Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

IV. Waagen

urn:nbn:de:bsz:31-282938

wärts vorausgerichtet ist, gedreht werden muss, um das Maximum der Erhebungshöhe der Quecksilbersäule zu ergeben.

Das Berthon'sche Log hat sich in der Praxis den hier benutzten Angaben zufolge bewährt, und es wird von Seeoffizieren besonders die Sicherheit gerühmt, womit es beim Brassen der Raaen jederzeit die den Umständen entsprechende beste Segelstellung sofort erkennen lässt. Dieselbe ist abhängig von dem Neigungswinkel der Windrichtung gegen die Schiffsrichtung und vom Verhältnisse der Wind- zur Schiffsgeschwindigkeit. Sie wird meistens einfach geschätzt, und wenn auch der Seemann hierin grosse Uebung erlangen kann, besonders dann, wenn das Schiff nur unter Segeln fährt und somit die Schiffsgeschwindigkeit bei einer bestimmten Segelstellung nur von der Richtung und Stärke des Windes abhängt, so wird doch diese Schätzung wesentlich schwieriger und unsicherer, wenn das Schiff zugleich unter Dampf ist und somit die Schiffsgeschwindigkeit zugleich vom Effect der Schaufelräder oder der Schraube mit abhängt; denn jenachdem ein Dampfschiff nur unter Segeln oder zugleich mit Dampf fährt, ist trotz derselben Richtung und Stärke des Windes die günstigste Segelstellung verschieden.

Würde das Berthon'sche Log mit einer passenden Selbstregistrirung der Quecksilberniveaudifferenz in den Manometerröhren S, S' ausgestattet, so würde es dadurch zugleich ein sehr vollkommenes totalisirendes Instrument zur Bestimmung der mittleren Schiffsgeschwindigkeit und somit des Schiffsweges während einer beliebig langen Zeit.

IV. Waagen.

§. 165. Uebersicht.

Waagen sind Instrumente, die unmittelbar zur Vergleichung der Gewichte (Grössen der Schwerkräfte) von Körpern und dadurch mittelbar zur Vergleichung ihrer Massen dienen, welchen die betreffenden Gewichte an demselben Orte proportional sind. Indem man behufs dieser Vergleichung sogenannte Gewichtstücke benutzt, deren Massen bekannte Vielfache oder aliquote Theile der Masseneinheit sind, ergiebt ihre Vergleichung mit der Masse eines anderen Körpers K durch Wägung, nämlich durch Vergleichung der Gewichte vermittels der Waage, auch das Verhältniss der Masse m des Körpers K zur Masseneinheit, d. h. die Maasszahl dieser Masse m.

Die Grösse der Schwerkraft des Körpers K von unbekannter Masse wird übrigens vermittels der Waage mit derjenigen eines andern Körpers K' von bekannter Masse (bezw. eines Körperaggregates K' von bekannter Gesammtmasse) entweder unmittelbar verglichen, in welchem Falle die Waage mit E. Brauer* als Schwerkraftwaage bezeichnet werden kann, oder mittelbar, nämlich mit Hülfe einer anderweitigen Kraft F, die zum Gewichte von K' an einem gewissen Orte ein bekanntes Verhältniss hat. Als eine solche Kraft F wird namentlich die Federkraft benutzt und die Waage dann als Federwaage bezeichnet. Das Gewicht von K wird dabei vermittels der durch diesen Körper bei bestimmter Angriffsweise bewirkten Formänderung einer Feder beurtheilt, sofern die Beziehung derselben zum Gewichte eines Körpers K' von bekannter Masse bei derselben Angriffsweise bekannt ist. Indem aber diese Beziehung selbst bei unveränderlicher Elasticität der Feder nicht constant, sondern vom Orte gegen die Erde abhängig ist, mit welchem das Gewicht von K' sich ändert, so kann die Skala, an welcher die Deformation der Feder abgelesen wird, streng genommen nur für einen bestimmten Werth der Beschleunigung g passend sein, eine Federwaage mit unveränderlicher Skala folglich nur in solchen Fällen zur Massenbestimmung eines Körpers Anwendung finden, in welchen die Verschiedenheit von g an verschiedenen Orten der Erde zu vernachlässigen ist. Würde sie mit willkürlicher Skala in der Weise benutzt, dass jeweils die Gewichtstücke durch Probiren ermittelt werden, welche an der Angriffsstelle des Körpers K dieselbe Formänderung wie dieser bewirken, so würde zwar dadurch dessen Masse unabhängig vom Orte correct gefunden werden, aber es ginge zugleich die Schnelligkeit des Verfahrens verloren, wodurch die Federwaage sonst sich auszeichnet.

Allgemeiner gebräuchlich sind die Schwerkraftwaagen. Eine besondere Art derselben, die Senkwaage, durch welche das Gewicht eines festen Körpers mit dem als Auftrieb wirkenden Gewichte einer Flüssigkeit verglichen wird, bleibt hier ausser Betracht, indem sie weniger von technischem, als von physikalischem Interesse ist. Auch die sogenannte Seilwaage, bei welcher die zu vergleichenden Schwerkräfte an einem Seile, überhaupt an einem leicht biegsamen Zugkraftorgane angreifend sich Gleichgewicht halten, ist nur der Vollständigkeit wegen zu erwähnen. Die vollkommensten und zugleich die technisch gebräuchlichsten Schwer-

* „Die Construction der Waage", Weimar 1880, Verlag von Bernh. Friedr. Voigt, ein Specialwerk, auf welches hier mehrfach Bezug genommen wird.

kraftwaagen (und Waagen überhaupt) sind solche, deren Mechanismus bezüglich seiner beweglichen Glieder aus starren (oder wenigstens bei Abstraction von sehr geringen elastischen Deformationen als starr zu betrachtenden) Körpern besteht, die unter sich sowie mit dem Gestelle (dem festgestellten Gliede des Mechanismus) durch Drehkörperpaare verbunden sind. Dabei werden diese beweglichen Glieder theils auf Biegung, theils auf Zug oder Druck in Anspruch genommen; während aber Glieder der letzteren Art ganz fehlen können, ist von auf Biegung in Anspruch genommenen sogenannten Hebeln stets wenigstens einer vorhanden, weshalb die fraglichen Waagen allgemein als Hebelwaagen bezeichnet werden mögen. Sie zerfallen in 3 Arten, jenachdem zur Herbeiführung des Gleichgewichtes mit dem zu messenden Gewichte

1) ein veränderliches Gegengewicht an einem unveränderlichen Angriffspunkte, oder
2) ein unveränderliches Gegengewicht an einem veränderlichen Angriffspunkte, oder
3) ein unveränderliches Gegengewicht an einem unveränderlichen Angriffspunkte

benutzt wird. Eine Hebelwaage der letzten Art pflegt als Neigungswaage oder als Zeigerwaage bezeichnet zu werden, indem die durch einen Zeiger auf einer Skala markirte veränderliche Gleichgewichtslage des Hebels oder Hebelsystems als Maassstab des zu messenden Gewichtes dient. In den zwei ersten Fällen wird durch Aenderung des Gegengewichtes an seinem unveränderlichen Angriffspunkte, bezw. durch Aenderung des Angriffspunktes des constanten Gegengewichtes behufs der Wägung stets dieselbe Gleichgewichtslage des Hebels oder Hebelsystems herbeigeführt. Durch Verschiebung des constanten Gegengewichtes längs einer zur Ablesung dienenden Skala ist das schneller zu erreichen, als durch Aenderung der Grösse des (durch wiederholtes Probiren als Aggregat von Gewichtstücken) herzustellenden Gegengewichtes, weshalb jene unter 2) genannten Hebelwaagen als sogenannte Schnellwaagen von den unter 1) genannten als Hebelwaagen im engeren Sinne unterschieden zu werden pflegen. Indem aber der Name „Schnellwaage“ nur eine relative Bedeutung hat, weil noch schneller, als diese (freilich auch mit meistens noch geringerer Genauigkeit), Neigungs- oder Federwaagen zum Ziel führen, die nach Anhängung oder Auflegung des zu wägenden Körpers gar keiner weiteren Manipulation, sondern nur einer Ablesung nach von selbst erfolgtem Gleichgewichte bedürfen, mögen im

Folgenden die sogenannten Schnellwaagen zutreffender als Laufgewichtswaagen bezeichnet werden.*

In allen diesen Fällen sind ferner einfache und zusammengesetzte Waagen zu unterscheiden, jenachdem die Waage aus einem blossen Hebel besteht, der mit dem Gestell ein Drehkörperpaar bildet, oder dieselbe ein Mechanismus mit selbständig geschlossener kinematischer Kette ist. Wenn auch bei der einfachen Waage ein Gehänge mit oder ohne Schale zur Aufnahme des zu wiegenden Körpers oder des Gegengewichtes, bei der Laufgewichtswaage das Laufgewicht als besonderes Glied betrachtet wird, das mit dem Waagenhebel und dem Gestell eine kinematische Kette bildet, so ist doch diese eine nur kraftschlüssige, an und für sich offene Kette.

§. 166. Allgemeine Erfordernisse einer Waage.

Die theoretische und experimentelle Prüfung einer Waage hat sich auf ihre Richtigkeit, Stabilität, Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit zu erstrecken.

Die Richtigkeit der Waage verlangt eine bestimmte Gleichgewichtslage bei einem bestimmten Grössenverhältnisse der Last Q, worunter hier und im Folgenden das zu messende Gewicht verstanden wird, und ihres Gegengewichtes P, und zwar unabhängig von den Lagen, welche beide auf den zu ihrer Aufnahme bestimmten Schalen einnehmen. Die Erfüllung jener Forderung ist bei einer Hebelwaage im weiteren Sinne, wovon hier zunächst die Rede ist, bedingt durch eine gewisse relative Lage der Axen A der Drehkörperpaare, durch welche die Glieder des Waagenmechanismus gepaart sind, oder wenigstens durch eine gewisse relative Lage dieser Axen für jeden einzelnen Hebel. Wenn aber bei gegebenem Verhältnisse $P:Q$ innerhalb der Grenzen, für welche die Waage bestimmt ist, die Last und entsprechend ihr Gegengewicht verändert werden, so ändern sich damit die elastischen Deformationen der Glieder, die deshalb entweder auf die der Richtigkeit entsprechende relative Lage der Axen A ohne Einfluss sein oder in Folge entsprechender Herstellung dieser Glieder so gering sein müssen, dass jener Einfluss mit Rücksicht auf

* Brauer gebraucht für die Waagensysteme unter 1), 2), 3) die Benennungen: Gewichtswaage, Armwaage, Neigungswaage, deren erstere jedoch auch nicht ganz zutreffend das Wesen der Sache ausdrücken.

den Zweck der Waage zu vernachlässigen ist. Dasselbe gilt vom Einflusse der Temperatur auf die Dimensionen der Glieder.

Die Stabilität des Gleichgewichtes einer Waage wird dadurch erkannt, dass sie, durch eine vorübergehend wirkende Kraft etwas aus der Gleichgewichtslage entfernt und dann dem Einflusse der dauernd an ihr angreifenden Kräfte überlassen, nach einigen Schwingungen in die vorige (bezw. eine sehr wenig davon abweichende) Gleichgewichtslage zurückkehrt. Sofern die dauernd angreifenden äusseren Kräfte Schwerkräfte sind, ist es zur Stabilität einer Gleichgewichtslage nöthig, dass in derselben der Mittelpunkt fraglicher paralleler Kräfte eine tiefste Lage hat und dass somit die Störung des Gleichgewichtes einen Aufwand von mechanischer Arbeit erfordert.

Die Empfindlichkeit einer Waage bei einer gewissen Grösse der Last Q pflegt durch den reciproken Werth ε des Bruches $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon}$ gemessen zu werden, wenn ΔQ die kleinste Aenderung von Q bedeutet, die bei unverändertem Gegengewichte P eine noch deutlich erkennbare Aenderung der Gleichgewichtslage zur Folge hat. Diese deutliche Erkennbarkeit erfordert eine gewisse von den vorhandenen und angewendeten Beobachtungsmitteln abhängige Minimalgrösse des Winkels $\Delta\varphi$, um welchen ein Hebel der Waage in Folge der Laständerung ΔQ gedreht wird. Indem aber dieser Winkel $\Delta\varphi$ nicht ein constantes Verhältniss zu dem Bruche $\frac{\Delta Q}{Q}$ zu haben braucht, sondern auf andere Weise von Q und ΔQ abhängen kann, ist auch die Empfindlichkeit einer Waage bei verschiedenen Belastungen Q im Allgemeinen verschieden, und wird deshalb unter ihrer Empfindlichkeit schlechtweg diejenige verstanden, welche der Maximalbelastung entspricht. Bei der Unbestimmtheit des Begriffes einer „deutlichen" Erkennbarkeit ist übrigens diese Empfindlichkeit ε eine nicht mathematisch bestimmt definirte Grösse, die ausserdem von den Hülfsmitteln zur Beobachtung eines sogenannten Ausschlagwinkels $\Delta\varphi$, also von Umständen abhängt, die der Waage an sich zum Theil fremd sein können. Das mathematisch bestimmte und nur die Waage selbst charakterisirende Maass ihrer Empfindlichkeit ist vielmehr der Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$, der einem bestimmten aliquoten Theile der Last Q als zusätzlicher Last $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ entspricht und welcher deshalb mit Brauer als Empfindlichkeitswinkel bezeichnet werde. Die Empfindlichkeit ist dem Empfindlichkeitswinkel proportional.

Die Zuverlässigkeit einer Wägung kann auch, abgesehen von der beschränkten Empfindlichkeit, schon deshalb keine vollkommene sein, weil die Gleichgewichtslage der Waage bei einer gewissen Belastung zwischen zwei Grenzlagen, die den im einen oder anderen Sinne entwickelten Reibungen entsprechen, zufällig und schwankend ist. Wenn bei der Belastung Q von der mittleren oder reibungslosen Gleichgewichtslage aus jene zwei Grenzlagen durch Drehung eines Hebels H der Waage um den Winkel $\Delta\varphi_1$ im einen oder anderen Sinne erreicht werden, und wenn $\Delta\varphi$ der Winkel ist, um welchen derselbe Hebel durch die zusätzliche Last ΔQ gedreht würde, falls bei beiden Belastungen Q und $Q+\Delta Q$ die gleiche Art des Gleichgewichtszustandes, z. B. in beiden Fällen der mittlere, reibungslose Gleichgewichtszustand stattfände, so können sich thatsächlich wegen der Reibungen, wenn sie bei der Belastung Q im einen, bei der Belastung $Q+\Delta Q$ im anderen Sinne entwickelt sind, die betreffenden am Hebel H gemessenen Lagen um $\Delta\varphi+2\Delta\varphi_1$ unterscheiden, und entspricht somit die kleinste Belastungsänderung, welche eine noch deutlich und zuverlässig erkennbare Aenderung der Gleichgewichtslage bewirkt, einem Empfindlichkeitswinkel $> 2\Delta\varphi_1$. Die Reibungen der Drehkörperpaare, durch welche die Glieder des Waagenmechanismus zusammenhängen, beschränken also mit der Zuverlässigkeit zugleich auch die Empfindlichkeit der Waage.

Der Einfluss jenes von der Reibung herrührenden Unzuverlässigkeitswinkels $\Delta\varphi_1$ kann freilich dadurch eliminirt werden, dass man den Ruhezustand der Waage bei einer gewissen Belastung gar nicht abwartet, vielmehr sie schwingen lässt und dabei die Winkel $=\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ beobachtet, um welche der betreffende Hebel H bei drei aufeinander folgenden Grenzlagen L_1, L_2, L_3 (Lagen augenblicklicher Ruhe zwischen zwei entgegengesetzt gerichteten einfachen Schwingungen) von einer beliebig bestimmten Lage L abweicht, um daraus den Winkel $=x$ abzuleiten, um welchen von derselben Lage L der Hebel H bei der betreffenden Belastung in seiner mittleren (reibungslosen) Gleichgewichtslage abweichen würde, falls dieselbe genau herbeigeführt und beobachtet werden könnte. Sind nämlich α, β, γ die kleinen, absolut verstandenen Neigungswinkel des Hebels H in den Lagen L_1, L_2, L_3 gegen seine mittlere Gleichgewichtslage, so ist $\alpha > \beta > \gamma$ und

$$\varphi_1 = x \pm \alpha, \quad \varphi_2 = x \mp \beta, \quad \varphi_3 = x \pm \gamma \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

wo entweder alle oberen oder alle unteren Vorzeichen gleichzeitig gelten. Nun durchläuft der Mittelpunkt S der an der Waage angreifenden

Schwerkräfte, der bei der mittleren Gleichgewichtslage der Waage eine tiefste Lage S_0 hat, bei den fraglichen kleinen Schwingungen sehr flache Bögen, die durch Bögen des verticalen Krümmungskreises der Bahn für den Punkt S_0 ersetzt werden können, so dass, unter ϱ den Krümmungsradius verstanden, die den Lagen L_1, L_2, L_3 entsprechenden Höhen des Punktes S über S_0 bezw.

$$=\varrho\,(1-\cos\alpha),\quad \varrho\,(1-\cos\beta),\quad \varrho\,(1-\cos\gamma)$$

oder nahe proportional $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ sind. Ist also C eine Constante und R die gleichfalls constant zu setzende Gesammtreibung, reducirt auf den Abstand $=1$ von der Drehungsaxe des Hebels H, so sind die resultirenden Arbeiten der Schwerkräfte und Reibungen für den Uebergang der Waage aus der Lage L_1 in L_2, sowie aus L_2 in L_3 bezw.

$$=C(\alpha^2-\beta^2)-R(\alpha+\beta)$$

und

$$=C(\beta^2-\gamma^2)-R(\beta+\gamma)$$

zu setzen, und da die eine wie die andere Arbeit $=$ Null sein muss, ergiebt sich

$$\frac{R}{C}=\alpha-\beta=\beta-\gamma,\ \text{folglich}\ \frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta=0$$

und damit aus den Gleichungen (1):

$$\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}+\varphi_2=2x\pm\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta\right)=2x$$

$$x=\frac{\varphi_1+2\varphi_2+\varphi_3}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Uebrigens ist dieses Verfahren zur Bestimmung der mittleren Gleichgewichtslage für eine gewisse Belastung in der Regel nur bei Wägungen mit feineren Waagen zu wissenschaftlichen Zwecken geeignet, und bleibt es in allen Fällen wünschenswerth, die Reibungen so viel wie möglich zu verkleinern. Das geschieht dadurch, dass die bei Waagenmechanismen als Elementenpaare fast ausschliesslich vorkommenden Drehkörperpaare nicht als Umschlusspaare, sondern kraftschlüssig als Keilschneiden mit zugehörigen Pfannen (Fig 27, b in §. 27) ausgeführt werden, was besonders dann immer zulässig ist, wenn die Waage eine nur kleine Beweglichkeit zu haben braucht, indem sie als Hebelwaage im engeren Sinne oder als Laufgewichtswaage behufs einer Wägung immer in dieselbe Gleichgewichtslage gebracht wird. Diese Keilschneiden und Pfannen werden aus hartem Material verfertigt, gewöhnlich aus gehärtetem Stahl, bei feinen Präcisionswaagen zu wissenschaftlichen Zwecken auch wohl aus hartem Stein (Achat oder Bergkrystall); der Keilwinkel pflegt zwischen 60^0 und 90^0 zu liegen. Eine mathematisch scharfkantige Schneide ist natürlich nicht herstellbar, auch bewirkt die Belastung eine Abplattung derselben, sowie einen entsprechenden Eindruck der Pfanne. Es ist deshalb thatsächlich der Keil als durch eine Cylinderfläche von sehr kleinem Radius begrenzt und deren Krümmungsaxe als die Axe A des betreffenden Drehkörperpaares zu betrachten. Wenn dann ein solcher Keil nach Art von Fig. 27, b in einer hohlkeilförmigen Pfanne ruht, deren Keilwinkel natürlich dem verlangten Beweglichkeitsgrade entsprechend grösser, als der Winkel des convexen Keils sein muss, so ist die relative Bewegung immerhin noch eine gleitende, mit einer Art von kleiner Zapfenreibung verbundene. Wenn aber die Pfanne ebenflächig begrenzt wird, so ist die Reibung eine noch kleinere Walzenreibung und diese Construction somit bei Präcisionswaagen vorzuziehen, falls die Verticalebene V, welche durch die Axe A und durch die jeweilige Berührungslinie (Berührungsfläche von verschwindend kleiner Breite) beider Elemente hindurchgeht, behufs Richtigkeit der Waage nicht auch durch eine bestimmte Gerade der Pfanne beständig hindurchgehen muss, wie es besonders dann nicht der Fall zu sein pflegt, wenn, wie gewöhnlich, der Keil fest mit dem Hebel verbunden ist, während die Pfanne entweder dem Gestelle oder einer Zugstange, dem Gehänge einer Waagschale etc. angehört, wodurch die betreffende Kraft auf den Hebel übertragen wird.

Zur Schonung der Schneiden darf ihre Belastung pro Längeneinheit gewisse Grenzen nicht überschreiten. Bei passender Länge dieser Schneiden sind also die beweglichen Glieder der Waage so leicht zu construiren, wie es mit Rücksicht auf ihre Anstrengung und namentlich auf ihre Deformation durch die Maximalbelastung thunlich ist. Zu weiterer Schonung beim Nichtgebrauche sowie beim Auf- und Absetzen der Last dienen Arretirungs- und event. Entlastungsvorrichtungen, d. h. Einrichtungen, durch welche die Beweglichkeit der Waage aufgehoben werden kann und event. zugleich Schneiden und Pfannen ausser Berührung gebracht werden können.

Der durch die besprochenen Hülfsmittel möglichst verkleinerte Reibungswiderstand einer Waage kann nur empirisch, durch experimentelle Bestimmung des Unzuverlässigkeitswinkels $\Delta\varphi_1$ ermittelt werden. Die theoretische Untersuchung der Eigenschaften einer Waage hat deshalb von den Reibungswiderständen zu abstrahiren, und ist dann die Empfindlichkeit ebenso wie die Richtigkeit bei gegebenen Grössen und Angriffsweisen der wirksamen Kräfte nur von der relativen Lage der Keilschneiden, überhaupt der Axen aller vorhandenen Drehkörperpaare abhängig.

Der von einer Pfanne auf den Keil oder umgekehrt übertragene Druck ist im Allgemeinen nicht gleichförmig längs der Schneide vertheilt, die Lage des betreffenden Druckmittelpunktes vielmehr von zufälligen Umständen abhängig. Nun ist es aber eigentlich die relative Lage dieser Druckmittelpunkte, wodurch die Richtigkeit und die Empfindlichkeit der Waage bedingt werden, so dass, damit diese Eigenschaften durch solche Zufälligkeiten nicht beeinträchtigt werden, alle Punkte jeder Schneide eines Waagenhebels dieselbe Lage gegen alle anderen Schneiden desselben haben und somit alle Schneiden desselben Hebels parallel sein müssen. Wären sie dabei gegen den Horizont geneigt, so wären zwar relative Gleitungen der Keile gegen die Pfannen im Sinne der Schneiden infolge der wirksamen Schwerkräfte durch Stossplatten zu verhindern, jedoch nur in Begleitung entbehrlicher und schädlicher zusätzlicher Reibungen. Somit ergiebt sich die Regel, dass alle Keilschneiden eines Hebels parallel und horizontal sein sollen. Um dieser Bedingung so vollkommen wie möglich zu genügen und ausserdem die Lagen der parallel gemachten horizontalen Schneiden so zu reguliren, dass sie den Anforderungen der Richtigkeit und der Empfindlichkeit entsprechen, sind bei feinen Waagen besondere Justirungseinrichtungen vorhanden.

a. Hebelwaagen im engeren Sinne.

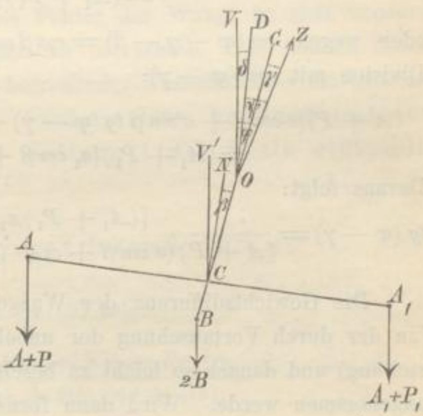
1. Einfache Hebelwaage.

Diese Waage besteht aus einem einzelnen Hebel, dem sogenannten Waagebalken mit 3 Keilschneiden; durch die Mittelschneide wird er, etwas drehbar um dieselbe, von einer am Gestell festen Pfanne unterstützt, während die Endschneiden die zur Aufnahme der Last und des Gegengewichtes dienenden Waageschalen tragen. Alle 3 Schneiden sollen parallel und horizontal sein (§. 166); fast immer werden sie ausserdem so angeordnet, dass in der zur Wägung herbeizuführenden Gleichgewichtslage die durch die Endschneiden gehenden Verticalebenen von der durch die Mittelschneide gehenden auf entgegengesetzten Seiten gleich weit entfernt sind, gleichen Grössen der Last und des Gegengewichtes entsprechend. Eine solche sogenannte gleicharmige Waage ist sowohl ihrer Einfachheit wegen die gewöhnlichste Handelswaage, als auch, weil sie bei sorgfältiger Ausführung die grösste Genauigkeit zulässt, die zu wissenschaftlichen Zwecken fast ausschliesslich benutzte Waage. Nur sie wird im Folgenden als einfache Hebelwaage berücksichtigt.

§. 167. Herstellungsgesetze der gleicharmigen Waage.

Während die Keilschneiden des Waagebalkens als genau parallel und horizontal angenommen werden, sei im Uebrigen zunächst eine mit gewissen Fehlern behaftete Waage vorausgesetzt, um den Einfluss derselben zu erkennen. Die Ebene der Figur 183 sei die durch den Schwerpunkt B des Waagebalkens gehende Verticalebene, welche die Mittelschneide O und die Endschneiden A, A_1 in den ebenso bezeichneten Punkten der Figur rechtwinklig trifft. C ist der Durchschnittspunkt der Geraden AA_1 und BO, OG die Verlängerung von BO, CN normal zu AA_1, OV und CV' vertical, OZ ein auf einer kreisbogenförmigen Theilung zum Mittelpunkte O spielender Zeiger, OD die Richtung von O nach dem Nullpunkte dieser Theilung. Es sei dann:

Fig. 183.



A das Gewicht, P die Belastung der an der Schneide A hängenden Waageschale,

A_1 das Gewicht, P_1 die Belastung der an der Schneide A_1 hängenden Schale,

$2B$ das Gewicht des Waagebalkens; ferner seien die Längen:

$$CA = a, \quad CA_1 = a_1, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

die letzteren zwei algebraisch verstanden und zwar positiv, wenn, wie in der Figur, der Punkt B bezw. C unter O liegt, und die Winkel:

$$NCO = \beta, \quad GOZ = \gamma, \quad DOV = \delta,$$

sowie die dem Gleichgewichtszustande bei der vorausgesetzten Belastung entsprechenden Winkel:

$$VOZ = \varphi, \quad DOZ = \psi.$$

Die Grössen: $a_1 - a$, $A_1 - A$, β, γ, δ sollten eigentlich $=$ Null sein, sind also Fehler, die als sehr klein vorausgesetzt werden können, so dass bei ausserdem sehr kleinem Unterschiede der Belastungen P, P_1 auch die Winkel φ und ψ sehr klein sind. Mit Rücksicht darauf, dass

$$\text{Winkel } V'CO = VOG = \varphi - \gamma,$$
$$\text{also Winkel } V'CN = \varphi - \gamma - \beta$$

und letzterer $=$ dem Neigungswinkel von AA_1 gegen den Horizont ist, ergiebt sich nun als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$(A + P)[a \cos(\varphi - \gamma - \beta) + c \sin(\varphi - \gamma)] + 2Bb \sin(\varphi - \gamma)$$
$$= (A_1 + P_1)[a_1 \cos(\varphi - \gamma - \beta) - c \sin(\varphi - \gamma)]$$

oder wegen $\cos(\varphi - \gamma - \beta) = \cos\beta \cos(\varphi - \gamma) + \sin\beta \sin(\varphi - \gamma)$ nach Division mit $\cos(\varphi - \gamma)$:

$$(A + P)[a \cos\beta + a \sin\beta \, tg(\varphi - \gamma) + c \, tg(\varphi - \gamma)] + 2Bb \, tg(\varphi - \gamma)$$
$$= (A_1 + P_1)[a_1 \cos\beta + a_1 \sin\beta \, tg(\varphi - \gamma) - c \, tg(\varphi - \gamma)].$$

Daraus folgt:

$$tg(\varphi - \gamma) = \frac{[(A_1 + P_1)a_1 - (A + P)a] \cos\beta}{(A + P)(a \sin\beta + c) - (A_1 + P_1)(a_1 \sin\beta - c) + 2Bb} \quad (1).$$

Die Gewichtsdifferenz der Waageschalen ist so leicht zu erkennen (an der durch Vertauschung der unbelasteten Schalen geänderten Zeigerstellung) und danach so leicht zu beseitigen, dass von vorn herein $A_1 = A$ angenommen werde. Wird dann ferner

$$P_1 = P + p \text{ und } a_1 = (1 + \alpha)a$$

gesetzt, unter α einen positiven oder negativen kleinen Bruch und unter p ein kleines Zulagegewicht auf der an der Schneide A_1 hängenden Schale zu ihrer der anderen Schalenbelastung vorher gleichen Belastung P verstanden, so ist

$$(A_1 + P_1)a_1 - (A + P)a = pa + (A + P + p)\alpha a,$$

also nach Gl. (1), wenn ausserdem wegen Kleinheit der Winkel $\varphi - \gamma$ und β mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$tg(\varphi - \gamma) = \varphi - \gamma = \psi + \delta - \gamma, \quad \cos\beta = 1, \quad \sin\beta = \beta$$

gesetzt wird:

$$\psi + \delta - \gamma = \frac{[p + (A + P + p)\alpha]a}{-[p + (A + P + p)\alpha]a\beta + (2A + 2P + p)c + 2Bb}.$$

In dieser Gleichung sind $p, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ kleine Grössen; durch Weglassung der Glieder, welche zwei derselben als Factoren enthalten und somit kleine Grössen höherer Ordnung sind, erhält sie die Form:

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{p + (A + P)\alpha}{(A + P)c + Bb} a + \gamma - \delta \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

als Ausdruck für den Winkel, unter welchem die Zeigerrichtung OZ gegen die nach dem Nullpunkte der Theilung gehende Richtung OD geneigt ist. Der fehlerhafte Winkel β, weil aus der Gleichung verschwunden, ergiebt sich dadurch als von untergeordnetem Einflusse; es ist das ein schätzbarer Umstand, weil wegen der Schwierigkeit, der kleinen Strecke $OB = b$ eine bestimmt vorgezeichnete Richtung zu geben, dieser Fehler kaum ganz vermieden werden kann.

Die Winkel γ, δ sind nicht als Fehler der Waage an sich, sondern nur als Aufstellungsfehler derselben zu betrachten. Sie können durch eine solche Aufstellung (mit Hülfe betreffender Fussschrauben am Gestelle einer feineren Waage) beseitigt werden, dass bei unbelasteten Schalen der Zeiger auf den Nullpunkt der Skala einspielt, dass also nach Gl. (2):

$$0 = \frac{1}{2} \frac{A\alpha}{Ac + Bb} a + \gamma - \delta$$

ist, woraus durch Subtraction von Gl. (2) folgt:

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{(p + P\alpha)(Ac + Bb) - PcA\alpha}{[(A + P)c + Bb](Ac + Bb)} a$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(Ac + Bb)p + BbP\alpha}{[(A + P)c + Bb](Ac + Bb)} a \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Wäre $\alpha = 0$, so wäre für $p = 0$ auch $\psi = 0$ für jeden Werth von P, d. h. es würde der Zeiger bei beliebiger gleicher Belastung der Schalen auf den Nullpunkt der Skala einspielen ebenso wie bei unbelasteten Schalen; auch würde ψ in $-\psi$ übergehen, d. h. der Ausschlagwinkel im entgegengesetzten Sinne gleich gross sein, wenn entsprechend dem Ersatze von p durch $-p$ das kleine Zulagegewicht von der einen auf die andere Schale übertragen wird. Daran, dass das eine oder andere thatsächlich nicht der Fall ist, wird die Ungleichheit der Armlängen, nämlich der Fehler α erkannt, der bei feinen Waagen durch Justirung der Endschneiden mit Hülfe von Stellschrauben beseitigt werden kann.

Im Falle $\alpha = 0$ ist ψ der im vorigen Paragraph mit $\Delta\varphi$ bezeichnete, durch das Zulagegewicht p allein bewirkte Ausschlagwinkel, und wenn dann ausserdem p als aliquoter Theil der jeweiligen Belastung P ausgedrückt $= \frac{1}{\varepsilon} P$ gesetzt wird, folgt aus Gl. (3):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Pa}{(A+P)e+Bb} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Bei dieser Entwicklung sind die drei Schneiden als genau parallel vorausgesetzt worden. Dass aber eine Endschneide der Mittelschneide parallel ist, erkennt man durch eine solche Versetzung der Last auf der daran hängenden Schale, dass der Druckmittelpunkt in der Schneide einmal möglichst nahe an ihr eines, das andre mal an ihr anderes Ende gerückt wird. Bei einer Abweichung vom Parallelismus in horizontalem Sinne würden in beiden Fällen die betreffenden Armlängen a etwas verschieden sein, und würde somit dieser Fehler ebenso erkannt werden, wie es soeben bezüglich des Fehlers α bemerkt wurde. Bei einer Abweichung vom Parallelismus im verticalen Sinne wäre e in beiden Fällen etwas verschieden, somit auch $\Delta\varphi$ nach Gl. (4) unter sonst gleichen Umständen. Uebrigens kann ein Parallelismusfehler dadurch weniger schädlich gemacht werden, dass die Endschneide zunächst ein Gehänge und dieses die Waagschale trägt vermittels einer Keilschneide A', die gegen jene Endschneide A rechtwinklig gekreuzt ist; eine Lagenänderung des Druckmittelpunktes in A' ist dann ohne Einfluss auf seine Lage in A.

In dem Ausdrucke (4) des dem Uebergewichte $\Delta P = p = \frac{1}{\varepsilon} P$ entsprechenden Ausschlagwinkels $\Delta\varphi$ soll zwar behufs grösstmöglicher Empfindlichkeit der Waage der Nenner möglichst klein sein, doch muss er stets einen endlichen positiven Werth behalten, damit $\Delta\varphi$ (eigentlich $tg\,\Delta\varphi$) nicht beliebig gross werden könne, entsprechend einem Umschlagen des Waagebalkens, d. i. einem indifferenten oder labilen Gleichgewichte. In der That wird durch die Bedingung:

$$(A+P)e + Bb > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

worin b und e algebraisch und zwar im Sinne von O abwärts positiv verstanden sind, die Stabilität des Gleichgewichtes charakterisirt, nämlich ausgedrückt, dass der Mittelpunkt der in A, A_1 und B angreifenden Schwerkräfte $A+P$, $A+P$, $2B$ unter der Mittelschneide liegt und somit bei horizontalem Waagebalken eine tiefste Lage hat.

Um nun aber jener für eine berichtigte gleicharmige Waage gültigen Gleichung (4) mit Rücksicht auf die Bedingung (5) die Constructionsregeln zu entnehmen, durch welche unbeschadet der Stabilität grösstmögliche Empfindlichkeit der Waage gewährleistet wird, muss berücksichtigt werden, dass die Strecken b und c nicht constant, sondern wegen der Deformation des Waagebalkens durch seine Belastung von dieser abhängig sind. Sind auch die fraglichen Aenderungen von b und c an und für sich nur sehr klein, so können sie doch im Verhältnisse zu diesen selbst sehr kleinen Strecken erheblich und somit auf die Eigenschaften der Waage von wesentlichem Einflusse sein. Jedenfalls sind die Aenderungen von b und c der Belastung P proportional, so dass

$$b = b_0 + mP \quad \text{und} \quad c = c_0 + nP \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

gesetzt werden kann, unter b_0 und c_0 die Werthe von b und c verstanden, die der Belastung des Waagebalkens nur durch sein Eigengewicht und durch die Schalen entsprechen, während m und n vom Material und von den Dimensionen des Waagebalkens abhängen und $m < n$ ist. Die Einsetzung in (4) und (5) ergiebt den Empfindlichkeitswinkel:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Pa}{Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2} \quad \ldots\ldots (7)$$

und die Stabilitätsbedingung:

$$f(P) = Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2 > 0 \quad \ldots\ldots (8).$$

Damit letztere für jeden Werth von P erfüllt sei, muss das Minimum von $f(P) > 0$ sein. Dieses Minimum entspricht $P = 0$, wenn

$$c_0 + nA + mB \geqq 0$$

ist. Anderenfalls entspricht es der Belastung:

$$P = P_1 = -\frac{c_0 + nA + mB}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und ergiebt sich damit

$$= Ac_0 + Bb_0 - nP_1^2 = Ac_0 + Bb_0 - \frac{(c_0 + nA + mB)^2}{4n}.$$

Die Stabilität erfordert also solche Werthe von b_0, c_0, für welche

$$\left.\begin{array}{l} c_0 + nA + mB \geqq 0 \quad \text{und} \quad Ac_0 + Bb_0 > 0 \\ \text{oder } c_0 + nA + mB < 0 \quad \text{und} \quad Ac_0 + Bb_0 > \dfrac{(c_0 + nA + mB)^2}{4n} \end{array}\right\} \quad (10)$$

ist. Im zweiten Falle ist vorausgesetzt, dass P_1 nach Gl. (9) sich kleiner ergiebt, als die Maximalbelastung P', für welche die Waage bestimmt ist, widrigenfalls die Erfüllung der Ungleichung (8) bei Substitution von P' für P genügend sein würde.

Behufs grösstmöglicher Empfindlichkeit sind nun nach Gl. (7) die Grössen b_0, c_0 so klein zu machen, wie es die Stabilitätsbedingungen gestatten. Der Schwerpunkt B des Waagebalkens soll noch etwas unter der Mittelschneide O liegen, damit der Balken bei horizontaler Lage auch ohne Schalen in stabilem Gleichgewichte sei. Durch die Anhängung der Schalen rückt B noch etwas weiter herunter, so dass dann b_0 jedenfalls eine positive kleine Grösse ist, während c_0 unbeschadet der Stabilität $= 0$ oder selbst bei sehr kleiner absoluter Grösse negativ sein, d. h. die Mittelschneide etwas unter der Ebene durch die Endschneiden liegen kann.

In welchem Maasse eine gegebene Waage diesen Anforderungen genügt, kann nicht durch Messung der kleinen Grössen b_0, c_0 geprüft werden. Wenn aber die Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$ beobachtet sind, welche gewissen kleinen Zulagegewichten $\Delta P = \frac{1}{\varepsilon} P$ auf der einen Schale bei drei verschiedenen, vorher gleichen Belastungen P auf beiden Schalen entsprechen, erhält man durch Einsetzung in Gl. (7), nämlich in:

$$Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2 = \frac{a}{2}\frac{\Delta P}{\Delta\varphi}$$

drei Gleichungen zur Berechnung der drei Unbekannten:

$$Ac_0 + Bb_0, \quad c_0 + nA + mB, \quad n.$$

Dadurch würden die Grössen b_0, c_0 bestimmt sein, wenn noch das Verhältniss $\frac{m}{n}$ bekannt wäre. Letzteres kann mit Rücksicht auf die jeweilige Form des Waagebalkens näherungsweise berechnet und im Durchschnitt etwa $= 0{,}2$ gesetzt werden, genau entsprechend der Voraussetzung eines Balkens von rechteckigem Querschnitte constanter Breite und so veränderlicher Höhe, dass die Biegungsspannung, welche durch die am Ende angreifenden Kräfte $A + P$ verursacht wird, in allen Querschnitten gleich ist.*

Wie die Empfindlichkeit von der Belastung P abhängt, lässt Gl. (7) unmittelbar erkennen. Insbesondere zeigt sie, dass der

* Brauer in seiner Schrift „die Construction der Waage", S. 30, vermeidet die hier in Rede stehende Schwierigkeit dadurch, dass er bei Vernachlässigung von A zugleich stillschweigend $m = 0$ annimmt. In der That aber kann (wegen $B > A$) mB eine mit nA vergleichbare Grösse oder gar $> nA$, sowie auch (wegen c_0 nahe $= 0$) $nA + mB$ eine mit c_0 vergleichbare Grösse oder gar $> c_0$ sein.

durch einen bestimmten aliquoten Theil dieser Last als einseitiges Uebergewicht verursachte Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$ am grössten ist, wenn

$$\frac{Ac_0 + Bb_0}{P} + nP$$

ein Minimum, wenn also

$$-\frac{Ac_0 + Bb_0}{P^2} + n = 0 \quad \text{oder} \quad P = \sqrt{\frac{Ac_0 + Bb_0}{n}} \quad \ldots\ldots (11)$$

ist. Ist dieses P grösser, als die Maximallast P' der Waage, so nimmt ihre Empfindlichkeit beständig mit der Belastung zu.

Was den Einfluss von B auf die Empfindlichkeit betrifft, so ergiebt sich aus Gl. (7), dass $\Delta\varphi$ um so grösser, je kleiner B, dass also der Waagebalken möglichst leicht zu machen ist. Uebrigens hängt das Gewicht desselben mit seiner Länge zusammen, und da auch m und n von dieser abhängen, so ist die Beziehung zwischen dem Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi$ und der Länge a nicht ohne Weiteres aus Gl. (7) erkennbar. In der That wird diese Beziehung bedingt durch die Art, wie bei Balken von verschiedenen Längen zugleich die Querschnittsdimensionen verschieden sind. Wenn alle solche Balken von einerlei Material und insofern von einerlei Form vorausgesetzt werden, als ihre homologen Querschnitte ähnlich sind und nach einerlei Gesetz von der Mitte gegen die Enden hin abnehmen, so ist, wenn e eine Querschnittsdimension an bestimmter Stelle, z. B. im mittleren Querschnitte bedeutet, die Anstrengung (Maximalspannung) des Materials durch dieselbe Belastung bekanntlich proportional $\frac{a}{e^3}$, und wenn diese Anstrengung bei allen Balken gleich sein soll, muss e proportional $a^{\frac{1}{3}}$ sein. Somit ergiebt sich B proportional ae^2 proportional $a^{\frac{5}{3}}$, während nach bekannten Gesetzen der Elasticitätslehre

$$m \text{ und } n \text{ proportional } \frac{a^3}{e^4} \text{ auch proportional } a^{\frac{5}{3}}$$

werden, so dass gesetzt werden kann:

$$B = xa^{\frac{5}{3}}, \quad m = ya^{\frac{5}{3}}, \quad n = za^{\frac{5}{3}},$$

unter x, y, z Factoren verstanden, die vom Material und von der Form abhängen, von der Länge a aber unabhängig sind. Mit Rücksicht auf diese Ausdrücke von B, m, n ergiebt sich dann der Empfindlichkeitswinkel $\varDelta\varphi$ nach Gl. (7) umgekehrt proportional dem Werthe des Ausdrucks:

$$\frac{Ac_0}{a} + xb_0 a^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{c_0}{a} + zAa^{\frac{2}{3}} + xya^{\frac{7}{3}}\right)P + za^{\frac{2}{3}}P^2,$$

welcher mit a wächst, da $c_0 = 0$ oder negativ, jedenfalls absolut genommen sehr klein ist. Die Empfindlichkeit wird also durch Verkürzung des Waagebalkens erhöht.

Für solche Verkürzung spricht auch der Umstand, dass dadurch die Schwingungsdauer der Waage verkleinert wird, deren beträchtliche Grösse besonders bei grosser Empfindlichkeit das Wägungsverfahren sehr zeitraubend macht. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist bekanntlich:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

unter l den Quotienten aus dem Trägheitsmomente für die Schwingungsaxe O durch das Produkt aus Masse und Schwerpunktsabstand von dieser Axe verstanden. Indem dabei hier die Massen der Belastungen $A+P$ der Endschneiden wie in diesen concentrirte Massen zu rechnen sind, ist, unter $\frac{2B}{g}k^2$ das Trägheitsmoment des Waagebalkens selbst verstanden,

$$l = \frac{2(A+P)a^2 + 2Bk^2}{2(A+P)c + 2Bb} = \frac{(A+P)a^2 + Bk^2}{(A+P)c + Bb} \quad \ldots\ldots (13)$$

oder nach Gl. (4) mit $\varDelta P = \frac{1}{\varepsilon}P$:

$$l = \frac{2}{a}\left[(A+P)a^2 + Bk^2\right]\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta P}$$

$$= 2a\left(A + P + B\frac{k^2}{a^2}\right)\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Hiernach ist l und somit t um so grösser, je grösser $\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta P}$, d. h. je empfindlicher die Waage ist. Bei gegebener Empfindlichkeit ist aber t um so kleiner, je kleiner $A, B, \frac{k}{a}$ und a, je leichter also die Schalen sind, je leichter der Waagebalken und je mehr seine Masse gegen die Mittelschneide hin zusammengedrängt, insbesondere aber je kürzer der Waagebalken ist.

Anders verhält es sich freilich bezüglich auf die Richtigkeit und die Zuverlässigkeit einer Waage, so dass doch nicht unbedingt der kleinstmögliche Balken als bester bezeichnet werden kann. Denn Fehler im Parallelismus und in den gegenseitigen Entfernungen der Schneiden, wodurch die Richtigkeit vorzugsweise beeinträchtigt werden kann, sind verhältnissmässig um so kleiner, also um so weniger schädlich, je grösser die Balkenlänge ist. Was aber die Reibungswiderstände der Schneiden betrifft, so erfordern sie zu ihrer Bewältigung bei jeder Lagenänderung des Waagebalkens ein Moment, das dem Gesammtdrucke auf dieselben

$$= 2(A + P) + 2(A + P + B) = 2(2A + 2P + B)$$

proportional und somit, unter w eine sehr kleine von den Beschaffenheiten der Keilschneiden und Pfannen abhängige Länge verstanden,

$$= 2w(2A + 2P + B)$$

gesetzt werden kann. Dasselbe ist im Vergleich mit dem auf die Lagenänderung des Waagebalkens abzielenden Momente $= a\Delta P$ des Uebergewichtes ΔP um so kleiner, also auch der Unzuverlässigkeitswinkel $\Delta\varphi_1$ (§. 166) um so kleiner in Vergleich mit dem ohne Rücksicht auf diese Widerstände berechneten Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$, je grösser a. Eine praktische Grenze wird der Verkleinerung des Waagebalkens natürlich auch durch das Raumbedürfniss der Schalen gesetzt. —

Indem sich gezeigt hat, dass die Empfindlichkeit einer Waage mit ihrer beiderseitigen Belastung P wächst, wenigstens bis zu einem gewissen durch Gl. (11) bestimmten Werthe von P, pflegt die schlechtweg sogenannte Empfindlichkeit ε in dem Sinne verstanden zu werden, dass $\frac{1}{\varepsilon}P'$ das kleinste einseitige Zulagegewicht ist, durch welches bei beiderseitiger Maximalbelastung P' ein noch deutlich erkennbarer Ausschlag bewirkt wird. Wenn hier auch das Erforderniss deutlicher Erkennbarkeit ziemlich weit gesteckt wird, z. B. so, dass es einer Bewegung der Zeigerspitze auf der Skala von 1 Millimeter entsprechen soll, so kann doch jene Empfindlichkeit ε bei feinen, zu chemischer Analyse oder zu anderen wissenschaftlichen Zwecken bestimmten Waagen fast unbegrenzt gesteigert werden, falls der Waagebalken mit einer Regulirungsschraube ausgestattet ist, deren Axe in der die Gerade AA_1, Fig. 183, in ihrem Mittelpunkte C rechtwinklig schneidenden Geraden OB liegt, so dass durch ihre Drehung und entsprechende Axialverschiebung im einen oder anderen Sinne der Schwerpunktsabstand $OB = b$ sehr allmählig geändert werden kann. Indem aber die Vergrösserung von ε durch eine Vergrösserung der Schwingungsdauer t erkauft werden muss, welche nach Gl. (12) und (14) proportional $\sqrt{\varepsilon}$ sich ändert, auch die Fehler, die durch den Einfluss von Temperaturdifferenzen auf die Armlängen des Waagebalkens, durch Luftströmungen, sowie durch die Unsicherheit der Berücksichtigung des Auftriebes der Luft u. s. w. verursacht werden können, die Steigerung von ε über eine gewisse Grenze hinaus illusorisch machen würden, ist es rathsam, jeder Waage nur diejenige Empfindlichkeit zu geben, die ihr Zweck erfordert, und kann insbesondere bei zu wissenschaftlichen Zwecken bestimmten Waagen in der Regel $\varepsilon = 1000\,000$ als ausreichend betrachtet werden für Belastungen P bis zu 1000 Gramm, entsprechend weniger für kleinere Maximalbelastungen.

Bei Handelswaagen, die der gesetzlichen Aichung unterliegen, genügt eine viel geringere Empfindlichkeit. Die Aichungsordnung für das deutsche Reich unterscheidet hierbei, was die gleicharmigen Balkenwaagen betrifft,

1) Hökerwaagen, für den Wochenmarktverkehr bis zu $P' = 2$ Kgr. zugelassen,
2) Waagen für den gewöhnlichen Handelsverkehr,
3) Präcisionswaagen, wozu insbesondere die Medicinalwaagen gerechnet werden.

Die für diese drei Waagengattungen bei verschiedenen Maximalbelastungen $= P'$ Gramm auf jeder Schale wenigstens verlangten, in obigem Sinne verstandenen Empfindlichkeiten ε enthält die folgende Zusammenstellung.

	$P' \leqq 20$	$\leqq 200$	$\leqq 2000$	$\leqq 5000$	> 5000 Gr.
1) $\varepsilon =$		125	250		
2) $\varepsilon =$		500	1000	1000	2000
3) $\varepsilon =$	500	1000	2000	5000	10000

In jedem Falle soll ausserdem ε noch wenigstens halb so gross sein für $P = 0{,}1\,P'$.

Ueber die Schwingungsdauer t sind von Prof. Dr. Hartig vergleichende Versuche angestellt worden mit zwei Sortimenten von je fünf Justirwaagen A für Aichämter und B für Aufsichtsbehörden.*

Folgende Tabelle enthält:

die Maximalbelastungen P', die Schalengewichte A und Balkengewichte $2B$ in Grammen,

die Armlängen a und Zeigerlängen z in Millimetern, ferner

* E. Brauer: „Die Construction der Waage", S. 114 ff.

die beobachteten Empfindlichkeiten ε, verstanden in dem Sinne, dass bei beiderseitiger Maximalbelastung P' ein einseitiges Zulagegewicht $= \frac{1}{\varepsilon} P'$ die Zeigerspitze um 1 Millimeter bewegt, entsprechend einem in Bogenmaass ausgedrückten Empfindlichkeitswinkel $\varDelta\varphi = \frac{1}{z}$,

die beobachteten Schwingungszeiten t in Secunden, endlich in den letzten Columnen

die vorgeschriebenen, durchweg kleineren Empfindlichkeiten ε' und die Schwingungszeiten

$$t' = t\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}},$$

welche unter sonst gleichen Umständen mit den Empfindlichkeiten ε' verbunden gewesen wären.

		P'	A	$2B$	a	z	ε	t	ε'	t'
A	1	5	2,8	16,2	79	143	7143	3,7	2083	2,0
	2	50	27,0	86,5	138	160	25000	8,4	5000	3,8
	3	500	97,7	436,5	212	210	35000	10	10000	5,3
	4	5000	345,5	2220	328	347	200000	20	20000	6,3
	5	50000	2450	6560	515	480	333333	30	50000	11,6
B	1	5	2,7	15,1	80	143	40000	7,5	10415	3,8
	2	50	43,8	115,1	150	209	324675	30	25000	8,3
	3	500	80,9	283,4	209	211	500000	37,2	50000	11,8
	4	5000	459	2008	330	370	1101322	51	100000	15,4
	5	50000	2450	6650	515	480	833333	36	250000	19,7

§. 168. Wägungsmethoden und besondere Einrichtungen der Waage zur Sicherung oder Erleichterung ihres Gebrauches.

Während die Schwingungsdauer t einer Waage dem vorigen Paragraph zufolge mit ihrer Empfindlichkeit wächst, ist die Zahl von Schwingungen, welche eine um einen gewissen Winkel aus der Gleichgewichtslage entfernte Waage macht, bevor sie zur Ruhe kommt, natürlich um so grösser, je kleiner die Reibungswiderstände der Schneiden sind. Eine schwingende Waage von gleichzeitig grosser Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit kann daher bis zum Eintritte des Ruhezustandes sehr langer Zeit bedürfen, so dass aus diesem Grunde, nämlich zur Beschränkung der zur Bestimmung eines Ausschlagwinkels nöthigen Zeit auf den Betrag $2t$ sich das Verfahren der Ableitung jenes der mittleren (reibungslosen) Gleichgewichtslage entsprechenden Ausschlagwinkels aus den Beobachtungen dreier aufeinander folgender Grenzwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ empfiehlt, welches im §. 166 gemäss Gl. (2) daselbst als Mittel zur Elimination des Einflusses der Reibung besprochen wurde.

Wenn sich nun aber auf diese Weise ergiebt, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird, dass bei der betreffenden Grösse des Gegengewichtes auf der einen Schale für die auf der anderen befindliche Last im mittleren Gleichgewichts-Ruhezustande die Zeigerspitze noch um x Skalentheile vom Nullpunkte entfernt bleiben würde, so ist es nicht nöthig, das Gegengewicht so lange mit wiederholtem Zeitaufwande zu jedesmaliger neuer Bestimmung von x zu ändern, bis sich $x = 0$ ergiebt, sondern es kann die hierzu nöthige Aenderung ΔP des Gegengewichtes berechnet werden, falls die Werthe von $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ für die betreffende Waage und für verschiedene Belastungen P derselben vorher bestimmt worden waren. Dieses Verfahren kommt darauf hinaus, die Waage *behufs der letzten Correctur des Gegengewichtes als Neigungswaage zu benutzen.*

Uebrigens ist die Skala, auf welcher die Zeigerspitze spielt, immer nur von kleiner Länge, entsprechend einem so kleinen Ausschlagwinkel, dass derselbe, in Bogenmaass ausgedrückt, ohne in Betracht kommenden Fehler seiner trigonometrischen Tangente gleich gesetzt werden kann, wie es bei der Ableitung der Gleichungen im vorigen Paragraph aus Gl. (1) daselbst geschehen ist. Bis auf eine kleine Abweichung des Zeigers vom Nullpunkte der Skala muss deshalb die Waage schon vor der Anwendung jenes Proportionalitätsfactors $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ zum Einspielen gebracht worden sein. Bei feinen Waagen sind aber selbst dazu schon so kleine Gewichtstücke erforderlich, dass deren Herstellung und Handhabung mit Schwierigkeiten verbunden ist, und pflegt man sich dann dadurch zu helfen, dass man behufs dieser vorletzten Correctur der Gleichgewichtslage die *Waage als Laufgewichtswaage* benutzt, nämlich durch Verschiebung eines sogenannten *Reiters*, eines Häkchens von Gold- oder Platindraht, längs dem eingetheilten einen Arme des Waagebalkens. Ist z. B. die Armlänge CA oder CA_1, Fig. 183, in 100 gleiche Theile getheilt, so würde mit einem Reitergewicht von 1 Centigramm die Belastung der betreffenden Schneide A, A_1 bis auf 0,1 Milligramm variirt werden können = der Aenderung des auf A oder A_1 reducirten Gewichtes des Reiters bei seiner Verschiebung von einem zum folgenden Theilstriche. Ist der Balken selbst von ungeeigneter Form zur Aufnahme der Theilung und des Reiters, so kann dazu ein fest mit ihm verbundener besonderer Stab dienen, dessen obere Kante in der Geraden AA_1, Fig. 183, liegt.

Derselbe Zweck kann auch mit Hülfe des Princips der Federwaage, nämlich nach einem von Sartorius in Göttingen ausgeführten Vorschlage von Frerichs dadurch erreicht werden, dass die Mittelschneide mit einem ihre Verlängerung bildenden feinen Drahte fest verbunden wird, der am anderen Ende einen auf einer Kreistheilung spielenden Zeiger trägt. Durch Bewegung des letzteren wird der Draht um seine Axe verdreht und dadurch auf den Waagebalken ein Drehungsmoment ausgeübt ebenso wie durch ein Zulagegewicht auf der einen Waagschaale. Ist dann der Torsionswinkel des Drahtes, welcher dieselbe Wirkung wie ein gewisses Zulagegewicht, z. B. 1 Centigramm auf den Waagebalken ausübt, einmal ermittelt worden, so kann umgekehrt aus dem in einem gegebenen Falle durch Drehung des Zeigers bewirkten und abgelesenen Torsionswinkel auf das ihm proportionale äquivalente Zulagegewicht geschlossen werden.

Während diese Methoden und Einrichtungen mehr die Erleichterung einer Wägung durch Abkürzung der dazu nöthigen Zeit, als die Genauigkeit der Wägung betreffen (obschon auch diese im weiteren Sinne dadurch gefördert werden kann, besonders bei der Wägung von hygroskopischen oder anderweitig in der Luft veränderlichen Körpern) bleiben störende Einflüsse von Luftströmungen und von Temperaturdifferenzen, wodurch die Gleichheit der Armlängen beeinträchtigt wird, als Fehlerquellen zu bekämpfen. Hülfsmittel dagegen sind die Einschliessung der Waage in einen Glaskasten und, sofern jene Einflüsse u. A. vom Beobachter herrühren können, die Ablesung aus der Ferne mit Hülfe eines Fernrohres.

Vollkommen unabhängig von einer Verschiedenheit der Arme macht das Verfahren der doppelten Wägung, darin bestehend, dass der auf die eine Schale A gesetzte Körper K vorläufig durch beliebige Massen auf der anderen Schale A_1 austarirt, dann K weggenommen und durch Gewichtstücke bis zum Wiedereinspielen der Waage ersetzt wird. Der Gleichsetzung ihrer Gesammtmasse und der des Körpers K liegt dann nur die Voraussetzung zu Grunde, dass in der kurzen Zwischenzeit keine Aenderung der Waage stattfand. Für eine Reihe aufeinander folgender Wägungen kann das Verfahren dadurch abgekürzt werden, dass ein vollständiger Satz von grösseren und kleineren Gewichtstücken, die zusammen etwas schwerer, als der schwerste zu wiegende Körper sind, auf der Schale A ein für allemal mit einer unverändert bleibenden Masse auf A_1 ins Gleichgewicht gebracht und dann die jeweilige Wägung eines Körpers dadurch bewirkt wird, dass er auf die Schale A gesetzt und durch Wegnahme entsprechender Stücke des Gewichtsatzes das Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Diese Schale A kann dabei zweckmässig als ein System von zwei Tellern hergestellt werden, die übereinander von demselben an der betreffenden Endschneide hängenden Bügel getragen werden und von welchen der untere zur Aufnahme des Gewichtsatzes, der obere zur Aufnahme des zu wiegenden Körpers bestimmt ist.

Bei solchem Verfahren der doppelten Wägung kann auch die Schale A_1 sammt ihrem unveränderlichen Tarirgewichte mit Beseitigung der betreffenden Endschneide durch ein mit dem Arme CA_1 fest verbundenes Gegengewicht ersetzt und so eine als einschenklig zu bezeichnende Waage mit nur zwei Schneiden O, A hergestellt werden, wie sie schon vor nahe 50 Jahren von Bockholtz angegeben und unabhängig davon neuerdings auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879 vom Mechaniker Reimann als sogenannte Substitutionswaage in mehreren Exemplaren vorgeführt worden ist. Sie gewährt zugleich die Vortheile grösserer Einfachheit und Zuverlässigkeit durch Ersparung einer Keilschneide, leichterer Regulirung der Empfindlichkeit durch eine Stellschraube, welche, während der im vorigen Paragraph mit e bezeichnete Abstand hier bedeutungslos geworden ist, die Entfernung b des Balkenschwerpunktes B von der Ebene OA der beiden einzigen Schneiden beliebig zu ändern gestattet, und endlich den Vortheil, dass mit der constanten Gesammtbelastung auch dieser Schwerpunktsabstand b und somit die Empfindlichkeit für jede Masse des zu wiegenden Körpers K gleich gross ist.

Arretirungs- und Entlastungsvorrichtungen zur Schonung der Keilschneiden beim Nichtgebrauche und bei den Belastungsänderungen der Schalen sind, was die einfache Hebelwaage betrifft, nur im Falle sehr feiner Waagen zu wissenschaftlichen Zwecken üblich. Sie müssen so beschaffen sein, dass bei ihrem Gebrauche schädliche Stösse und Lagenänderungen der Schneiden auf den zugehörigen Pfannen möglichst vermieden werden. Wichtig in dieser Hinsicht ist die Reihenfolge, in welcher die Entlastung und Wiederbelastung der Mittelschneide und der Endschneiden stattfindet, und zwar ist es am besten, bei der Arretirung und Entlastung zuerst die Schalen von den Endschneiden und darauf den

Balken von der Mittelpfanne abzuheben, bei der Ingangsetzung zuerst die Schalen auf die Endschneiden und dann den Balken auf die Mittelpfanne niederzulassen, obschon gewöhnlich die Reihenfolge entweder bei der Arretirung oder bei der Ingangsetzung die umgekehrte, im einen Falle folglich entgegengesetzt derjenigen im anderen Falle ist. In Betreff solcher und anderer constructiver Einzelheiten, insbesondere auch in Betreff der Art und Weise, wie der Balken so hergestellt werden kann, dass er genügende Tragfähigkeit und Steifigkeit mit möglichster Leichtigkeit verbindet (verjüngter, durchbrochener und Dreiecksbalken von geeignetem Material, u. A. von Aluminium oder Phosphorbronze etc.), ferner bezüglich auf die Anordnung und Justirung der Schneiden u. s. f. muss hier auf Specialwerke, namentlich auf das Werk von Brauer über die Construction der Waage verwiesen werden. —

In Betreff der Handelswaagen sei nur noch darauf hingewiesen, dass oft ihr Balken nicht auf einem festen Gestelle (Stativ), sondern mit aufwärts gerichtetem kürzerem Zeiger (Zunge) in einem Gehänge gelagert ist. Diese Einrichtung erschwert zwar die Beruhigung der schwingenden Waage, macht sie aber von Aufstellungsfehlern unabhängig und schont die Mittelschneide, indem Stösse weniger ein Rutschen derselben auf der Pfanne, als eine Schwingung des Gehänges zur Folge haben, ebenso wie aus gleichem Grunde die mittelbare gelenkartige Verbindung der Schalen mit den betreffenden Pfannen zur Schonung der Endschneiden beiträgt.

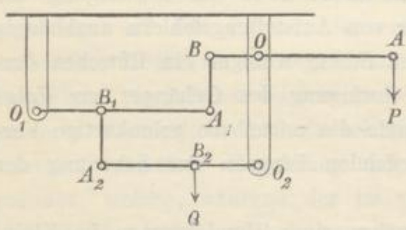
Die Bequemlichkeit des Gebrauches einer Handelswaage im Kleinverkehr hat vielfach zu breiter Gabelung des Waagebalkens an den Enden veranlasst mit Verdoppelung der Endschneiden so, dass dieselbe am Ende A aus zwei in gerader Linie liegenden Einzelschneiden a, b, am Ende A_1 aus zwei in gerader Linie liegenden Schneiden a_1, b_1 besteht und somit kinematisch das eine wie das andere Schneidenpaar je einer einzigen Schneide gleich zu achten ist. Die genügende Erfüllung dieser Forderung sowie der Parallelismus der Geraden ab und $a_1 b_1$ mit der Mittelschneide ist freilich mit Schwierigkeiten verbunden und muss durch Prüfung vermittels verschiedener Belastungscombinationen, nämlich durch Belastung bei a und a_1, bei a und b_1, bei b und a_1, sowie bei b und b_1 geprüft werden. Auch muss dann behufs stabiler Stützung des Waagebalkens die Mittelschneide, eventuell durch Verdoppelung, entsprechend lang gemacht werden, nach den Vorschriften der Aichordnung für das deutsche Reich wenigstens $= 0{,}6$ der Gabelbreite $ab = a_1 b_1$, von Aussenkante zu Aussenkante der Schneiden gemessen.

2. Zusammengesetzte Hebelwaagen.

§. 169. Uebersicht der Constructions-Arten und Regeln.

Der Ersatz einer einfachen durch eine zusammengesetzte Hebelwaage hat vorzugsweise den Zweck, bei der Wägung grösserer Lasten Q an Gegengewicht P und dadurch auch an Zeit zu sparen. Gewöhnlich ist die Einrichtung so, dass das Verhältniss $P:Q$, das sogenannte Verjüngungsverhältniss, $=1:10$ oder $=1:100$ ist; im deutschen Reiche sind überhaupt nur solche Decimal- und Centesimalwaagen aichungsfähig, also im öffentlichen Handelsverkehr zugelassen. Zwar könnte das Verjüngungsverhältniss auch schon durch eine ungleicharmige einfache Hebelwaage erzielt werden; doch ist es mit Rücksicht auf die der Verkürzung des kleineren Armes gesetzte praktische Grenze zur Vermeidung übermässig grosser Länge des anderen Armes meistens vorzuziehen, das verlangte Verjüngungsverhältniss auf zwei oder mehr Hebel zu vertheilen, die dann durch Zugstangen zu einer zusammengesetzten Drehkörperkette verbunden zu werden pflegen, z. B. nach Art von Fig. 184, in welcher AB den Gegengewichtshebel, $A_1 O_1$ einen Zwischenhebel, $A_2 O_2$ den Lasthebel bedeutet, beziehungsweise drehbar um die festen Axen O, O_1, O_2 und verbunden durch die Zugstangen BA_1, $B_1 A_2$. Dabei ist:

Fig. 184.



$$Q = P\frac{OA}{OB}\,\frac{O_1 A_1}{O_1 B_1}\,\frac{O_2 A_2}{O_2 B_2}.$$

Während hier die Last Q und das Gegengewicht P als auf Pendelschalen liegend vorausgesetzt sind, d. h. auf Schalen, die je an einer Schneide oder, was wesentlich einerlei ist, an zwei in gerader Linie liegenden Schneiden aufgehängt sind, wird nun aber meistens ausserdem verlangt, dass wenigstens die Lastschale von oben ganz frei zugänglich, ihre Belastung und Entlastung durch Aufhängungs-Schnüre, Ketten oder Bügel unbeschränkt sei. Dazu dient ihre Unterstützung von unten durch zwei oder mehr Schneiden, die nicht in gerader Linie liegen. Solche Waagen werden als oberschalige oder im Falle ebener plattenförmiger Schalen als Tafelwaagen, bei grösseren Dimensionen insbesondere als Brückenwaagen bezeichnet. Letztere sind meistens Decimal- oder Centesimalwaagen, während oberschalige und Tafelwaagen für den gewöhnlichen Handelsverkehr auch ohne Verjüngung ($P = Q$) gebraucht werden. Hier werde mit Brauer die Bezeichnung als Brückenwaage auf die ganze Gattung bezogen, die durch den Umstand charakterisirt wird, dass die Lastschale (Brücke) mit zwei oder mehr Schneiden, die nicht in gerader Linie liegen, gestützt ist.

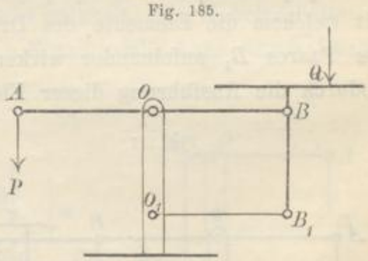
Wenn für eine unendlich kleine Configurationsänderung des Waagenmechanismus die Verticalbewegungen der Schwerpunkte von Last und Gegengewicht beziehungsweise $= \delta q$ und $= \delta p$ sind, positiv oder negativ verstanden, jenachdem sie sich abwärts oder aufwärts bewegen, so ist, falls die beweglichen Glieder der unbelasteten Waage für sich im Gleichgewicht sind, zum Gleichgewicht von P und Q erforderlich, dass

$$P\delta p + Q\delta q = 0, \text{ also } -\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{P}{Q}$$

= dem verlangten Verjüngungsverhältnisse sei, und da dieses Verhältniss unabhängig vom Orte der Last auf der Brücke sein muss, ergiebt sich als Hauptgesetz für die Construction einer Brückenwaage die Forderung, dass bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage die gleichzeitigen Verticalbewegungen aller Punkte der Brücke einander gleich sein müssen.

Das einfachste Hülfsmittel zu diesem Zwecke wird durch eine ebene Drehkörperkette dargeboten, deren gegenüberliegende Glieder gleich lang sind. Wenn von derselben ein Glied OO_1, Fig. 185, so festgestellt wird, dass die Axen der Drehkörperpaare, bezw. die Keilschneiden horizontal sind, so sind die Verticalbewegungen aller Punkte des gegenüber liegenden Gliedes BB_1 nicht nur bei kleinen, sondern bei beliebig grossen Configurationsänderungen der Kette einander gleich, so dass der obigen Constructionsregel durch eine mit diesem Gliede BB_1 fest verbundene Lastschale (Brücke) in vollkommenster Weise entsprochen wird. Die in Fig. 185 angenommene und auch gewöhnlich stattfindende verticale Lage der Glieder OO_1 und BB_1 ist nicht wesentlich, vielmehr genügt es, das Glied BB_1 so zu führen, dass die Bewegungsrichtungen der Punkte B

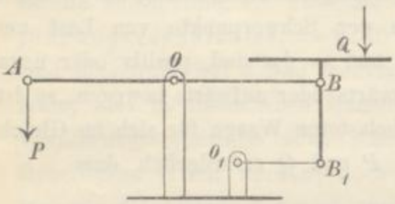
Fig. 185.



und B_1 parallel sind; indem nämlich die gleichzeitigen Elementarbewegungen dieser Punkte im Sinne BB_1 stets einander gleich sind, sind dann auch jene Elementarbewegungen selbst sowie ihre verticalen Componenten gleich gross.

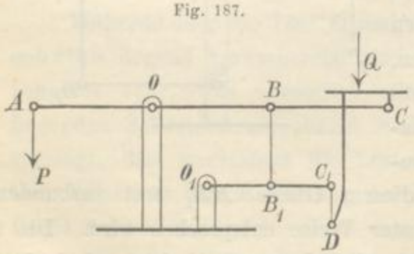
Insofern es nur darauf ankommt, der fraglichen Constructionsregel mit Rücksicht auf sehr kleine Schwingungen zu entsprechen, genügt schon eine solche Drehkörperkette, welche in der behufs der Wägung herbeizuführenden mittleren Gleichgewichtslage nach Art von Fig. 186 die Form eines Trapezes OBB_1O_1 hat. Auch hier ist nicht die verticale Lage von BB_1, sondern nur der Parallelismus der Glieder OB und O_1B_1 wesentlich, damit die darauf senkrechten Bewegungsrichtungen der Punkte B und B_1 parallel seien.

Fig. 186.



Waagen von dem Typus Fig. 185 oder Fig. 186, welche mit Brauer* beziehungsweise als Parallelogrammwaagen und als Trapezwaagen bezeichnet seien, haben indessen den gemeinsamen Uebelstand, dass bei der üblichen verticalen Lage von BB_1 die Last Q bei seitlicher Lage auf der Brücke neben der nach BB_1 gerichteten Kraft $= Q$ noch zu einem Kräftepaare Veranlassung giebt, bestehend aus zwei gleichen Kräften, welche in B und B_1 angreifend beziehungsweise im Sinne OB und B_1O_1 oder BO und O_1B_1 gerichtet sind. Der resultirende Druck, mit welchem die Elemente des Drehkörperpaares B und noch mehr die des Paares B_1 aufeinander wirken, ist somit von variabler Richtung, wodurch die Ausführung dieser Elemente als Keilschneiden und Pfannen erschwert oder wenigstens die Dauerhaftigkeit dieser Theile beeinträchtigt wird. Der Uebelstand ist beseitigt bei der abgeleiteten Trapezwaage, Fig. 187, die aus der Trapezwaage, Fig. 186, dadurch hervorgeht, dass die Hebel OB und O_1B_1 durch die Stange

Fig. 187.



* „Die Construction der Waage“, §. 10.

BB_1 gelenkartig verbunden und mit weiteren Keilschneiden C, C_1 versehen werden, die in den Ebenen OB und O_1B_1 so liegen, dass

$$\frac{OC}{OB} = \frac{O_1C_1}{O_1B_1}$$

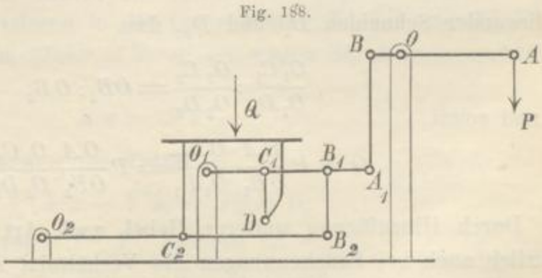
ist. Die elementaren Verticalbewegungen der Punkte C und C_1 haben dann zu denjenigen der Punkte B und B_1 dasselbe Verhältniss, sind also wie diese gleich gross und somit zur Stützung der Lastschale geeignet; dieselbe kann aber jetzt unbeschadet stets verticaler Drucke an den Schneiden C und C_1 an beliebiger solcher Stelle belastet werden, dass die Richtungslinie der Schwerkraft Q zwischen C und C_1 hindurch geht. Uebrigens erfordert die Stützung der Brücke durch die Schneiden C, C_1 die Einfügung eines weiteren Gliedes, das in Fig. 187 als Zugstange (Hängeschiene) C_1D angenommen ist, weil ohne dieses Glied die zusammengesetzte Kette $OBCDC_1B_1O_1$ (entsprechend dem Schema auf S. 206) gar nicht relativ beweglich sein, bezw. nur durch Deformation der Glieder oder durch Gleiten von Schneiden längs den Pfannen beweglich werden würde.

In den Figuren 185—187, worin A die Aufhängungsschneide der Gegengewichtsschale bedeutet, sind die Hebelarmverhältnisse so angenommen, dass bei Fig. 185 und Fig. 186 wegen $OA = OB$ die Last Q und das Gegengewicht P einander gleich, bei Fig. 187 sogar

$$Q = P\frac{OA}{OC} < P$$

sein würde. Indessen hat es keine Schwierigkeit, die Hebelverhältnisse auch so anzunehmen, dass $Q > P$ ist. Nöthigenfalls kann durch Hinzufügung eines Verjüngungshebels das Verjüngungsverhältniss verkleinert und so insbesondere die Waage als abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel nach dem durch Fig. 188 dargestellten Typus construirt werden. Hier ist $O_1B_1B_2O_2$ das ursprüngliche Trapez, dessen parallele Hebel O_1B_1 und O_2B_2 mit

Fig. 188.



den Schneiden C_1 und C_2, die so liegen, dass

$$\frac{O_1 C_1}{O_1 B_1} = \frac{O_2 C_2}{O_2 B_2}$$

ist, mit Einschaltung einer Zugstange $C_1 D$ die Brücke tragen. Würde dann der Hebel $O_1 B_1$ über O_1 hinaus verlängert und die Aufhängungsschneide A_1 der Gegengewichtsschale an dieser Verlängerung angebracht, so wäre

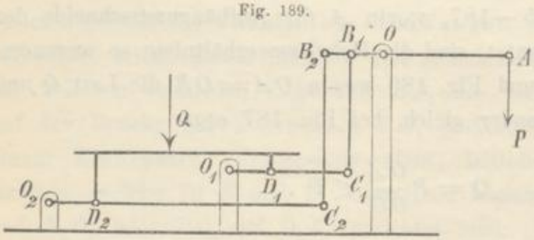
$$Q = P \frac{O_1 A_1}{O_1 C_1}.$$

Wird aber $O_1 B_1$ als einarmiger Hebel vermittels der Zugstange $A_1 B$ mit dem Verjüngungshebel AB verbunden, wie die Figur zeigt, so ist

$$Q = P \frac{OA}{OB} \frac{O_1 A_1}{O_1 C_1}.$$

Derselbe Zweck, ein gewisses Verjüngungsverhältniss $P : Q$ als Produkt von zwei Hebelverhältnissen zu erhalten, während die Bewegung der Brücke stets dem obigen Fundamentalgesetze entsprechend bleibt, kann auch durch eine Waage nach dem Typus Fig. 189 erreicht werden, die mit **Brauer** passend als **Doppeltrapezwaage** bezeichnet sei. Hier sind nämlich $O B_1 C_1 O_1$ und $O B_2 C_2 O_2$ zwei Trapeze, deren Seiten $O B_1$ und $O B_2$ dem Gegengewichtshebel angehören, während die damit parallelen Hebel die Brücke tragen vermittels zwei so liegender Schneiden D_1 und D_2, dass

Fig. 189.



$$\frac{O_1 C_1}{O_1 D_1} : \frac{O_2 C_2}{O_2 D_2} = O B_1 : O B_2$$

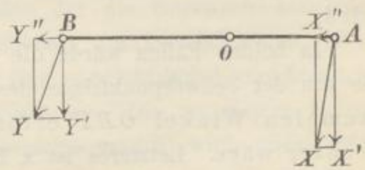
ist und somit

$$Q = P \frac{OA}{OB_1} \frac{O_1 C_1}{O_1 D_1} = P \frac{OA}{OB_2} \frac{O_2 C_2}{O_2 D_2}.$$

Durch Hinzufügung weiterer Hebel nach Art von Fig. 184 kann natürlich auch bei Brückenwaagen das Verhältniss $P : Q$ als Product von mehr als zwei Hebelverhältnissen erhalten werden. Mit dieser Erweiterung stellen dann aber die Figuren 184—189 die Typen dar, nach welchen zusammengesetzte Hebelwaagen in der Regel construirt sind. —

Aehnlich wie bei der einfachen Hebelwaage ist auch bei zusammengesetzten Hebelwaagen die Stabilität und die Empfindlichkeit vor Allem davon abhängig, wie die Schneiden und der Schwerpunkt jedes Hebels gegen einander liegen, ob nämlich bezüglich auf die durch zwei Schneiden des Hebels gehende (gewöhnlich horizontale) Ebene die übrigen Schneiden und der Schwerpunkt über oder unter der Ebene in grösserer oder kleinerer Entfernung von ihr sich befinden. Bei der Schwierigkeit indessen, die an den Hebeln hier unwandelbar festen Schneiden in ganz bestimmte relative Lagen zu bringen, die ohnehin mit den elastischen Deformationen etwas veränderlich sind, wird es vorgezogen, an jedem Hebel die sämmtlichen Schneiden möglichst genau in eine Ebene zu legen, um so mehr, als man dann ausser den Schwerpunktslagen gegen diese Ebenen hier noch ein anderes Hülfsmittel zur Sicherstellung passender Stabilität und Empfindlichkeit zur Verfügung hat, in den Winkeln nämlich, unter welchen die von einem Hebel ausgehenden Verbindungsstangen gegen die Schneidenebene desselben gerichtet werden. Eine Hauptregel in dieser Hinsicht ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Fig. 190.



Es sei AB, Fig. 190, ein um die Schneide O drehbarer Hebel, an welchem sich die in den Schneiden A und B angreifenden Kräfte X und Y von gegebenen Grössen und Richtungen Gleichgewicht halten; es fragt sich, unter welchen Umständen dieses Gleichgewicht stabil ist, falls die 3 Schneiden A, O, B in einer Ebene liegen? Jene Stabilität erfordert, dass bei beliebiger Drehung des Hebels um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi$ im einen oder anderen Sinne die Arbeitsumme der Kräfte X, Y negativ ist. Zerlegt man aber die letzteren in die Componenten X', X'' und Y', Y'' senkrecht zu AB und im Sinne AB, so ist wegen des Gleichgewichtes mit $OA = a,\ OB = b$:

$$X'a = Y'b$$

und deshalb die Arbeitsumme der Kräfte X', Y'

$$= \pm (X'a - Y'b) \sin \Delta\varphi = 0.$$

Die Arbeitsumme der Kräfte X'', Y'' dagegen ist

$$= (X''a - Y''b)(1 - \cos \Delta\varphi) < 0,$$

wenn $\frac{Y''}{X''} > \frac{a}{b}$, folglich $\frac{Y''}{X''} > \frac{Y'}{X'}$ oder $\frac{Y''}{Y'} > \frac{X''}{X'}$,

d. h. wenn der Winkel YBY' grösser, als der Winkel XAX' ist, was u. A. dann immer der Fall wäre, wenn AX auf die andere Seite von AX' fiele, einem negativen Winkel XAX' entsprechend. Das Gleichgewicht der am zweiarmigen Hebel in A und B angreifenden Kräfte X und Y ist folglich stabil, wenn die Richtungslinien dieser Kräfte sich in einem über A und B hinaus im Sinne XA und YB liegenden Punkte schneiden.

Wenn bei unveränderten Richtungslinien der im Gleichgewicht befindlichen Kräfte X, Y und bei unveränderter Grösse von X die Schneide O gegen B hin rückt, so wächst Y mehr und mehr und wird unendlich gross, wenn $OB = b$ bis Null abnimmt. Rückt dann O über B hinaus, so kehrt sich der Sinn von Y um, ohne dass die obige Schlussfolgerung, durch welche das Gleichgewicht als stabil erkannt wurde, wenn Winkel $YBY' >$ Winkel XAX' ist, eine Aenderung erführe; denn die Arbeit von Y'' bleibt negativ, indem diese Kraft im Sinne OB gerichtet bleibt. Daraus ist ersichtlich, dass das Gleichgewicht der Kräfte am einarmigen Hebel dann stabil ist, wenn die Richtungslinie der am kürzeren Arme OB in B angreifenden Kraft Y von der anderen in einem im Sinne BY liegenden Punkte geschnitten wird.

In beiden Fällen würde die Stabilität des Gleichgewichtes, insoweit sie von der Schwerpunktslage des Hebels unabhängig ist, einen etwas stumpfen Winkel OBY erfordern, falls der Winkel OAX ein rechter wäre. Letzteres ist z. B. der Fall bei dem Gegengewichtshebel einer Waage, welcher bei horizontaler Lage der Schneidenebene AOB an der Schneide A eine Pendelschale mit dem Gegengewichte trägt, während bei B eine Zugstange (z. B. BA_1, Fig. 184 oder Fig. 188) angreift; diese muss so gerichtet sein, dass OBA_1 ein etwas stumpfer Winkel ist, wenn der Hebel unabhängig von der Lage seines Schwerpunktes in stabilem Gleichgewichte sein soll. Dadurch, dass dieser Schwerpunkt unter der Schneidenebene liegt, wird die Stabilität erhöht.

Bei zusammengesetzten Hebelwaagen mit verjüngtem Gegengewichte $P < Q$ ist die Stabilität des Gleichgewichtes der Kräfte am Gegengewichtshebel deshalb vorzugsweise massgebend für die Stabilität des Gleichgewichtes der Kräfte P, Q und der Schwerkräfte aller Glieder des Waagenmechanismus, weil der Gegengewichtshebel derjenige ist, der die grössten Neigungsänderungen bei den Schwingungen der Waage erfährt. Wenn bei ihm die Lage des Schwerpunktes hinlänglich tief ist und die Anschlüsse von Zugstangen nach obiger Regel passend gewählt sind, kann das Gleichgewicht der Kräfte an den übrigen Hebeln für sich indifferent oder selbst schon etwas labil sein, ohne dass mit Rücksicht auf die Zwangläufigkeit des ganzen Mechanismus dessen Stabilität dadurch aufgehoben werden müsste.

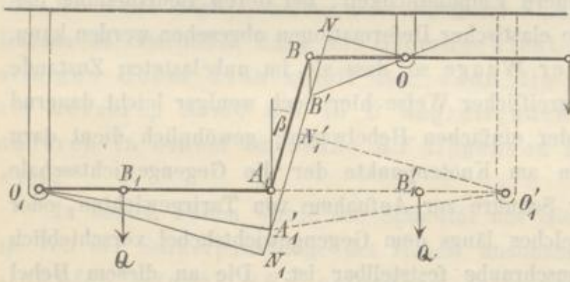
Bei indifferentem Gleichgewicht der Kräfte an einer Waage ist ihre Empfindlichkeit unendlich gross, und liegt es überhaupt in der Natur der Sache, dass ebenso, wie es sich für die einfache Hebelwaage im §. 167 ergeben hatte, so allgemein die Empfindlichkeit einer Waage um so grösser ist, je kleiner die Stabilität, weil, je kleiner der Arbeitsaufwand zur Herbeiführung einer gewissen Configurationsänderung ist, desto grösser umgekehrt die durch einen gewissen Arbeitsaufwand, herrührend von einer gewissen zusätzlichen Last, bewirkte Configurationsänderung sein muss. Der grösseren Stabilität des Gleichgewichtes, die für eine zusammengesetzte Hebelwaage verlangt zu werden pflegt, entspricht somit eine kleinere Empfindlichkeit, bei deren Beurtheilung insbesondere vom Einflusse elastischer Deformationen abgesehen werden kann.

Die Justirung der Waage so, dass sie im unbelasteten Zustande gerade einspielt, ist begreiflicher Weise hier noch weniger leicht dauernd zu erreichen, als bei der einfachen Hebelwaage; gewöhnlich dient dazu entweder ein Schälchen am Knotenpunkte der die Gegengewichtsschale tragenden Ketten oder Schnüre zur Aufnahme von Tarirgewichten, oder ein Schiebegewicht, welches längs dem Gegengewichtshebel verschieblich und durch eine Klemmschraube feststellbar ist. Die an diesem Hebel befindliche Zunge, durch welche das Einspielen markirt wird, pflegt hier in Form einer horizontalen Schneide ausgeführt zu werden, die an einer nahe gegenüber liegenden unbeweglichen Schneide hin und her schwingen kann. Natürlich setzt das dauernde Einspielen der unbelasteten justirten Waage eine bestimmte Aufstellung derselben voraus; um diese bei tragbaren Brückenwaagen leicht controliren zu können, pflegt ein Fadenpendel benutzt zu werden, welches, oben am Waagengestelle hängend, gegen eine unten daran befindliche Marke gerichtet sein muss.

§. 170. Zusammengesetzte Hebelwaage mit Pendelschalen.

Diese dem Typus Fig. 184 entsprechende Waage hat den Zweck, eine Last Q mit Hülfe eines in bestimmtem Verhältnisse leichteren Gegengewichtes P zu wiegen, während beide ebenso wie bei der einfachen Hebelwaage von Pendelschalen getragen werden. Unter der Voraussetzung, dass in der Gleichgewichtslage, bei welcher die Waage einspielt, die sämmtlichen Hebel, d. h. die Ebenen ihrer Keilschneiden horizontal sind, geht zwar aus den Erörterungen des vorigen §. ohne Weiteres hervor, dass die Stabilität einer Waage von der hier in Rede stehenden Art um so grösser, ihre Empfindlichkeit aber um so kleiner ist, je mehr die Winkel OBA_1, $O_1B_1A_2$ (Fig. 184) grösser, als rechte Winkel sind, und je tiefer die Schwerpunkte der Hebel liegen, ferner dass es in beiden Beziehungen vorzugsweise auf den Gegengewichtshebel AB und die von ihm ausgehende Verbindungsstange BA_1 ankommt; indessen bleibt noch übrig, specieller zu untersuchen, ob und wie das Verjüngungsverhältniss $P:Q$ und der Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi$ von verschiedenen Umständen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ abhängen.

Fig. 191.



Dabei werde eine Waage mit nur zwei Verjüngungshebeln vorausgesetzt, dem Gegengewichtshebel AB, Fig. 191, und dem Lasthebel, der entweder die Lage $A_1B_1O_1$ oder die in der Figur gestrichelt angedeutete Lage $A_1B'_1O'_1$ haben kann und in beiden Fällen mit dem Gegengewichtshebel durch die Zugstange BA_1 so zusammenhängt, dass

$$\text{Winkel } OBA_1 = 90^0 + \beta$$

ist. Die Hebellängen seien:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad O_1A_1 = O'_1A_1 = a_1, \quad O_1B_1 = O'_1B'_1 = b_1.$$

Die Waage sei so aufgestellt und justirt, dass sie mit unbelasteten Schalen bei horizontalen Lagen der Hebel im Gleichgewicht ist; eben solches Gleichgewicht finde statt bei Belastung der Schalen beziehungsweise mit P und Q. Wird dann die Last um ΔQ vergrössert, so finde das Gleichgewicht bei einer solchen geänderten Configuration statt, bei welcher die Zugstange BA_1 in die Lage $B'A'_1$ gekommen ist, entsprechend dem Drehungswinkel

$$BOB' = \Delta\varphi \text{ des Gegengewichtshebels,}$$

$$A_1O_1A'_1 \text{ bezw. } A_1O'_1A'_1 = \Delta\varphi_1 \text{ des Lasthebels.}$$

Dabei sei $\Delta\varphi$ so klein, dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$\cos\Delta\varphi = 1, \quad \sin\Delta\varphi = tg\,\Delta\varphi = \Delta\varphi,$$

um so mehr also $\cos\Delta\varphi_1 = 1, \quad \sin\Delta\varphi_1 = tg\,\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1$ gesetzt werden kann. Die Wege BB' und $A_1 A'_1$ der Punkte B und A_1 sind dann als gleiche verticale gerade Linien $= b\Delta\varphi$ zu betrachten und ist

$$\Delta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\Delta\varphi.$$

Sind ferner ON, $O_1 N_1$, $O'_1 N'_1$ normal zu $B'A'_1$, also auch zu BA_1, so sind die Winkel

$$NOB' = \beta + \Delta\varphi, \quad N_1 O_1 A'_1 = \beta - \Delta\varphi_1, \quad N'_1 O'_1 A'_1 = \beta + \Delta\varphi_1,$$

und wenn Z die Spannung der Zugstange bedeutet, insoweit sie nur von den Kräften P und $Q + \Delta Q$ herrührt, so entsprechen dem Gleichgewicht dieser Kräfte bezw. am Gegengewichts- und am Lasthebel die Gleichungen:

$$Zb\cos(\beta + \Delta\varphi) = Pa\cos\Delta\varphi$$

$$Za_1\cos(\beta \mp \Delta\varphi_1) = (Q + \Delta Q)\,b_1\cos\Delta\varphi_1.$$

Aus ihnen folgt durch Division und mit

$$\cos\Delta\varphi = \cos\Delta\varphi_1 = 1, \quad \sin\Delta\varphi = \Delta\varphi, \quad \sin\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1:$$

$$\frac{\cos\beta \pm \sin\beta\,\Delta\varphi_1}{\cos\beta - \sin\beta\,\Delta\varphi} = \left(1 + \frac{\Delta Q}{Q}\right)\frac{Qbb_1}{Paa_1} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

wo, was das doppelte Vorzeichen betrifft, das obere sich auf die Lage $O_1 A_1$, das untere auf die Lage $O'_1 A_1$ des Lasthebels bezieht. Da für $\Delta Q = 0$ auch $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = 0$ ist, folgt

$$1 = \frac{Qbb_1}{Paa_1} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

unabhängig von β, und damit aus Gl. (1):

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sin\beta(\Delta\varphi \pm \Delta\varphi_1)}{\cos\beta - \sin\beta\,\Delta\varphi}$$

oder mit $\Delta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\Delta\varphi$ und bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\frac{1}{\varepsilon} = tg\,\beta\left(1 \pm \frac{b}{a_1}\right)\Delta\varphi; \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,cotg\,\beta\,\frac{a_1}{a_1 \pm b} \quad \ldots\ldots (3).$$

Läge der Punkt B auf der anderen Seite von O, also auf derselben wie A, ebenso B_1 auf der anderen Seite von O_1, also auf der entgegengesetzten wie A_1, so wäre BA_1 eine Druckstange, die dann behufs der Stabilität des Gleichgewichtes in demselben Sinne unter einem gewissen Winkel β gegen die Lothrechte geneigt sein müsste, so dass jetzt OBA_1 ein etwas spitzer Winkel ist; auch für den Empfindlichkeitswinkel $\varDelta\varphi$ würde sich derselbe Ausdruck (3) ergeben. Ihmzufolge ist dieser Winkel $\varDelta\varphi$ im Verhältnisse $a_1 + b : a_1 - b$ grösser, wenn der Lasthebel die Lage $A_1 O'_1$, als wenn er die Lage $A_1 O_1$, Fig. 191, hat. In allen Fällen ist er proportional $cotg\,\beta$ und wird unendlich, indifferentem Gleichgewicht entsprechend, für $\beta = 0$. In diesem Falle kann jedoch $\varDelta\varphi$ auf einen endlichen Betrag reducirt und somit die Stabilität dadurch gesichert werden, dass dem Schwerpunkte S des Hebels AB, dessen Gewicht $= W$ sei, eine gewisse Entfernung $= e$ von der Ebene der Schneiden A, O, B und zwar unterhalb derselben gegeben wird. Ist dann S' die Projection von S auf die Ebene AOB, so kann die in S angreifende Schwerkraft W durch eine gleich grosse in S' angreifende Kraft, die mit den Schwerkräften der übrigen Glieder des Waagenmechanismus beständig im Gleichgewichte bleibt, und durch ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Moment $= We\sin\varDelta\varphi = We\varDelta\varphi$ im Sinne einer Rückgängigmachung des Ausschlagwinkels $\varDelta\varphi$ zu drehen strebt. Der durch das Zulagegewicht $\varDelta Q$ zur Last Q etwas veränderten Gleichgewichtslage entspricht dann die Gleichung:

$$\varDelta Q \frac{b_1}{a_1} b = We\varDelta\varphi$$

und folgt daraus mit $\varDelta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$:

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{bb_1}{ea_1}\frac{Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{a}{e}\frac{P}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Insoweit die Empfindlichkeit von der Richtung der Verbindungsstange gegen die Hebel abhängt, ist sie nach (3) unabhängig von der Belastung der Waage; insoweit sie aber von der Schwerpunktslage des Gegengewichtshebels abhängt, nimmt sie nach (4) mit der Belastung zu, wenn auch nicht proportional derselben, weil in Wirklichkeit wegen der Biegung des Hebels die Entfernung e mit der Belastung etwas wächst. Im Allgemeinen können beide Hülfsmittel zusammenwirken, um eine dem jeweiligen Zwecke entsprechende Empfindlichkeit zu ergeben.

§. 171. Parallelogramm- und Trapezwaage.

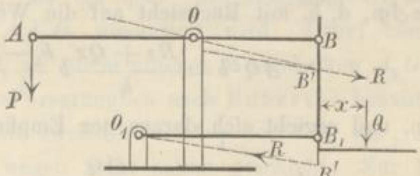
Die Parallelogrammwaage kann als besonderer Fall einer Trapezwaage betrachtet und mag deshalb zunächst für letztere (Fig. 192) der

Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ entwickelt werden, der auch für die Stabilitätsbedingung massgebend ist. Dabei wird angenommen, dass bei horizontalen Lagen des Hebels (Waagebalkens) AB und des Gliedes O_1B_1 die Schwerkräfte aller beweglichen Glieder nebst Schalen für sich im Gleichgewicht sind, ebenso wie die Last Q mit dem Gegengewichte P. Die Gliedlängen seien

$$OA = a, \quad OB = b, \quad O_1B_1 = b_1, \quad BB_1 = h;$$

ferner sei W das Gewicht des Hebels AB und e die Entfernung seines Schwerpunktes von der über ihm liegenden Keilschneidenebene AOB, B das Gewicht der Brücke (Lastschale) und s die Entfernung ihres Schwerpunktes von der lothrechten Geraden BB_1, positiv oder negativ verstanden, jenachdem er im Sinne OB oder BO ausserhalb BB_1 gelegen ist; endlich sei x, ebenso wie s algebraisch verstanden, der Schwerpunktsabstand der Last Q von der Geraden BB_1, während das Gegengewicht P, auf einer Pendelschale ruhend, eine in A angreifende Kraft ist.

Fig. 192.



Bei stabilem Gleichgewichte hat die Vergrösserung der Last um den kleinen Betrag ΔQ eine etwas veränderte Gleichgewichtsconfiguration des Mechanismus mit tiefer gelegener Lastschale zur Folge, entsprechend in Fig. 192 den kleinen Drehungswinkeln

$$BOB' = \Delta\varphi \text{ des Waagebalkens } AB,$$

$$B_1O_1B'_1 = \Delta\varphi_1 = \frac{b}{b_1}\Delta\varphi \text{ des Gliedes } O_1B_1,$$

welche Winkel wieder als so klein angenommen werden, dass

$$\cos\Delta\varphi = \cos\Delta\varphi_1 = 1, \quad \sin\Delta\varphi = \Delta\varphi, \quad \sin\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1$$

gesetzt und somit die Gerade BB_1 als in sich selbst nach $B'B'_1$ verschoben angesehen werden kann. Nun zerfallen die Kräfte B und $Q + \Delta Q$ in ebenso grosse längs BB_1 gerichtete Kräfte und in Kräftepaare mit den Momenten Bs und $(Q + \Delta Q)x$, welche zusammen eine in B'_1 angreifende gegen O_1 gerichtete Kraft und eine damit parallel in B' angreifende, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von der Grösse

$$R = \frac{Bs + (Q + \Delta Q)x}{h\cos\Delta\varphi_1} \text{ nahe } = \frac{Bs + Qx}{h}$$

verursachen. Die in B' angreifende Kraft R wirkt drehend auf den

Hebel AB und zwar unter den Verhältnissen von Fig. 192 ($b_1 > b$) in einerlei Sinn drehend mit dem Gegengewichte P, nämlich mit dem Momente Rr am Hebelarme

$$r = b\,(\Delta\varphi - \Delta\varphi_1) = b\left(1 - \frac{b}{b_1}\right)\Delta\varphi.$$

In demselben Sinne dreht auch das Moment $= We\Delta\varphi$ des Kräftepaares, welches aus der Versetzung der Schwerkraft W des Hebels AB von seinem Schwerpunkte S an dessen Projektion S' auf die Ebene AOB hervorgeht.

Mit Rücksicht darauf, dass die längs BB_1 gerichtete Kraft B nebst dem auf die Schneide B_1 reducirten Gewichte des Gliedes O_1B_1 mit der in S' angreifenden Schwerkraft W und der in A angreifenden Schwere der Gegengewichtsschale im Gleichgewichte ist, dass ebenso auch zwischen der längs BB_1 gerichteten Kraft Q und der in A angreifenden Kraft P Gleichgewicht besteht, muss auch das Moment $= \Delta Q \cdot b$, mit welchem die längs BB_1 gerichtete Kraft ΔQ den Hebel AB zu drehen strebt, $=$ der Summe der entgegengesetzt drehenden Momente Rr und $We\Delta\varphi$, d. h. mit Rücksicht auf die Werthe von R und r:

$$\Delta Q \cdot b = \frac{Bs + Qx}{h}\, b\, \frac{b_1 - b}{b_1}\,\Delta\varphi + We\,\Delta\varphi$$

sein, und ergiebt sich daraus der Empfindlichkeitswinkel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\Delta Q}{\dfrac{Bs + Qx}{h}\,\dfrac{b_1 - b}{b_1} + \dfrac{We}{b}} \\ &= \frac{\Delta Q}{\dfrac{Qx'}{h}\,\dfrac{b_1 - b}{b_1} + \dfrac{We}{b}} \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{B}{Q}s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

Die Empfindlichkeit einer Trapezwaage ($b_1 - b$ nicht $= 0$) ist hiernach abhängig von x, d. h. von der Lage der Last auf der Brücke. Indem ferner die Stabilität einen positiven endlichen Werth von $\Delta\varphi$ erfordert, müssen für $e = 0$, d. h. ohne Mitwirkung des Untergewichts des Waagebalkens AB die Grössen $b_1 - b$ und x' zugleich positiv oder negativ sein. Wenn also die Lastschale so angeordnet ist, dass x' je nach der Lage der Last sowohl positiv wie negativ sein kann (siehe z. B. Fig. 186), müsste die Stabilität entweder durch entsprechendes Untergewicht des Waagebalkens herbeigeführt, oder es muss, wenn bei nicht sehr kleinem Absolutwerthe von x' ein allzu grosser Werth von We dazu nöthig wäre, $b_1 = b$ gemacht werden.

Als reine Trapezwaage, d. h. abgesehen von den verschiedenen Arten abgeleiteter Trapezwaagen, hat in der That nur dieser die Parallelogrammwaage charakterisirende Specialfall $b_1 = b$ praktisches Interesse. Für denselben wird nach Gl. (1):

$$\Delta\varphi = \frac{b}{e}\frac{\Delta Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{b}{e}\frac{Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{a}{e}\frac{P}{W} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (4) im vorigen Paragraph. Die Empfindlichkeit ist von der Lage der Last unabhängig, wesentlich aber abhängig vom Untergewichte des Waagebalkens, das zur Sicherung der Stabilität erforderlich ist.

Diese Parallelogrammwaage ist als sogenannte oberschalige Waage die am allgemeinsten gebräuchliche Waage für den kaufmännischen Detailverkehr, und zwar in der Weise ausgeführt, dass entsprechend $a = b$, also $P = Q$, beide Seiten ganz gleich, beide Schalen zwangläufig geführte Oberschalen sind. Die betreffende typische Figur geht aus Fig. 185 dadurch hervor, dass deren rechte Seite auf der linken Seite des Ständers OO_1 als ein dem Parallelogramm OBB_1O_1 congruentes Parallelogramm OAA_1O_1 wiederholt wird. Dabei können die zwei Glieder O_1A_1 und O_1B_1 zu einem unteren Waagebalken $A_1O_1B_1$ vereinigt werden, wie es bei der ursprünglich nach Roberval benannten solchen gleicharmigen Waage mit zwei Oberschalen der Fall war, aber auch sonst seiner Einfachheit wegen nicht selten geschieht. Zur Vermeidung von Klemmungen oder Gleitungen an den Schneiden müssen dann freilich die zweierlei Gliedlängen OA, OB, O_1A_1, O_1B_1 und AA_1, OO_1, BB_1 mit erhöhter Sorgfalt je unter sich gleich gemacht werden; trotzdem bleibt es ungewiss, weil von unvermeidlichen Zufälligkeiten abhängig, in welchem Maasse die Belastung vom unteren und vom oberen Waagebalken getragen wird, so dass jeder von ihnen zur Inanspruchnahme auf Biegung durch die ganze Belastung ausreichende Dimensionen erhalten muss. Vortheilhafter in diesen Beziehungen ist die Anwendung gesonderter Glieder O_1A_1 und O_1B_1, die nur auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen werden. Auch kann dann dadurch, dass, wie bei der Waage von Westphal, jedes dieser Glieder, z. B. O_1B_1 an beiden Enden mit Doppelschneiden versehen wird so, dass bei O_1 diese zwei Schneiden nicht ganz in gerader Linie liegen, sondern in kleinem Abstande $= 2y$ einander parallel sind, dem betreffenden Gliede die Länge

$$b_1 = b + y \quad \text{oder} \quad b_1 = b - y$$

gegeben werden, jenachdem sie auf Druck oder auf Zug beansprucht, jenachdem also x' in Gl. (1) positiv oder negativ ist. Dadurch kann ohne Beihülfe von Untergewicht des Waagebalkens der doppelten Rücksicht auf Stabilität und auf genügende Empfindlichkeit Rechnung getragen werden, indem nach Gl. (1):

$$\varDelta\varphi = \frac{\varDelta Q}{Q}\frac{h}{x'}\frac{b}{\pm y} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{h}{x'}\frac{b}{\pm y} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

wird. Die Empfindlichkeit ist dann unabhängig von der Belastung, während sie infolge von Untergewicht des Waagebalkens bei genau gleichen Längen $OA = OB = O_1A_1 = O_1B_1$ nach Gl. (2) proportional der Belastung veränderlich ist. —

Um für grössere Lasten die Parallelogrammwaage als verjüngte, z. B. als Decimalwaage herzustellen, braucht nur das Hebelarmverhältniss

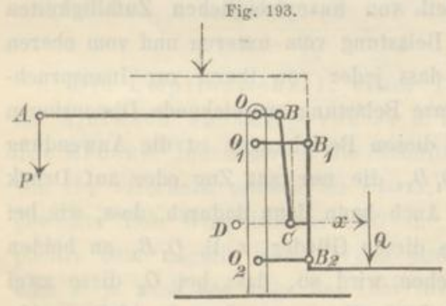
$$\frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} = 10$$

gemacht zu werden. Wird dann die Brücke behufs leichter Aufbringung der Last tief liegend so angeordnet, wie Fig. 192 andeutet, so ist immer x' positiv, also die Stabilität auch ohne Untergewicht des Waagebalkens dadurch zu sichern, dass b_1 etwas $> b$ gemacht wird. Ist etwa $b_1 = b + y$, so ist dann nach Gl. (3):

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{h}{x'}\frac{b}{y} \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{B}{Q}s.$$

Gebräuchlicher ist indessen die Herstellung der Parallelogrammwaage als Decimalwaage mit Hülfe eines besonderen Verjüngungshebels, wie bei der Brückenwaage von George, Fig. 193. Hier ist die durch den Mechanismus $O_1B_1B_2O_2$ parallel geführte Brücke vermittels der Zugstange BC an den Waagebalken AB mit dem Armverhältnisse $OA : OB = 10$ angehängt, und können die Längen O_1B_1, O_2B_2 möglichst genau gleich, übrigens beliebig lang $= b_1$ gemacht werden, indem die Stabilität ohne Beihülfe von Untergewicht des Hebels AB dadurch herbeigeführt werden kann, dass der Winkel OBC etwas $> 90^0$ gemacht wird. Ist nämlich dieser

Fig. 193.



Winkel $= 90^0 + \beta$ und $OB = b$, so ist nach Gl. (3) im vorigen Paragraph der Empfindlichkeitswinkel

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \, cotg \, \beta \, \frac{b_1}{b_1 - b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

weil in Betreff des Gleichgewichts der Kräfte am Hebel AB sich Alles gerade so verhält, als ob die Schwerkraft der Brücke und der Last Q unmittelbar im Punkte C angriffe, dieser aber in einem Kreise mit dem Mittelpunkte D (DC parallel und gleich $O_1B_1 = O_2B_2$) beweglich und somit der Mechanismus $AOBCD$ von jenem $AOBA_1O'_1$, Fig. 191, nicht verschieden ist, wenn man darin B'_1 mit A_1 zusammenfallen lässt. Von den Gliedern O_1B_1 und O_2B_2 wird jenes gezogen, dieses gedrückt mit einer Kraft

$$= \frac{Bs + Qx}{h},$$

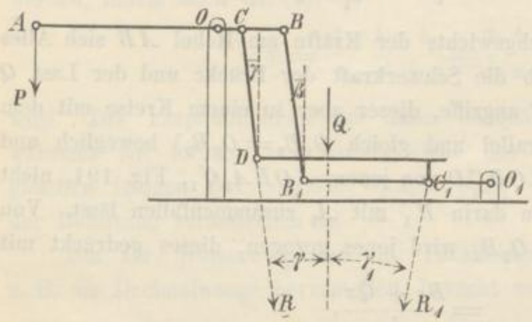
die somit um so kleiner ist, je grösser $O_1O_2 = B_1B_2 = h$.

Bei der constructiven Ausführung der Waage von George sind die Glieder O_1B_1 und O_2B_2 je doppelt vorhanden, ebenso die Zugstange BC, indem der Hebel AB gegen B hin gegabelt ist und die Keilschneiden O, B in je zwei in gerader Linie liegende Schneiden zerlegt sind. Häufiger, als mit tief liegender Brücke zur Aufnahme grösserer Lasten, findet sich übrigens diese Waage in Deutschland mit hoch liegender Brücke (in Fig. 193 punktirt angedeutet) als Tischwaage für kleinere Lasten im Gebrauch; dabei ist x' negativ, O_1B_1 auf Druck, O_2B_2 auf Zug in Anspruch genommen.

§. 172. Abgeleitete Trapezwaagen.

Unter diesem Namen seien hier nicht nur die im §. 169 im engeren Sinne so genannten abgeleiteten Trapezwaagen, sondern auch Doppeltrapezwaagen, die einen und anderen event. mit Verjüngungshebel, verstanden. Was aber zunächst die abgeleiteten Trapezwaagen im engeren Sinne betrifft, so können sie unterschieden werden als solche, bei denen die nicht parallelen Seiten des zu Grunde liegenden Trapezes OBB_1O_1 sich ausserhalb oder zwischen den parallelen Seiten schneiden, somit OB und O_1B_1 gleich gerichtet sind (wie in Fig. 187) oder entgegengesetzt gerichtet (wie bei den Trapezen $OB_1C_1O_1$ und $OB_2C_2O_2$ in Fig. 189), ferner als solche, bei denen die zwischen C und C_1 eingeschaltete Stange CD bezw. C_1D bei C an den Gegengewichtshebel OB oder (wie in Fig. 187) bei C_1 an den Führungshebel O_1B_1 angehängt ist.

Fig. 194.



Bei folgender Untersuchung der Stabilität und Empfindlichkeit solcher Waagen werde von dem gewöhnlichsten, durch Fig. 194 dargestellten Falle ausgegangen, dass OB und O_1B_1 entgegengesetzt gerichtet sind und dass die eingefügte Stange (CD) am Gegengewichtshebel angehängt ist. Dabei sei:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad O_1B_1 = b_1, \quad O_1C_1 = c_1,$$

also nach §. 169:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} \text{ und } \frac{Q}{P} = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

im Gleichgewichtszustande mit horizontalen Hebeln, falls die unbelastete Waage für sich in gleicher Weise einspielt.

Wird die Kraft Q in die durch C gehende Componente R und die durch C_1 gehende Componente R_1 zerlegt, so ist die Richtungslinie der einen (die von R in Fig. 194) durch die Richtung der von C oder C_1 ausgehenden Koppelstange (CD in Fig. 194) gegeben und dadurch dann auch die Richtungslinie der anderen Componente bestimmt, weil beide sich in einem Punkte der Richtungslinie von Q schneiden. Hiernach seien für die mittlere Gleichgewichtslage (bei horizontalen Hebeln) die Winkel

$$OCR = 90^0 + \gamma, \quad OBB_1 = O_1B_1B = 90^0 + \beta, \quad O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1.$$

Ist das Gleichgewicht stabil, so findet es, wenn Q an derselben Stelle durch $Q + \Delta Q$ ersetzt wird, bei etwas veränderter Configuration statt, indem die Hebel OB und O_1B_1 bezw. um die Winkel $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_1$ abwärts gedreht werden, welche so klein seien, dass

$$\cos\Delta\varphi = \cos\Delta\varphi_1 = 1, \quad \sin\Delta\varphi = \Delta\varphi, \quad \sin\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1 \ldots (2)$$

gesetzt werden kann. Die Punkte B, C, B_1, C_1, D haben sich dabei um kleine Strecken vertical abwärts bewegt und ist

$$b\,\Delta\varphi = b_1\,\Delta\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

obige Winkel aber sind übergegangen in:

$$\left.\begin{array}{ll} OCR = 90^0 + \gamma + \varDelta\varphi, & OBB_1 = 90^0 + \beta + \varDelta\varphi \\ O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1 + \varDelta\varphi_1, & O_1B_1B = 90^0 + \beta - \varDelta\varphi_1 \end{array}\right\} \ldots (4).$$

Das Moment, mit welchem die Last $Q + \varDelta Q$ den Hebel AB zu drehen strebt (im Sinne einer Vergrösserung von $\varDelta\varphi$), kann bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung zerlegt werden in das Moment der in C angreifenden zusätzlichen Last $\varDelta Q$ und in die Momente, welche von den Componenten R, R_1 der Kraft Q herrühren. Letztere sind zusammen:

$$M = Rc \sin OCR + R_1 c_1 \sin O_1C_1R_1 \frac{b \sin OBB_1}{b_1 \sin O_1B_1B}$$

oder mit Rücksicht auf (4) und (2):

$$M = Rc(\cos\gamma - \sin\gamma\,\varDelta\varphi) + R_1c_1(\cos\gamma_1 - \sin\gamma_1\,\varDelta\varphi_1)\frac{b}{b_1}\frac{\cos\beta - \sin\beta\,\varDelta\varphi}{\cos\beta + \sin\beta\,\varDelta\varphi_1}$$

oder gemäss Gl. (1) und analog (2), da auch β, γ und γ_1 ebenso wie $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\varphi_1$ stets sehr kleine Winkel sind:

$$M = Rc(1 - \gamma\,\varDelta\varphi) + R_1c(1 - \gamma_1\,\varDelta\varphi_1)\frac{1 - \beta\,\varDelta\varphi}{1 + \beta\,\varDelta\varphi_1}$$

$$= Rc(1 - \gamma\,\varDelta\varphi) + R_1c[1 - \gamma_1\,\varDelta\varphi_1 - \beta(\varDelta\varphi + \varDelta\varphi_1)]$$

mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung, oder endlich, da mit derselben Annäherung, mit welcher $\cos\gamma = \cos\gamma_1 = 1$ und $\sin\gamma = \gamma$, $\sin\gamma_1 = \gamma_1$ gesetzt wurde, auch

$$R\gamma = R_1\gamma_1 \quad \text{und} \quad R + R_1 = Q \;\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

ist, $$M = Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)(\varDelta\varphi + \varDelta\varphi_1)$$

$$= Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)\left(1 + \frac{b}{b_1}\right)\varDelta\varphi.$$

Nun ist die Bedingung des Gleichgewichtes der Kräfte am Hebel AB in seiner geänderten Gleichgewichtslage:

$$\varDelta Q \cdot c + M - Pa - M' = 0,$$

unter M' das Moment verstanden, mit welchem die in stabilem Gleichgewichte befindlichen Schwerkräfte der beweglichen Glieder den Hebel AB der unbelasteten Waage in seine mittlere Gleichgewichtslage zurückzudrehen streben. Die Einsetzung des Werthes von M giebt:

$$\varDelta Q \cdot c + Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)\frac{b_1 + b}{b_1}\varDelta\varphi - Pa - M' = 0$$

oder, da für $\varDelta Q = 0$ auch $\varDelta\varphi = 0$ und $M' = 0$, also in Uebereínstimmung mit Gl. (1)

$$Qc = Pa$$

ist, und wenn ferner $M' = Kc\Delta\varphi$ gesetzt wird:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{R_1(\beta + \gamma_1)\frac{b_1 + b}{b_1} + K} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Hieraus folgt, dass wenn bei der durch Fig. 194 dargestellten Anordnung der abgeleiteten Trapezwaage, überhaupt bei entgegengesetzten Richtungen der parallelen Trapezseiten OB, O_1B_1 das Gleichgewicht der Kräfte ohne Beihülfe der Stabilität der unbelasteten Waage ($K = 0$) stabil sein soll, die Winkelsumme $\beta + \gamma_1$ positiv sein muss. Wenn aber die eingefügte Koppel an den Gegengewichtshebel angeschlossen ist (wie die Zugstange CD in Fig. 194), so kann je nach der Lage der Last auf der Brücke der Absolutwerth von γ_1 sehr verschieden, insbesondere auch = Null sein, woraus folgt, dass β und γ_1 je für sich positiv sein müssen, also auch, da γ und γ_1 gleichzeitig positiv oder negativ (die Winkel OCR und $O_1C_1R_1$ gleichzeitig stumpf oder spitz) sind, dass in Fig. 194 die Winkel β und γ positiv, d. h. die Winkel OBB_1 und OCD stumpf sein müssen.

Auf ähnliche Weise kann in anderen Fällen die Stabilität geprüft werden. Nur ist in Gl. (6), wenn die Trapezseiten OB, O_1B_1 gleich gerichtet sind, b_1 durch $-b_1$ und γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen, falls die Winkel β, γ, γ_1 algebraisch immer so verstanden werden, dass

$$OBB_1 = 90^0 + \beta, \quad OCR = 90^0 + \gamma, \quad O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1 \quad . . (7)$$

ist, unter R und R_1 die beziehungsweise durch C und C_1 gehenden Componenten von Q verstanden. Die Nothwendigkeit des Ersatzes von b_1 durch $-b_1$ in diesem Falle ist ohne Weiteres einleuchtend und analog dem doppelten Vorzeichen in Gl. (3), §. 170, mit Bezug auf die Doppelfigur 191; dass aber auch γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen ist, entspricht dem Umstande, dass, während bei entgegengesetzt gerichteten parallelen Trapezseiten (Fig. 194) die Winkel OCR und $O_1C_1R_1$ gleichzeitig stumpf oder spitz sind, von denselben bei gleich gerichteten parallelen Trapezseiten (Fig. 187) der eine stumpf, wenn der andere spitz ist. Allgemein ist also der Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels einer abgeleiteten Trapezwaage:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{R_1(\beta \pm \gamma_1)\frac{b_1 \pm b}{b_1} + K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Allgemein kann man jetzt sagen, dass das Gleichgewicht der Kräfte P, Q unabhängig von der Stabilität des Gleichgewichtes der unbelasteten Waage stabil ist, wenn $\beta \pm \gamma_1$ und $b_1 \pm b$ gleichzeitig positiv oder negativ sind; ist z. B. bei gleich gerichteten parallelen Trapezseiten $b_1 < b$, so muss $\beta - \gamma_1$ negativ sein u. s. f.

Nach Gl. (8) ist der Empfindlichkeitswinkel im Allgemeinen abhängig von der Lage der Last auf der Brücke, da hiermit R_1 und γ_1 veränderlich sind. Nun ist aber wegen $R_1(\pm \gamma_1) = R\gamma$ und $R + R_1 = Q$ nach Gl. (5):

$$R_1(\beta \pm \gamma_1) = R_1\beta + R\gamma = Q\beta,$$

wenn $\beta = \gamma$ gemacht wird, und wird dann unabhängig von der Lage der Last:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{Q\beta\frac{b_1 + b}{b_1} + K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

insbesondere mit $K = 0$ und $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\,\frac{b_1}{b_1 + b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

analog Gl. (3) im §. 170 mit $cotg\,\beta = \frac{cos\,\beta}{sin\,\beta} = \frac{1}{\beta}$. Natürlich kann aber die Bedingung $\beta = \gamma$ nur dann stets erfüllt werden, wenn γ ebenso wie β ein durch die Construction bestimmter, von der zufälligen Lage der Last auf der Brücke unabhängiger Winkel ist, wenn also die Koppel bei C an den Gegengewichtshebel angeschlossen wird, wie es u. A. bei der Waage gemäss Fig. 194 der Fall ist. —

Die ihrem Wesen nach durch diese Figur 194 dargestellte abgeleitete Trapezwaage ist die sehr verbreitete Decimalwaage von Quintenz oder auch sogenannte Strassburger Brückenwaage. Dem Obigen zufolge ist sie behufs der Stabilität des Gleichgewichtes ohne Hülfe von Untergewicht der Waagebalken und behufs gleicher Empfindlichkeit für jede Lage der Last auf der Brücke so zu construiren, dass die Winkel OBB_1 und OCD gleich gross und etwas $> 90^0$ sind, während die Unabhängigkeit des Verjüngungsverhältnisses $P : Q = OC : OA = 1 : 10$ von jener Lage der Last an die Bedingung $OC : OB = O_1C_1 : O_1B_1$ geknüpft ist.

Was die mancherlei Variationen der abgeleiteten Trapezwaage betrifft, so ist zu bemerken, dass sie sich nicht nur insofern unterscheiden können, als OB und O_1B_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, die Brücke durch eine Koppel mit OB oder mit O_1B_1 verbunden,

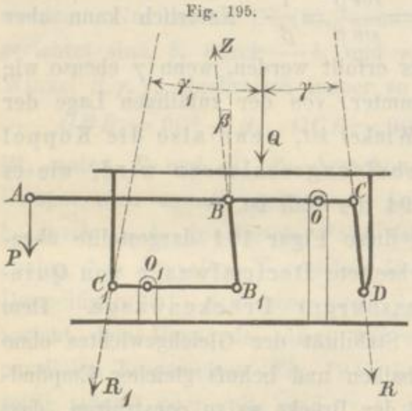
$$\frac{OB}{O_1B_1} \lessgtr 1, \quad \frac{OC}{OB} = \frac{O_1C_1}{O_1B_1} \lessgtr 1$$

ist, sondern auch insofern, als die Stangen BB_1 und CD bezw. C_1D entweder, wie es bei Fig. 194 und überhaupt gewöhnlich der Fall ist, auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen sind. Auch durch letzteren Unterschied werden die obigen Schlussfolgerungen nicht berührt, falls nur die Winkel β, γ, γ_1 auf entsprechende Weise algebraisch verstanden werden. Was γ und γ_1 betrifft, so wurden diese Winkel durch die Definitionsgleichungen (7) bereits ausdrücklich auf die Richtungen der Kraftcomponenten R, R_1 von Q bezogen; dagegen muss die Definition des Winkels $\beta = OBB_1 - 90^0$, die sich auf die Voraussetzung bezog, dass die Richtung BZ der durch die Stange BB_1 auf den Gegengewichtshebel übertragenen Kraft mit der Richtung von B gegen B_1 übereinstimmt, nachträglich durch die Definition:

$$\text{Winkel } OBZ = 90^0 + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7,\text{a})$$

ersetzt werden, um den Ausdruck (8) von $\varDelta\varphi$ mit den daraus gezogenen Folgerungen allgemein gültig bleiben zu lassen.

Fig. 195.



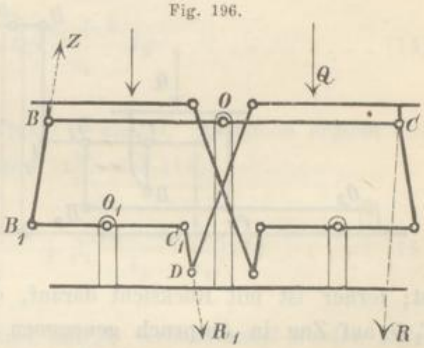
Eine hierher gehörige Variation der abgeleiteten Trapezwaage ist die durch Fig. 195 im Princip dargestellte Waage von Pellenz. Sie geht aus der Waage von Quintenz (Fig. 194) dadurch hervor, dass die Schneiden B und B_1 auf die anderen Seiten von O und O_1 verlegt werden. Indem aber jetzt die Verbindungsstange BB_1 auf Druck beansprucht wird, ist der Winkel OBB_1 etwas $< 90^0$ zu machen, so dass BB_1 und CD nach wie vor parallel bleiben. Der Empfindlichkeitswinkel ohne Rücksicht auf Untergewicht der Hebel ist dann wie bei der Quintenz-Waage nach Gl. (10):

$$\varDelta\varphi \doteq \frac{1}{\varepsilon\beta}\,\frac{b_1}{b_1+b}, \quad \text{insbesondere} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon\beta} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

wenn bei der Waage von Pellenz $b = b_1$ gemacht wird.

Aehnlich den im vorigen Paragraph besprochenen oberschaligen Parallelogrammwaagen für den kaufmännischen Detailverkehr, entsprechend $P=Q$, ist auch die abgeleitete Trapezwaage als oberschalige Gleichwaage, wie sie mit Brauer ihrem Wesen nach im Allgemeinen bezeichnet werde, mehrfach im Gebrauch. Besonders verbreitet ist die Waage von Pfanzeder, bezw. von Gebr. Pfitzer: Fig. 196. Sie entspricht mit symmetrischer Verdoppelung dem Falle, dass die parallelen Seiten OB und O_1B_1 des zu Grunde liegenden Trapezes gleich gerichtet sind, dass also in Gl. (8) die unteren Vorzeichen gelten. Jede Schale wird unmittelbar vom Waagebalken und durch Vermittlung der Koppel vom Führungshebel getragen, z. B. die rechtseitige Schale, Fig. 196, bei C vom Waagebalken und vermittels der Koppel C_1D bei C_1 vom Führungshebel. Von den Componenten R, R_1 der Kraft Q hat letztere die Richtung C_1D, erstere die Richtung von C gegen den Schnittpunkt von Q und R_1; die Verbindungsstange BB_1 wird auf Druck beansprucht. Die Stabilität erfordert einen positiven Werth des Nenners im Ausdrucke (8) von $\Delta\varphi$, worin die unteren Vorzeichen gelten, also ohne Beihülfe von Untergewicht ($K=0$) mit Rücksicht darauf, dass hier b_1-b negativ ist, auch einen negativen Werth von $\beta-\gamma_1$. Somit muss

Fig. 196.



$$\gamma_1>\beta, \text{ d. h. Winkel } O_1C_1R_1>OBZ$$

sein. Dazu ist es zwar nicht nöthig, dass $O_1C_1R_1$ etwas stumpf, OBZ etwas spitz sei, doch ist es deshalb zweckmässig, weil dann OCR etwas spitz und somit möglichst angenähert der Bedingung $OBZ=OCR$ $(\beta=\gamma)$ für die Unabhängigkeit des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ von der Angriffsstelle der Last Genüge zu leisten ist. —

Eine abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel wurde im §. 169 durch die typische Figur 188 veranschaulicht. Für dieselbe ist, wenn

$$OA=a \qquad OB=b$$
$$O_1A_1=a_1 \qquad O_1B_1=b_1 \qquad O_1C_1=c_1$$
$$O_2B_2=b_2 \qquad O_2C_2=c_2$$

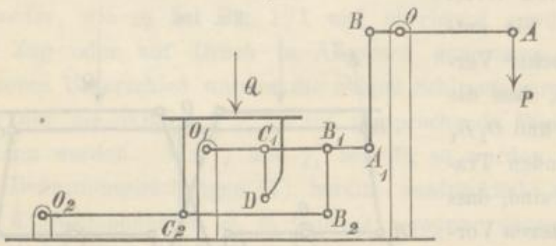
gesetzt wird: $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$; $\frac{Q}{P} = \frac{a}{b}\frac{a_1}{c_1}$ . . . . (12).

Setzt man ferner die Winkel:

$$OBA_1 = 90^0 + \beta,\quad O_1B_1B_2 = 90^0 + \beta_1,\quad O_1C_1D = 90^0 + \gamma_1,$$

so hat die Annahme $\beta_1 = \gamma_1$ (analog der obigen Annahme $\beta = \gamma$ mit Bezug auf Fig. 194) wieder zur Folge, dass die Empfindlichkeit von der Lage der Last Q auf der Brücke unabhängig

Fig. 188.



ist; ferner ist mit Rücksicht darauf, dass die Stangen BA_1, B_1B_2 und C_1D auf Zug in Anspruch genommen werden, das Gleichgewicht unabhängig von Untergewicht der Hebel stabil, wenn β und $\beta_1 = \gamma_1$ kleine positive Winkel sind. Nach einer im §. 169 gemachten allgemeinen Bemerkung sind indessen die Winkel β_1, γ_1 von untergeordnetem Einflusse auf diese Stabilität, so dass es genügt, nur den Winkel OBA_1 etwas stumpf zu machen, während B_1B_2 und C_1D für die mittlere Gleichgewichtslage rechtwinklig gegen O_1A_1 gerichtet werden.

Vollständig ergiebt sich im Falle $\beta_1 = \gamma_1$ der Einfluss von β und β_1 auf die Empfindlichkeit durch folgende Ueberlegung, wobei mit $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_1$ die kleinen Winkel bezeichnet seien, um welche die Hebel OA und O_1A_1 durch das kleine Zulagegewicht ΔQ auf der Brücke gedreht werden. Wäre $\beta = \beta_1 = 0$, so wäre, abgesehen von Untergewicht der Hebel, das Gleichgewicht indifferent. Ist nur $\beta = 0$, so wird nur durch β_1 die Stabilität bedingt und verhält sich in Beziehung auf dieselbe Alles gerade so, als ob das Gegengewicht vertical aufwärts gerichtet in A_1 oder in einem auf der anderen Seite von O_1 liegenden Punkte des Hebels O_1B_1 vertical abwärts gerichtet angriffe, d. h. es verhält sich die Waage bezüglich der Stabilität wie eine abgeleitete Trapezwaage ohne Verjüngungshebel, so dass nach obiger Gleichung (9) mit $K = 0$, ferner mit dem unteren Vorzeichen (gleichen Richtungen der parallelen Trapezseiten O_1B_1 und O_2B_2 entsprechend) und bei Substitution von b_1 für b, b_2 für b_1, β_1 für β, $\Delta\varphi_1$ für $\Delta\varphi$:

$$\Delta Q = Q\beta_1\frac{b_2 - b_1}{b_2}\Delta\varphi_1 = Q\beta_1\frac{b_2 - b_1}{b_2}\frac{b}{a_1}\Delta\varphi \quad . . . . . (13)$$

ist. Wäre dagegen nur $\beta_1 = 0$, so wäre die Stabilität nur von der Hebelcombination $AOBA_1O_1$ analog Fig. 191 abhängig, während $Q + \Delta Q$ in C_1 (entsprechend dem Punkte B_1 in Fig. 191) angreifend zu denken wäre; nach §. 170, Gl. (3) wäre dann bei Substitution von $\frac{\Delta Q}{Q}$ für $\frac{1}{\varepsilon}$ und von $\frac{1}{\beta}$ für $cotg\,\beta$:

$$\Delta Q = Q\beta \frac{a_1 + b}{a_1} \Delta\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Mit Rücksicht auf die kleinen Winkel β und β_1 zusammen ergiebt sich also durch Addition der Gleichungen (13) und (14):

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon} = \left(\beta \frac{a_1 + b}{a_1} + \beta_1 \frac{b_2 - b_1}{b_2} \frac{b}{a_1}\right) \Delta\varphi \quad \ldots\ldots (15),$$

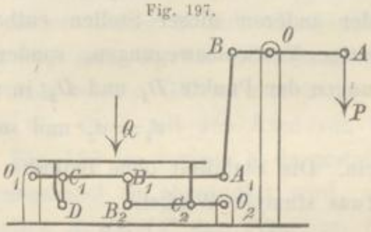
worin aber näherungsweise das Glied mit β_1 vernachlässigt werden kann, weil das Verhältniss seines Coefficienten zu demjenigen des Gliedes mit β

$$= \frac{b_2 - b_1}{b_2} \frac{b}{a_1 + b}$$

wesentlich < 1 ist.

Eine bessere Ausnutzung des Raumes, nämlich kleinere Horizontalausdehnung der Waage bei grösserer Länge der Brücke, als bei der Construction gemäss Fig. 188, kann dadurch erreicht werden, dass dem Hebel O_2B_2 die entgegengesetzte Lage gegeben wird, wie Fig. 197 zeigt. Diese Form der abgeleiteten

Fig. 197.

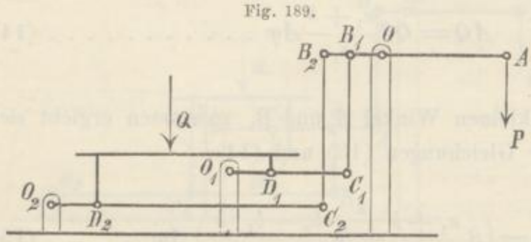


Trapezwaage mit Verjüngungshebel ist besonders in Frankreich gebräuchlich, wobei auch oft die Koppel C_1D weggelassen, die Brücke also unmittelbar bei C_1 vom Hebel O_1B_1, bei C_2 vom Hebel O_2B_2 unterstützt wird, freilich nicht zum Vortheil der betreffenden Schneiden, die dann bei den Schwingungen der Waage auf den Pfannen etwas gleiten müssen. In obigen Gleichungen (13) und (15) ist für den Fall der Figur 197, indem jetzt die parallelen Seiten O_1B_1, O_2B_2 des zu Grunde liegenden Trapezes $O_1B_1B_2O_2$ entgegengesetzt gerichtet sind, $b_2 + b_1$ für $b_2 - b_1$ zu setzen. —

Für die Doppeltrapezwaage, dargestellt im §. 169 durch die schematische Figur 189, ergab sich daselbst, wenn

$$OA = a$$
$$OB_1 = b_1 \qquad O_1C_1 = c_1 \qquad O_1D_1 = d_1$$
$$OB_2 = b_2 \qquad O_2C_2 = c_2 \qquad O_2D_2 = d_2$$

Fig. 189.



gesetzt wird, als Bedingung dafür, dass die Punkte D_1 und D_2 gleiche Verticalbewegungen haben und dass somit das Verhältniss $Q:P$ von der Lage der Last auf der Brücke unabhängig ist:

$$\frac{c_1}{d_1} : \frac{c_2}{d_2} = b_1 : b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16),$$

und zwar ist dann:

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b_1}\frac{c_1}{d_1} = \frac{a}{b_2}\frac{c_2}{d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Damit aber zur Verhinderung von Gleitungen der Schneiden auf den Pfannen bei D_1 und D_2 die Einschaltung einer Koppel an der einen oder anderen dieser Stellen entbehrlich sei, müssen nicht nur gleichzeitige Verticalbewegungen, sondern auch gleichzeitige Horizontalbewegungen der Punkte D_1 und D_2 in gleichem Sinne gleich gross, muss also:

$$d_1 = d_2 \text{ und somit } c_1 : c_2 = b_1 : b_2 \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

sein. Die Stabilität ohne Beihülfe von Untergewicht der Hebel erfordert etwas stumpfe Winkel:

$$OBC_1 = 90^0 + \beta_1 \quad \text{und} \quad OBC_2 = 90^0 + \beta_2.$$

Der durch ein Zulagegewicht $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ auf der Brücke bewirkte Neigungswinkel des Gegengewichtshebels AOB_1B_2 wäre dann nach §. 170, Gl. (3) mit Bezug auf Fig. 191 daselbst, jenachdem die ganze Last nur bei D_1 auf den Hebel O_1C_1 oder nur bei D_2 auf den Hebel O_2C_2 drückte,

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon\beta_1}\frac{c_1}{c_1 + b_1} \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi_2 = \frac{1}{\varepsilon\beta_2}\frac{c_2}{c_2 + b_2},$$

wenn $cotg\,\beta_1 = \frac{1}{\beta_1}$ und $cotg\,\beta_2 = \frac{1}{\beta_2}$ gesetzt wird. In der That liegt der durch $\varDelta Q$ bedingte Neigungswinkel $\varDelta\varphi$ des Gegengewichtshebels zwischen $\varDelta\varphi_1$ und $\varDelta\varphi_2$, der einen oder anderen Grenze näher kommend, je nach der Lage der Last auf der Brücke, so dass er von dieser unabhängig, wenn $\varDelta\varphi_1 = \varDelta\varphi_2$ ist. Das ist, wenn die Bedingung (18) erfüllt ist, der Fall für $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, und zwar ist dann der Empfindlichkeitswinkel:

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{c_1}{c_1+b_1} = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{c_2}{c_2+b_2} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

für jede Belastungsweise der Brücke.

§. 173. Zusammengesetzte Hebelwaagen mit geschränkten Axen.

Bei allen in den vorhergehenden Paragraphen durch die Figuren 184—197 im Princip dargestellten Beispielen zusammengesetzter Hebelwaagen wurden die Axen (Schneiden) aller Hebel parallel angenommen, die kinematische Kette des Waagenmechanismus als ebene Drehkörperkette, wodurch die möglichst widerstandslose zwangläufige Beweglichkeit in der That bei einfachster Construction, mit möglichst wenig Axen und Gliedern erreicht werden kann. Die Rücksicht auf die Gedrungenheit der Anordnung, auf das Raumbedürfniss und auf zweckmässige Zugänglichkeit der Brücke lässt jedoch oft die Anwendung von Gliedern mit geschränkten, insbesondere mit rechtwinklig geschränkten Axen vorziehen, trotzdem dass dann die Verbindung zweier solcher in sich schneidenden Verticalebenen schwingenden Glieder G_1 und G_2 die Einfügung von Verbindungsgliedern oder wenigstens eines solchen Gliedes mit Axen erfordert, die theils mit den Axen von G_1, theils mit den Axen von G_2 parallel sind. Wenn z. B. die durch Fig. 197 im vorigen §. dargestellte abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel so abgeändert wird, wie es einer Drehung von 90^0 des Theiles A_1BOAP der Figur um die durch den Mittelpunkt der Schneide A_1 gehende verticale Gerade entsprechen würde, so wären jetzt die Axen A, O, B gegen die übrigen rechtwinklig geschränkt und wäre jetzt der Hebel O_1A_1 mit der Zugstange BA_1 durch ein bei A_1 einzufügendes Glied zu verbinden, welches ausser der Axe A_1 noch eine mit B, O, A parallele Axe A' enthält. Eine kleine Verschiebung dieses Verbindungsgliedes A_1A' gegen die Zugstange BA' längs der Axe A' ist dadurch zwar nicht ausgeschlossen, aber sie ist bei sehr kleinem Drehungswinkel $\varDelta\varphi_1$ des Hebels O_1A_1 so klein

$$= a_1(1 - \cos\varDelta\varphi_1) = \frac{1}{2}a_1(\varDelta\varphi_1)^2,$$

dass sie durch eine kleine Biegung der Stange BA' ersetzt und verhindert werden kann, falls letztere nur genügend lang ist.

Um eine passende Stabilität und Empfindlichkeit zu erzielen, genügt es auch bei der hier besprochenen Modification, mit welcher die Brückenwaage Fig. 197 in der That gewöhnlich ausgeführt wird, nur den Winkel OBA_1 ($= OBA'$, sofern A_1 und A' sehr nahe beisammen liegen) für die mittlere Gleichgewichtslage etwas $> 90^0$, etwa $= 90^0 + \beta$ zu machen, während B_1B_2 und C_1D rechtwinklig gegen O_1A_1, somit vertical gerichtet werden. Der Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels, nämlich des durch ein Zulagegewicht $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ auf der Brücke bewirkten Neigungswinkels $\Delta\varphi$ des Gegengewichtshebels AB, erfährt durch die veränderte Lage des letzteren eine gewisse Aenderung. Wären nämlich alle Axen parallel, so wäre nach Gl. (15) im vorigen §. mit $\beta_1 = 0$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta} \frac{a_1}{a_1 + b}$$

gemäss Gl. (3), §. 170. Aus der Ableitung dieser Gleichung im §. 170 ist aber ersichtlich, dass der Factor $\frac{a_1}{a_1+b}$ nur davon herrührt, dass durch den dem Neigungswinkel $\Delta\varphi$ von OA entsprechenden Neigungswinkel $\Delta\varphi_1$ von O_1A_1 zugleich auch das Moment der in der Stange BA_1 herrschenden Zugkraft Z für die Axe O_1 geändert wird, während hier bei rechtwinklig geschränkten Axen O und O_1 mit der auch dort zugelassenen Annäherung, mit welcher $\cos\Delta\varphi_1 = 1$ gesetzt werden kann, das fragliche Moment unverändert

$$= Z\cos\beta \,.\, a_1$$

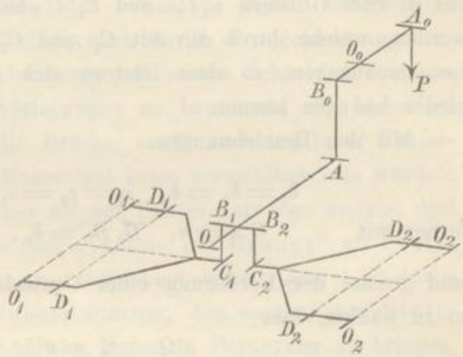
unabhängig von $\Delta\varphi_1$ ist. Aus Gl. (3), §. 170, geht also der hier gültige Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ dadurch hervor, dass $\Delta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\Delta\varphi = 0$, d. h. $\frac{b}{a_1} = 0$ und somit gesetzt wird:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In der That ist die hier in Rede stehende rechtwinklige Richtung des Lasthebels gegen den Gegengewichtshebel AB gewissermassen das Mittel zwischen den entgegengesetzten Richtungen A_1O_1 und $A_1O'_1$ (Fig. 191) desselben, für welche der zu $\frac{1}{\varepsilon\beta}$ hinzutretende Factor im Ausdrucke von

$\Delta\varphi$ im einen Falle $= \frac{a_1}{a_1 + b}$, im andern $= \frac{a_1}{a_1 - b}$ ist, während er hier als Mittel $= 1$ wird. —

Fig. 198.



Besonders gebräuchlich ist die Anordnung von Hebeln mit geschränkten Axen bei Centesimalwaagen; die durch Fig. 198 mit Weglassung der Brücke und der Stützen für die Schneiden $O_0, O, O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ schematisch und perspectivisch dargestellte Centesimalwaage von Rollé und Schwilgué diene als Beispiel. Die rechtwinklige Richtung des Zwischenhebels OA gegen die einander gleichen und entgegen gerichteten Dreieckshebel $O_1 O_1 C_1$ und $O_2 O_2 C_2$, welche bei $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ die Brücke tragen, kann hier u. A. dadurch motivirt sein, dass die Brücke von den schmaleren Seiten $O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ her (z. B. zum Auf- und Abfahren eines zu wiegenden Fuhrwerks) frei zugänglich sein soll. Die Waage ist als besonderer Fall einer Doppeltrapezwaage mit Verjüngungshebel zu betrachten; sie unterscheidet sich von der Doppeltrapezwaage, Fig. 189, dadurch, dass der Hebel OA, der dort zweiarmig, hier behufs seines Anschlusses an den Verjüngungs- bezw. Gegengewichtshebel $B_0 A_0$ durch die Zugstange AB_0 einarmig gemacht ist, ferner dadurch, dass mit Benutzung der Buchstabenbezeichnungen des vorigen Paragraph hier

$$b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2$$

gemacht, und dass die Hebel $O_1 C_1$ und $O_2 C_2$ hier nicht gleich, sondern entgegengesetzt gerichtet sind. Letzterer Umstand hat zur Folge, dass trotz der Gleichheit von d_1 und d_2 hier die Entfernung der Schneiden $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ bei den Schwingungen des Mechanismus etwas veränderlich ist und dass deshalb zur Verhinderung von Gleitungen dieser Schneiden längs ihren Pfannen entweder bei D_1, D_1 oder bei D_2, D_2 kurze Koppelstangen zwischen dem betreffenden Dreieckshebel und der Brücke eingeschaltet werden müssen. Die Einschaltung einfacher Verbindungsglieder $C_1 C'$ und $C_2 C''$, deren Axen C' und C'' den in gerader Linie liegenden Axen B_1 und B_2 parallel sind, an den Stellen C_1 und

C_2 genügt hier nicht, weil zur Verhinderung von Gleitungen längs den Axen C' und C'' die Stangen $B_1 C'$ und $B_2 C''$ hier zu kurz und somit zu wenig biegsam zu sein pflegen, indem sie unter der Brücke Platz finden müssen. Die fraglichen Verbindungsglieder müssen dazu selbst aus je zwei Gliedern $C_1 C_1'$ und $C_1' C'$ bezw. $C_2 C_2''$ und $C_2'' C''$ gebildet werden, welche durch die mit C_1 und C_2 parallelen Axen C_1' und C_2'' zusammenhängen, so dass letztere sich in verticalen Ebenen auf und nieder bewegen können.

Mit den Bezeichnungen:

$$b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c, \quad d_1 = d_2 = d,$$

ferner mit $$OA = a, \quad O_0 B_0 = b_0, \quad O_0 A_0 = a_0$$

sind gemäss der Forderung einer Centesimalwaage die Hebelverhältnisse so zu wählen, dass

$$\frac{Q}{P} = \frac{a_0}{b_0} \frac{a}{b} \frac{c}{d} = 100$$

ist. Behufs passender Stabilität und Empfindlichkeit ist für die mittlere Gleichgewichtslage der Winkel $O_0 B_0 A$ etwas $> 90^0$ zu machen, während die übrigen Zugstangen rechtwinklig gegen die betreffenden Hebel gerichtet werden mögen.

§. 174. Abstellvorrichtungen.

Vorrichtungen, welche dazu dienen, die Schneiden beim Nichtgebrauche einer Waage sowie bei ihrer Belastung oder Entlastung zu schonen, sind bei Brückenwaagen von besonderer Wichtigkeit und um so nöthiger, je grösser die zu wiegenden Lasten sind und je weniger auf die Vermeidung von Erschütterungen des Waagenmechanismus bei Belastung oder Entlastung der Brücke gerechnet werden kann.

Bei transportablen Decimalwaagen für Lasten von mässiger Schwere begnügt man sich meistens mit einer Arretirungsvorrichtung, wodurch ohne Entlastung der Schneiden nur die Beweglichkeit des Mechanismus zeitweilig aufgehoben wird. Durch einen Handhebel pflegt zu dem Ende der längere Arm des Gegengewichtshebels mit der daran hängenden Gegengewichtsschale in seine höchste Lage gehoben zu werden, wodurch die Brücke in ihre tiefste Lage gesenkt, nämlich mit den diese Lage bestimmenden Anschlägen zur Berührung gebracht wird. Eine in Betracht kommende Arbeit ist zu dieser Operation ebenso wenig wie zur

Wiederherstellung des freien Spiels der Waage aufzuwenden, sofern in beiden Fällen Gleichgewicht der Kräfte an ihr stattfindet.

Bei den gewöhnlich fest fundamentirten Centesimalwaagen zur Wägung sehr schwerer Lasten genügt eine solche Arretirung nicht, ist vielmehr ausserdem Entlastung der Schneiden durch anderweitige Unterstützung der Brücke erforderlich, auch durch die Aichordnung vorgeschrieben, um den Waagenmechanismus mit seinen Schneiden vor dem schädlichen Einflusse von Erschütterungen zu bewahren, die besonders beim Aufbringen der Last auf die Brücke, sowie auch bei ihrer Entfernung von derselben ohne solche Maassregel kaum vermeidlich sein würden. Die Operation der Abstellung einer solchen Centesimalwaage umfasst drei aufeinander folgende einzelne Vorgänge, welche mit Brauer* als Stützung, Entlastung und Entfernung bezeichnet seien. Zuerst ist durch die Stützung die Brücke mit gewissen Stützen, den sogenannten Stützkegeln mit Rücksicht auf ihre übliche Form, in Berührung zu bringen, ohne dass damit schon ein erheblicher Druck auf letztere durch entsprechende Verminderung des Druckes zwischen den Schneiden und Pfannen verbunden wäre; die darauf folgende Entlastung besteht aber in der Uebertragung des Druckes von den Schneiden auf die Stützkegel, womit zwar keine relative Bewegung der letzteren gegen die Brücke, jedoch insofern auch eine Bewegung verbunden ist, als die Deformationen der Glieder des Waagenmechanismus rückgängig zu machen sind, welche durch ihre Belastung vorher bedingt waren; zu grösserer Sicherheit sind endlich noch die Pfannen der Brücke von den entlasteten Schneiden der Lasthebel etwas zu entfernen. Mit Rücksicht auf die zu diesen Zwecken nöthigen relativen Bewegungen können drei Fälle unterschieden werden:

1) Die Abstellung erfolgt durch Senkung der Lasthebel, während die Stützen unbeweglich sind; das Befahren (Auf- oder Abbringen der Last) erfolgt bei tiefster Lage der Brücke.
2) Die Abstellung erfolgt durch Hebung der Stützen, so dass die Befahrung der Brücke in einer höheren, als der Mittellage stattfindet.
3) Die Abstellung wird durch Hebung der Stützen und darauf folgende Senkung der Lasthebel bewirkt, so dass die Brücke in ihrer mittleren oder Wägestellung befahren wird; die Hebung der Stützen bewirkt hierbei die Stützung, die Senkung der Hebel die Entfernung, während die Entlastung, d. i. die Uebertragung

* „Die Construction der Waage", S. 99.

des Drucks von den Schneiden auf die Stützen theils schon durch die erste, theils erst durch die zweite Operation bewirkt werden kann.

Die Zweckmässigkeit der betreffenden Einrichtungen ist in allen Fällen mit Rücksicht auf möglichste Einfachheit der Construction und möglichste Kleinheit des zur Herstellung und Aufhebung der Abstellung erforderlichen Arbeitsaufwandes zu beurtheilen.

Die Abstellung durch Senkung der Hebel wird häufig so ausgeführt, dass die Zugstange (AB_0, Fig. 198), welche den Zwischenhebel mit dem Gegengewichtshebel verbindet, an passender Stelle unterbrochen und daselbst ein Windewerk eingeschaltet ist, wodurch, während der Gegengewichtshebel in seiner höchsten Lage, also bei tiefster Lage der Brücke arretirt ist, die fragliche Zugstange verlängert oder verkürzt werden kann, jenachdem es sich darum handelt, die Abstellung zu bewirken oder wieder aufzuheben. Es kann z. B. der untere Theil jener Stange oben in eine Zahnstange auslaufen, während der obere Theil vermittels eines Bügels ein Gehäuse trägt, in welches die Zahnstange von unten her eintritt, um durch ein im Gehäuse gelagertes Zahnrädergetriebe mit Kurbel nach Auslösung einer Sperrung abwärts oder aufwärts bewegt zu werden, jenachdem die Stange verlängert oder verkürzt werden soll. Diese Einrichtung ist zwar einfach, jedoch insofern mangelhaft, als zur Uebertragung des Drucks von den Stützen auf die Lasthebelschneiden durch Verkürzung von AB_0 eine erhebliche Deformationsarbeit aufzuwenden ist, welche bei der umgekehrten Druckübertragung von den Hebeln auf die Stützen durch Verlängerung von AB_0 nicht nur verloren geht, sondern sogar durch hemmende Kraft an der Kurbel mit Anstrengung vernichtet werden muss, um eine zu schnelle stossweise Aenderung des Drucks an der einen und anderen Stelle zu vermeiden. Besser in dieser Hinsicht sind solche Einrichtungen, wie sie u. A. von Gebr. Dopp, sowie von Bockhacker und Dinse in Berlin getroffen wurden, bei welchen der Zwischenhebel AO, Fig. 198, mit seiner Drehungsaxe O nicht fest, sondern auf einem besonderen Abstellhebel H gelagert ist, der ein Gegengewicht an einer solchen Stelle trägt, dass dasselbe sich aufwärts oder abwärts bewegt, jenachdem durch eine kleine Drehung von H die Axe O gesenkt oder gehoben und damit Deformationsarbeit gewonnen oder verbraucht wird, um die Abstellung herbeizuführen bezw. wieder rückgängig zu machen. Bei passender Schwere des Gegengewichtes kann so ein wesentlicher Theil jener im einen Falle frei werdenden Arbeit aufgespeichert werden, um später zur Deckung des Arbeitsbedarfes nützliche Verwendung zu finden. Die Entfernung der entlasteten Lasthebelschneiden von den betreffenden Pfannen an der Brücke oder ihre Wiederannäherung an dieselben ist hier mit einer nur kleinen positiven bezw. negativen Schwerearbeit lediglich der Glieder des Waagenmechanimus (ohne den festgestellten Gegengewichtshebel und die Zugstange $B_0 A$) verbunden, die aber für die Bemessung des vorgenannten Gegengewichtes am Hebel H mit zu berücksichtigen ist.

Bei der Abstellung durch Hebung der Stützen sind, nachdem der Gegengewichtshebel in mittlerer Lage festgestellt ist, die Stützkegel bis zur Berührung mit der Brücke zu heben, dann sammt der von ihnen gestützten belasteten Brücke weiter bis zur Entlastung der Lasthebelschneiden und endlich noch etwas weiter bis zu kleiner Entfernung der betreffenden Pfannen von diesen Schneiden empor zu heben. Die Entlastung erfordert hierbei wegen des Gewinns von Deformationsarbeit einen dieselbe nur wenig übertreffenden Arbeitsaufwand, um so mehr aber die weitere Hebung der jetzt vollständig von den Stützkegeln getragenen Brücke, weshalb hier solche Einrichtungen von erhöhter Wichtigkeit wären, bei welchen jene aufzuwendenden Arbeiten durch ein niedersinkendes Gegengewicht geleistet werden, dessen Wiedererhebung später durch die Senkung der aufs Neue belasteten Brücke bewirkt wird.* Indessen sind die meisten der bisher üblichen, hierher gehörigen Abstellvorrichtungen mit so erheblicher Reibung verbunden, dass durch diese die Schwerkraftarbeit der niedergehenden Brücke grossentheils verbraucht und, indem auch die Aufspeicherung des etwaigen Ueberschusses durch Hebung eines Gegengewichtes versäumt, die zur Hebung der Brücke erforderliche Arbeit noch wesentlich vergrössert wird.

Die Abstellung durch Heben der Stützen und nachfolgendes Senken der Lasthebel kann folgendermaassen ausgeführt werden. Zu Ende einer Wägung wird der Gegengewichtshebel in seiner mittleren Lage (durch einen Vorsteckbolzen) festgestellt und werden darauf die Stützkegel bis zur Berührung mit der Brücke gehoben, z. B. nach einer Construction von Pellenz u. Comp. durch Keile, die vermittels eines unter der Brücke liegenden Kniehebelsystems auswärts verschoben werden. Entsprechend der hierbei ausgeübten Kraft wird dadurch nicht nur Arretirung, sondern auch schon theilweise Entlastung erreicht. Die vollständige Entlastung kann dann ebenso wie bei der ersten Gruppe von Abstellvorrichtungen erzielt werden: durch Verlängerung der Zugstange

* Siehe Brauer: „Die Construction der Waage", Fig. 118, Tafel V.

AB_0, Fig. 198, vermittels eines eingeschalteten Windewerks oder besser durch Senkung der Drehaxe O, mit welcher zu diesem Zwecke der Zwischenhebel AO von einem besonderen Entlastungshebel H getragen wird, so dass dann die Deformationsarbeit der elastischen Glieder des Waagenmechanismus durch Vermittelung des bei O auf den Hebel H ausgeübten Druckes als Hebungsarbeit eines auf H sitzenden Gegengewichtes zu späterer Benutzung aufgespeichert werden kann. Bei der zum Verwiegen von Eisenbahnwagen dienenden Waage von Pellenz u. Comp. begnügt man sich in der Regel mit der Arretirung und theilweisen Entlastung, welche durch das Vorschieben der Keile unter die Stützkegel bewirkt wird, indem eine vollständige Entlastung nur zum Schutze der ausser Gebrauch gesetzten Waage beim Passiren von Locomotiven und ganzen Wagenzügen über die Brücke für nöthig gehalten wird.*

Von den besprochenen drei Gruppen von Abstellvorrichtungen sind die der ersten und dritten Gruppe insofern vorzuziehen, als dabei eine Hebung oder Senkung der belasteten Brücke theils gar nicht, theils nur dann erforderlich ist, wenn die Last auf derselben mit dem Gegengewichte im Gleichgewicht und somit die resultirende Arbeit ihrer Schwerkräfte = Null ist. Es ist dann nur mit Reibungsarbeit, ferner mit der Schwerearbeit des Mechanismus an und für sich (ohne Belastung) und mit der Deformationsarbeit desselben zu rechnen, welche bei seiner Belastung aufzuwenden ist und bei seiner Entlastung frei wird. —

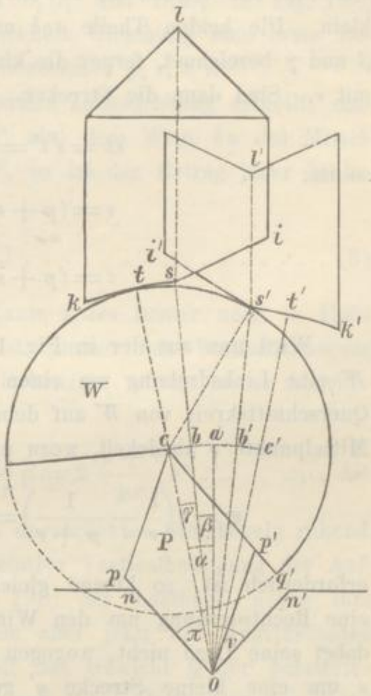
Schliesslich mag noch eine sehr bemerkenswerthe Abstellvorrichtung etwas näher besprochen werden, welche in neuester Zeit von H. Bockhacker, Maschinenfabrikant in Berlin, ausgeführt und ihrer allgemeinen Anwendbarkeit wegen als Universalentlastung bezeichnet worden ist.** Sie gehört zur dritten der obigen drei Gruppen von Abstellvorrichtungen, zeichnet sich aber durch äusserste Reduction der Reibungswiderstände und dadurch aus, dass die entgegengesetzten Bewegungen der Stützkegel und der Lasthebel durch dieselbe Manipulation (durch Umlegen eines Handhebels) bewirkt werden. Es befindet sich an jedem Ende der Brücke unterhalb derselben und querliegend gegen ihre Längsaxe (in kleinen Entfernungen parallel O_1O_1 und O_2O_2, Fig. 198) eine Welle W mit kreisförmigem Querschnitte $q\,t\,s'\,q'$, Fig. 199, deren Radius $cq = cq' = r$ sei. Sie hat an den Enden (bei O_1 und O_1 bezw. bei O_2 und O_2,

* Abbildungen der hier nur ihrem Wesen nach besprochenen Abstellvorrichtungen enthält der Atlas des wiederholt citirten Werkes von Brauer.

** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1882, S. 330 und Tafel XXII.

Fig. 198) segmentförmige Ausschnitte, mit welchen sie auf gehärteten Stahlprismen P von rautenförmigem Querschnitte $c\,p\,o\,p'$, Fig. 199, dessen Diagonale $co = p$ sei, aufliegt, die ihrerseits in Pfannen $n\,o\,n'$ gelagert sind. Auf den Enden der Wellen W über den Prismen P sind nahe neben einander vertical verschiebbar je einer der 4 Stützkegel $i\,s\,k\,l$ aufgestützt und je eines der 4 Lasthebellager $i'\,s'\,k'\,l'$, d. h. der Pfannen, welche die als Drehaxen $O_1\,O_1$ und $O_2\,O_2$ der Lasthebel dienenden Keilschneiden zu tragen haben. Die Stützkegel und die Hebellager sind unten theils durch Cylinderflächen $s\,k$ und $s'\,k'$ zum Halbmesser $p + r$, theils durch ebene Flächen $s\,i$ und $s'\,i'$ von gleicher Neigung gegen die Verticale begrenzt. Alle Angriffsflächen sind verstählt und gehärtet, die Keilkanten bei o und c nach einem sehr kleinen Radius abgerundet. Durch einen Hebelmechanismus können die zwei Wellen W gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne gedreht werden, bis sich entweder das eine Paar gegenüberliegender Flächen von P gegen die Begrenzungsflächen on der Prismenpfanne und cq' des Ausschnittes von W oder das andere Paar gegen on' und cq anlegt.

Fig. 199.



Die Figur 199 entspricht der ersteren dieser Grenzlagen, wobei sich die Stützkegel in höchster, die Hebellager in tiefster Lage befinden; auf ersteren ruht die belastete Brücke mit ihrem ganzen Gewichte Q, während die Hebelschneiden $D_1\,D_1$ und $D_2\,D_2$ (Fig. 198) in einer kleinen Tiefe y unter den betreffenden Pfannen an der Brücke sich befinden. In der Figur sind a und b die Punkte, in welchen der aus dem Mittelpunkte o mit dem Radius $oc = p$ beschriebene Kreisbogen von der Verticalen durch o und von der Geraden os geschnitten wird; ferner ist $ab' = ab$, $b'c' = bc$ und gehen ob', oc' sehr nahe durch die Punkte s' und t', streng genommen dann, wenn sich das Hebellager anstatt des Stützkegels in höchster Lage befindet. Der Querschnittskreis von W berührt den Kreisbogen ks in t, indem die betreffenden Mittelpunkte c und o mit t in gerader Linie liegen. Die gleichen Neigungen der ebenen Angriffsflächen si und $s'i'$ sind so angenommen, dass $s'i'$ in der Lage von Fig. 199 normal zu cs' ist. Der Winkel $aoc = aoc' = \alpha$ ist sehr klein. Die beiden Theile aob und boc dieses Winkels seien bezw. mit β und γ bezeichnet, ferner die kleinen Strecken $ab = ab'$ mit b, $bc = b'c'$ mit c. Sind dann die Strecken

$$st = s't' = t \text{ und } ss' = 2s,$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} s &= (p+r)\beta = \frac{p+r}{p}\,b \\ t &= (p+r)\gamma = \frac{p+r}{p}\,c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wird nun aus der in Fig. 199 dargestellten Lage heraus der Welle W eine Linksdrehung um einen solchen Winkel ertheilt, dass sich der Querschnittskreis von W auf dem Bogen $ts = t$ des Kreisbogens ks zum Mittelpunkte o abwickelt, wozu ein Drehungswinkel

$$\psi = t\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p+r}\right) = (p+r)\gamma\,\frac{p}{r(p+r)} = \frac{p}{r}\gamma \quad \ldots . (2)$$

erforderlich ist, so kommt gleichzeitig c nach b, indem das Prisma P eine Rechtsdrehung um den Winkel γ ausführt. Der Stützkegel ändert dabei seine Lage nicht, wogegen das Hebellager vermittels seiner Kante s' um eine kleine Strecke y' gehoben wird. Letztere setzt sich aus zwei Theilen zusammen, welche bezw. einer Hebung des Querschnittskreises von W bis zu seinem Durchgange durch den Punkt s und der Linksdrehung $= \psi$ desselben um diesen Punkt s entsprechen. Somit ist

$$y' = (p+r)(1 - \cos\gamma) + 2s\psi$$

oder nach (1) und (2) und weil γ ein sehr kleiner Winkel ist:

$$\begin{aligned} y' &= (p+r)\frac{\gamma^2}{2} + 2(p+r)\beta\frac{p}{r}\gamma \\ &= (p+r)\gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 2\frac{p}{r}\beta\right) \\ &= \frac{p+r}{p}\,c\left(2\frac{b}{r} + \frac{1}{2}\frac{c}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (y'). \end{aligned}$$

Durch diese Hebung $= y'$ der Hebellager sollen die zum Tragen der Brücke bestimmten Keilschneiden der Lasthebel um y gehoben worden sein, so dass sie mit den betreffenden Pfannen der Brücke gerade zur Berührung gelangt sind, ohne schon einen Druck auf dieselben auszuüben. Setzt man also y' in dem betreffenden Verhältnisse (dem Verhältnisse der Perpendikel von C_1 auf $O_1 O_1$ und $D_1 D_1$ in Fig. 198) grösser, als y, so ist die mit (y') bezeichnete Gleichung eine erste Bedingungsgleichung für die Wahl der Dimensionen p, r, b, c.

Wird jetzt der Welle W eine weitere Linksdrehung ertheilt, entsprechend der Rechtsdrehung β von P, also dem Wege ba des Mittelpunktes des Querschnittskreises von W, so ist der Betrag jener Linksdrehung von W analog Gl. (2):

$$\varphi = \frac{p}{r}\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Dabei hat sich W um die stumpfe Kante s des immer noch in Ruhe bleibenden Stützkegels gedreht und ist (immer mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung) das Hebellager mittels seiner Angriffskante s' weiter gehoben worden um:

$$x = 2s\varphi = 2\frac{p+r}{p}b \cdot \frac{p}{r}\beta = 2\frac{p+r}{pr}b^2 \quad \ldots\ldots \quad (x).$$

Indem die Brücke, noch immer auf den unverrückten Stützkegeln ruhend, sich nicht mitbewegt hat, ist x eine relative Verticalbewegung der Auflagerschneiden $O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ (Fig. 198) der Lasthebel gegen ihre Tragschneiden $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$; indem aber jetzt die Angriffskanten s und s' in gleicher Höhe liegen, soll das Gewicht Q der belasteten Brücke für diese mittlere Lage von W und P zur Hälfte von den Stützkegeln, zur Hälfte von den Lasthebeln getragen werden, somit x der Hälfte derjenigen relativen Verticalbewegung der Auflager- und Tragschneiden der Lasthebel gleich sein, welche dem Uebergange vom Zustande der Nichtbelastung des Waagenmechanismus zu demjenigen seiner vollen Belastung Q entspricht unter Aufwendung einer in ihm aufgespeicherten Deformationsarbeit $= Qx$. Wird also x in diesem Sinne verstanden, so ist die Gleichung (x) eine zweite Bedingungsgleichung für die darin vorkommenden Buchstabengrössen. Zur Deformation des Waagenmechanismus ist jetzt einstweilen erst die Arbeit

$$\frac{Q}{2}\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\, Qx$$

aufgewendet worden, welche durch den Druck am betreffenden Handhebel geleistet werden musste.

Bei weiterer Drehung von W linksläufig um den Winkel φ, also von P rechtsläufig um den Winkel β, wobei der Mittelpunkt des Querschnittskreises von W nach b' gelangt, bleibt das Hebellager mit seiner Kante s' in Ruhe, indem sich W um diese Kante dreht. Die Stützkegel gehen mit der Brücke, indem sie sich stetig von $\frac{Q}{2}$ bis Null entlasten, um die Strecke x herunter, entsprechend einer weiteren relativen Verticalbewegung der zweierlei Keilschneiden der Lasthebel um den Betrag x, also der Deformationsarbeit des Waagenmechanismus

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{2}+Q\right)x=\frac{3}{4}\,Qx.$$

Diese Arbeit wird jetzt aber nicht nur durch die Arbeit $=Qx$ der niedergehenden Brücke geleistet, sondern es bleibt auch von letzterer noch ein Betrag $=\frac{1}{4}\,Qx$ übrig, der voraussichtlich zur Bewältigung der betreffenden Reibungswiderstände mehr als ausreichend ist.

Die cylindrische Angriffsfläche $s'k'$ des Hebellagers wird jetzt von der Welle W in s' berührt, so dass die weitere Linksdrehung von W um den Winkel ψ mit entsprechender Rechtsdrehung von P um den Winkel γ eine relative Abwälzung von W auf jener cylindrischen Angriffsfläche längs $s't'$ bedingt und einen weiteren Niedergang der Stützkegel um y', so dass sie sich um diesen Betrag von der in Ruhe bleibenden Brücke entfernen.

Abgesehen von Reibungswiderständen, die aber hier sehr gering sind, entsprechend den theils wälzenden Relativbewegungen, theils Drehungen um harte Keilschneiden, hat sich somit ergeben, dass die Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um die mit belasteter Brücke abgestellte Waage wieder zur Wägung frei zu machen, nur $=\frac{1}{4}\,Qx=\frac{1}{4}$ der Deformationsarbeit des voll belasteten Waagenmechanismus ist, und ähnlich verhält es sich bei der umgekehrten Manipulation der Abstellung nach stattgefundener Wägung. In der That ist dann bei der zweiten der unterschiedenen 4 Theilbewegungen die Arbeit Qx zur Hebung der Brücke um den Betrag x aufzuwenden, von welcher Arbeit indessen der Bestandtheil $\frac{3}{4}\,Qx$ durch frei werdende Deformationsarbeit geliefert wird, während sonst nur Reibungsarbeiten zu leisten sind, welchen ausserdem noch die bei der dritten Theilbewegung frei werdende Deformationsarbeit

$\frac{1}{4}\,Qx$ zugut kommt. Durch thunlichste Vergrösserung der Querschnitts- und Verkleinerung der Längendimensionen der beweglichen Glieder des Waagenmechanismus lässt sich x und somit die aufzuwendende Arbeit vermindern.

Die Gleichungen (y') und (x) können endlich noch durch weitere Constructionsbedingungen bezüglich der Winkel

$$pcp' = pop' = 2\pi, \quad non' = 2\nu, \quad qcq' = 2\varkappa$$

ergänzt werden. Mit

$$\alpha = \beta + \gamma = \frac{b+c}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ergiebt sich unmittelbar aus der Figur:

$$\nu = \pi + \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\nu).$$

Indem ferner der Winkel $pcq = 2\varkappa - 2\pi$ = dem ganzen relativen Drehungswinkel von W gegen P, also = der Summe des Rechtsdrehungswinkels von P und des Linksdrehungswinkels von W sein muss, folgt:

$$2\varkappa - 2\pi = 2(\beta + \gamma) + 2(\varphi + \psi)$$

oder mit Rücksicht auf (2), (3), (4):

$$\varkappa - \pi = \alpha\left(1 + \frac{p}{r}\right)$$

oder endlich mit Rücksicht auf Gl. (ν):

$$\varkappa = \nu + \frac{p}{r}\,\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\varkappa).$$

Der von Herrn Bockhacker am oben angeführten Orte mitgetheilten Zeichnung einer ausgeführten solchen Abstellvorrichtung für eine Centesimalwaage von 25000 Kgr. Tragfähigkeit ist näherungsweise zu entnehmen:

$$r = 43^{\mathrm{mm}}, \quad p = 61^{\mathrm{mm}}, \quad b = c = 5{,}5^{\mathrm{mm}}, \quad \text{also } \alpha = 10{,}5^0,$$

ferner $\pi = 30^0, \quad \nu = 40{,}5^0, \quad \varkappa = 55{,}5^0$

in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (ν) und $(\varkappa)$, während damit aus den Gleichungen (y') und (x) folgt:

$$y' = 2{,}8^{\mathrm{mm}} \quad \text{und} \quad x = 2{,}4^{\mathrm{mm}}.$$

Die Grösse x wird durch passende Wahl der Dimensionen selbst bei den grössten Waagen auf etwa 2^{mm} zu reduciren sein, und wäre dann für eine Waage von $Q = 50000$ Kgr. Tragfähigkeit, wie sie in der Praxis selten überschritten wird, die jeweils aufzuwendende Arbeit:

$$\frac{1}{4}\,Qx = \frac{1}{4}\cdot 50000\cdot 0{,}002 = 25^{\mathrm{mk}}$$

ohne die Reibungsarbeit. Letztere schätzt Herr Bockhacker hier zu nahe 18^{mk}; indem aber ein Theil derselben nach Obigem durch disponible Arbeit geleistet wird, mögen nur 15^{mk} gerechnet, und mag somit die ganze Arbeit, welche zur Abstellung oder zur Rückgängigmachung derselben aufzuwenden ist, für dergleichen ungünstigste Verhältnisse auf 40^{mk} veranschlagt werden.

b. Laufgewichtswaagen.

§. 175. Theorie einfacher Laufgewichtswaagen.

Die einfache Laufgewichtswaage besteht aus einem Hebel (Waagebalken), der um eine horizontale Aufhängungsaxe (Mittelschneide) O drehbar ist und an welchem das Gegengewicht P und die Last Q in solchen Punkten bezw. mit O parallelen Schneiden A, B angreifen, dass deren horizontal gemessene Entfernungen von O, also die betreffenden Hebelarme $OA = x$ von P, sowie $OB = y$ von Q in der zur Wägung herbeizuführenden (durch das Einspielen einer Zunge zu markirenden) mittleren Gleichgewichtslage des Hebels nicht beide constant sind, um so diese Gleichgewichtslage bei veränderlicher Last Q mit einem unveränderlichen Gegengewichte P herbeiführen zu können. Die Bestimmung von Q geschieht dann durch Ablesung der Länge x oder y auf einer am Waagebalken angebrachten Theilung. Dabei können 3 Fälle stattfinden, jenachdem

1) nur x variabel, dagegen y constant $= b$, oder
2) nur y variabel, dagegen x constant $= a$ ist, oder
3) x und y beide so veränderlich sind, dass $x + y$ constant $= c$ ist.

In allen Fällen ist es ebenso wie bei der einfachen Hebelwaage im engeren Sinne erforderlich, dass der Mittelpunkt aller an der Waage angreifenden Schwerkräfte bei mittlerer Gleichgewichtslage und jeder Belastung mit Rücksicht auf die Stabilität unter O, aber mit Rücksicht auf genügende Empfindlichkeit nur sehr wenig unter O liege. Auch hier wird diesen Erfordernissen am einfachsten dadurch entsprochen, dass A, B und O in eine (bei mittlerer Gleichgewichtslage horizontale) Ebene gelegt werden, während der Schwerpunkt S des Waagebalkens, dessen Gewicht $= W$ sei, in einer kleinen Entfernung $= e$ unterhalb dieser Ebene sich befindet. Ist s der Horizontalabstand des Punktes S von der Aufhängungsaxe O, positiv oder negativ verstanden, jenachdem dieser

Punkt auf der Seite von A oder auf der Seite von B liegt, so ist die Gleichgewichtsbedingung bei mittlerer Gleichgewichtslage:

$$Px + Ws = Qy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und bei dem durch einen kleinen Zuwachs ΔQ der Last bewirkten kleinen Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$:

$$Px + W(s + e\Delta\varphi) = (Q + \Delta Q)y$$

mit der Annäherung, mit welcher $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, $\cos\Delta\varphi = 1$ gesetzt werden kann. Aus beiden Gleichungen folgt mit $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$:

$$We\Delta\varphi = \Delta Q.y; \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Qy}{We} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Biegung des Waagebalkens hat zwar zur Folge, dass mit wachsender Belastung sich die Ebene AB etwas von der Mittelschneide O entfernt und dass auch e mit Q etwas zunimmt, doch kann davon hier mit Rücksicht auf die geringere von solchen Waagen zu verlangende Genauigkeit abgesehen werden.

1) Von den oben erwähnten drei Arten einfacher Laufgewichtswaagen ist diejenige mit constanter Länge $y = b$ des Lastarmes, die sogenannte römische Waage, die gebräuchlichste. Das Gegengewicht P ist Laufgewicht und pflegt längs dem eingetheilten Waagebalken verschieblich zu sein vermittels einer Hülse, die an gegenüber liegenden Stellen zwei in gerader Linie liegende horizontale Schneiden trägt, an denen ein Gewicht hängt; P ist dann = der Summe aus diesem angehängten und dem Eigengewicht der Hülse, und wenn deren Doppelschneide so angeordnet ist, dass sie durch ihren Schwerpunkt geht, ist sie zugleich die Angriffslinie A des Gegengewichtes P, welche mit der Aufhängungsschneide O und der Angriffslinie B von Q in einer Ebene liegen soll.

Die Bedingung (1) für das Einspielen der Waage geht mit $y = b$ über in:

$$Px + Ws = Qb.$$

Darin sind nur Q und x veränderlich, so dass der Aenderung von Q um eine Gewichtseinheit die Aenderung

$$\Delta x = \frac{b}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Längeneinheiten von x entspricht. Die Theilung des Waagebalkens ist also gleichförmig; sie kann empirisch erhalten werden, indem man die Stellen markirt, wo zum Einspielen der Waage die Angriffslinie A des Laufgewichtes P sich für $Q = m$ und für $Q = (m + n)$ Gewichtseinheiten befinden muss, dann den Abstand beider Marken in n gleiche Theile theilt, die auch über die Grenzmarken hinaus aufzutragen sind. Das Gewicht des Aufhängungsmittels (Schale, Haken etc.) der Last Q ist hier in W einbegriffen.

Der Empfindlichkeitswinkel ist nach Gl. (2):

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{Qb}{We} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4);$$

er wächst proportional Q, abgesehen von der bei diesem Ausdrucke vernachlässigten Biegung des Waagebalkens.

2) Im Falle constanter Länge $x = a$ des Gegengewichtsarmes verhält sich die Last Q als Laufgewicht. Nach Gl. (1) ist:

$$Qy = Pa + Ws = Const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5),$$

somit nach (2) der Empfindlichkeitswinkel unabhängig von Q. Die Theilung würde ungleichförmig, wenn sie nach Gewichtseinheiten abgestuft werden sollte. Indessen giebt es auch Fälle, in welchen durch die Wägung ermittelt werden soll, wie viel mal $= n$ mal das Gewicht des zu wägenden Körpers in der Gewichtseinheit enthalten ist, z. B. das Gewicht eines Garnsträhns, in welchem Falle n die sogenannte Nummer des Garnes ist. Mit $Q = \frac{1}{n}$ ergiebt sich dann:

$$y = n(Pa + Ws) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6),$$

entsprechend einer gleichförmigen Theilung, nämlich $\varDelta y = Pa + Ws$ = einer Constanten für $\varDelta n = 1$.

Hierbei ist freilich zu bemerken, dass das Gewicht des Aufhängungsmittels der Last Q, welches im vorigen Falle im Gewichte W des Waagebalkens einbegriffen werden konnte, hier der veränderlichen Lage gegen O wegen sammt dem Gewichte des betreffenden Verschiebungsmittels (Hülse) in Q einbegriffen ist. Für die Herstellung und Benutzung der Waage zur Ermittelung der in Gewichtseinheiten ausgedrückten Last würde dieser Umstand nicht störend sein, indem nur stets derselbe Abzug Q' von Q zu machen wäre, um die gesuchte Netto-Last zu erhalten. Sollte dagegen die Waage als Garnwaage oder zu ähnlichen Zwecken, nämlich zur Bestimmung von n im Ausdrucke $Q = \frac{1}{n}$ benutzt werden, so müsste Q das Gewicht der Netto-Last, nämlich ohne Aufhängungs- und Verschiebungsmittel sein. Das liesse sich zwar dadurch erzielen, dass auf dem Gegengewichtsarme des Waagebalkens ein Gewicht $= Q'$ verschiebbar angebracht und dessen Schwerpunkt immer im Abstande y von O erhalten wird, unter Ein-rechnung des Gewichtes $2Q'$ in W; doch würde dadurch die Handhabung der Waage behufs einer Wägung wesentlich erschwert, und ist es überhaupt begreiflich, dass die in Rede stehende Art von Laufgewichtswaagen mit unveränderlicher Länge des Gegengewichtsarmes zu bemerkenswerther Verwendung bisher nicht gekommen ist.

3) Dem Falle, dass die Summe der Längen des Last- und Gegengewichtsarmes constant ist, entspricht die dänische oder schwedische Schnellwaage, bestehend aus einem Waagebalken, der in einer um die Aufhängungsaxe O drehbaren Hülse, deren Schwerpunkt in O liegt, verschieblich ist, während die Angriffslinien A und B von P und Q feste Lagen an ihm haben. Indem sowohl A, wie auch der Schwerpunkt S des Waagebalkens unveränderliche Entfernungen von B haben, kann mit $x+y=c$ und $s+y=d$ die Gleichgewichtsbedingung (1) auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} Qy &= P(c-y)+W(d-y) \\ &= Pc+Wd-(P+W)y = P'(c'-y) \quad \ldots\ldots (7). \end{aligned}$$

Dabei ist das Gewicht der Lastschale bezw. des Lasthakens in W eingerechnet, und kann $P'=P+W$ durch anderweitige Wägung, c' durch Messung von y beim Einspielen der Waage mit bekannter Belastung Q gefunden werden, wonach die Theilung des Waagebalkens gemäss Gl. (7) durch Rechnung oder durch Construction sich ergiebt. Der Empfindlichkeitswinkel ist nach (2) und (7):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{P'}{We}\left(c'-\frac{P'c'}{P'+Q}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{P'c'}{We}\,\frac{Q}{P'+Q} \quad \ldots\ldots (8),$$

um so grösser, je grösser Q, jedoch in geringerem Maasse wachsend, als Q.

§. 176. Ausführungsformen der Laufgewichtswaage.

Von den im vorigen §. besprochenen drei Arten von Laufgewichtswaagen ist, wie schon dort bemerkt wurde, als einfache Laufgewichtswaage weitaus am gebräuchlichsten die römische Waage mit constanter Länge des Lastarmes und verschieblichem Gegengewichte längs dem für gleiche Lastdifferenzen gleichförmig einzutheilenden Waagebalken; für zusammengesetzte Laufgewichtswaagen eignet sich dieses System ausschliesslich, insbesondere um bei Brückenwaagen die Last auf der Brücke durch Ablesung mit Hülfe einer Theilung am Gegengewichtshebel zu ermitteln, nachdem längs demselben ein unveränderliches Gegengewicht bis zum Einspielen der Waage verschoben wurde. Im einen wie im anderen Falle kann dieses Laufgewicht, anstatt an der Doppelschneide einer verschieblichen Hülse zu hängen, auch fest mit letzterer verbunden oder überhaupt als starrer Körper mit dem betreffenden Waagebalken prismatisch gepaart sein; nur ist dann durch seine Gestalt dafür zu sorgen, dass sein Schwerpunkt sich möglichst genau in der durch die Aufhängungsschneide O und die Lastschneide B gehenden Ebene senkrecht zu diesen Schneiden bewege.

Letzteres ist auf eigenthümliche Weise bei der Waage von Thornton und Voss erreicht worden, die zwar nur zur Wägung kleinerer Lasten ohne Anspruch auf grössere Genauigkeit geeignet, jedoch durch ihre compendiöse Beschaffenheit und Transportfähigkeit bemerkenswerth ist. Ihr Waagebalken ist ein Rohr R, an welchem die Aufhängungsschneide O und Lastschneide B (je als kurze Doppelschneide) so angebracht sind, dass die Ebene OB durch die Axe der kreiscylindrischen Höhlung von R hindurch geht. Die Aufhängung bei O und die Anhängung der Last bei B geschehen durch Bügel, welche die betreffenden Doppelschneiden mit entsprechenden Augen umfassen und beim Transport der Waage gegen die Oberfläche von R angelegt werden können. Die Massenvertheilung des Rohres R ist so, dass sein Schwerpunkt von der Ebene OB auf der Seite des Lastbügels etwas entfernt liegt, während auf der anderen (beim Gebrauche oberen) Seite anstatt einer Zunge sich eine Libelle auf R befindet. In diesem Rohre befindet sich nun als Gegengewicht für die Last ein System von teleskopartig gegen einander verschieblichen coaxialen Hohlcylindern nebst einer massiven Stange C_1 in der Mitte, so dass vermittels eines Knopfes am Ende von C_1 zunächst diese Stange im Hohlcylinder C_2, dann dieser im Hohlcylinder C_3, schliesslich der letzte (äusserste) dieser Hohlcylinder im Rohre R stets bis zu derselben Länge $= 2a$ nach aussen verschoben werden kann, bis das Gleichgewicht mit einspielender Libelle erreicht ist. Das Gewicht der Last Q ist dann an der Theilung abzulesen, welche äusserlich an $C_1, C_2 \ldots$ angebracht ist, und zwar entspricht es dem Theilstriche, welcher dem Rande des letzten noch ganz im Rohre R befindlichen Hohlcylinders, bezw. dem Rande von R selbst, falls die Verschiebung sich auch schon auf den äussersten dieser Hohlcylinder erstreckt hat, gegenüber liegt. Sind z. B. ausser der Stange C_1 zwei solche Hohlcylinder C_2, C_3 vorhanden und sind P_1, P_2, P_3 bezw. die Gewichte von C_1, C_2, C_3, so sind, jenachdem nur C_1 ganz auswärts (um die Strecke $2a$ gegen C_2) oder ausserdem C_2 (um die Strecke $2a$ gegen C_3) oder ausserdem C_3 (um dieselbe Strecke $2a$ gegen R) auswärts verschoben ist, die auf Drehung um O wirkenden Momente des Laufgewichtes, falls ursprünglich die Schwerpunkte seiner Bestandtheile C_1, C_2, C_3 sämmtlich in O lagen,

$$P_1 a, \quad P_1 . 3a + P_2 a, \quad P_1 . 5a + P_2 . 3a + P_3 a,$$

folglich mit $OB = b$ die dadurch im Gleichgewicht erhaltenen Lasten Q

$$= P_1 \frac{a}{b}, \quad (3P_1 + P_2)\frac{a}{b}, \quad (5P_1 + 3P_2 + P_3)\frac{a}{b}.$$

Ist ΔQ die Laständerung, welche der Verschiebung um einen Skalentheil (= der Entfernung zweier aufeinander folgender Theilstriche) entsprechen soll, so sind die Anzahlen $= n_1, n_2, n_3$ der gleichen Theile, in welche die Länge $2a$ bezw. auf C_1, C_2, C_3 getheilt werden muss, bestimmt durch die Gleichungen, durch welche die vorgenannten Lasten bezw.

$$= n_1 \Delta Q, \quad (n_1 + n_2)\Delta Q, \quad (n_1 + n_2 + n_3)\Delta Q$$

gesetzt werden, also durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \Delta Q &= P_1 \frac{a}{b} \\ n_2 \Delta Q &= (2P_1 + P_2)\frac{a}{b} \\ n_3 \Delta Q &= (2P_1 + 2P_2 + P_3)\frac{a}{b} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Insbesondere für $P_1 = P_2 = P_3 = P$ ist:

$$n_1 = \frac{1}{3} n_2 = \frac{1}{5} n_3 = \frac{P}{\Delta Q}\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Genauigkeit der Wägung mit einer Laufgewichtswaage ist besonders deshalb von untergeordneter Art, weil die Theilung des Waagebalkens, die meistens aus freier Hand vorzunehmende Verschiebung des Laufgewichtes und die Beobachtung seiner jeweiligen Lage viel weniger feine Abstufungen gestatten, als die Belastung einer Gegengewichtsschale mit Gewichtstücken. Indessen sind verschiedenartige Einrichtungen mit Erfolg getroffen worden, um diese Mängel zu vermindern, namentlich bei grösseren Brückenwaagen, bei denen das Laufgewicht am Gegengewichtshebel zum Ersatze einer mit Gewichtstücken zu belastenden Waagschale dient. Insbesondere kann dies dadurch erreicht werden, dass dem Laufgewichte P mit seiner zugehörigen Skala S am Waagebalken noch ein kleineres Laufgewicht p mit besonderer Skala s hinzugefügt wird, welches z. B. passend als ein mit P prismatisch gepaarter linealförmiger Schieber ausgeführt sein kann, auf welchem die Skala s angebracht ist. Auf S sind dann die grösseren Gewichtseinheiten ΔQ der Last Q, auf s die kleineren Gewichtseinheiten Δq derselben, sowie durch Schätzung noch Bruchtheile von Δq abzulesen. Zu dem Ende wird, während p gegen P so eingestellt ist, dass die Marke Z an P auf den Nullpunkt von s zeigt, P sammt p längs dem Waagebalken bis ungefähr zum Einspielen der Waage verschoben, darauf nöthigenfalls etwas zurückgeschoben, bis Z gerade auf einen Theilstrich von S weist (was durch kerbförmige Einschnitte am Waagebalken erleichtert und gesichert werden kann), endlich das genauere Einspielen der Waage durch Verschiebung von p längs P herbeigeführt. Die Marke Z lässt dann auf der Skala S die Zahl der grösseren Einheiten ΔQ, auf s die der kleineren Einheiten Δq event. nebst einem zu schätzenden Bruchtheile von Δq erkennen. Bei gleichen Entfernungen der Theilstriche auf den Skalen S und s verhält sich

$$\Delta q : \Delta Q = p : P + p.$$

Die Nebenskala kann sich auch ebenso wie die Hauptskala am Waagebalken befinden, so dass zuerst nur P allein, dann p längs dem Waagebalken verschoben wird, in welchem Falle sich bei gleichen Theilungen beider Skalen

$$\Delta q : \Delta Q = p : P$$

verhält; doch ist die zuerst beschriebene Einrichtung insofern vorzuziehen, als beide Ablesungen an derselben Stelle zu geschehen haben. Zur Ablesung noch kleinerer Gewichtseinheiten $\Delta q'$ der Last kann ausserdem ein zweites noch leichteres Gewicht p' als ein mit Skala s' versehenes Lineal relativ gegen P verschieblich angebracht sein, in welchem Falle die Verschiebung von p gegen P jeweils nur bis zum Einspielen von Z auf einem Theilstriche von s zu geschehen hat und auf s' ausser Vielfachen von $\Delta q'$ auch durch Schätzung noch Bruchtheile von $\Delta q'$ abzulesen bleiben.

Bei einer Construction von Brauer ist der Waagebalken als Schraubenspindel H mit einer der Länge nach eingehobelten Nuth auf der Seite des Laufgewichtes gestaltet, während letzteres aus 3 Theilen A, B, C besteht so, dass A in Form einer mit entsprechender centraler Durchbrechung auf H geschobenen runden Scheibe vermittels jener Nuth der Länge nach gegen H verschieblich, B als eine die Schraubenspindel umgebende Hülse relativ gegen A nur drehbar um die Schraubenaxe, C endlich gegen B nach einer diese Axe rechtwinklig schneidenden Richtung nur verschieblich ist; dieses Glied C ist mit einem der Schraubenspindel H entsprechenden Muttergewinde längs etwa $^1/_3$ des Umfanges von H versehen und wird durch den Druck einer Feder in Eingriff mit H erhalten, so lange nicht durch einen entgegengesetzten Druck mit der Hand die Paarung aufgehoben wird. In der Nuth befindet sich die Hauptskala S, deren Theilstriche um die Ganghöhe der Schraube von einander entfernt liegen. An A befindet sich die zu S gehörige Marke Z und ausserdem am Umfange eine Kreistheilung s, z. B. von 100 gleichen Theilen, an B endlich die zu dieser Theilung gehörige Marke z. Im Zustande der Auslösung des Schraubenpaares kann dann das aus A, B und C zusammen bestehende Laufgewicht zunächst so weit verschoben werden, bis bei dem Einspielen von Z auf einen Theilstrich von S die mittlere Gleichgewichtslage insoweit erreicht ist, dass sie bei der Einstellung von Z auf den folgenden Theilstrich von S schon überschritten würde; ist bei solcher Lage von A gegen S die Marke z an B auf den Nullpunkt der Kreistheilung s an A eingestellt, so passt das Mutterschraubengewinde von C gerade in das Schraubengewinde von H, wenn C dem Einflusse des Federdruckes wieder frei gegeben wird, und ist dann durch Drehung von BC und dadurch bewirkte weitere Verschiebung von ABC die Waage zu völligem Einspielen zu bringen. Schliesslich zeigt Z auf S die Zahl der grösseren Gewichtseinheiten ΔQ der Last, z auf s die Zahl der überschüssigen kleineren Gewichtseinheiten Δq derselben an.

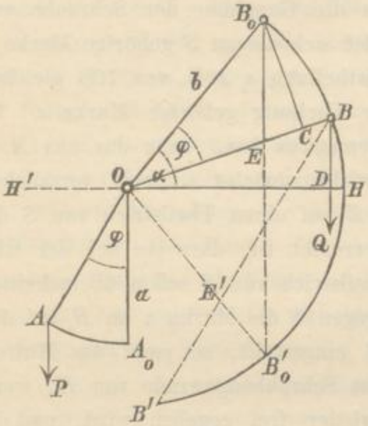
Um besonders bei grösseren Waagen (Centesimalwaagen zur Wägung von Fuhrwerken etc.) die Verschiebung des Laufgewichtes P zu erleichtern, ist der zugehörige Waagebalken verzahnt bezw. mit einer Zahnstange verbunden worden, so dass in diese Verzahnung ein in P gelagertes, mit Handkurbel versehenes Getriebe eingreift. Mit letzterem kann zugleich eine eingetheilte Scheibe zur Markirung der kleineren Gewichtseinheiten der Last verbunden werden u. s. f.

c. Neigungswaagen.

§. 177. Theorie der einfachen Neigungswaage.

Die einfache Neigungswaage ist ein um eine horizontale Axe O drehbarer Hebel, dessen Schwerpunkt A in einem gewissen Abstande a von O entfernt liegt und dessen in A angreifend zu denkendes Gewicht P als Gegengewicht der Last Q benutzt wird, die an einer mit O in der Entfernung b parallelen Axe B angreift; das Gewicht der Lastschale bezw. des Lasthakens oder überhaupt des Aufhängungsmittels der Last Q am Hebel ist hierbei als ein in B concentrirter Bestandtheil von P zu betrachten. Auf die Grösse von Q wird aus der durch einen Zeiger auf einer Skala markirten Gleichgewichtslage des Hebels geschlossen, und handelt es sich also vor Allem um die Beziehung zwischen Q und dem Winkel φ, um welchen in dieser Gleichgewichtslage AOB, Fig. 200, der Hebel gegen diejenige A_0OB_0 gedreht ist, welche der unbelasteten Waage, also $Q=0$ entspricht und in welcher OA_0 vertical abwärts gerichtet ist. Ist aber der Winkel

Fig. 200.



$$AOB = A_0OB_0 = 90^0 + \alpha, \quad \text{also} \quad B_0OH = \alpha,$$

unter OH eine horizontale Gerade verstanden, so ist die Gleichgewichtsbedingung bei Abstraction von Reibungswiderständen:

$$Pa \sin\varphi = Qb \cos(\alpha - \varphi)$$

oder mit der Bezeichnung $R = P\dfrac{a}{b}$ = dem in der Geraden OA auf den Abstand b von O reducirten Hebelgewichte:

$$Q = R\frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Daraus folgt:

$$\cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi = \frac{R}{Q}\sin\varphi$$

$$\cot g\,\varphi = \frac{R}{Q\cos\alpha} - tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und durch Differentiation:

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{R}{\cos\alpha}\,\frac{dQ}{Q^2}.$$

Hiernach ist näherungsweise auch für kleine Laständerungen ΔQ von endlicher Grösse:

$$\Delta\varphi = \frac{R}{Q^2\cos\alpha}\,\frac{\Delta Q}{1+\cot g^2\varphi},$$

und da nach Gl. (2):

$$1 + cotg^2\, \varphi = 1 + \frac{R^2}{Q^2 \cos^2 \alpha} - \frac{2\, R \sin \alpha}{Q \cos^2 \alpha} + tg^2\, \alpha$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha}\left(\frac{R^2}{Q^2} - 2\,\frac{R}{Q} \sin \alpha + 1\right)$$

ist, ergiebt sich mit $\varDelta Q = \frac{1}{\varepsilon}\, Q$ der Empfindlichkeitswinkel:

$$\varDelta \varphi = \frac{1}{\varepsilon}\, \frac{R \cos \alpha}{Q}\, \frac{1}{\frac{R^2}{Q^2} - 2\,\frac{R}{Q} \sin \alpha + 1}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, \frac{\cos \alpha}{\frac{R}{Q} - 2 \sin \alpha + \frac{Q}{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Er ist abhängig von Q und am grössten, wenn $\frac{R}{Q} + \frac{Q}{R}$ am kleinsten, d. h. wenn

$$-\frac{R}{Q^2} + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{oder} \quad Q = R$$

ist, und zwar

$$max\, \varDelta \varphi = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, cotg\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) . (4).$$

Um den Mittelwerth des Empfindlichkeitswinkels möglichst gross zu erhalten, sind die Elemente P, a, b so zu wählen, dass $R = P\,\frac{a}{b}$ ein Mittelwerth der mit der Waage zu wägenden Lasten Q ist. Das Maximum von $\varDelta \varphi$ ist um so grösser, je grösser α bis $\alpha = 90^0$, wofür $max\, \varDelta \varphi$ unendlich gross wird, einem indifferenten Gleichgewichtszustande entsprechend. Diesen Werth darf α natürlich nicht erreichen und pflegt in der That α selten $> 45^0$ gemacht zu werden, wofür

$$max\, \varDelta \varphi = \frac{1}{2\,\varepsilon}\, cotg\, 22{,}5^0 = \frac{1{,}207}{\varepsilon}$$

ist. Sollte z. B. in diesem Falle und bei Voraussetzung einer kreisförmigen Skala zum Mittelpunkte O von r Millimeter Radius die Veränderung der Last Q um $\frac{1}{\varepsilon}\, Q$ eine Bewegung des Zeigers auf der Skala von 1 Millimeter bewirken, so wäre

$$max\,\varDelta\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1,207}{\varepsilon}, \quad \text{also} \quad \varepsilon = 1,207\,r,$$

z. B. ε nur $= 603$ für $r = 500$ Millimeter. Eine grosse Empfindlichkeit ist danach von solcher Neigungswaage nicht zu erwarten, um so weniger, als das Bedürfniss grosser Neigungswinkel oft die Gestaltung der Axen O, B als Keilschneiden unthunlich macht; die grössere Reibung cylindrischer Zapfen an diesen Stellen bedingt dann einen so grossen Unzuverlässigkeitswinkel $\varDelta\varphi_1$ (§. 166), dass es in Vergleich mit demselben illusorisch wäre, wenn man etwa $max\,\varDelta\varphi < \frac{1}{r}$ annehmen wollte. —

Die Herstellung der Skala ergiebt sich aus Gl. (1), geschieht aber am einfachsten graphisch mit Rücksicht auf die folgende Bemerkung. Zieht man in Fig. 200 die Gerade B_0C normal zu OB, B_0E und BD vertical, also normal zu OH, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke B_0CE und ODB:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{B_0C}{OD} = \frac{B_0E}{OB} = \frac{e}{b}$$

mit der Bezeichnung $B_0E = e$, somit nach Gl. (1):

$$Q = R\frac{e}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Die Strecke $B_0E = e$ ist also der Last Q proportional, und wenn die Verticale B_0EB_0' oder eine damit parallele Gerade als Skala benutzt würde mit OB als Zeigerrichtung, so würde die Theilung gleichförmig für gleiche Abstufungen $\varDelta Q$ der Last, und ihr Schnittpunkt mit OB_0 der Nullpunkt. Sollte die geradlinige Skala einen gewissen Winkel mit der Verticalen bilden, so müsste die Zeigerrichtung um denselben Winkel in demselben Sinne gegen OB geneigt sein; einer horizontalen Skala würde z. B. eine zu OB senkrechte Zeigerrichtung entsprechen. Um die Theilpunkte einer Kreisskala mit dem Mittelpunkte O zu erhalten, brauchen nur die Theilpunkte der gleichförmig getheilten geradlinigen Skala von O aus radial projicirt zu werden, wodurch die Theilung der Kreisskala natürlich um so ungleichförmiger wird, je mehr sich ihre Theilpunkte von der durch O gehenden Normalen zur geradlinigen Skala entfernen.

Anstatt einer unbeweglichen Skala und eines mit der Waage fest verbundenen beweglichen Zeigers könnte auch ein unbeweglicher Zeiger mit einer an der Waage festen beweglichen Skala benutzt werden.

Würde z. B. mit dem Hebelarme OB bei B, Fig. 200, eine Gerade als Skala unter dem Winkel

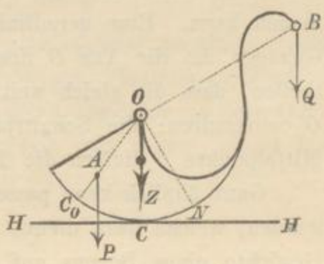
$$OB_0 B_0' = OBB' = 90^0 - \alpha$$

fest verbunden, so erhielte sie eine gleichförmige Theilung für OB_0' als unbewegliche Zeigerrichtung; denn wenn diese die Gerade BB' in E' schneidet, so ist

$$B'E' = BE = e,$$

weil $B'E'$ und BE symmetrisch sind in Bezug auf die Verbindungsgerade des Punktes O mit dem Schnittpunkte von $B_0 B_0'$ und BB'. Bezüglich gleichzeitiger Richtungsänderung der Skala und des Zeigers, sowie in Betreff centraler Projection der gleichförmig getheilten geradlinigen auf die Kreisskala gelten wieder die obigen Bemerkungen. Sollte z. B. die unbewegliche Zeigerrichtung vertical sein, so wäre die Richtung der geradlinigen Skala um den Winkel $B_0'OA_0 = 90^0 - \alpha$ in demselben Sinne aus der Richtung BB' heraus zu drehen, so dass sie mit OB parallel wird. Fig. 201 zeigt eine eigenthümliche Art der Ausführung dieses Falles mit Kreisskala. Die Waage ist hier nicht ein um O drehbarer Hebel, sondern sie ruht mit einer kreiscylindrischen Fläche rollbar auf einer horizontalen Ebene HH, indem sie dieselbe bei veränderlicher Last Q an verschiedenen Stellen C berührt. Sie hat am Umfange eine Kreistheilung mit dem in der Richtung OA liegenden Nullpunkte C_0; auf dieselbe weist ein Zeiger Z, der als Pendel um O drehbar aufgehängt ist. Indem die gleichförmig getheilte geradlinige Skala die Richtung OB haben müsste, liegen die Theilstriche der Kreistheilung bei N am weitesten auseinander, falls ON senkrecht zu OB ist. Jede elementare Wälzung ist als Drehung um die Axe C zu betrachten, für welche die Momente von P und Q dieselben sind wie für die Axe O.

Fig. 201.



Um für gleiche Abstufungen $\varDelta Q$ eine Kreisskala mit gleichförmiger Theilung zu erhalten, kann man solche Einrichtungen treffen, wodurch die Lage entweder des Angriffspunktes A von P, oder der Angriffslinie B von Q, oder der Drehungsaxe O an der Waage mit deren Neigung auf entsprechende Weise veränderlich wird.* Sofern es indessen meistens

* Brauer: „Die Construction der Waage", S. 23.

darauf ankommt, dass $\Delta\varphi$ nicht sowohl für gleiche Werthe von ΔQ, sondern für gleiche Werthe von $\frac{\Delta Q}{Q}$ möglichst gleich gross sei, ist die gleichförmige Theilung der Kreisskala ohne besonderen Werth.

§. 178. Anwendungen der einfachen Neigungswaage.

Einfache Neigungswaagen sind besonders zu solchen Wägungen kleiner Lasten geeignet, bei welchen es mehr auf Schnelligkeit und Bequemlichkeit, als auf grosse Genauigkeit ankommt, z. B. als Briefwaagen, Papierwaagen, Garnwaagen etc. Eine Briefwaage von zweckmässiger Form geht u. A. aus der in Fig. 201 dargestellten Waage mit beweglicher Skala und unbeweglicher Zeigerrichtung dadurch hervor, dass die Stützung und Wälzung auf der Ebene HH, die den Uebelstand hat, einer öfteren Controle und Berichtigung bezüglich der horizontalen Lage dieser Stützebene zu bedürfen, nebst dem Pendelzeiger Z durch Aufhängung vermittels eines Gehänges ersetzt wird, das dann zugleich als Zeiger dienen kann. Eine geradlinige Skala ist dabei parallel OB mit der im Gehänge um die Axe O drehbaren Waage zu verbinden und so einzutheilen, dass die gleich weit von einander entfernten Theilstriche gegen O convergiren; die Schnittpunkte der letzteren mit einem Kreise zum Mittelpunkte O liefern die Theilpunkte einer Kreisskala.

Ganz ähnlich kann passender Weise eine Papierwaage eingerichtet werden, welche dazu dient, annäherungsweise möglichst schnell aus dem Gewichte eines Bogens auf das Gewicht $= m$ Kgr. von einem Ries zu schliessen. Ist n die Bogenzahl von einem Ries, so wird der Theilstrich, auf welchen der Zeiger bei Belastung der Waage durch $\frac{m}{n}$ Kgr. weist, mit m bezeichnet. Zwei verschiedene Skalen derselben Waage entsprechen $n = 500$ für ungeleimtes und $n = 480$ für geleimtes Papier. Die Gewichtsdifferenzen einzelner Bogen können hierbei durch Multiplication mit n so grosse Fehler verursachen, dass in Vergleich mit denselben die der Neigungswaage an und für sich anhaftende Ungenauigkeit gegenüber der Bequemlichkeit ihres Gebrauches kaum in Betracht kommt. Aehnlich verhält es sich in anderen Fällen einer solchen verjüngten Wägung zum Zwecke des Schlusses aus dem Gewichte eines Theils oder einer kleineren Einheit auf dasjenige des Ganzen bezw. einer grösseren Einheit. —

Von grösserem technischem Interesse ist die Garnwaage, welche zur Bestimmung der Feinheitsnummer n eines Garnes dient, d. i. der Zahl, welche angiebt, wie viel mal das Gewicht einer bestimmten Fadenlänge in einem bestimmten als Einheit angenommenen Gewichte, z. B. das Gewicht eines Strähns von 1000 Meter Länge in einem ganzen oder halben Kilogramm enthalten ist. Die hierbei zu Grunde liegenden Längen- und Gewichtseinheiten selbst sind einstweilen noch in verschiedenen Ländern verschieden. Die Anordnung und Eintheilung der Skala einer solchen Garnwaage gemäss der Forderung, dass sie unmittelbar die Feinheitsnummer n abzulesen gestatten soll, ergiebt sich im Anschlusse an die Entwicklungen im vorigen §. und an Fig. 200 auf folgende Weise.

Bezeichnet man daselbst mit ψ den Winkel, unter welchem der Schwerpunktsradius OA gegen die Horizontale geneigt ist, also den Winkel $H'OA$, Fig. 200, der dabei positiv oder negativ gesetzt wird, jenachdem er unter oder über OH' liegt, so ist nach Gl. (2) mit $\varphi = 90^0 - \psi$ und $Q = \frac{1}{n}$:

$$tg\,\psi = \frac{R}{cos\,\alpha}\,n - tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass eine unbewegliche geradlinige und verticale Skala für OA als Zeiger eine gleichförmige Theilung zu erhalten hätte; denn wenn sie OH' im Abstande h von O schneidet, so dass OH' und OA die Strecke $h\,tg\,\psi$ derselben zwischen sich fassen, so ist für $\Delta n = 1$:

$$\Delta(h\,tg\,\psi) = \frac{Rh}{cos\,\alpha} = Const.$$

In der Regel wird aber eine kreisförmige Skala zum Mittelpunkte O vorgezogen, die durch centrale Projection der gleichförmig getheilten verticalen geradlinigen Skala erhalten wird, und deren Theilstriche somit um so näher aneinander zu liegen kommen, je weiter sie von OH' entfernt sind. Sind also n_1 und n_2 $(n_1 < n_2)$ die Grenzwerthe von n, für welche die Waage bestimmt ist, so erscheint es am besten, die Kreisskala so anzuordnen, dass

$$\psi = 0 \text{ wird für } n = \frac{n_1 + n_2}{2} = m,$$

nach Gl. (1) also:

$$R = \frac{sin\,\alpha}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder wegen $R = P\frac{a}{b}$ bei gegebenen Werthen von P und a:

$$b = \frac{Pa}{R} = \frac{Pa}{sin\,\alpha}\,m = \frac{Pa}{sin\,\alpha}\,\frac{n_1 + n_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Der negative Winkel $\psi = \psi_1$, welcher $n = n_1$ entspricht, und der positive Winkel $\psi = \psi_2$, welcher $n = n_2$ entspricht, sind dann absolut genommen gleich gross.

Je grösser dieser Winkel $\psi_2 = -\psi_1$ gemacht wird, desto grösser wird zwar der Mittelwerth der Entfernung zweier benachbarter Theilstriche der Kreisskala, aber desto mehr nimmt sie auch von der Mitte (von OH' aus) nach den Enden ab, so dass sich hier die Aufgabe darbietet, jenen Winkel und somit den Mittelpunktswinkel $= 2\psi_2$ der ganzen Theilung möglichst so zu wählen, dass die kleinste Entfernung ihrer Theilstriche an den Enden noch möglichst gross sei, und somit die kleinste Empfindlichkeit, mit welcher n durch Ablesung an der Skala gefunden wird, nämlich diejenige für $n = n_1$ und $n = n_2$ ein Maximum sei. Nun ist nach (1) und (2):

$$tg\,\psi = \frac{tg\,\alpha}{m}\,n - tg\,\alpha = \frac{n - m}{m}\,tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{tg\,\alpha}{m}\cos^2\psi = \frac{tg\,\alpha}{m}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{n - m}{m}\right)^2 tg^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{cotg\,\alpha + \left(\frac{n - m}{m}\right)^2 tg\,\alpha}.$$

Dieser Differentialquotient ist ein Maass der Empfindlichkeit, mit welcher n auf der Kreisskala abzulesen ist. Er ist am kleinsten für $n = n_1$ oder $= n_2$, und zwar mit

$$k = \frac{n_2 - m}{m} = \frac{m - n_1}{m} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$min\,\frac{d\psi}{dn} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{cotg\,\alpha + k^2\,tg\,\alpha}.$$

Insofern aber dieser Minimalwerth von $\frac{d\psi}{dn}$ noch von α abhängt, ist er ein Maximum, wenn

$$cotg\,\alpha + k^2\,tg\,\alpha \text{ ein Minimum,}$$

d. h. wenn

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{k^2}{\cos^2\alpha}=0,\quad tg\,\alpha=\frac{1}{k}=\frac{n_2+n_1}{n_2-n_1}\quad\ldots\ldots(5)$$

ist. Der Forderung entspricht also ein Winkel $\alpha > 45^0$, wogegen sich nach Gl. (4):

$$tg\,\psi_2=\frac{n_2-m}{m}\,tg\,\alpha=k\,tg\,\alpha=1,\ \psi_2=-\psi_1=45^0\ \ldots(6)$$

ergiebt, entsprechend einem eingetheilten Quadranten als Skala.* Aus Gl. (5) folgt auch:

$$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{n_2+n_1}{\sqrt{2(n_2^2+n_1^2)}}$$

und somit aus Gl. (3):

$$b=Pa\sqrt{\frac{n_2^2+n_1^2}{2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Wegen der Schwierigkeit genauer Bestimmung des Schwerpunktes A und des Winkels α ist es rathsam, die vorläufig näherungsweise gemäss den Gleichungen (5) und (7), also durch Berechnung von α und b für gegebene Werthe von n_1, n_2 und angenommene Werthe von P, a construirte Waage nachträglich durch geeignete kleine Regulirungsmassen M, M' zu justiren, von denen etwa vermittels feiner Schrauben M im Sinne OA, M' normal dazu verstellbar sein mag. Durch Verstellung von M' kann dann die lothrechte Zeigerrichtung bei unbelasteter Waage, durch Verstellung von M die horizontale Zeigerrichtung bei der Belastung mit $Q=\frac{1}{m}$ Gewichtseinheiten herbeigeführt werden. Markirt man demnächst die Theilstriche S_1 und S_2 des einzutheilenden Kreisbogens bei den Belastungen $Q=\frac{1}{n_1}$ und $\frac{1}{n_2}$, so ergiebt sich, wenn auch die Winkel $H'OS_1$ und $H'OS_2$ etwas von 45^0 verschieden ausfallen mögen, doch eine richtige Skala, wenn jetzt die Sehne S_1S_2 in n_2-n_1-1 gleiche Theile getheilt wird und die erhaltenen Theilpunkte central von O aus auf den Kreisbogen S_1S_2 projicirt werden.

Um schliesslich die so gefundene Skala auch für die Feinheitsnummern n_2 bis n_3 benutzen zu können, deren Intervall

$$n_3-n_2=n_2-n_1$$

* Redtenbacher: „Der Maschinenbau", Bd. I, S. 404.

ist, braucht nur der Lastarm des Hebels ausser B noch mit einer zweiten Aufhängungsaxe B' der Last versehen zu werden, deren Lage mit den Bezeichnungen

$$OB' = b' \text{ und Winkel } AOB' = 90^0 + \alpha'$$

gemäss (5) und (7) bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha' &= \frac{n_3 + n_2}{n_3 - n_2} = \frac{n_3 + n_2}{n_2 + n_1}\, tg\,\alpha \\ b' &= Pa\sqrt{\frac{n_3^2 + n_2^2}{2}} = b\sqrt{\frac{n_3^2 + n_2^2}{n_2^2 + n_1^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (8).$$

Die von oben nach unten aufeinander folgenden Theilstriche der Skala erhalten dann eine doppelte Bezeichnung,

einerseits mit $n_1 \quad n_1 + 1 \ldots n_2$

andrerseits mit $n_2 \quad n_2 + 1 \ldots n_3$.

§. 179. Zusammengesetzte Neigungswaagen.

Der Ersatz einer einfachen durch eine zusammengesetzte Neigungswaage kann durch die Absicht bedingt sein, statt einer Pendelschale oder eines Hakens zur Aufnahme der Last Q eine parallel geführte horizontale Tafel verwenden zu können. Am einfachsten dient dazu eine z. B. zur Wägung von Briefen und leichteren Packeten sehr gebräuchliche Waage, welche aus der Parallelogrammwaage, Fig. 185 (§. 169), dadurch hervorgeht, dass der geradlinige Hebel AOB mit Weglassung der bei A hängenden Gegengewichtsschale durch einen Winkelhebel ersetzt wird, dessen im Schwerpunkte A angreifend zu denkendes Gewicht P als Gegengewicht der Last Q benutzt wird. Für die Skala sind in diesem Falle die im §. 177 entwickelten Regeln vollständig anwendbar, falls in P das Gewicht der Tafel mit Stiel BB_1 nebst dem halben Gewichte der Lenkstange O_1B_1 eingerechnet wird, indem dann bezüglich des Gleichgewichtes zwischen P und Q sich Alles gerade so verhält, als ob Q unmittelbar in B concentrirt angriffe.

Zur Wägung grösserer Lasten sind zur Vermeidung eines übermässig schweren Winkelhebels AOB solche zusammengesetzte Neigungswaagen mehr geeignet, bei welchen ebenso wie bei den früher besprochenen zusammengesetzten Hebelwaagen im engeren Sinne durch Vermittlung eines passenden Mechanismus nur ein bestimmter Theil der Last auf den Gegengewichtshebel, nämlich hier auf den die einfache Neigungswaage darstellenden Winkelhebel übertragen wird. Die Regeln, welche für die Construction zusammengesetzter Hebelwaagen im engeren Sinne zur Sicherung der Stabilität aufgestellt wurden bezüglich der Winkel, unter welchen die Verbindungsstangen der Hebel gegen letztere gerichtet sind, kommen hier nicht in Betracht, weil eine Neigungswaage stets mehr als ausreichend stabil ist; auch sind jene Winkel hier mit Q zwischen weiteren Grenzen veränderlich, wie überhaupt natürlich die Configuration des ganzen Mechanismus. Wenn aber die im §. 177 entwickelten Regeln für die Anordnung und Eintheilung der Skala auf dergleichen zusammengesetzte Neigungswaagen übertragbar sein sollten, müsste für alle jene Configurationen des Mechanismus die den Winkelhebel angreifende Verbindungsstange oder jede derselben, falls ihrer mehrere vorhanden sind, beständig vertical bleiben und die durch sie auf den Hebel übertragene Kraft Z aus zwei Theilen X, Y bestehen, so dass X ein unveränderliches Verhältniss zum Eigengewichte des Mechanismus und Y ein unveränderliches Verhältniss zur Last Q hat. Im Falle z. B. von zwei solchen Stangen, die in B_1 und B_2 die verticalen Kräfte $Z_1 = X_1 + Y_1$ und $Z_2 = X_2 + Y_2$ auf den mit dem Zeiger bei unbeweglicher Skala, bezw. mit der Skala bei unbeweglichem Zeiger fest verbundenen Winkelhebel übertragen, liessen sich dann X_1 und X_2 mit dem Eigengewichte des Hebels zu der in A angreifenden Schwerkraft P, sowie Y_1 und Y_2 zu einer verticalen Kraft $Y = Y_1 + Y_2$ zusammensetzen, welche, in einem unveränderlichen Punkte B des Winkelhebels angreifend, einem bestimmten aliquoten Theile der Last Q gleich ist. Sofern sich aber im Allgemeinen jene Bedingungen nicht erfüllt finden, selbst dann nicht für alle Configurationen des Mechanismus, wenn nur eine Stange die Verbindung mit dem Winkelhebel vermittelt, erfordert die Skala in der Regel eine empirische Theilung.

Die Systeme zusammengesetzter Hebelwaagen (§§. 169—173), welche zur Construction zusammengesetzter Neigungswaagen geeignet sind, erfahren eine weitere Einschränkung bei Brückenwaagen durch die Forderung, dass die gleichzeitigen Verticalbewegungen aller Punkte der Brücke hier nicht nur für sehr kleine, sondern für grosse Configurationsänderungen des Mechanismus einander gleich sein müssen, um das Ergebniss der Wägung von der Lage der Last auf der Brücke unabhängig zu machen. Dieser Forderung entspricht z. B. die Doppeltrapezwaage, Fig. 198 (§. 173), deren Mechanismus u. A. bei zusammengesetzten Neigungswaagen zur Wägung von Passagiergepäck mehrfach Anwendung gefunden hat, indem dabei entweder, wie bei einer betreffenden Waage von Pellenz, der Hebel

OA als Winkelhebel mit dem Zeiger verbunden ist unter Weglassung des weiteren Hebels $A_0 B_0$, oder dieser letztere durch die einfache Neigungswaage ersetzt wird, wie bei einer Waage von Jos. Greiner in München.

Die besprochenen Constructionsbedingungen zusammengesetzter Neigungswaagen, sowohl was die Parallelführung einer Brücke, als was die zweckmässige möglichst gleichförmige Theilung der Skala gemäss den für die einfache Neigungswaage gültigen Regeln betrifft, sind um so besser erfüllbar, je weniger der Winkelhebel drehbar zu sein braucht, um die verlangten Abstufungen der Last auf einer genügend grossen Skala und folglich mit genügender Genauigkeit anzeigen zu können. Dazu sind solche Einrichtungen zweckmässig, durch welche die betreffenden Neigungswinkel vergrössert auf den Zeiger übertragen werden. Bei einer solchen Einrichtung von Herrmann in Berlin* ist mit dem Winkelhebel ein geschlitzter Arm verbunden, welcher, anstatt unmittelbar als Zeiger zu dienen, eine Zahnstange verschiebt vermittels eines in jenen Schlitz hineinragenden Ansatzstiftes derselben; die Zahnstange greift in ein kleines Rad auf der Axe des Zeigers. Ist der Theilrissumfang des Rades = der Verschiebung der Zahnstange, so umfährt die Zeigerspitze den ganzen Umfang der zugehörigen vollen Kreisskala, und die Theilung der letzteren wird mit derselben Annäherung gleichförmig, mit welcher für den geschlitzten Arm des Winkelhebels als Zeiger eine geradlinige Skala von gleicher Richtung mit der Zahnstange gleichförmig getheilt werden müsste.

d. Federwaagen.

§. 180. Theorie der Federwaage.

Die Federwaage ist ein Instrument, welches dazu dient, auf die Grösse des Gewichtes und dadurch der Masse eines Körpers aus der Grösse der durch dieses Gewicht unter gewissen Umständen verursachten Deformation einer Feder, in der Regel einer Stahlfeder, zu schliessen. Letztere pflegt dabei entweder in Form eines meist offenen Ringes benutzt zu werden, oder als Schraubenfeder (cylindrische Spiralfeder), die durch die Schwerkraft des betreffenden Körpers im Sinne ihrer Axe gezogen und dadurch verlängert wird. Die Deformation wird entweder

* Brauer: „Die Construction der Waage", Taf. III, Fig. 75.

unmittelbar durch einen auf eine Skala weisenden Zeiger gemessen oder nach vorhergegangener Vergrösserung vermittels eines geeigneten, gewöhnlich eines Hebel- oder Rädermechanismus. Im Falle einer ringförmigen oder überhaupt einer so gestalteten Feder, dass die Beziehung zwischen ihrer Belastung und Deformation von weniger einfacher Art ist, erhält die Skala eine vollkommen empirische, für gleiche Intervalle der Last im Allgemeinen ungleichförmig ausfallende Theilung, so dass von einer Theorie keine Rede ist. Vorzuziehen sind aber solche Federn, welche eine angenäherte Vorausberechnung ihrer Deformation x in Folge der Last von gegebener Grösse Q und gegebener Angriffsweise gestatten und für welche die Beziehung zwischen x und Q innerhalb der betreffenden Grenzen von Q sich als einfache Proportionalität ergiebt, so dass die Skala eine gleichförmige Theilung erhalten kann. Wird dann auch der Theilstrich, welcher der Maximallast $Q = n\Delta Q$ entspricht, thatsächlich durch den Versuch bestimmt, so genügt es doch, die Entfernung zwischen diesem und dem Theilstriche, welcher $Q = 0$ entspricht, in n gleiche Theile zu theilen zur Ablesung der verschiedenen Vielfachen von ΔQ bis zu $n\Delta Q$; zugleich lassen sich dann die Dimensionen der Feder im Voraus so berechnen, dass sowohl ihre Anstrengung, als ihre Deformation für die Maximalbelastung Q verlangten Werthen nahe gleich werden. Das Verfahren mag hier nur für den gewöhnlichen Fall einer im Sinne ihrer Axe gezogenen Schraubenfeder von überall gleichem kreisförmigem Querschnitte erläutert werden. Dabei sei:

d der Durchmesser des Stahldrahtes, aus welchem die Feder verfertigt,

r der Radius der Cylinderfläche, auf welcher ihre Mittellinie gelegen ist,

n die Zahl der Windungen, die von so schwacher Steigung vorausgesetzt werden, dass sie sich im unbelasteten Zustande der Feder fast berühren,

t die höchstens zulässige Schubspannung,

G der Modul der Schubelasticität des Federstahls.

Die in der Axe der Schraubenfeder (d. h. in der Axe der ihre Mittellinie enthaltenden Cylinderfläche) ziehend wirkende Kraft Q wirkt in jedem Querschnitte mit dem Moment Qr auf Torsion und verursacht dadurch nach den Gesetzen der Elasticitätslehre* die Maximalschubspannung:

* Siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit", Gleichungen (230) und (243).

$$t = \frac{16}{\pi} \frac{Qr}{d^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sowie den specifischen Torsionswinkel (in Bogenmaass ausgedrückten Torsionswinkel pro Längeneinheit des Drahtes):

$$\vartheta = \frac{32}{\pi G} \frac{Qr}{d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Streng genommen wirkt zwar die Axialkraft Q auf irgend einen Querschnitt ausser mit dem Moment Qr noch mit einer Kraft $= Q$, welche sich in eine Zugkraft längs der Tangente der Mittellinie und eine Schubkraft längs dem Querschnitte des Drahtes zerlegen lässt, doch sind diese Kraftwirkungen, von denen die der Zugkraft bei grösserer Steigung der Schraubenfeder von Belang sein könnte, hier nur von untergeordneter Bedeutung. Wäre nun eine in der Schraubenfederaxe liegende materielle Gerade mit einem Längenelemente $= ds$ der Schraubenfeder fest verbunden, so würde die Verdrehung dieses Elementes um den Winkel ϑds eine Verschiebung jener Geraden längs ihrer Richtung $= r\vartheta ds$ bewirken, und da die ganze Drahtlänge der Feder $= n \,.\, 2\pi r$ ist, ergiebt sich die resultirende Verlängerung derselben im Sinne ihrer Axe gemäss Gl. (2):

$$x = r\vartheta \,.\, n \,.\, 2\pi r = \frac{64 n}{G} \frac{Qr^3}{d^4} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Für gegebene Werthe von Q, x, t, G und einen angenommenen Durchmesser d des Stahldrahtes erhält man aus den Gleichungen (1) und (3):

$$r = \frac{\pi t}{16} \frac{d^3}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$n = \frac{G}{64} \frac{x d^4}{Q} \left(\frac{16}{\pi t} \frac{Q}{d^3}\right)^3 = \frac{64\, G}{\pi^3 t^3} \frac{Q^2 x}{d^5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

z. B. für das Millimeter als Längeneinheit und das Kilogramm als Krafteinheit mit

$$t = 10, \quad G = 10000 \text{ Kgr. pro Quadratmillimeter:}$$

$$r = 1{,}96 \frac{d^3}{Q} \text{ und } n = 20{,}6 \frac{Q^2 x}{d^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

§. 181. Anwendungen der Federwaage.

Während die Federwaage die Bequemlichkeit des Gebrauches mit der Neigungswaage gemein hat, gestattet sie im Allgemeinen eine noch compendiösere und solche Form, dass sie zum Schutz gegen Staub und zufällige Verletzungen oder auch mit Rücksicht auf die Gefälligkeit der

Erscheinung leicht in ein Gehäuse eingeschlossen werden kann bis auf die Skala mit Zeiger und auf die Schale oder den Haken zur Aufnahme der Last. Dagegen ist ihre Zuverlässigkeit derjenigen einer Neigungswaage insofern untergeordnet, als die Temperatur einen merklichen Einfluss auf die Länge und Elasticität der Stahlfeder ausübt; diese erfordert eine öftere Controle, da sie durch längeren Gebrauch oder durch unvorsichtige übermässige Belastung dauernde Aenderungen erleiden kann. Dass der Schluss vom Gewicht auf die Masse als die mit jeder Waage eigentlich zu messende Grösse streng genommen nur mit der Annäherung hier zulässig ist, mit welcher die Beschleunigung der Schwere am Gebrauchsorte der Federwaage mit derjenigen des Herstellungsortes der Skala übereinstimmt, worauf schon im §. 165 hingewiesen wurde, kommt in den Fällen, auf welche die Benutzung von Federwaagen hauptsächlich beschränkt ist, im Vergleich mit ihren sonstigen Mängeln nicht weiter in Betracht.

Die einfachste Form einer Federwaage ist die Salter'sche Briefwaage, bestehend aus einer Schraubenfeder, welche, in einem röhrenförmigen Gehäuse vertical hängend, unten den zur Aufnahme der Briefe dienenden hakenförmigen Bügel und ausserdem einen Zeiger trägt, der, aus einem Schlitze des Gehäuses hervorragend, auf die an diesem äusserlich angebrachte geradlinige Skala weist.

Die besonders als Hauswirthschaftswaage gebräuchliche Salter'sche Federwaage enthält in ihrem runden dosenförmigen Gehäuse zwei nebeneinander hängende Schraubenfedern, die unten durch einen Anker verbunden und vermittels desselben belastet sind. Die Skala ist auf einer der beiden verticalen ebenen Bodenflächen des Gehäuses als Kreisskala angebracht, und es wird auf ihr die Verlängerung der Schraubenfedern dadurch in vergrössertem Massstabe angezeigt, dass die Axe des Zeigers ein Zahnrädchen trägt, in welches eine von dem Verbindungsanker aus zwischen den Federn sich aufwärts erstreckende Zahnstange eingreift. Die Lastschale ist entweder eine Hängeschale oder eine Oberschale, letzteren Falles mit einer im Gehäuse versteckt angebrachten Parallelführung.

Ebenso wie die Neigungswaage gemäss vorigem §. kann auch die Federwaage mit einer zusammengesetzten Hebelwaage an Stelle des Gegengewichtshebels verbunden werden. Im Falle einer Brückenwaage gilt dann auch hier die Bemerkung, dass die Brücke nicht nur näherungsweise für eine sehr kleine Configurationsänderung des Mechanismus, sondern genau parallel geführt werden muss, um vom Orte der Last auf derselben die Wägung unabhängig zu machen. Insbesondere eignet sich auch hier der Brückenwaagentypus Fig. 198, der z. B. bei einer zusammengesetzten Federwaage von Gebr. Dopp in Berlin zur Wägung von Passagiergepäck, nur mit der Modification benutzt ist, dass die beiden die Brücke tragenden Dreieckshebel und der Querhebel OA zweiarmig statt einarmig gemacht sind, wobei nach wie vor einem Niedergange der Brücke auch ein Niedergang der Stange AB_0 entspricht. Letztere ist, durch eine hohle Säule geschützt, mit der eigentlichen Federwaage verbunden, hier insbesondere mit dem Verbindungsanker der unteren Enden von zwei gleichen neben einander hängenden Schraubenfedern.

Zu leichter Justirung einer Schraubenfeder ist eine patentirte einfache Vorrichtung von Reimann bemerkenswerth, bei welcher ihr Angriff durch eine entsprechend geformte Platte vermittelt wird, die als eine von innen in die Windungen der Schraubenfeder eingreifende Mutter längs derselben hin und her geschraubt werden kann, um so die wirksame Länge der Feder, nämlich die wirksame Zahl ihrer Windungen zu corrigiren; ihre Erhaltung ist dadurch zu sichern, dass die von jener Mutterplatte ausgehende axiale Angriffstange durch Prismenführung an der Drehung verhindert wird.

V. Instrumente zur Messung von Kräften.

Dieselben pflegen im engeren Sinne Dynamometer genannt zu werden, wenn sie zur Messung beliebiger Kräfte dienen, welche als Zugkräfte durch entsprechende Organe (Ketten, Seile etc.) oder als Druckkräfte durch feste Körper ausgeübt bezw. übertragen werden. Zur Messung des specifischen Druckes von Flüssigkeiten im weiteren Sinne des Wortes dienen sogenannte Manometer, welche als Flüssigkeits-, Ventil- oder Federmanometer unterschieden werden können, jenachdem die Messung vermittelt wird durch das Gleichgewicht des zu messenden Druckes mit dem durch ihre Schwere bedingten hydrostatischen Drucke einer gewissen tropfbaren Flüssigkeit (insbesondere Quecksilber oder Wasser), oder mit der Belastung eines Ventils, welches einseitig dem zu messenden Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist, oder mit der Elasticität eines federnden Körpers, der durch den zu messenden Druck belastet und entsprechend deformirt wird.