$$

oder kürzer da

$$\frac{d}{2} = \frac{d_1}{2} + c\,tg\alpha$$

$$d = d_1 + 2c\,tg\alpha$$

$$= d_1 + 2c\,\frac{1}{6}\,\frac{d^3}{c d^2}$$

$$= d_1 + \frac{1}{3}\,d$$ hieraus

$$d_1 = d - \frac{1}{3}\,d = \frac{2}{3}\,d.$$

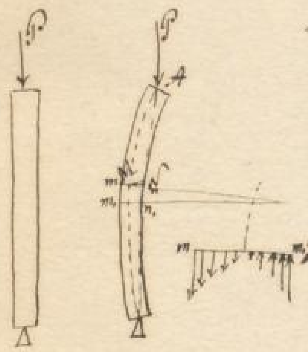
Absolute rückwirkende Festigkeit.

Stäbe von unbedeutender Länge werden bei zu großer Belastung zusammengedrückt u. am Ende zerquetscht. Derartige Fälle kommen doch selten im Maschinenbau, wohl aber im eigentlichen Bauwesen vor.

Es ist hiebei einfach die drückende Kraft

entgegenwirkende Widerstand dem
Durchschnitt des Stabes proportional.

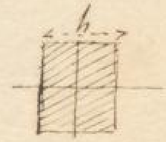
Relative rückwirk. F. Anders verhält es sich bei längeren
Stäben, die durch Schieben z.B. einen Wider-
stand überwinden müssen. Wäre der
Durchschnitt eines solchen Stabes in Bezug
auf 2 senkrecht aufeinanderstehende Ebenen
symmetrisch, das Material durchaus
homogen wäre, u. die Richtung der Last
genau mit der des Stabes zusammenfiele,
so könnte nur ein Zusammendrücken desselben
statt finden. Da aber besonders das
Letztere nie so genau eintrifft, so
wird der Stab in der Mitte sich etwas
ausbiegen u. dabei ein Theil der Fasern
ausgedehnt, der andere verkürzt werden.
Die Summe der statischen Momente dieser
Spannungen u. Pressungen ist gleich wie
oben dem statischen Moment der Kraft,
die auf den Stab wirkt. Bezeichnen wir
jene Summe mit M u. $AN = x$, $MN = y$
so ist

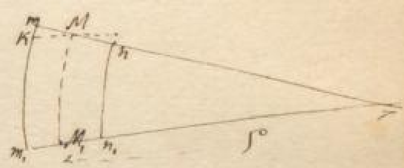


$$pM = Py \quad (a)$$

Zu bemerken ist, daß gerade dieses Problem
der relat. rückw. Festigkeit noch von
keinem Schriftsteller genau gelöst wurde;

284, 285. Um alle, an schiefen zu behandelnde Differentialgleichungen zu umgehen, vorausgesetzt, dass der Stab bei symmetr. Querschnitte in bezug auf 2 senkrecht auf einander stehenden Ebenen in der Mitte eine neutrale Faser enthalte, die weder verlängert noch verkürzt. Dies ist aber nur bei sehr starken Biegungen der Fall.
Diese Neutralfaser stelle also nach ihrer die ursprüngliche Länge des Stabes dar u. sei blos gekrümmt u. wir wollen sie jetzt untersuchen.





Wir haben

$$\rho : MM_1 = KM : km$$
$$= \tfrac{1}{2} h : km$$
$$km = \frac{MM_1 \cdot \tfrac{1}{2} h}{\rho}$$

nach der Gl. (0) ist $km = MM_1 \frac{p}{\varepsilon}$ daher

$$\frac{\tfrac{1}{2} h}{\rho} = \frac{p}{\varepsilon},$$

$$p = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{h}{\rho} \quad (b)$$

diesen Werth von p in die Gl. (a) substituirt gibt

$$\mathfrak{M} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{h}{\rho} = Py$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2P}{\mathfrak{M} \varepsilon h} \cdot y \quad (c)$$

Nun ist auch

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{dx\, d^2y}{ds^3}$$

welche Gleich. aber schwer aufzulösen wäre, u. ungeachtet des Widerspruches müssen wir jetzt annehmen, die Biegung sei so schwach, dass $dx = ds$ genommen werden kann, daher

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2y}{dx^2}$$ u. dies substit.

gibt $$\frac{2P}{MEh} \cdot y = - \frac{d^2y}{dx^2}$$ oder wenn

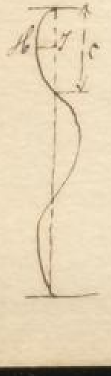
wir $$\frac{2P}{MEh} = K^2$$ setzen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2 y = 0 \quad (d)$$

Wenn man diese Gleich. zweimal integrirt so soll die Function selbst mit dem Zeichen zum Vorschein kommen; dies ist aber beim sin u. cos der Fall, daher können wir gleich die allgemeine Form anschreiben

$$y = A \sin Kx + B \cos Kx$$

für $x = 0$ ist $y = 0$ folglich muss $B = 0$ sein.



u. $$y = A \sin Kx \quad (e.)$$

Aus dieser Gleich. folgt nebenstehende Form der Wellenlinie, da der sin auf diese Weise mit x wächst, 0 u. dann negativ werdend wird.

Um die Länge einer einzelnen Partie einer solchen Krümmung kennen zu lernen, wissen wir, daß auch $\sin kc = 0$

$$kc = \pi, \quad c = \frac{\pi}{k}$$

ferner haben wir

$$\frac{dy}{dx} = ak\cos kx,$$

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$s = \int dx\sqrt{1+a^2k^2\cos^2 kx}$$

Setzen wir die ursprüngliche Länge der Saite $= l$, die Anzahl der Partien $= i$, so ergibt sich:

$$l = i\int_0^{c=\frac{\pi}{k}} \sqrt{1+a^2k^2\cos^2 kx}\,.\,dx$$

Dies ist aber eine elliptische Funkt. die wir nicht so leicht zu integriren im Stande waren.

Aber wir können auch die Sache erleichtern, indem a u. k sehr kleine Größen sind, so daß wir uns auch mit den ersten beid. Gliedern der Reihe begnügen können:

$$\sqrt{1+a^2k^2\cos^2 kx} = 1+\frac{1}{2}a^2k^2\cos^2 kx$$

u. $\cos^2 kx = \dfrac{1+\cos 2kx}{2}$, daher

daher $\sqrt{1+a^2k^2\cos^2 kx} = 1+\frac{1}{2}a^2k^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2kx}{2}\right)$

u. endlich

$$l = i\int_0^{\frac{\pi}{k}} \left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A}^2k^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{A}^2k^2\cos 2kx\right)dx$$

$$= i\left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A}^2k^2\right)\frac{\pi}{k} + 0$$

$$\frac{kl}{i\pi} - 1 = \frac{1}{4}\mathfrak{A}^2k^2$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{kl}{i\pi} - 1}$$

Wenn nun k u. l d.h. die Belastung u. die Länge des Stabes nicht so groß ist, daß $\frac{kl}{i\pi} > 1$, so wird $\mathfrak{A}$ (Abst., die größte Ordinate) imaginär u. deshalb auch y, was gegen jede Anschauung, aber durch obige widersprechende Vernachlässigungen leicht zu erklären ist. Streng genommen sollte der Ausdruck für $\mathfrak{A}$ längere Zeit 0 bleiben u. dann immer mehr wachsen.

Übrigens genügt diese Gleichung um für die Praxis wichtige Schlüsse zu bilden.

Fragen wir z.B. welches die größte Belastung, bei welcher der Stab noch nicht eine Biegung annimmt, so erhalten wir diese wenn ~~Zustand~~ Übergang vom Imaginären in den reellen Zustand d.h. wenn $\frac{kl}{\pi} = i$ od. $\frac{k^2l^2}{\pi^2} = i$

$\frac{2P_1}{\mathfrak{M}\varepsilon h}\cdot\frac{l^2}{\pi^2} = 1$ (27.) die Gleich., wenn Biegung stattfindet

Ferner weiter ist die kleinste Belastung, bei welcher eine zweifache Biegung eintreten kann; also bei $i = 2$. hat man:

$$\frac{kl}{2\pi} = 1; \quad \frac{2P_2}{M\varepsilon h}\cdot\frac{l^2}{4\pi^2} = 1$$

für dreifache Biegung ist $i = 3$ also

$$\frac{kl}{3\pi} = 1, \quad \frac{2P_3}{M\varepsilon h}\cdot\frac{l^2}{9\pi^2} = 1$$

u. s. w.

Die größte Last, die man einem solchen Stab aufbürden kann, ohne daß derselbe sich biegt, bestimmt sich aus Gleich. (27) einfach:

$$P_1 = \frac{M\varepsilon h\pi^2}{2l^2} \qquad (28.)$$

und aus dieser lassen sich für verschiedene Längen die verschiedenen Querschnitte finden. z. B. für einen rechteckicht. Stab hat man aus Gleich. (4)

$M = \frac{ab^2}{6}$ ferner für

$h = b$; ($a > b$ vorausgesetzt)

$l = c$ zu substituiren,

so ergiebt sich $P_1 = \frac{ab^2}{6}\cdot\frac{\varepsilon b\pi^2}{2c^2}$

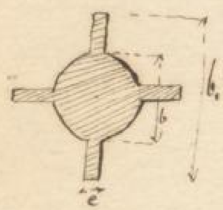
$$= \varepsilon\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{ab^3}{c^2} \qquad (29)$$

Für einen Cylinder erhält man, wenn

$$l = c$$
$$h = d$$
$$M = \frac{d^3 \pi}{32} \;;$$

$$P_1 = \frac{d^3\pi}{32} \cdot \varepsilon \frac{d\,\pi^2}{2c^2}$$
$$= \varepsilon\, \frac{d^4}{64} \cdot \frac{\pi^3}{c^2} \qquad (30.)$$

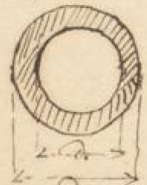
Man sieht hieraus, dass die Last der 4ten Potenz des Durchmessers u. umgekehrt dem Quadrat der Länge proportional ist.



Für verstärkten Cylinder mit Rippen ergibt sich, wenn

$$l = c$$
$$h = b_1$$
$$M = \frac{1}{6}\, \frac{0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3}{b_1} \;;$$

$$(31.) \quad P_1 = \frac{1}{12}\, \varepsilon \cdot \frac{\pi^2}{c^2} \left\{ 0{,}589\, b^4 + (b_1^3 - b^3)e + (b_1 - b)e^3 \right\}$$



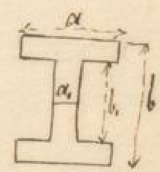
Für einen hohlen Cylinder erhält man: wenn

$$h = d$$
$$l = c \quad \text{u.} \quad M = \frac{\pi}{32}\, \frac{d^4 - d_1^4}{d}$$

$$(32.) \quad P_1 = \frac{\varepsilon \pi^3}{64 c^2} \left(d^4 - d_1^4\right)$$

Nun mögen nachträglich einige specielle Fälle folgen über die Querschnittsdimensionen bei Stäben, deren Elasticitätsmoment in Anspruch genommen wird.

Für beistehende Form, für die wir oben Gleich. (6) aufgestellt, ergiebt sich, da



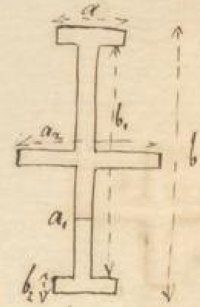
$$M = p\,\mathfrak{M} = \frac{p}{6b}\left\{a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3)\right\}$$

wenn

1) $b = 5a_1$	2) $b = 8a_1$	3) $b = 12a_1$
$b_1 = 3a_1$	$b_1 = 6a_1$	$b_1 = 10a_1$
$a = 3a_1$	$a = 4a_1$	$a = 4a_1$;

$$\left.\begin{aligned} &1.)\; M = 10{,}7\; p a_1^3 \\ &2.)\; M = 29{,}16\; p a_1^3 \\ &3.)\; M = 54{,}33\; p a_1^3 \end{aligned}\right\} \quad (33.)$$

Für einen Stab von beistehendem Querschnitt erhalten wir, da Gl. (7)



$$M = \frac{p}{6b}\left\{\underset{(I)}{a_2 b_2^3} + \underset{(II)}{a_1(b_1^3 - b_2^3)} + \underset{(III)}{a(b^3 - b_1^3)}\right\}$$

wenn die Querschnittsdimensionen folgende sind:

1) $a = 2a_1$	2) $a = 2a_1$
$a_2 = 5a_1$	$a_2 = 5a_1$
$b = 12a_1$	$b = 16a_1$
$b_1 = 10a_1$	$b_1 = 14a_1$
$b_2 = a_1$	$b_2 = a_1$

$$M = pa_1^3 \, \frac{5 + (10^3 - 1) + 2(12^3 - 10^3)}{6.12}$$

u. früher $M = pa_1^3 \, \frac{5 + (14^3 - 1) + 2(16^3 - 14^3)}{6.16}$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\; M = 34{,}17\, pa_1^3 \\ (2)\; M = 56{,}79\, pa_1^3 \end{array}\right\} \quad (34.)$$

Diese Form ist bei den Balanciers gebräuchlich. Wir sehen zugleich aus der Betrachtung der Widerstände (I)(II)(III) in der Formel, welche sich ~~auf~~ die mittlere Rippe, ~~auf~~ den Längenschnitt b, u. ~~auf~~ die untere u. obere Rippe a beziehen, daß die mittlere Rippe nur unbedeutenden Einfluß auf die Festigkeit des Balanciers ausübt, weil sie zunächst der neutralen Faser liegt; am meisten zur Festigkeit aber die Rippen a beitragen. Die Masse der Mittelrippe ist hauptsächlich da, um Schwankung zu verhüten.

Für den kreuzförmigen Querschnitt erhält man, die Gl. (8)

$$M = \frac{p}{6b} \{ (a_1 b_1^3 + a(b^3 - b_1^3) \}$$

wenn $b = 6a$, $a_1 = 6a$, $b_1 = 0{,}8a$

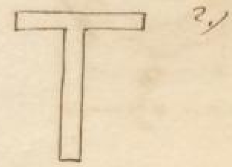
$$M = pa^3 \, \frac{6.(0{,}8)^3 + (6^3 - (0{,}8)^3)}{6.6}$$

$$M = 6{,}071 \,.\, pa^3 \quad (35.)$$

Für die drei bestehenden Formen ergibt sich nach Gl. (12 u. 12')

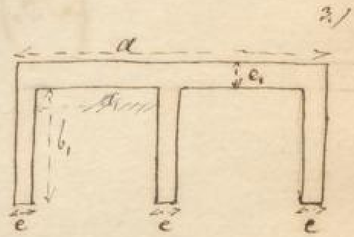
$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ab^2 + a_1 b_1^2 + 2a_1 b b_1}{ab + a_1 b_1}$$

$$M = \frac{p}{3}\,\frac{a\zeta_1^3 - (a-a_1)(\zeta_1-b)^3 + a_1(b_1+b-\zeta_1)^3}{b_1 + b - \zeta_1}$$



Wenn folgende Annahmen gemacht werden:

für 1) $b_1 = 5a_1$, $b = a_1$, $a = 3a_1$ | für 2) $b_1 = 8a_1$, $b = a_1$, $a = 4a_1$ | für 3) $a_1 = 3e$, $b_1 = 15e$, $a = 40e$, $b = e_1 = 1{,}5e$.



1.) $\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{3 + 25 + 2.5}{3+5}\,a_1 = 2{,}375\,a_1$

2.) $\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{4 + 8^2 + 2.8}{4+8}\,a_1 = 3{,}5\,a_1$

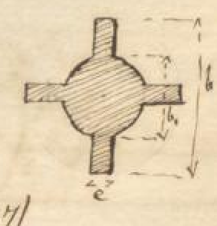
3.) $\zeta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{40(1{,}5)^2 + 3.15^2 + 6.1{,}5.15}{40.1{,}5 + 3.15}\,e = 4{,}28\,e$

dh.

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ M = p\,a_1^3 \cdot 7{,}598 \\ 2.)\ M = p\,a_1^3 \cdot 17{,}636 \\ 3.\ M = p\,e^3 \cdot 212{,}42 \end{array}\right\}(36.)$$

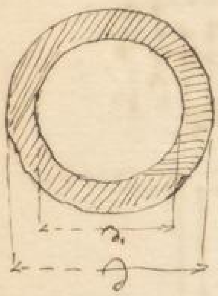
Specielle Werthe für bestehenden Querschnitt geben, wenn

1.) $b_1 = 12e$, $b = 4e$ | 2.) $b_1 = 12e$, $b = 3e$



$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ M = pe^3 \cdot \frac{0{,}589 \cdot 4^4 + (12^3 - 4^3) + (12-4)}{6.12} = 25{,}3\,e^3 p \\ 2.)\ M = pe^3 \cdot \frac{0{,}589 \cdot 3^4 + (12^3 - 3^3) + (12-3)}{6.12} = 24{,}412\,pe^3 \end{array}\right\}(37)$$

Für einen hohlen Cylinder od. eine Röhre erhalten wir, wenn



1.) $d_1 = 0{,}5\,d$ u. $M = \frac{p\,\pi}{32} \cdot \frac{d^4 - d_1^4}{d}$

2.) $d_1 = 0{,}6\,d$

3.) $d_1 = 0{,}7\,d$

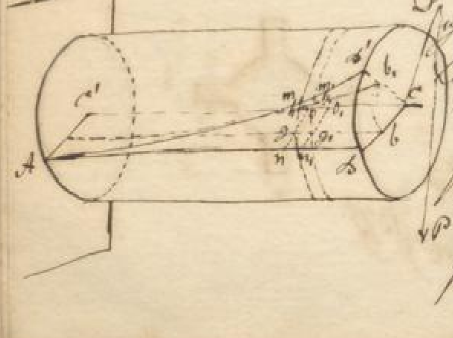
4.) $d_1 = 0{,}8\,d$

$$
(38.)\begin{cases}
1.)\ M = p\,d^3\,\frac{3{,}142}{32}\cdot\left(1-(0{,}5)^4\right) = 0{,}0920\,p\,d^3 \\
2.)\ M = p\,d^3\,\frac{3{,}142}{32}\cdot\left(1-(0{,}6)^4\right) = 0{,}0853\,p\,d^3 \\
3.)\ M = p\,d^3\,\frac{3{,}142}{32}\left(1-(0{,}7)^4\right) = 0{,}0746\,p\,d^3 \\
4.)\ M = p\,d^3\,\frac{3{,}142}{32}\left(1-(0{,}8)^4\right) = 0{,}0579\,p\,d^3
\end{cases}
$$

Von der Torsions-Festigkeit oder der Festigkeit, welche die Körper dem Verdrehen entgegensetzen.

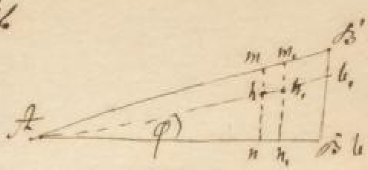
Wir betrachten hier einen Cylinder der bei C' festgehalten u. in C um seine Axe gedreht werden soll.

Zuerst fragt es sich, welche Veränderung geht bei dem Verdrehen in der relativen Lage der einzelnen Theilchen vor sich.



Denken wir uns einen horizontalen Längenschnitt AbCC' durchgelegt, so wird nach einer kleinen Drehung der Pkt b nach b' gekommen sein; u. die gr. Linie Ab wird in die Schraubenlinie

 AB' u. die Ebene ACBC ist in die windschiefe Fläche AC'B'C umgewandelt sein.



Wir sehen voraus, dass alle Punkte auch der Drehung noch dieselbe radiale Entfernung von der Axe haben wie zuvor.

Es sei der Torsionswinkel $BCB' = \theta$. in Graden d. Cyl.
Offenbar ist dieser Winkel der Entfernung von AC' proportional; ebenso ist es die Länge eines Bogenstückchens der Entfernung von A.

Im Innern sehen wir, dass, wenn wir z. B. eine Faser in der Entfernung ρ von der Axe betrachten, dessen Faserstückchen $gg_,$ und $hh_,$ in eine ähnliche Schraubenlinie übergehen werden.

Es sei $BC = B'C' = r$, $CD = R$, d = Durchmesser d. Cyl.

$$og = oh = o_,g_, = o_,h_, = \rho \quad u.$$

$$CC' = l.$$

$$\angle\, b_,Ab = \varphi$$

| δ sei der Modul der Torsfestigkeit des Materials

Nun ist $\text{arc}\, bb_, = \rho\theta$ u. wie sich aus der nebenstehenden Figur ergibt auch

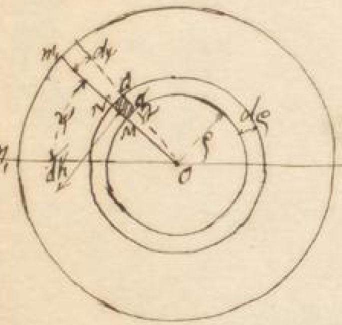
$$\text{arc}\, bb_, = Ab \cdot tg\varphi \quad \text{daher}$$

$$l\, tg\varphi = \rho\theta$$

$$tg\varphi = \rho\frac{\theta}{l}$$

u. da Drehung nur schwach also φ sehr klein auch $\varphi = \rho\frac{\theta}{l}$

Um nun die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand ersichtlich zu machen, betrachten wir nur mit Bezug auf das speciell d. rück. Gesetz die Verzerrung der Fasern in einem aus der Scheibe ausgeschnittenen kleinen Stücke, u. denken uns alles übrige am Cylinder weg u. bleibt der Scheibe starr. An diesem Flächenstückchen MNRZ, dessen Inhalt $= \rho\, d\varphi . d\rho$, ist nun eine Kraft thätig (dK), die dem Ablenkungswinkel u. dem Querschnitt d.h. dem Flächeninhalt proportional ist. daher



$$dK = T \rho\, d\varphi . d\rho . \rho \frac{\theta}{l} \quad \text{u.}$$

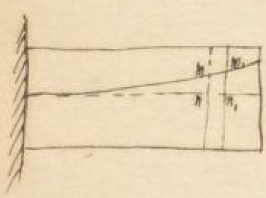
$$S\, dK . \rho = Pk \quad \text{oder}$$

$$\frac{T\theta}{l} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\rho\, d\varphi = Pk$$

$$\frac{1}{32} \pi T \frac{\theta}{l} d^4 = Pk \qquad (39.)$$

Hieraus läßt sich hauptsächlich der Torsionscoeffic. bestimm.

<u>das Torsionsvermögen eines Cylinders.</u>



Diese Aufgabe kann bis jetzt nur annäherungsweise gelöst werden. Offenbar wird, wenn der Drehungswink. eine gew. Größe erreicht hat, in den Fasern eine Spannung statt finden, die von dem Torsionswink. u. v. der Elastic. des Mat. abhängt. Bezeichnet t das Max. der Spannung, wonach der Bruch od. das Abdrehen erfolgt, so hat man:

$$t = T \,\mathrm{arc}\, \vartheta\, k = \frac{Tr\theta}{l} = T \frac{d\theta}{2l} \quad \text{u. aus (39) folgt}$$

$$T \frac{d\theta}{l} = \frac{16\, kP}{\pi d^3} \quad \text{daher}$$

$$t = \frac{16\, kP}{\pi d^3} \quad \ldots\ldots (40.)$$

Auffallend ist in dieser Gleich. daß l daraus verschwunden.

Von der Festigkeit der Gefäßwände gegen den Druck von Flüssigkeiten in Beziehung auf das Zerreißen.

Wir betrachten zuerst ein cylinderförmiges Gefäß. Es sei hiebei:

q der Druck, den d. Flüssigk. auf eine Fläche von einem $0{,}01^{\square m}$ ausübt.

p die absolute Festigkeit des Materials

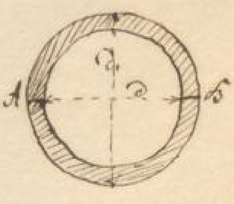
l die Höhe des Gefäßes

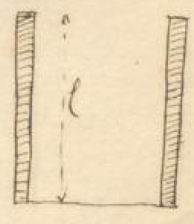
s die Dicke der Wände

d der innere u.

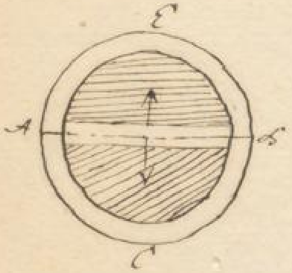
$d_{,}$ der äußere Durchmesser

Es ist klar, daß bei vollkommen homogenem Material das Gefäß bei fortwährendem Wachsen des Druckes an allen Punkten zugleich reißen müßte, so zu sagen zerstäuben würde. Dies findet aber in der Wirklichkeit nicht statt, sondern an irgend einer weniger festen Stelle reißt die Wand u. diametral gegenüber folgt, wenn nicht ein Zerreißen, doch ein Verbiegen. Wir setzen aber voraus, daß der Cylinder immer nach einer die Axe desselben in sich schließenden Ebene platze (z. B. nach AB).





Denken wir uns nun den Druck, der das Zerreißen der Wände nach AB bewirkt, bloß in dem engen Raume zwischen den Flächen vereint u. die schraffirte Partie der Flüssigkeit auf beiden Seiten starr, gleichsam mit der Wand eine Masse bildend, so ist es, als ob mit zwei entgegengesetzten Kräften die Masse auseinander gedrückt würde. Diesen Kräften muß also die Festigkeit des Materials das Gleichgewicht halten; daher muß sein:



$$\delta l . q = (\delta_1 - \delta) l . p \quad \text{u.}$$

$$\delta_1 p = \delta q + \delta p$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\delta (p+q)}{p} \quad \text{oder} \\ s &= \frac{\delta_1 - \delta}{2} = \frac{1}{2}\frac{\delta q}{p} \end{aligned}\right\} (41.)$$

Für ein kugelförmiges Gefäß erhalten wir das entsprechende Resultat auf analoge Weise wie das für den Cylinder. Die Voraussetzungen u. Annahmen gelten wie oben, daß nämlich die Druckfläche eine Ebene sei, die durch den Mittelpunkt geht.

Es ergeben sich daher folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2\pi}{4}\cdot q = \frac{d_1^2\pi - d^2\pi}{4}\cdot p$$

$$d_1 = d\sqrt{\left(\frac{p+q}{p}\right)} \qquad (42)$$