

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Theoretische Maschinenlehre**

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

**Grashof, Franz**

**Leipzig, 1883**

II. Uhren. (Chronometer.)

[urn:nbn:de:bsz:31-282938](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-282938)

## II. Uhren. (Chronometer.)

### §. 138. Einleitung.

Die Zeit kann gemessen werden durch gleichförmige Bewegungen oder durch Bewegungen von constanter Gesamtdauer, insbesondere durch Schwingungen. Im ersten Falle ist sie einem gewissen Wege proportional und deshalb die Messbarkeit beliebig kleiner Zeitintervalle nur durch diejenige der entsprechenden Wege beschränkt. Im zweiten Falle ist die Dauer der betreffenden Schwingung oder sonstigen Bewegung das kleinste unmittelbar messbare Zeitintervall, abgesehen von blosser Schätzung aliquoter Theile desselben sowie von Methoden zu mittelbarer Messung kleinerer Zeitintervalle, z. B. vermittels zweier gleichzeitig beobachteter Schwingungen von verschiedener Dauer.

Gleichförmige zur Zeitmessung geeignete Bewegungen sind u. A. die Drehung der Erde um ihre Axe, der permanente Ausfluss des Wassers aus der Oeffnung eines Gefässes, in welchem ein constanter Wasserstand erhalten wird, die Bewegung eines niedersinkenden und dabei einen Windfang in Umdrehung setzenden schweren Körpers nach Eintritt des Beharrungszustandes, die Bewegung eines conischen Pendels. Bewegungen von constanter Dauer sind u. A. der Ausfluss einer bestimmten Menge Wasser oder Sand aus einer Oeffnung unter bestimmten Umständen, sowie Schwingungen eines ebenen Pendels oder einer Spiralfeder bei gleich bleibenden Umständen.

Die Zeit einer Umdrehung der Erde um ihre Axe, ein sogenannter Sterntag, d. i. die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen eines Fixsternes, ist mit ihren aliquoten Theilen die eigentliche definitorisch als solche festgesetzte Zeiteinheit, durch Vergleichung mit welcher sich andere Bewegungen als gleichförmig oder von constanter Dauer und somit andere Hilfsmittel als brauchbar zur Zeitmessung erst mehr oder weniger mittelbar ergeben. Selbst der gewöhnlich als Zeiteinheit festgesetzte mittlere Sonnentag, d. i. die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen der Sonne, = 86400 Secunden mittlerer Sonnenzeit ist im Grunde durch den Sterntag dadurch bestimmt, dass er im Verhältnisse 86400 : 86164,09 länger als dieser ist.

Die der scheinbaren Bewegung der Sonne entsprechende, im Gegensatze zur mittleren sogenannte wahre Sonnenzeit kann bei Tage in freilich sehr unvollkommener Weise durch die Länge und Richtung des von einem

Körper geworfenen Schattens gemessen werden. Die dazu dienenden sogenannten Sonnenuhren sind ohne Zweifel die ältesten Vorrichtungen zur Zeitmessung; ihre Erfindung wird dem chaldäischen Astronom Brosius (um 640 v. Chr.) zugeschrieben. Durch das Bedürfniss der Zeitmessung auch bei bedecktem Himmel und bei Nacht veranlasst, wurden später etwa 400 Jahre v. Chr. (angeblich von Platon) die Wasser- und Sanduhren erfunden. Letztere haben sich zur Beobachtung bestimmter Zeitabschnitte bis auf den heutigen Tag erhalten, abgesehen von häuslichen Zwecken insbesondere zur Beobachtung eines Zeitraumes von 15 oder 30 Secunden beim Loggen behufs der Geschwindigkeitsmessung von Seeschiffen.

Die Erfindung der Uhren mit Räderwerk, durch ein Gewicht getrieben und durch einen Windfang regulirt, wird von Einigen einem gewissen Pacificus in Verona (850 n. Chr.) zugeschrieben, während nach Anderen die Kreuzfahrer dieselben als eine Erfindung der Sarazenen nach Europa gebracht haben sollen. Sichere Nachrichten über dergleichen Thurmuhren (in Padua, Bologna, Paris, Augsburg, Breslau, Strassburg, Speyer) finden sich aus den Jahren 1340—1400 vor.

Die heutzutage gebräuchlichen Uhren benutzen fast nur Schwingungen von gleicher Dauer als Zeitmaass, und zwar Schwingungen entweder eines Pendels oder einer Spiralfeder mit Schwungrad (Unruhe), erstere besonders zu Thurm- und Hausuhren, letztere zu Taschenuhren. Das Pendel wurde zuerst von Huyghens als Regulator von Uhren benutzt (1656), nachdem Galilei (1595) seine Schwingungsgesetze entdeckt hatte. Die Taschenuhren sollen im 16. Jahrhundert von Peter Hele in Nürnberg erfunden, nach anderen Quellen (Beckmann's Beiträge zur Geschichte der Erfindungen) jedoch schon im 15. Jahrhundert zu finden gewesen sein. Diese ältesten Taschenuhren waren übrigens noch ohne regulirende Spiralfeder (Unruhe), indem vielmehr eine freilich unvollkommene Regulirung des bewegenden Effects der Triebkraft vermittels des sogenannten Spindelganges (siehe später) durch den Rückfall in der Hemmung bewirkt wurde; ihr Fortschritt von Curiositäten zu Instrumenten von wissenschaftlicher Bedeutung ist der von Dr. Hooke im Jahre 1660 erfundenen Spiralfeder-Unruhe zu verdanken.

Das Pendel oder die Unruhe würde ohne weitere Hülfeinrichtungen als Zeitmesser benutzt werden können, wenn es sich nur um die Messung kürzerer Zeitabschnitte handelte, innerhalb welcher durch die Bewegungswiderstände (Reibung und Luftwiderstand) der Schwingungswinkel nicht unmerklich klein wird. Allein abgesehen davon, dass die Grösse dieses Winkels, wenn schon einen untergeordneten, so doch für feinere Messungen

und für eine grosse Zahl von Wiederholungen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Schwingungsdauer ausübt, wird auch meistens eine für lange Zeit andauernde Wirksamkeit des Instrumentes verlangt, die ohne Weiteres um so weniger stattfindet, als ausserdem ein Zählwerk die Zahl der Schwingungen registriren muss, wodurch neue Widerstände verursacht werden von meistens noch viel bedeutenderer Grösse, als diejenigen des Pendels oder der Unruhe für sich. Es muss deshalb vor Allem ein Motor, nämlich eine Betriebskraft mit entsprechendem Mechanismus vorhanden sein, wodurch bei dem verlangten Beharrungszustande gerade das an äusserem Arbeitsvermögen ersetzt wird, was durch die Widerstände in derselben Zeit verloren geht, nämlich in inneres Arbeitsvermögen umgesetzt wird. Mit Rücksicht auf diesen Motor, welcher für sich eine beschleunigte Bewegung hervorzubringen strebt, erhält das Pendel bezw. die Unruhe, wodurch solche Beschleunigung verhindert, vielmehr ein Beharrungszustand von bestimmter Art erhalten wird, den Namen: Regulator.

Eine ganz bestimmte Grösse der bewegenden Kraft ist zum Betriebe eines gegebenen Uhrwerkes nicht nöthig; wesentlich ist nur, dass sie constant sei. Ist sie nämlich grösser oder kleiner, so findet der Beharrungszustand, der unter allen Umständen eintritt, bei einem grösseren oder kleineren Ausschlagwinkel  $\alpha$  des Regulators statt, welchem entsprechend die Länge  $l$  desselben (des Pendels oder der Spiralfeder) so regulirt werden kann, dass trotz dieses grösseren oder kleineren Winkels  $\alpha$  doch die Schwingungsdauer  $\tau$ , die vorwiegend von  $l$  und nur nebensächlich von  $\alpha$  abhängt, eine gegebene Grösse hat. Ist aber der Grösse der vorhandenen Betriebskraft entsprechend die Regulirung von  $l$  einmal ausgeführt, so ist es allerdings wesentlich, dass jene Kraft constant bleibe, und sofern das nicht vollkommen zu erreichen ist, insbesondere dann nicht, wenn die Betriebskraft in der Elasticität einer sich allmählig aufdrehenden Spiralfeder besteht, und selbst wenn es zu erreichen wäre, wie bei einem Gewichte als Betriebskraft, doch die Reibungswiderstände des Uhrwerkes mancherlei Aenderungen unterworfen sein können, wodurch dann auch die überschüssige auf den Regulator wirkende Betriebskraft, um die es sich eben handelt, dennoch sich ändert, so bleibt noch übrig, solche Vorkehrungen zu treffen, dass eine gewisse Aenderung der nach Abzug der Widerstände des Uhrwerkes (Räderwerkes) verbleibenden nutzbaren Ersatzkraft für die Widerstände des Regulators eine möglichst kleine Aenderung von  $\tau$  zur Folge habe. Das ist der Fall, wenn

- 1) eine selbst beträchtliche Aenderung jener nutzbaren Ersatzkraft eine nur kleine Aenderung von  $\alpha$  bewirkt, und

2) eine gewisse Aenderung von  $\alpha$  eine möglichst kleine Aenderung von  $\tau$  bedingt.

Während Letzteres von der Beschaffenheit des Regulators und seiner Schwingungen abhängt, ist zu ersterem Zwecke die Art und Weise von Wichtigkeit, wie der Motor mit dem Regulator verbunden wird, um ihm den Arbeitsverlust bei jeder Schwingung zu ersetzen; der dazu dienende Mechanismus heisst die Hemmung. Er kommt indessen nur bei solchen Uhren vor, bei denen der Regulator eine periodisch schwingende Bewegung hat; er fehlt bei Uhren mit conischem Pendel, die deshalb auch nur dann einen ebenso gleichförmigen Gang erhalten können, wenn mit besonderer Sorgfalt die Betriebskraft und die Widerstände des Uhrwerkes constant erhalten werden.

Als Bestandtheile einer Uhr sind hiernach im Folgenden näher zu betrachten:

a. der Regulator,

b. der Motor,

c. die Hemmung,

d. das Uhrwerk im engeren Sinne, nämlich der Mechanismus, durch welchen die vorgenannten Theile verbunden sind und die jeweilige Zeit beständig für das Auge (durch auf Zifferblättern rotirende Zeiger) oder event. in gewissen Augenblicken für das Ohr (durch ein Schlagwerk) kenntlich gemacht wird. Zu besonderen Zwecken kann das Uhrwerk ausserdem solche Einrichtungen enthalten, die dazu dienen, die Zeiten des Stattfindens gewisser Ereignisse dauernd behufs beliebig späterer Ablesung zu registriren.

#### a. Der Regulator.

#### §. 139. Das ebene Pendel.

Ist  $l$  die Länge des Pendels = dem Quotient aus dem Trägheitsmoment für die horizontale Aufhängungsaxe durch das Product aus Masse und Schwerpunktsabstand von dieser Axe, ferner  $\alpha$  der Ausschlagwinkel = dem Winkel, um welchen die durch die Aufhängungsaxe und durch den Schwerpunkt des Pendels gehende Ebene auf beiden Seiten gegen die durch die Aufhängungsaxe gehende Verticalebene ausschlägt, so ist, wie die Mechanik lehrt, die Zeit einer einfachen Schwingung (abgesehen von Widerständen):

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

oder näherungsweise, wenn  $\alpha$  in Bogenmaass ausgedrückt ist:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

oder wenn  $\alpha$  in Graden gegeben ist:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + n\alpha^2) \\ \text{mit } n &= \frac{1}{16} \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 = 0,00001904 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Ist  $\alpha$  verschwindend klein, so ist  $\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , und damit ein solches Pendel Secunden schwingt, also  $\tau = 1$  sei, müsste

$$l = l_1 = \frac{g}{\pi^2}$$

und insbesondere z. B. an einem Orte, wo  $g = 9,81$  Mtr. pro Sec. ist,

$$l_1 = \frac{9,81}{\pi^2} = 0,9940$$

sein. Mit Rücksicht auf die endliche Grösse von  $\alpha$  ist aber die Länge des Secundenpendels etwas kleiner, nämlich nach Gl. (1) für  $g = 9,81$ :

$$l_1 = \frac{0,994}{(1 + n\alpha^2)^2} \text{ sehr nahe } = 0,994 (1 - 2n\alpha^2),$$

z. B. für  $\alpha = 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6$  Grad

$$l_1 = 0,9940 \quad 0,9938 \quad 0,9934 \quad 0,9926 \text{ Mtr.}$$

Wegen des Luftwiderstandes ist  $l_1$  noch etwas kleiner.

Gemäss der Bedingung unter 2) im vorigen Paragraph ist das Pendel ein um so vollkommenerer Zeitmesser bzw. Regulator einer Uhr, je geringeren Einfluss eine Aenderung von  $\alpha$  auf die Schwingungsdauer  $\tau$  ausübt, je kleiner also nach Gl. (1)

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 2n\alpha,$$

d. h. je kleiner  $\alpha$  ist. Bei Thurmuhren und ordinären Pendeluhren, bei denen  $\alpha$  grösser ist, hat eine geringe Aenderung von  $\alpha$  schon wesentlichen Einfluss auf den Gang der Uhr. Wenn z. B. ein solches Pendel bei dem Ausschlagwinkel  $\alpha$  Secunden schwingt, also

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + n\alpha^2)$$

ist, und wenn dann  $\alpha$  in  $\beta$  sich ändert, so dass

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + n\beta^2)$$

wird, so macht das Pendel in einer Secunde jetzt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1 + n\alpha^2}{1 + n\beta^2} \text{ nahe } = 1 + n(\alpha^2 - \beta^2)$$

einfache Schwingungen, in einem Tage also

$$86400 n (\alpha^2 - \beta^2)$$

Schwingungen zu viel. Wäre z. B.  $\alpha = 9^\circ$ ,  $\beta = 8^\circ$ , so machte das Pendel täglich

$$86400 \cdot 0,00001904 (81 - 64) = 28$$

Schwingungen zu viel, d. h. die betreffende Uhr ginge täglich 28 Secunden vor. —

Um die Schwingungsdauer des Pendels auch bei nicht sehr kleinem Ausschlagwinkel von diesem unabhängig zu machen, kann die von Huyghens entdeckte Eigenschaft des Tautochronismus der Cycloide benutzt werden, derzufolge ein schwerer materieller Punkt zu beliebig grossen Schwingungen in einer verticalen Cycloide gleiche Zeiten gebraucht. Gemäss der weiteren Eigenschaft der Cycloide, dass ihre Evolute eine ihr selbst congruente Cycloide ist, deren Scheitelpunkte in den Spitzen der anderen liegen, hat Huyghens ein solches einfaches Pendel von constanter Schwingungsdauer dadurch angenähert hergestellt, dass er eine kleine Kugel, in deren Mittelpunkte ihre Masse als in einem materiellen Punkte concentrirt zu denken ist, an einem Faden aufhing, welcher, in der Spitze einer verticalen und mit horizontaler Basis nach unten convexen Cycloide befestigt, bei den Schwingungen längs dieser sich auf- und abwickeln musste; die bis zum Kugelmittelpunkte gerechnete Fadenlänge war dabei doppelt so gross zu machen wie der Durchmesser des Kreises, von welchem ein Punkt der Peripherie durch Wälzung auf jener Basis die Cycloide beschreibt. Um als Regulator einer Uhr dienen und dazu mit der Hemmung in passende Verbindung gebracht werden zu können, wäre dieses angenähert einfache Huyghens'sche Pendel natürlich nicht geeignet, müsste vielmehr einem sogenannten zusammengesetzten Pendel seine starre Beschaffenheit soweit wie möglich erhalten werden durch Aufhängung der üblichen Pendelstange vermittelst eines nur so langen Bandes, als zu dessen Auf- und Abwicklung längs der cycloidischen Evolutenfläche nöthig ist. In der cycloidischen Bahn wäre dann aber streng genommen nicht der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt), sondern der Schwingungsmittelpunkt zu führen, der nur in

einem ganz starren Pendel von fester Lage, hier aber durch möglichste Annäherung an den Massenmittelpunkt zu hinlänglich unveränderlicher Lage zu bringen ist. Ist nämlich  $m$  die Masse eines starren Pendels  $a$  die Entfernung seines Massenmittelpunktes  $M$  von der Aufhängungsaxe  $A$ ,  $mk^2$  sein Trägheitsmoment für die mit  $A$  parallele Schwerpunktsaxe, so ist der Schwingungsmittelpunkt  $S$  derjenige Punkt, welcher in dem von  $M$  auf  $A$  gefällten Perpendikel ausserhalb  $M$  so liegt, dass seine Entfernung von  $A =$  der Länge des mit dem zusammengesetzten isochron schwingenden einfachen Pendels:

$$l = \frac{m(a^2 + k^2)}{ma} = a + \frac{k^2}{a} \dots \dots \dots (2)$$

ist. Seine Entfernung  $SM = l - a = \frac{k^2}{a}$  vom Massenmittelpunkte ist nur bei constanter Grösse von  $a$ , also bei starrer Beschaffenheit des um eine feste Aufhängungsaxe schwingenden Pendels unveränderlich, jedoch um so kleiner, je kleiner  $k$ , je mehr also die Pendelmasse um die zur Schwingungsebene senkrechte Schwerpunktsaxe herum (durch Verkleinerung des Durchmessers bei vergrösserter Dicke der üblichen linsenförmigen Hauptmasse) zusammengedrängt ist. Ein zusammengesetztes Cycloid pendel von solcher Art hatte Prof. Stampfer in Wien für die Rathhausthurmuhren in Lemberg ausgeführt, die im Jahre 1848 zerstört wurde, bis dahin aber mit grosser Genauigkeit gegangen sein soll.

Wegen der Schwierigkeit solcher Ausführungen wird es allgemein vorgezogen, den Zweck isochroner Schwingungen durch kleine Ausschlagwinkel  $\alpha$  von gewöhnlichen Kreispendeln zu erstreben in Verbindung mit geeigneten Hemmungen zu möglichster Verhütung von Aenderungen dieses Winkels  $\alpha$  gemäss der Bedingung unter 1) im vorigen Paragraph. Nur ist statt der Aufhängung eines solchen Pendels vermittelst einer Keilschneide bei besseren Uhren die Federaufhängung üblich, nämlich die Aufhängung mittels zweier leicht biegsamer Stahlblätter,

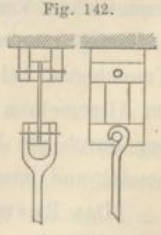


Fig. 142.

welche, oben und unten zwischen je zwei Metallschienen befestigt, vermittelst dieser oben am Uhrgestelle so aufgehängt sind und unten die Pendelstange so tragen, dass sie oben stets vertical, unten im Sinne der Pendelstange gerichtet bleiben und somit periodisch im einen und anderen Sinne je um einen Winkel = dem Ausschlagwinkel  $\alpha$  gebogen werden. Fig. 142 stellt eine solche Aufhängung dar, projicirt in der Ansicht links auf die Schwingungsebene, rechts auf eine dazu senkrechte Verticalebene. Ausserdem dass dadurch die Rei-

Grashof, theoret. Maschinenlehre. II.





bung und überhaupt die Uebelstände eines oxydirbaren Stahlkeiles vermieden werden, kann die Aufhängungsfeder auch einen gewissen Einfluss auf das Schwingungsgesetz ausüben und zwar

1) dadurch, dass durch ihre Krümmung eine mit dem Ausschlagwinkel wachsende kleine Erhebung des Schwingungsmittelpunktes  $S$  über den aus dem Aufhängungspunkte (dem oberen Endpunkte des biegsamen Theiles der Feder) mit seinem Abstände von der tiefsten Lage des Punktes  $S$  als Radius beschriebenen Kreis, also eine Annäherung der Bahn von  $S$  an die dem Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen entsprechende Cycloide bewirkt wird,

2) dadurch, dass die Biegearbeit der Feder bei der Entfernung des Pendels aus seiner verticalen Mittellage eine Zunahme seiner Verzögerung, bei der Annäherung an dieselbe eine Zunahme seiner Beschleunigung, aus beiden Gründen folglich eine Verkürzung der Schwingungsdauer  $\tau$ , vielleicht auch zugleich eine Verminderung ihrer Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel zur Folge hat, wenn nämlich  $\tau$  bei grossen Schwingungen verhältnissmässig mehr, als bei kleinen, durch jenen Krümmungswiderstand verkleinert wird.

Ob diese vortheilhafte Wirkung der Federaufhängung, wie behauptet wird,\* wirklich in solcher Weise stattfindet, dass es nur darauf ankäme, die Dimensionen der Feder zur Länge und Masse des Pendels in ein passendes Verhältniss zu setzen, um seine Schwingungen ganz isochron zu machen, bedarf näherer Prüfung; doch führt die mathematische Untersuchung bei Berücksichtigung aller Umstände zu weitläufigen Entwicklungen, auf welche hier um so mehr verzichtet werden mag, als sie jene Annahme nicht zu bestätigen scheinen. —

Ein anderer Feind der constanten Schwingungsdauer eines Pendels ist der Einfluss der Temperatur auf die Pendellänge. Bei gewöhnlichen Pendeluhrn begnügt man sich in dieser Hinsicht mit gelegentlicher Verstellung der Linse durch eine Stellschraube, bei besseren verfertigt man die Pendelstange aus gut getrocknetem und ausgelangtem Tannenholz, bei den besten sind besondere Compensationen üblich, die im Allgemeinen auf der verschiedenen Ausdehnbarkeit verschiedener Körper durch die Wärme beruhen. Die bemerkenswerthesten sind das Rostpendel und das Quecksilberpendel.

Das Rostpendel, beruhend auf der grösseren Ausdehnbarkeit des

\* Siehe u. A. Moritz Immisch in seiner „Londoner Preisschrift über den Isochronismus der Spiralfeder“, S. 18, und Laboulaye, *Traité de Cinématique*, 3. ed., p. 618.

Zinks im Vergleich mit Eisen oder Stahl, kann in Einzelheiten sehr mannigfach construirt werden; Fig. 143 diene als Beispiel. Die Pendelstange ist dabei in ihrem obersten Theile eine einfache Rundeisenstange, die sich vermittels des Querstückes 1 in zwei dergleichen Rundeisenstangen fortsetzt. Letztere tragen zwischen sich vermittels des Querstückes 2 eine aufwärts reichende Zinkröhre, in welcher eine von oben her hineinreichende Eisenstange an etwas verschiedenen Stellen (an den Stellen der im oberen Theile dieser Röhre in Fig. 143 angedeuteten Löcher) festgeklemmt oder anderweitig befestigt werden kann. Diese letztere Eisenstange trägt endlich mit Hülfe des Querstückes 3, durch welches die von 1 hinabreichenden Stangen ungehindert hindurchgehen, zwei äussere Rundeisenstangen, die das Querstück 2 unbehindert durchdringen und mit ihren unteren Enden in der Linse befestigt sind. Sie sind fest mit dem Querstücke 4 verbunden, das dazu dient, vermittels einer mit feinem Schraubengewinde versehenen Tragstange eine Masse  $L$  in einer Höhlung der Linse etwas zu heben oder zu senken, um die für die Schwingungsdauer maassgebende Länge  $l$  zu corrigiren. Da die zur Compensation wirksame Länge der Zinkröhre sich nur vom unteren Ende bis zu der Stelle erstreckt, wo sie mit der oben hineinreichenden Eisenstange fest verbunden ist, kann durch Aenderung dieser Verbindungsstelle die Compensation als solche (unabhängig von der Länge  $l$  bei einer gewissen gegebenen Temperatur) corrigirt werden.

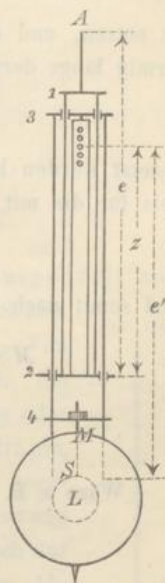
Um abgesehen von dieser nachträglichen Correction ein solches Rostpendel passend construiren zu können, muss die ungefähre Lage des Schwingungsmittelpunktes  $S$  bekannt sein. Zu seiner angenäherten Bestimmung sei, unter  $A$  den Aufhängungspunkt,  $M$  den Massenmittelpunkt,  $L$  den Mittelpunkt der Linse verstanden,

$$AM = a, \quad AS = l, \quad AL = L,$$

Radius der Linse  $= r$ , Masse derselben  $= m_1$ , Masse der Pendelstange  $= m_2$ . Mit Rücksicht darauf, dass das Trägheitsmoment eines flachen homogenen Kugelabschnitts von der Masse  $m$  und Höhe  $h$  für die Umdrehungsaxe

$$= \frac{2}{3} m R h$$

Fig. 143.



gesetzt werden kann, wenn  $R$  den Radius der Kugel bedeutet, ist hier das Trägheitsmoment der Linse von der Dicke  $2h$  für ihre durch  $L$  gehende Umdrehungsaxe nahe

$$= \frac{2}{3} m_1 R h = \frac{1}{3} m_1 r^2$$

zu setzen, und da ferner, falls die Masse der Pendelstange als gleichförmig längs derselben vertheilt in Rechnung gebracht wird,

$$ML = \frac{m_2 a}{m_1 2} \dots \dots \dots (3)$$

gesetzt werden kann, ergibt sich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels für die mit der Aufhängungsaxe parallele Schwerpunktsaxe:

$$mk^2 = m_1 \left[ \frac{r^2}{3} + \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \frac{a^2}{4} \right] + \frac{1}{3} m_2 a^2$$

und somit nach Gl. (2):

$$MS = \frac{k^2}{a} = \left\{ \frac{m_1}{m} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \frac{m_2}{m} \right\} a \dots \dots (4)$$

$$\frac{a}{L} = \frac{a}{a + ML}; \quad \frac{l}{L} = \frac{a + MS}{a + ML} \dots \dots \dots (5).$$

Wäre z. B.  $m_1 = \frac{3}{4} m$ ,  $m_2 = \frac{1}{4} m$ ,  $r = \frac{1}{6} a$ , so ergäbe sich:

$$\begin{aligned} ML &= \frac{1}{6} a, & MS &= \frac{1}{9} a \\ a &= \frac{6}{7} L, & l &= \frac{20}{21} L \\ r &= \frac{1}{7} L, & L - l &= \frac{1}{21} L = \frac{1}{3} r \end{aligned}$$

oder bei gegebener Grösse von  $l$ , entsprechend einer gegebenen Schwingungsdauer  $\tau$ :

$$L = \frac{21}{20} l \quad \text{und} \quad a = \frac{9}{10} l \quad \text{für} \quad r = \frac{3}{20} l.$$

Der Massenmittelpunkt dieses Pendels würde im höchsten Punkte der Linse, der Schwingungsmittelpunkt um  $\frac{1}{3}$  des Radius  $r$  über ihrem Mittelpunkte liegen.

Um nun die nöthige Länge der Zinkröhre zu bestimmen, werde dieselbe bis zum mittleren der vorbemerkten Löcher gerechnet  $= z$  gesetzt, so dass die Fehler der Rechnung nachträglich mit Hülfe entsprechender Beobachtungen nach beiden Seiten, sowohl durch Vergrößerung, als durch Verkleinerung von  $z$  corrigirt werden können. Unter der Voraussetzung, dass die äusseren Eisenstangen in einer Höhe  $= L - l$  über dem Mittel-

punkte der Linse in dieser befestigt werden, ist mit den aus Fig. 143 ersichtlichen Bedeutungen von  $e$  und  $e'$ :

$$l = e - z + e'$$

und ändert sich diese Länge, wenn der lineare Ausdehnungscoefficient des Eisens  $= \varepsilon$ , des Zinks  $= \zeta$  ist, für eine Temperaturänderung von  $1^\circ$  um

$$\Delta l = \varepsilon(e + e') - \zeta z = \varepsilon l - (\zeta - \varepsilon)z,$$

so dass, um  $\Delta l = 0$  zu machen,

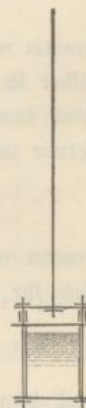
$$z = \frac{\varepsilon}{\zeta - \varepsilon} l \dots \dots \dots (6)$$

gemacht werden müsste, insbesondere mit

$$\varepsilon = 0,000012 \quad \text{und} \quad \zeta = 0,00003 : z = \frac{2}{3} l.$$

Die Einrichtung eines Quecksilbercompensationspendels zeigt Fig. 144. Die Pendelstange trägt ein Querstück, an welchem ihre Länge durch eine Schraube regulirt werden kann. Von den Enden des Querstücks reichen zwei Stangen herab, die mit der Hauptpendelstange aus demselben Material (Eisen oder Stahl) bestehen mögen und welche unten einen Teller tragen, worauf ein cylindrisches, mit Quecksilber beinahe ganz angefülltes Glasgefäß steht. Letzteres wird durch Einklemmung zwischen dem unteren und einem oberen Teller, der durch auf die beiden Tragstangen geschobene Hülsen in constantem Abstände vom Querstücke erhalten ist, festgeklemmt.

Fig. 144.



Ist nun  $e$  die Entfernung der Aufhängungsaxe vom unteren Teller, bzw. vom Boden des Glasgefäßes und  $x$  die Entfernung des letzteren vom Schwingungsmittelpunkte, also

$$l = e - x,$$

so ergibt sich, unter  $\varepsilon$  den linearen Ausdehnungscoefficienten des Eisens und unter  $\xi$  die verhältnissmässige Aenderung von  $x$  für eine Temperaturänderung von  $1^\circ$  verstanden, die entsprechende Aenderung von  $l$ :

$$\Delta l = \varepsilon e - \xi x.$$

Dabei ist, wenn  $\varphi$  den Volumenausdehnungscoefficienten des Quecksilbers und  $\gamma$  den linearen Ausdehnungscoefficienten des Glases bedeutet,  $\xi$  bestimmt durch die Gleichung:

$$1 + \varphi = (1 + \gamma)^2 (1 + \xi) \text{ nahe } = 1 + 2\gamma + \xi,$$

woraus  $\xi = \varphi - 2\gamma$  und

$$\Delta l = \varepsilon e - (\varphi - 2\gamma)x = \varepsilon l - (\varphi - 2\gamma - \varepsilon)x$$

folgt, somit  $\Delta l = 0$  für

$$x = \frac{\varepsilon}{\varphi - 2\gamma - \varepsilon} l \dots \dots \dots (7),$$

insbesondere mit  $\varphi = 0,00018$ ,  $\gamma = 0,000009$  und  $\varepsilon = 0,000012$ :

$$x = \frac{2}{25} l = \frac{2}{27} e.$$

Um bei gegebener Grösse von  $l$  und somit auch von  $e = l + x$  gemäss Gl. (7) die ganze Höhe  $= 2z$  der Quecksilbersäule im Gefässe näherungsweise zu bestimmen, sei  $y$  der Radius des Querschnittes dieser Quecksilbersäule,  $m_1$  ihre Masse incl. Glasgefäss, Teller und Tragstangen,  $m_2$  die Masse der Pendelstange nebst Querstück. Die Punkte  $A$ ,  $M$  und  $S$  mögen die früheren Bedeutungen haben,  $Q$  aber den Mittelpunkt der Quecksilbersäule bedeuten. Dann kann das Trägheitsmoment der Masse  $m_1$  für die durch  $Q$  gehende, zur Schwingungsebene senkrechte Axe nach bekannter Formel

$$= m_1 \left( \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} \right)$$

gesetzt werden, falls nur hier mit Rücksicht auf die ausser dem Quecksilber in  $m_1$  einbegriffenen Massen der Radius  $y$  etwas grösser, etwa  $=$  dem äusseren Radius des Glasgefässes angenommen wird. Indem dann ferner mit  $AM = a$  die Strecke  $MQ$  analog Gl. (3):

$$MQ = \frac{m_2 a}{m_1 2} \dots \dots \dots (8)$$

gesetzt werden mag, ergibt sich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels für die mit der Aufhängungsaxe parallele Schwerpunktsaxe:

$$mk^2 = m_1 \left[ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} + \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \frac{a^2}{4} \right] + \frac{1}{3} m_2 a^2$$

und daraus die Strecke  $MS$ :

$$MS = \frac{k^2}{a} = \left\{ \frac{m_1}{m} \left[ \left( \frac{1}{4} \frac{y^2}{z^2} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{z}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \frac{m_2}{m} \right\} a \dots (9).$$

Mit Rücksicht auf diese Ausdrücke von  $MQ$  und  $MS$  findet man für angenommene Werthe der Verhältnisse  $\frac{y}{z}$  und  $\frac{m_2}{m_1}$  die gesuchte Länge  $z$  aus den Gleichungen:

$$a + MQ + z = e \quad \text{und} \quad a + MS = l \dots \dots \dots (10)$$

durch Elimination von  $a$ . Oder es kann auch das Massenverhältniss  $\frac{m_2}{m_1}$  für angenommene Werthe von  $\frac{y}{z}$  und  $\frac{z}{x}$  berechnet werden. Wird etwa angenommen:

(7),

$$\frac{y}{z} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad z = x,$$

so dass der Schwingungsmittelpunkt  $S$  mit dem Punkte  $Q$  zusammenfällt, so folgt aus der ersten der Gleichungen (10) mit Rücksicht auf Gl. (8):

$$a + MQ = e - x = l; \quad \frac{l}{a} = 1 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \dots \dots \dots (11),$$

und weil dann mit  $x = \frac{2}{25} l$ :

$$\frac{z}{a} = \frac{x}{a} = \frac{2}{25} \frac{l}{a} = 0,08 + 0,04 \frac{m_2}{m_1}$$

ist, ergibt sich aus der zweiten Gleichung (10) mit Rücksicht auf (9):

$$\frac{l}{a} = 1 + \frac{m_1}{m} \left[ \frac{4}{9} \left( 0,08 + 0,04 \frac{m_2}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \frac{m_2}{m}.$$

Die Gleichsetzung dieses und des Ausdruckes von  $\frac{l}{a}$  nach (11) liefert mit den Bezeichnungen:

$$\frac{m_2}{m_1} = p, \quad \frac{m_1}{m} = \frac{1}{1+p}, \quad \frac{m_2}{m} = \frac{p}{1+p}$$

eine Gleichung, welche auf die Form gebracht werden kann:

$$p + 1,52 p^2 = 0,01736$$

und aus welcher sich ergibt:

$$p = \frac{m_2}{m_1} = 0,017.$$

Indem das Längenverhältniss der Pendelstange und der Quecksilbersäule nahe  $= \frac{25}{4}$ , das Dichtigkeitsverhältniss von Quecksilber und Eisen nahe  $= 1,8$  ist, entspricht jenes Massenverhältniss einem Verhältnisse  $= \delta$  der Durchmesser von Pendelstange und Quecksilbersäule, welches näherungsweise durch die Gleichung

$$p = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{1,8} \frac{25}{4} \delta^2$$

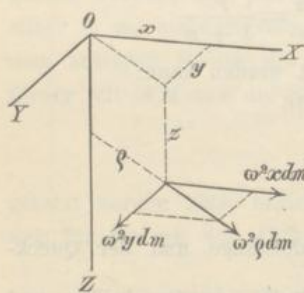
bestimmt ist und  $= 0,07$  gefunden wird für  $p = 0,017$ .

Die Fehler, welche dem hiernach construirten Pendel hinsichtlich seiner Schwingungsdauer  $\tau$  bei gegebener Temperatur und des etwa noch verbliebenen Einflusses der letzteren auf die Schwingungsdauer anhaften, sind schliesslich mit Hilfe von Schwingungsbeobachtungen vermittels der oben erwähnten Regulierungsschraube und durch nachträgliche kleine Aenderung der Quecksilberfüllung des Gefässes zu corrigiren.

§. 140. Das conische Pendel.

Von einem schweren Körper mit dem Schwerpunkte  $S$ , der Masse  $m$ , also dem Gewichte  $mg$  sei ein Punkt  $O$  fest, und es bewege sich um ihn der Körper so, dass die Gerade  $OS=r$  mit der Lothrechten  $OZ$  durch  $O$  einen unveränderlichen Winkel  $SOZ=\alpha$  bildet und dass die Ebene  $SOZ$ , von welcher zunächst vorausgesetzt wird, dass sie eine feste Lage im Körper hat, mit constanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $OZ$  rotirt. Damit das der Fall sei, während keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, als die Schwerkäfte und Centrifugalkräfte seiner Massenelemente, muss nicht nur  $\omega$  von bestimmter Grösse, sondern auch die Massenvertheilung des Körpers von gewisser Art sein. Indem nämlich, wenn im Körper die Axe  $OY$  senkrecht zur Ebene  $SOZ$  und in dieser  $OX$  senkrecht zu  $OZ$  angenommen wird, die in  $S$  angreifende resultirende Schwerkraft des Körpers mit dem Momente  $mgr \sin \alpha$  um  $OY$  im Sinne einer Verkleinerung des Winkels  $\alpha$  zu drehen strebt, müssen die Centrifugalkräfte, an den Punkt  $O$  versetzt, ein resultirendes Paar mit der Ebene  $XOZ$  liefern, welches mit einem Momente  $=mgr \sin \alpha$  den Winkel  $\alpha$  zu vergrössern strebt. Wie aus Fig. 145 ersichtlich ist, geben aber die Centrifugalkräfte  $\omega^2 \rho dm$  der Massenelemente  $dm$  bei ihrer Versetzung an den Punkt  $O$  ein Kräftepaar,

Fig. 145.



das sich im Allgemeinen in zwei Componentenpaare in den Ebenen  $ZY$  und  $ZX$  bezw. mit den Momenten

$$M_x = \omega^2 \int yz dm \text{ und } M_y = \omega^2 \int xz dm$$

zerlegen lässt, so dass die obigen Voraussetzungen an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\int yz dm = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\omega^2 \int xz dm = mgr \sin \alpha \dots \dots \dots (2).$$

Die erste ist erfüllt, wenn, wie angenommen werde, die Körpermasse in Bezug auf die Ebene  $SOZ$  symmetrisch vertheilt ist.

In Gl. (2) werde das Integral  $\int xz dm$  auf eine andere Form gebracht vermittels einer Coordinatentransformation, entsprechend dem Ersetze der Axen  $OZ$  und  $OX$  durch die Axen  $OU$  und  $OV$ , Fig. 146,

§. 140.  
von  
zu  
dina  
Coo  
  
sin  
Ist  
per  
sym  
  
und  
  
Q  
g d  
Die  
  
und  
  
und  
  
Red  
so  
  
die  
der  
Cha  
dur  
roti  
dier  
We  
sch  
log  
der  
win

von denen erstere in  $OS$  liegt, letztere in der Ebene  $SOZ$  normal zu  $OS$  ist. Sind dann  $u, v$  die betreffenden Coordinaten eines Massenelementes, die bei unveränderter Coordinate  $y$  an die Stelle von  $z, x$  treten, so ist

$$x = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

$$z = u \cos \alpha - v \sin \alpha$$

$$\int xz dm =$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \int (u^2 - v^2) dm + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int uv dm.$$

Ist aber, wie weiter angenommen werde, die Körpermasse auch in Bezug auf die Ebene  $SOY$  symmetrisch vertheilt, so ist

$$\int uv dm = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{und } \int xz dm = \sin \alpha \cos \alpha (\int (u^2 + v^2) dm - 2 \int v^2 dm) = (Q - q) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{mit } Q = \int (u^2 + v^2) dm \text{ und } q = 2 \int v^2 dm \dots \dots \dots (4).$$

$Q$  ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe  $OY$ ,  $q$  das Doppelte seines Trägheitsmomentes in Bezug auf die Ebene  $SOY$ . Die Gleichung (2) erhält jetzt die Form

$$\omega^2 (Q - q) \cos \alpha = mgr$$

und folgt daraus

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} \text{ mit } l = \frac{Q - q}{mr} \dots \dots \dots (5)$$

und die Zeit einer Umdrehung:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \dots \dots \dots (6).$$

Reducirte sich der Körper auf einen materiellen Punkt  $S$  mit der Masse  $m$ , so wäre  $q = 0$ ,  $Q = mr^2$ , also  $l = r$ . —

Vorstehenden Entwicklungen lag die Voraussetzung zu Grunde, dass die Ebene  $SQZ$  von fester Lage im Körper ist, wie es dann der Fall sein würde, wenn letzterer um  $OY$  als um eine Charnieraxe drehbar wäre, die um die Verticale  $OZ$  mit der durch Gl. (5) bestimmten constanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotirt. In der That aber pflegt das als Regulator einer Uhr dienende conische Pendel in der durch Fig. 147 angedeuteten Weise aufgehängt zu werden vermittels einer Art von elastischem Universalgelenk, gebildet durch zwei Paar Federn (analog der Federaufhängung des ebenen Pendels, Fig. 142), deren bei verticaler Lage des Pendels selbst verticale Ebenen sich rechtwinklig in  $OZ$  schneiden. Die Bewegung des Pendels ist dann zusammen-

Fig. 146.

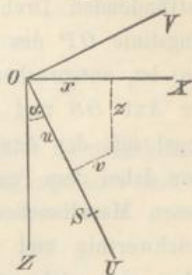
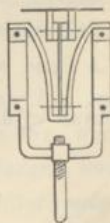


Fig. 147.





gesetzt aus der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $OZ$  und einer im umgekehrten Sinne mit ebenso grosser Winkelgeschwindigkeit stattfindenden Drehung um  $OS$ , so dass nicht  $OZ$ , sondern die Halbierungslinie  $OP$  des Winkels  $SOZ$  die Polaxe (augenblickliche Drehungsaxe) ist, entsprechend der Abwälzung eines im Pendel festen Kegels mit der Axe  $OS$  und dem halben Oeffnungswinkel  $SOP$  auf einem festen Kegel mit der Axe  $OZ$  und dem halben Oeffnungswinkel  $ZOP$ . Indem aber dabei dem Pendel die Form eines Umdrehungskörpers gegeben wird, dessen Meridianebenen auch in Betreff der Massenvertheilung einander gleichwerthig und in Bezug auf die Umdrehungsaxe symmetrisch sind, heben sich nicht nur die aus der Drehung um  $OS$  entspringenden Centrifugalkräfte der Massenelemente paarweise auf, sondern bleibt auch die Körpermasse beständig in Bezug auf die Ebenen  $SOZ$  und  $SOY$  symmetrisch vertheilt, so dass die Gleichungen (5) und (6) ihre Gültigkeit behalten. Zugleich erhält  $q$  die Bedeutung des Trägheitsmomentes für die Axe  $OS$ , da dieses stets = der Summe der Trägheitsmomente für zwei zu einander senkrechte durch  $OS$  gehende Ebenen ist, letztere aber hier gleichwerthig sind.

Besteht das Pendel aus einer dünnen cylindrischen homogenen Stange vom Gewichte  $A$  und von der Länge  $a$  nebst einer homogenen Kugel vom Gewichte  $B$ , deren in der Mittellinie der Stange gelegener Mittelpunkt die Entfernung  $b$  vom Aufhängungspunkte hat, und werden die auf beide entfallenden Antheile von  $Q$  und  $q$  beziehungsweise mit  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $q_1$ ,  $q_2$  bezeichnet, so ist  $q_1 = 0$  zu setzen und

$$Q_1 = \frac{1}{3} \frac{A}{g} a^2, \quad Q_2 = \frac{B}{g} b^2 + q_2,$$

somit nach Gl. (5):

$$l = \frac{\frac{1}{3} A a^2 + B b^2}{\frac{1}{2} A a + B b} = b \frac{1 + \frac{1}{3} \frac{A a^2}{B b^2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{A a}{B b}} \dots \dots \dots (7)$$

etwas  $< b$ , da  $\frac{1}{3} \frac{a}{b} < \frac{1}{2}$  oder  $b > \frac{2}{3} a$  ist. Uebrigens ist nach Gl. (6):

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

um so kleiner, je kleiner  $\alpha$ , ebenso wie beim ebenen Pendel. Während bei diesem aber unter  $\alpha$  einen kleinen Winkel verstanden, die Schwin-

gungsdauer  $\tau$  näherungsweise proportional

$$1 + \frac{\alpha^2}{16}$$

ist, ergibt sie sich beim conischen Pendel proportional:

$$\sqrt{\cos \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Eine Aenderung des kleinen Winkels  $\alpha$  übt folglich hier im umgekehrten Sinne einen 4 mal so grossen Einfluss auf die Schwingungsdauer aus, als beim ebenen Pendel.

#### §. 141. Die Unruhe.

Die Unruhe besteht aus einem kleinen Schwungrade, dessen Axe in festen Lagern drehbar ist, und einer Spiralfeder, welche, indem sie mit 8 bis 12 Windungen die Axe des Rades umgibt, mit ihrem einen Ende an diesem, mit dem anderen am Lagergestell befestigt ist. Wird die Unruhe durch Anstoss aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt, so wird sie durch die Elasticität der sich abwechselungsweise zusammendrehenden und aufdrehenden Spiralfeder in Schwingungen erhalten, so lange die durch den Anstoss mitgetheilte lebendige Kraft nicht durch Bewegungswiderstände verbraucht ist oder sofern der betreffende Verlust durch periodische Wiederholung des Anstosses ersetzt wird. Die aus Stahldraht von meistens rechteckigem Querschnitte verfertigte Feder ist flach oder cylindrisch, d. h. ihre Mittellinie eine ebene oder cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Letztere Form wurde erst später von Arnold eingeführt, findet aber jetzt zu den vollkommensten Unruhe-Uhren, sogenannten Chronometern, vorzugsweise, zu Schiffschronometern ausschliessliche Verwendung. Der wenig gebräuchlichen und kaum durch wesentliche Vorzüge ausgezeichneten sogenannten Tonnenfeder von Houriet sei nur nebenbei Erwähnung gethan; sie unterscheidet sich von der Cylinderfeder dadurch, dass die Durchmesser der Windungen von beiden Enden gegen die Mitte hin zunehmen. Wenn freilich die Mittellinie einer Cylinderfeder in der Gleichgewichtslage vollständig vom einen bis zum anderen Ende eine Schraubenlinie wäre, so müssten auch bei ihr, wenn sie in Schwingungen begriffen ist, die Durchmesser der Windungen nach der Mitte hin zu- oder abnehmen, jenachdem die Feder weiter aufgedreht oder zusammengedreht ist; doch wird solchem Verhalten dadurch entgegengewirkt, dass die Feder an den Enden einwärts gebogen wird, so dass die Mittellinien dieser Endigungen in der Projection auf eine zur

Axe senkrechte Ebene nach Art von Fig. 148 zwei symmetrisch liegende congruente Curven bilden, deren bezw. am Gestell und am Schwungrade feste Endpunkte  $A, A'$  um ungefähr die Hälfte des Windungshalbmessers

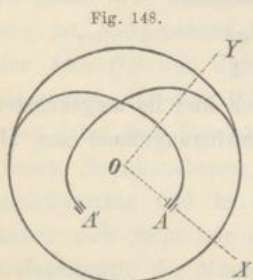


Fig. 148.

von der Axe entfernt sind. Wie im Folgenden näher nachgewiesen wird, bieten diese eigenthümlich gekrümmten Federendigungen das wirksamste Hülfsmittel dar, um die Schwingungen der Unruhe möglichst isochron, d. h. die Schwingungsdauer möglichst unabhängig vom Ausschlagwinkel zu machen, und ist deshalb später auch die flache Spiralfeder in ähnlicher Weise modificirt worden; bei dieser nach ihrem Erfinder benannten Breguet-Feder schliesst sich indessen die fragliche Endigung nur an die äussere Spiralwindung an, und wird dann auch der Isochronismus nicht so vollständig dadurch erreicht. Hierdurch und durch die grössere Leichtigkeit ihrer exacten Herstellung ist die Vorzüglichkeit der cylindrischen Feder hauptsächlich begründet, sofern nicht die dadurch bedingte grössere Dicke der Uhr als Unbequemlichkeit empfunden wird.

Wenn  $\varphi$  der Winkel ist, um welchen das Schwungrad der Unruhe durch ein Kräftepaar, das in einer zur Axe senkrechten Ebene wirkt, aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage verdreht wird, so handelt es sich vor Allem um die zwischen  $\varphi$  und dem Moment  $= M$  des Kräftepaares im neuen Gleichgewichtszustande stattfindende Beziehung, von welcher das Schwingungsgesetz und somit die Schwingungsdauer  $\tau$  wesentlich abhängt. Zur Ableitung dieser Beziehung kann die cylindrische Spiralfeder wegen der stets sehr kleinen Steigung ihrer Windungen mit genügender Annäherung gerade so beurtheilt werden wie eine flache Feder von gleichem Material und gleichem Querschnitte, deren Mittellinie mit der Projection der wirklichen Mittellinie auf eine zur Axe senkrechte Ebene zusammenfällt, und wenn dann die somit ebene Mittellinie auf rechtwinklige Coordinatenachsen  $OX, OY$  bezogen wird, deren Ursprung  $O$  in der Drehungsaxe gelegen ist, und mit  $X, Y$  die bezw. nach  $OX$  und  $OY$  gerichteten Componenten der auf die Schwungradwelle wirkenden Lagerreaction bezeichnet werden, so ist für einen beliebigen Querschnitt der Feder, entsprechend dem Punkte  $x, y$  der Mittellinie, das auf Biegung wirkende Kraftmoment

$$= M + Xy - Yx.$$

Es ist positiv oder negativ, jenachdem es im Sinne einer Zunahme oder

Abnahme der ursprünglichen Krümmung wirkt, falls auch  $M$  in gleicher Weise algebraisch verstanden wird und die positiven Coordinatenaxen so gerichtet sind, dass ein positives Moment  $M$  dem Drehungssinne von  $OX$  gegen  $OY$  entspricht. In Fig. 148 ist das der Fall, wenn der in der positiven Axe  $OX$  liegende Endpunkt  $A$  der Federmittellinie ihr unbeweglicher (am Gestell fester) Endpunkt ist.

Nach bekannten Elasticitätsgesetzen\* ist aber jenes auf Verbiegung in Punkte  $x, y$  wirkende Kraftmoment auch

$$= EJ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

wenn  $r$  und  $r_0$  die Krümmungsradien der Mittellinie für jenen Punkt bzw. im neuen und im ursprünglichen Gleichgewichtszustande bedeuten, während  $E$  der Elasticitätsmodul des Materials der Feder und  $J$  das Trägheitsmoment ihres Querschnittes für die Biegungsaxe ist. Aus der somit sich ergebenden Gleichung

$$EJ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = M + Xy - Yx \dots \dots \dots (1)$$

folgt bei Multiplication mit dem Bogenelemente  $ds$  und Integration längs der ganzen Mittellinie  $= l$ :

$$EJ \varphi = Ml + Xfyds - Yfxds \dots \dots \dots (2)$$

Dabei ist mit Rücksicht darauf, dass die Feder an beiden Enden  $A$  und  $A'$  eingeklemmt ist und dass somit die Normalen ihrer Mittellinie daselbst unter unveränderlichen Winkeln gegen die Radien  $OA$  und  $OA'$  geneigt sind,

$$\varphi = \int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0}$$

= dem Unterschiede der Windungswinkel der Spiralfeder im neuen und ursprünglichen Gleichgewichtszustande = ihrem Verdrehungswinkel (Drehungswinkel der Normalen im beweglichen Endpunkte  $A' =$  Drehungswinkel des Radius  $OA'$ ), positiv gesetzt im Sinne einer Krümmungszunahme oder Zusammendrehung der Spiralfeder. In demselben Sinne ist die Winkelbeschleunigung der Unruhe, unter  $Q$  ihr Trägheitsmoment für die Drehungsaxe verstanden:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{M}{Q} \dots \dots \dots (3)$$

\* Siehe u. A. des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, 2. Aufl., Nr. 168.

und nach (2) bei Vernachlässigung der Glieder mit  $X$  und  $Y$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{EJ}{Ql}\varphi.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist, unter  $A$  und  $B$  Constante verstanden:

$$\varphi = A \sin\left(t\sqrt{\frac{EJ}{Ql}}\right) + B \cos\left(t\sqrt{\frac{EJ}{Ql}}\right),$$

entsprechend einer periodischen Aenderung von  $\varphi$  je in den Zeiten:

$$2\pi\sqrt{\frac{Ql}{EJ}}.$$

Das ist die Dauer einer ganzen oder Doppelschwingung, die Dauer einer einfachen Schwingung also:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{Ql}{EJ}} \dots \dots \dots (4)$$

= einer vom Ausschlagwinkel unabhängigen Constanten. Indessen wird diese Unveränderlichkeit von  $\tau$  gestört durch die Einflüsse der Lagerreaction, der Temperatur und des Bewegungswiderstandes, die deshalb im Folgenden einer näheren Prüfung unterzogen werden sollen nebst den Hilfsmitteln, durch welche sie möglichst unschädlich zu machen sind.

Sind auch diese Einflüsse an und für sich nur geringfügig, so wird ihre Wirkung doch erheblich durch vielmalige Summirung bei Uhren, welche, wie die zur Bestimmung der geographischen Länge auf See dienenden Chronometer, oft lange Zeit ohne Controle bleiben müssen. Bei einem solchen Schiffschronometer ist es zwar nicht nöthig, dass sein sogenannter täglicher Gang, d. h. sein tägliches Voreilen oder Zurückbleiben = Null sei, dagegen ist es wichtig, dass derselbe möglichst constant, also von zufälligen Aenderungen des Ausschlagwinkels, der Temperatur und des Widerstandes unabhängig sei. Ist dann dieser tägliche Gang durch Beobachtung bekannt und ausserdem der sogenannte Stand der Uhr, d. h. die Differenz zwischen ihrer Angabe und der richtigen mittleren Zeit eines gewissen Meridians  $M_0$  an einem bestimmten Tage, so kann man daraus für irgend einen späteren Tag durch Ablesung des Chronometers in einem gewissen Augenblicke die richtige mittlere Zeit jenes Meridians  $M_0$  für denselben Augenblick durch Anbringung der betreffenden Correction erhalten. Indem also durch astronomische Beobachtung die mittlere Zeit eines anderen Meridians  $M$  bestimmt wird, auf welchem das Schiff sich eben befindet, erhält man die

geographische Länge durch Umsetzung des gefundenen Zeitunterschiedes beider Meridiane in Längenunterschied mit Rücksicht darauf, dass 4 Zeitminuten einem Längengrade entsprechen.

Vollkommene Unveränderlichkeit des täglichen Ganges ist natürlich nicht zu erreichen und ist vielmehr ein Chronometer schon recht gut, wenn die grösste vorkommende Verschiedenheit der Umstände eine Abweichung des täglichen Ganges vom Monatsmittel desselben höchstens bis zu 2 Secunden zur Folge hat und dieses Monatsmittel sich während eines Jahres um nicht mehr als eine Secunde ändert. Harrison war der Erste, welcher um 1760 dergleichen zur geographischen Längenbestimmung geeignete Chronometer in solcher Vollkommenheit verfertigte, dass er damit einen vom englischen Parlamente ausgesetzten hohen Preis (20000 Pfd. St.) gewann. Die Herstellung eines solchen Chronometers erfordert vor Allem eine Unruhe von solcher Einrichtung, dass dadurch jene störenden Einflüsse fast vollständig compensirt werden gemäss den in den folgenden Paragraphen zu besprechenden Regeln.

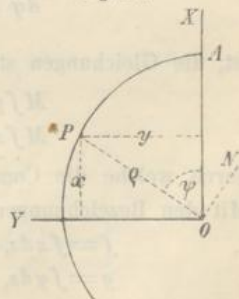
§. 142. Einfluss der Lagerreaction auf das Schwingungsgesetz der Unruhe.

Um zunächst die Beziehung zwischen der Grösse  $M$  eines die Unruhe verdrehenden Kraftmomentes (positiv gesetzt für den Fall einer Krümmungszunahme der Spiralfeder) und dem entsprechenden Verdrehungswinkel  $\varphi$  mit Rücksicht auf die Lagerreaction zu finden, handelt es sich um die Entwicklung des Ausdruckes:

$$X \int y ds - Y \int x ds$$

in Gl. (2) des vorigen §., der dort einstweilen = Null gesetzt bzw. vernachlässigt wurde. Zu dem Ende werde ausgegangen von dem Falle einer flachen Spiralfeder ohne Breguet'sche Endigung und deren Mittellinie  $AA'$ , unter  $A$  wieder den unbeweglichen (hier äusseren), unter  $A'$  den beweglichen (inneren, am Schwungrade festen) Endpunkt verstanden, näherungsweise für jeden Werth von  $\varphi$  als eine Archimedische Spirale angenommen. Sind dann  $x, y$  die rechtwinkligen Linearcoordinaten,  $\varrho, \psi$  die Polarcoordinaten eines Punktes  $P$  dieser Curve (Fig. 149), und ist  $e$  die constante Entfernung zweier aufeinander folgender Windungen, ferner  $OA = a, OA' = a'$ , so ist:

Fig. 149.



$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad \rho = a - \frac{e}{2\pi} \psi \dots \dots \dots (1).$$

Der Windungswinkel, d. i. der Werth von  $\psi$  für den Endpunkt  $A'$ , entsprechend  $\rho = a'$ , sei

$$= 2i\pi + \varepsilon_0 \text{ im ursprünglichen}$$

$$\text{bzw.} = 2i\pi + \varepsilon \text{ im neuen Gleichgewichtszustande,}$$

unter  $i$  eine ganze Zahl verstanden. Die Bogenlänge  $AP = s$  und insbesondere auch die ganze Curvenlänge  $AA' = l$  können als unveränderlich gelten. Der Krümmungsradius für einen Punkt  $P$  der Mittellinie gehe aber durch die Verdrehung  $\varphi$  von  $r_0$  in  $r$  über; dann entspricht dieser Krümmungsänderung eine Zunahme des Contingenzwinkels des Bogenelementes  $ds$  bei  $P$  um

$$\frac{ds}{r} - \frac{ds}{r_0} = d\varphi,$$

wodurch die Unruhaxe, wenn sie frei wäre, normal zu  $OP$  um die Strecke

$$ON = \rho d\varphi$$

verrückt werden würde, also im Sinne

$$\text{von } OX \text{ um } \rho d\varphi \sin \psi = y d\varphi,$$

$$\text{von } OY \text{ um } -\rho d\varphi \cos \psi = -x d\varphi.$$

Im Ganzen würde also die Axe  $O$  bzw. nach den Richtungen  $OX$  und  $OY$  um

$$\int y d\varphi \quad \text{und} \quad -\int x d\varphi$$

verrückt werden, die Integrale auf die ganze Länge  $s = l$  bezogen; weil sie aber durch ihre Lagerung daran verhindert ist, müssen diese Integrale = Null sein, müssen also, da nach Gl. (1) im vorigen §.

$$d\varphi = \frac{ds}{r} - \frac{ds}{r_0} = \frac{M + Xy - Yx}{EJ} ds$$

ist, die Gleichungen stattfinden:

$$M \int y ds + X \int y^2 ds - Y \int xy ds = 0,$$

$$* M \int x ds + X \int xy ds - Y \int x^2 ds = 0,$$

durch welche die Componenten  $X, Y$  der Lagerreaction bestimmt sind.

Mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} f &= \int x ds, & F &= \int x^2 ds, & H &= \int xy ds \dots \dots (2) \\ g &= \int y ds, & G &= \int y^2 ds, \end{aligned}$$

gehen jene Gleichungen über in:

$$GX - HY = -gM$$

$$HX - FY = -fM$$

und folgt daraus:

$$X = \frac{-Fg + Hf}{FG - H^2} M; \quad Y = \frac{Gf - Hg}{FG - H^2} M \dots \dots \dots (3).$$

Die vollständige Entwicklung der Ausdrücke  $f, g, F, G, H$  würde selbst unter jener vereinfachenden Voraussetzung, dass die Mittellinie der Feder nach wie vor eine Archimedische Spirale bleibt, zu übermässig weitläufigen Ausdrücken von  $X$  und  $Y$  führen. Indem aber die Windungen sehr dicht aufeinander folgen und folglich sehr nahe kreisförmig sind, werde

$$ds = \sqrt{\rho^2 d\psi^2 + d\rho^2} = \rho d\psi$$

gesetzt, entsprechend der Vernachlässigung von

$$\left(\frac{d\rho}{\rho d\psi}\right)^2 = \left(\frac{e}{2\pi\rho}\right)^2$$

gegen 1. Wird dann zur Abkürzung

$$p = \frac{e}{\pi a} \quad \text{und} \quad q = \frac{a'}{a} \dots \dots \dots (4)$$

gesetzt, so ist entsprechend auch  $p^2$  gegen 1 zu vernachlässigen. Das Verhältniss  $q$  ist zwar gleichfalls ein kleiner Bruch, kann aber wesentlich  $> p$  sein, und mag etwa erst  $q^6$ , somit auch  $pq^3$  gegen 1 vernachlässigt werden. Auf solche Weise ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} f &= a^2(p + q^2 \sin \varepsilon - pq \cos \varepsilon) \\ g &= a^2(1 - pq \sin \varepsilon - q^2 \cos \varepsilon) \\ F &= G = \frac{\pi a^4}{4e}(1 - q^4); \quad H = \frac{\pi a^4}{4e} p \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Was z. B.  $g$  betrifft, so findet man gemäss den Gleichungen (1) zunächst das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int y ds &= \int \rho^2 \sin \psi d\psi = -\int \rho^2 d \cos \psi \\ &= -\rho^2 \cos \psi + \int 2\rho \left(-\frac{e}{2\pi} d\psi\right) \cos \psi \\ &= -\rho^2 \cos \psi - \frac{e}{\pi} \int \rho d \sin \psi \\ &= -\rho^2 \cos \psi - \frac{e}{\pi} \left[ \rho \sin \psi - \int \left(-\frac{e}{2\pi} d\psi\right) \sin \psi \right] \\ &= -\rho^2 \cos \psi - \frac{e\rho}{\pi} \sin \psi + \frac{e^2}{2\pi^2} \cos \psi \end{aligned}$$

und dann zwischen den Grenzen  $\rho = a, \psi = 0$  und  $\rho = a', \psi = 2i\pi + \varepsilon$  genommen:





$$\begin{aligned}
 g &= -a'^2 \cos \varepsilon - \frac{ea'}{\pi} \sin \varepsilon + \frac{e^2}{2\pi^2} \cos \varepsilon + a^2 - \frac{e^2}{2\pi^2} \\
 &= a^2 \left[ 1 - \frac{p^2}{2} - pq \sin \varepsilon - \left( q^2 - \frac{p^2}{2} \right) \cos \varepsilon \right] \\
 &= a^2 (1 - pq \sin \varepsilon - q^2 \cos \varepsilon)
 \end{aligned}$$

bei Vernachlässigung der Glieder mit  $p^2$ . Aehnlich werden die übrigen oben angeführten Ausdrücke gefunden. Man kann bemerken, dass

$$f = lx_1 \quad \text{und} \quad g = ly_1$$

ist, unter  $x_1$  und  $y_1$  die Schwerpunktskoordinaten der Curve  $AA'$  verstanden, während  $F$  und  $G$  ihre Trägheitsmomente beziehungsweise für die Axen  $OY$  und  $OX$  bedeuten. Nach den Gleichungen (5) ist aber  $f$  sehr klein gegen  $g$  und  $H$  sehr klein gegen  $F = G$ ; der Schwerpunkt der Curve liegt also sehr nahe in  $OY$ , und die Coordinatenaxen sind sehr nahe gleichwerthige Hauptaxen für den Punkt  $O$ .

Aus (3) und (5) ergeben sich jetzt die Componenten der Lagerreaction, immer bei Vernachlässigung von  $p^2$ ,  $p q^3$  und  $q^6$  gegen 1:

$$\left. \begin{aligned}
 X &= -\frac{4e}{\pi a^2} \left[ 1 + q^4 - pq(1+q) \sin \varepsilon - q^2 \cos \varepsilon \right] M \\
 Y &= \frac{4e}{\pi a^2} \left[ q^2 \sin \varepsilon - pq(1-q) \cos \varepsilon \right] M
 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$X$  ist von entgegengesetztem Zeichen wie  $M$ ;  $Y$  hat einen ausserdem von  $\varepsilon$  abhängigen Sinn, ist aber von geringerer Grössenordnung als  $X$ . Die resultirende Lagerreaction hat also sehr nahe die Richtung der  $x$ -Axe; sie ist um so kleiner, je kleiner  $e$  im Vergleich mit  $a$  ist. Endlich folgt aus (5) und (6):

$$Xg - Yf = (-\lambda + \mu \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon) M \dots \dots \dots (7)$$

mit den Bezeichnungen:

$$\lambda = \frac{4e}{\pi} (1 + 2q^4); \quad \mu = \frac{8e}{\pi} q^2; \quad \nu = \frac{8e}{\pi} pq \dots \dots (8)$$

Diese Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sind Längen, von denen  $\lambda$  sehr klein im Vergleich mit  $a$ , um so mehr sehr klein gegen  $l$  ist, während  $\mu$  und  $\nu$  schon im Vergleich mit  $\lambda$  sehr klein und um so mehr gegen  $a$  und  $l$  äusserst klein sind.

Die Substitution des Ausdrucks (7) in Gl. (2) des vorigen §. giebt:

$$M = \frac{EJ\varphi}{l - \lambda + \mu \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon} \dots \dots \dots (9)$$

und einen ähnlichen Ausdruck, nur mit anderen Bedeutungen von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  erhält man auch für die cylindrische Spiralfeder. Die Entwicklung ist

aber ohne näher liegendes Interesse, weil es hier nur auf die allgemeine Form des Ausdruckes ankommt, dessen Elemente  $\lambda, \mu, \nu$  auch für die flache Spiralfeder gemäss den Gleichungen (8) und (4) nicht ganz zutreffend gefunden wurden, weil mit der vereinfachenden Annahme, die Feder bilde beständig eine Archimedische Spirale, die besondere Art ihrer Befestigung an den Enden durch Einklemmung unberücksichtigt geblieben ist. Noch mehr werden diese Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  durch jene eigenthümlich gestalteten Federendigungen modificirt, die bei der Cylinderfeder und bei der flachen Breguet-Feder den Zweck haben, diese Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  möglichst zu verkleinern. Die Form der Gleichung (9) kann aber als allgemein gültig betrachtet werden, unter  $\lambda, \mu, \nu$  gewisse Längen verstanden, die im Vergleich mit  $l$  sehr klein sind.

Wegen  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varphi$  ist übrigens:

$$\begin{aligned} \mu \cos \varepsilon &= \mu (\cos \varepsilon_0 \cos \varphi - \sin \varepsilon_0 \sin \varphi) \\ \nu \sin \varepsilon &= \nu (\sin \varepsilon_0 \cos \varphi + \cos \varepsilon_0 \sin \varphi) \end{aligned}$$

und deshalb auch, wenn  $l' = l - \lambda$

$$\left. \begin{aligned} m &= \mu \cos \varepsilon_0 + \nu \sin \varepsilon_0 \\ n &= -\mu \sin \varepsilon_0 + \nu \cos \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

gesetzt wird:

$$M = \frac{EJ\varphi}{l' + m \cos \varphi + n \sin \varphi} \dots \dots \dots (11).$$

Darin sind  $m$  und  $n$  ebenso wie  $\mu$  und  $\nu$  sehr klein gegen  $l'$ , und ist  $l - l'$  klein gegen  $l$ , beides um so mehr, je vollkommener der Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen durch passend gestaltete Federendigungen (siehe den folgenden Paragraph) erzielt ist.

Um nun gemäss dieser Gleichung das Schwingungsgesetz der Unruhe herzuleiten, werde die Zeit  $t$  gerechnet von einem Augenblicke grössten Ausschlages  $= \alpha$  aus der Gleichgewichtslage, und werde für die Bewegung von dieser Anfangslage bis zur entgegengesetzten Lage grössten Ausschlages die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  positiv gesetzt;  $\varphi$  sei in irgend einem Augenblicke der Winkelabstand von der Gleichgewichtslage, positiv im Sinne gegen die Anfangslage hin. Dann ist, unter  $Q$  wieder das Trägheitsmoment der Unruhe für die Drehungsaxe verstanden, die Winkelbeschleunigung:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{Q} = \frac{1}{Q} \frac{EJ\varphi}{l' + m \cos \varphi + n \sin \varphi}.$$

Vor dem letzten Gliede des Nenners gilt hier das Zeichen  $+$  oder  $-$ , jenachdem die Anfangslage die Lage grösster Zusammendrehung (stärkster

Krümmung) oder grösster Aufdrehung (schwächster Krümmung) der Spiralfeder ist. Mit den Bezeichnungen:

$$k^2 = \frac{EJ}{Ql'}, \quad b = \frac{m}{l'}, \quad c = \frac{n}{l'} \dots \dots \dots (12)$$

und mit Rücksicht darauf, dass  $b$  und  $c$  sehr kleine Brüche sind, kann, wenn zu weiterer Abkürzung

$$w = k^2 \varphi (b \cos \varphi + c \sin \varphi) \dots \dots \dots (13)$$

gesetzt wird, jene Gleichung geschrieben werden:

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2 \varphi - w.$$

Sie werde mit der Gleichung

$$\frac{d(a - \varphi)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

dadurch verbunden, dass letztere mit dem vorläufig unbestimmten Coefficienten  $z$  multiplicirt und von jener subtrahirt wird; das giebt:

$$\frac{d(\omega + z\varphi)}{dt} = -z\omega + k^2\varphi - w = -z\left(\omega - \frac{k^2}{z}\varphi\right) - w$$

und indem jetzt  $z$  so bestimmt wird, dass

$$-\frac{k^2}{z} = z \text{ ist, also } z = k\sqrt{-1} = ki \dots \dots \dots (14)$$

gesetzt wird, unter  $i$  hier den imaginären Factor  $\sqrt{-1}$  verstanden, folgt:

$$d(\omega + z\varphi) + (\omega + z\varphi)zdt = -w dt.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird zu einem vollständigen Differential, nämlich zum Differential des Productes  $u(\omega + z\varphi)$  durch Multiplication mit einem so beschaffenen Factor  $u$ , dass

$$uzdt = du$$

ist, woraus folgt:

$$\frac{du}{u} = zdt, \quad \ln u = zt, \quad u = e^{zt},$$

also

$$d[(\omega + z\varphi)e^{zt}] = -we^{zt} dt.$$

Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich mit Rücksicht auf die zusammengehörigen Anfangswerthe  $t=0, \omega=0, \varphi=a$ :

$$\begin{aligned} (\omega + z\varphi)e^{zt} - z\alpha &= -\int_0^t we^{zt} dt \\ \omega + z\varphi &= e^{-zt} \left( z\alpha - \int_0^t we^{zt} dt \right) \end{aligned}$$

oder mit  $x = ki$  nach Gl. (14) und bei Benutzung der bekannten Gleichung:

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\omega + k\varphi i = [\cos(kt) - i \sin(kt)] \left\{ k\alpha i - \int_0^t w [\cos(kt) + i \sin(kt)] dt \right\}.$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile zerfällt diese Gleichung in die folgenden:

$$\begin{aligned} \omega &= k\alpha \sin(kt) - \sin(kt) \int_0^t w \sin(kt) dt \\ &\quad - \cos(kt) \int_0^t w \cos(kt) dt \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha \cos(kt) - \frac{\cos(kt)}{k} \int_0^t w \sin(kt) dt \\ &\quad + \frac{\sin(kt)}{k} \int_0^t w \cos(kt) dt \dots \dots \dots (16). \end{aligned}$$

Wäre  $b = c = 0$ , also  $w = 0$ , so wäre hiernach:

$$\omega = k\alpha \sin(kt) \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha \cos(kt)$$

und indem die Schwingungsdauer  $\tau =$  der Zeit  $t$  ist, nach welcher zuerst wieder  $\omega = 0$  wird, ergibt sich:

$$\tau = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{Ql'}{EJ}} \dots \dots \dots (17)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (4) im vorigen §., abgesehen von der kleinen Differenz zwischen  $l'$  und  $l$ . Wird der Ausschlagwinkel auf der anderen Seite von der Gleichgewichtslage mit  $\alpha_1$  bezeichnet, so ist  $\alpha_1$  der Werth von  $-\varphi$  für  $t = \frac{\pi}{k}$ , also

$$\alpha_1 = -\alpha \cos \pi = \alpha.$$

Die Unruhe schwingt also mit gleichen Ausschlagwinkeln  $\alpha$  beiderseits von der Gleichgewichtslage so, dass die Schwingungsdauer unabhängig von  $\alpha$  ist.

Sind aber  $b$  und  $c$  nicht = Null, so ist die Schwingungsdauer  $\tau$  grösser oder kleiner als  $\frac{\pi}{k}$ , jenachdem die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , welche  $t = \frac{\pi}{k}$  entspricht und mit  $\omega_1$  bezeichnet sei, noch positiv oder schon negativ geworden ist. Sie ergibt sich aus Gl. (15):

$$\omega_1 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} w \cos(kt) dt$$

oder mit  $x = kt$  und mit Rücksicht auf den Ausdruck (13) von  $w$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{k} \int_0^{\pi} w \cos x dx = \frac{1}{k} \int_0^{\pi} w d \sin x \\ &= k \int_0^{\pi} \varphi (b \cos \varphi \pm c \sin \varphi) d \sin x \end{aligned}$$

und mit dem Näherungswerthe  $\varphi = \alpha \cos(kt) = \alpha \cos x$ :

$$\omega_1 = k \int_0^{\pi} \alpha \cos x [b \cos(\alpha \cos x) \pm c \sin(\alpha \cos x)] d \sin x \dots (18).$$

Wenn man das Integral dieses Ausdruckes gemäss der symbolischen Gleichung

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

zerlegt und berücksichtigt, dass von  $x = 0$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$  und von  $x = \pi$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x$  gleiche,  $\cos x$  oder  $\alpha \cos x$  entgegengesetzte,

also auch  $\cos(\alpha \cos x)$  gleiche,  $\sin(\alpha \cos x)$  entgegengesetzte

Werthe durchläuft, so folgt:

$$\int_0^{\pi} \alpha \cos x \sin(\alpha \cos x) d \sin x = 0$$

und

$$\int_0^{\pi} \alpha \cos x \cos(\alpha \cos x) d \sin x$$

= dem Doppelten des zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  genommenen Integrals, somit nach (18) einfacher:

$$\omega_1 = 2kb \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos x \cos(\alpha \cos x) d \sin x \dots \dots \dots (19).$$

Nun ist für das kleine Zeitintervall

$$= \tau - \frac{\pi}{k}, \text{ wenn } \omega_1 \text{ positiv,}$$

bezw.

$$= \frac{\pi}{k} - \tau, \text{ wenn } \omega_1 \text{ negativ}$$

ist, die Winkelbeschleunigung als constant zu betrachten und zwar absolut genommen  $= k^2 \alpha$  zu setzen bei Vernachlässigung von  $w$  in der

allgemeinen Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2 \varphi - w.$$

Dadurch wird

$$\tau - \frac{\pi}{k} = \frac{\omega_1}{k^2 \alpha}$$

und bei Einsetzung des Ausdruckes (19) von  $\omega_1$ :

$$\tau = \frac{1}{k} \left[ \pi + 2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos(\alpha \cos x) dx \right] \dots \dots \dots (20).$$

Das hier vorkommende Integral und somit die Schwingungsdauer  $\tau$  ist eine Function des Ausschlagwinkels  $\alpha$ ; insbesondere giebt es einen gewissen Werth von  $\alpha$ , für welchen das Integral = 0 und deshalb wieder  $\tau = \frac{\pi}{k}$  wird. Weil es aber nicht möglich ist, eine ganz bestimmte Grösse des Ausschlagwinkels dauernd zu erhalten, so ist von grösserem Interesse die Kenntniss desjenigen Ausschlagwinkels  $\alpha$ , dessen kleine Veränderung die kleinstmögliche Aenderung der Schwingungsdauer  $\tau$  zur Folge hat, für welche also wo möglich

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -\frac{2b}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin(\alpha \cos x) dx = 0 \dots \dots \dots (21)$$

ist. Jedenfalls ist der dieser Gleichung entsprechende vortheilhafteste Ausschlagwinkel  $> \pi$ , weil bei dem Wachsthum der Variablen  $x$  von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  beständig  $\cos x$  positiv und deshalb auch  $\sin(\alpha \cos x)$  beständig positiv ist, falls  $\alpha < \pi$  ist. Wenn die Simpson'sche Regel zur angenäherten Berechnung des Integrals benutzt und dazu der Unterschied seiner Grenzen in 10 gleiche Theile getheilt wird, so ergibt sich mit der Bezeichnung

$$f(x) = \cos^3 x \sin(\alpha \cos x),$$

wo  $\alpha$  natürlich in Bogenmaass ausgedrückt werden muss, der jener Forderung (21) entsprechende Ausschlagwinkel  $\alpha$  als Wurzel der Gleichung:

$$f(0) + 4f(9^\circ) + 2f(18^\circ) + \dots + 4f(81^\circ) + f(90^\circ) = 0.$$

Man findet  $\alpha$  nahe =  $202^\circ$ .

Dass eine Aenderung von  $\alpha$  die Schwingungsdauer  $\tau$  einer Unruhe weniger beeinflusst, wenn  $\alpha$  gross, als wenn  $\alpha$  klein ist (entgegengesetzt dem Verhalten eines Pendels), ist eine bekannte Erfahrung, und macht

man deshalb  $\alpha$  selten  $< 90^\circ$ , bei Chronometern aber meistens  $> 180^\circ$ , nahe = jenem theoretisch vortheilhaftesten Werthe. Dazu kommt, dass Erschütterungen, denen namentlich Taschenuhren ausgesetzt sind, bei grossem Ausschlagwinkel weniger störend wirken als bei kleinem. Aus demselben Grunde lässt man auch die Unruhen schneller schwingen, als Pendel, und zwar so schnell, dass sie wenigstens 4, bei Taschenuhren sogar bis zu 6 Schwingungen in der Secunde machen. Damit denselben eine hinlänglich grosse lebendige Kraft  $= \frac{1}{2} Q\omega^2$  des Schwungrades entspreche, worauf es behufs Vergrösserung von  $\omega$  durch Verkleinerung von  $\tau$  bei grossem  $\alpha$  eben ankommt, muss ausserdem  $Q$  hinlänglich gross, und damit dies ohne übermässig grosses Gewicht des Schwungrades erreicht werde, sein Durchmesser möglichst gross sein.

Nach Gl. (20) oder (21) würde übrigens die Schwingungsdauer  $\tau$  vollkommen unabhängig von  $\alpha$  sein, wenn  $b=0$ , nach (12) also  $m=0$  oder nach (10):

$$tg \varepsilon_0 = -\frac{\mu}{\nu} \dots \dots \dots (22)$$

wäre, d. h. wenn der Windungswinkel der Spiralfeder in ihrem ursprünglichen Gleichgewichtszustande um einen bestimmten, von ihren Dimensionsverhältnissen abhängigen Winkel grösser wäre, als irgend ein Vielfaches von  $2\pi$ . Hierauf beruht das von Leroy angegebene Verfahren, den Isochronismus einer Spiralfeder durch Probiren zu erreichen, indem man sie etwas länger als nöthig macht und dann ihre Länge allmählig so lange verändert, bis  $\tau$  bei sehr verschiedenen Werthen von  $\alpha$  gleich gross wird. Die erforderliche Grösse dieser constanten Schwingungsdauer kann schliesslich nach (17) durch Regulirung von  $Q$  erzielt werden, z. B. durch Regulirungsschrauben von radialer Beweglichkeit im Schwungringe. Die Combination dieses Verfahrens mit einem solchen Ausschlagwinkel  $\alpha$  nahe  $= 202^\circ$ , durch welchen zugleich das in (21) als Factor von  $b$  vorkommende Integral möglichst klein wird, lässt den Zweck natürlich um so sicherer erreichen.

#### §. 143. Beseitigung des Einflusses

der Lagerreaction durch entsprechende Gestaltung der Spiralfeder.

Im §. 141 wurde schon darauf hingewiesen, dass der Isochronismus einer Unruhe besonders für den Fall einer cylindrischen Spiralfeder durch passend gestaltete Federendigungen (nach Art von Fig. 148) her-

beigeführt werden kann. Eine eingehende theoretische Untersuchung in dieser Hinsicht, controlirt durch die Erfahrung und durch besondere Versuche, verdankt man dem französischen Ingenieur Phillips, dessen Arbeit\* der folgenden Darstellung zu Grunde liegt.

Mit Rücksicht auf Fig. 148, in welcher  $A$  den unbeweglichen Endpunkt der Federmittellinie bedeutet und übrigens auch die Coordinatenachsen beliebig um  $O$  gedreht werden können, ferner mit Rücksicht auf die in §. 141 erklärten Buchstabenbedeutungen ist nach den Gleichungen (1) und (2) daselbst, wenn ausserdem mit  $x_1$  und  $y_1$  die Schwerpunktscoordinaten der Federmittellinie bezeichnet werden:

$$EJ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = M + Xy - Yx \dots \dots \dots (1)$$

$$EJ\varphi = Ml + (Xy_1 - Yx_1)l \dots \dots \dots (2).$$

Wären die Componenten  $X, Y$  der Lagerreaction  $= 0$ , so wäre hiernach

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EJ} = \frac{\varphi}{l} \dots \dots \dots (3)$$

und wäre nach §. 141, Gl. (4) die Schwingungsdauer:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Ql}{EJ}} \dots \dots \dots (4)$$

unabhängig vom Ausschlagwinkel  $\alpha$ . Umgekehrt wenn die Spiralfeder so gestaltet wäre, dass bei ihrer Deformation durch das Kraftmoment  $M$  die Differenz  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}$  für alle Punkte der Mittellinie denselben Werth  $= \frac{\varphi}{l}$  hat, so müsste, weil dies nach Gl. (1) und (2) nur im Falle  $X=0, Y=0$  möglich wäre, nothwendig auch  $\tau$  den durch Gl. (4) bestimmten Werth haben. In diesem Falle  $X=0, Y=0$  übt die Lagerung der Unruhaxe keinerlei Zwang auf sie aus, kann also diese Axe frei schwebend gedacht werden, und da die cylindrischen Windungen der Spiralfeder dem Deformationsgesetze (3) entsprechen, wenn die Projectionen ihrer Mittellinien nach wie vor zusammenfallende Kreise bleiben, deren Radius nur von  $r_0$  in  $r$  übergegangen ist, so kommt es lediglich darauf an, die symmetrisch gleichen Federendigungen so zu gestalten, dass, wenn auch sie bei frei schwebender Unruhaxe gemäss dem Gesetze (3) deformirt werden, unter  $\varphi$  einen beliebigen Verdrehungswinkel verstanden, jener gemeinsame Mittelpunkt der kreisförmigen Windungen eine unveränderliche Lage behält.

\* Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres. Par M. Phillips, Ingénieur des mines. Annales des Mines, 1861, tome XX, p. 1—107.



Um die Bedingungen hierfür auszudrücken, sei  $ABC$  in Fig. 150 die vom unbeweglichen Endpunkte  $A$  ausgehende, bei  $C$  mit gemeinsamer Tangente in die kreisförmigen Windungen übergehende Endcurve,  $O$  der ursprüngliche Mittelpunkt der Windungen. Durch letzteren sind die rechtwinkligen Coordinatenachsen  $OX, OY$  hier so gezogen, dass sie einer rechtwinkligen Drehung des Axensystems von Fig. 148 im Sinne  $XY$  entsprechen und dass somit  $A$  in der negativen  $y$ -Axe  $OY_1$  liegt im Abstände  $OA = a$  von  $O$ . Während mit  $r_0$  und  $r$  bezw. der ursprüngliche und der dem Verdrehungswinkel  $\varphi$  entsprechend geänderte Radius der Kreiswindungen bezeichnet wird, seien  $\rho_0$  und  $\rho$  der ursprüngliche und der veränderte Krümmungsradius irgend eines Punktes  $B$  der Endcurve  $ABC$ , deren Länge mit  $\lambda$  bezeichnet sei im Gegensatze zur Länge  $= l$  der ganzen Feder; ferner seien  $\xi$  und  $\eta$  die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes  $J$  für den Punkt  $B$  im Zustande der Deformation. Ist dann bei demselben Deformationszustande  $BK = \rho + d\rho$  der Krümmungsradius für einen dem Punkte  $B$  im Sinne gegen  $C$  hin unendlich nahe benachbarten Punkt, so ist, wenn  $JN$  parallel  $OX, KN$  parallel  $OY$ ,

$$JK = d\rho, \quad JN = -d\xi, \quad KN = d\eta \dots \dots (5).$$

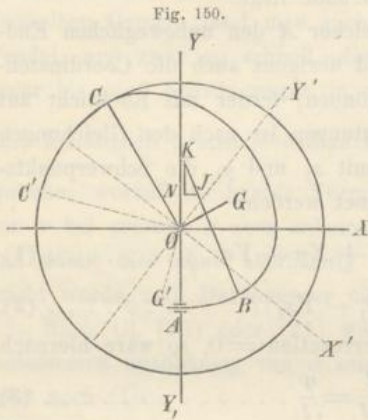
Das angenommene Deformationsgesetz (3) erhält für die Endcurve die Form:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\varphi}{l} \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0} \dots \dots \dots (6)$$

und wenn mit  $\vartheta$  der Winkel  $JKN$  bezeichnet wird, unter welchem  $JB$  gegen  $OY_1$  oder  $BJ$  gegen  $OY$  geneigt ist, ferner mit  $\vartheta_0$  der ursprüngliche Werth dieses Winkels und mit  $s$  die Bogenlänge  $AB$ , so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass die Normale in  $A$  von unveränderlicher Richtung ist:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int \frac{ds}{\rho} - \int \frac{ds}{\rho_0} = \frac{\varphi}{l} s \dots \dots \dots (7).$$

Gemäss diesen Gleichungen (5) — (7) folgt aus dem Dreiecke  $JKN$ :



ursprüngliche Mittelpunktes der Windungen. Durch letzteren sind die rechtwinkligen Coordinatenachsen  $OX, OY$  hier so gezogen, dass sie einer rechtwinkligen Drehung des Axensystems von Fig. 148 im Sinne  $XY$  entsprechen und dass somit  $A$  in der negativen  $y$ -Axe  $OY_1$  liegt im Abstände  $OA = a$  von  $O$ . Während mit  $r_0$  und  $r$  bezw. der ursprüngliche und der dem Verdrehungswinkel  $\varphi$  entsprechend geänderte Radius der Kreiswindungen bezeichnet wird, seien  $\rho_0$  und  $\rho$  der ursprüngliche und

der veränderte Krümmungsradius irgend eines Punktes  $B$  der Endcurve  $ABC$ , deren Länge mit  $\lambda$  bezeichnet sei im Gegensatze zur Länge  $= l$  der ganzen Feder; ferner seien  $\xi$  und  $\eta$  die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes  $J$  für den Punkt  $B$  im Zustande der Deformation. Ist dann bei demselben Deformationszustande  $BK = \rho + d\rho$  der Krümmungsradius für einen dem Punkte  $B$  im Sinne gegen  $C$  hin unendlich nahe benachbarten Punkt, so ist, wenn  $JN$  parallel  $OX, KN$  parallel  $OY$ ,

und we  
( $\varphi = C$   
bezeich  
diejeni  
ist  $\vartheta'$   
den A  
  
Damit  
ganzen  
Endpur  
  
 $\xi$   
  
 $\eta$   
W  
Kreisw  
haben,  
ihre K  
samen  
mungs  
den C  
gen be  
der P

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= -\sin \vartheta d\varrho = -\sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \\ d\eta &= \cos \vartheta d\varrho = \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

und wenn dann, während der Index 0 nach wie vor dem Anfangszustande ( $\varphi=0$ ) entsprechend gebraucht wird, mit einem Accent die Grössen bezeichnet werden, die sich auf den Anfangspunkt  $A$ , mit zwei Accenten diejenigen, die sich auf den Endpunkt  $C$  der Curve  $ABC$  beziehen, so ist  $\vartheta' = \vartheta'_0$  und sind die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Anfangspunkt  $A$  der deformirten Curve  $ABC$ :

$$\xi' = -\varrho' \sin \vartheta'_0 = -\frac{\varrho'_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho'_0} \sin \vartheta'_0$$

$$\eta' = -a + \varrho' \cos \vartheta'_0 = -a + \frac{\varrho'_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho'_0} \cos \vartheta'_0.$$

Damit ergeben sich durch Integration der Gleichungen (8) längs der ganzen Curve  $ABC$  die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Endpunkt  $C$  im Zustande der Deformation:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -\frac{\varrho'_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho'_0} \sin \vartheta'_0 - \int_0^z \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \\ \eta'' &= -a + \frac{\varrho'_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho'_0} \cos \vartheta'_0 + \int_0^z \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \end{aligned} \right\} \dots (9).$$

Wenn auch die Curve  $ABC$  und die bei  $C$  sich anschliessenden Kreiswindungen in diesem Uebergangspunkte eine gemeinsame Tangente haben, so können doch ihre Krümmungsradien daselbst verschieden sein, ihre Krümmungsmittelpunkte folglich verschiedene Lagen in der gemeinsamen Normale haben. Zwischen den Coordinaten  $\xi''$ ,  $\eta''$  des Krümmungsmittelpunktes der deformirten Curve  $ABC$  für den Punkt  $C$  und den Coordinaten  $\xi'''$ ,  $\eta'''$  des Mittelpunktes der deformirten Kreiswindungen bestehen deshalb ähnliche Beziehungen wie zwischen den Coordinaten der Punkte  $J$  und  $K$ , Fig. 150, wenn  $BJ = \varrho''$ ,  $BK = r$  und Winkel

$JKN = \vartheta''$  gesetzt wird, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \xi''' &= \xi'' - (r - \rho'') \sin \vartheta'' \\ \eta''' &= \eta'' + (r - \rho'') \cos \vartheta'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10).$$

Es genügt die weitere Entwicklung des Ausdruckes von  $\xi'''$ , aus welchem derjenige von  $\eta'''$  durch entsprechende Vertauschungen hervorgeht. Indem aber nach (3), (6) und (7):

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s$$

ist, ergibt sich bei Substitution des Ausdruckes (9) von  $\xi''$ :

$$\begin{aligned} \xi''' &= - \frac{\rho_0'}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0'} \sin \vartheta_0' + \frac{\rho_0''}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0''} \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} \lambda \right) \\ &\quad - \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} \lambda \right) - \int_0^\lambda \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) d \frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0} \end{aligned}$$

oder, wenn das Integral nach der Formel

$$\int_0^\lambda u dv = (uv)_\lambda - (uv)_0 - \int_0^\lambda v du$$

entwickelt wird:

$$\xi''' + \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} \lambda \right) + \int_0^\lambda \frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0} d \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) \dots \dots (11)$$

oder wegen  $\frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0} d \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) =$

$$= \frac{\rho_0}{1 + \frac{\varphi}{l} \rho_0} \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) \left( \frac{d \vartheta_0}{ds} + \frac{\varphi}{l} \right) ds = \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) ds$$

$$\xi''' = - \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} \lambda \right) + \int_0^\lambda \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} s \right) ds \dots \dots \dots (12).$$

Was  $\eta'''$  betrifft, so kann man bemerken, dass die zweite Gleichung (10) aus der ersten durch Vertauschung von  $\sin$  mit  $-\cos$  und von  $\xi$  mit  $\eta$  hervorgeht, dass aber nach den Gleichungen (9) auch  $\eta''$  aus  $\xi''$  durch dieselbe Vertauschung von  $\sin$  mit  $-\cos$  erhalten wird, abgesehen von

dem h  
tiringe  
- a

zu erha

$\eta'$

G

Lage r

von  $\varphi$ .

wenn d

Potenze

= Null

tenzen

$\frac{\lambda}{l}$  und

$\frac{\lambda}{l}$

$\varphi$  nach

etwa =

Sinus =

können

Werthe

und so

zu setz

$\frac{1}{3} \frac{\rho_0}{l}$

$\xi''' = 0$

$\int_0^\lambda$

$\int_0^\lambda$

dem hinzukommenden Summanden  $-a$ . Somit muss auch der resultierende Ausdruck von  $\eta'''$  aus (11) oder (12) durch Hinzufügung von  $-a$  nebst Vertauschung von  $\sin$  mit  $-\cos$ , also von

$$d \sin = \cos \text{ mit } -d \cos = \sin$$

zu erhalten sein, so dass analog Gl. (12) sich ergibt:

$$\eta''' = -a + \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l} \lambda \right) + \int_0^\lambda \sin \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s \right) ds \quad \dots (13).$$

Gemäss obiger Forderung, dass der Mittelpunkt der Windungen seine Lage nicht ändern soll, müssen  $\xi'''$  und  $\eta''' = \text{Null}$  sein unabhängig von  $\varphi$ . Daraus ergeben sich Bedingungsgleichungen für die Endcurven, wenn die Ausdrücke (12) und (13) von  $\xi'''$  und  $\eta'''$  nach wachsenden Potenzen von  $\varphi$  entwickelt werden, deren Coefficienten dann einzeln  $= \text{Null}$  sein müssen; doch sind dabei die Glieder mit den höheren Potenzen von  $\varphi$  ohne wesentlichen Fehler zu vernachlässigen. Indem nämlich  $\frac{\lambda}{l}$  und  $\frac{s}{l}$  kleine Brüche sind, höchstens etwa  $= \frac{1}{20}$ , so sind, wenn auch

$\varphi$  nach §. 142 bis zu  $200^\circ$  betragen sollte, doch  $\frac{\varphi}{l} \lambda$  und  $\frac{\varphi}{l} s$  höchstens etwa  $= 10^\circ$ , also so kleine Brüche, dass ihre Cosinus  $= 1$  und ihre Sinus  $=$  den in Bogenmaass ausgedrückten Winkeln selbst gesetzt werden können mit Fehlern, die höchstens  $1\frac{1}{2} \text{ ‰}$  bzw.  $\frac{1}{2} \text{ ‰}$  des wahren Werthes betragen. Auch ist dann wegen  $r_0$  nahe  $= \frac{1}{3} \lambda$ :

$$\frac{\varphi}{l} r_0 < 0,06$$

und somit

$$\frac{1}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} = 1 - \frac{\varphi}{l} r_0$$

zu setzen mit einem verhältnissmässigen Fehler, der nur wenig mehr, als  $\frac{1}{3} \text{ ‰}$  betragen kann. Mit solcher Annäherung ergibt die Forderung  $\xi''' = 0, \eta''' = 0$  nach (12) und (13) die Gleichungen:

$$\int_0^\lambda \left( \cos \vartheta_0 - \frac{\varphi s}{l} \sin \vartheta_0 \right) ds = r_0 \left( 1 - \frac{\varphi r_0}{l} \right) \left( \sin \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} \cos \vartheta_0'' \right)$$

$$\int_0^\lambda \left( \sin \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} \cos \vartheta_0 \right) ds = a - r_0 \left( 1 - \frac{\varphi r_0}{l} \right) \left( \cos \vartheta_0'' - \frac{\varphi \lambda}{l} \sin \vartheta_0'' \right)$$

und da sie unabhängig von  $\varphi$  erfüllt werden müssen, zerfallen sie bei Abstraction von den Gliedern mit  $\varphi^2$ , welche kleine Grössen zweiter Ordnung sind, in je zwei Gleichungen, entsprechend ihren Gliedern ohne  $\varphi$  und mit  $\varphi$ , nämlich in die Gleichungen:

$$\int_0^{\lambda} \cos \vartheta_0 ds = r_0 \sin \vartheta_0''; \quad \int_0^{\lambda} \sin \vartheta_0 ds = a - r_0 \cos \vartheta_0'' \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\lambda} s \sin \vartheta_0 ds &= r_0 (r_0 \sin \vartheta_0'' - \lambda \cos \vartheta_0'') \\ \int_0^{\lambda} s \cos \vartheta_0 ds &= r_0 (r_0 \cos \vartheta_0'' + \lambda \sin \vartheta_0'') \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

Die Gleichungen (14) tragen zur Bestimmung der Endcurve nicht bei; sie entsprechen lediglich der Voraussetzung, dass in der Ruhelage der Feder, d. i. für  $\varphi = 0$  der Mittelpunkt der Kreiswindungen im Ursprunge  $O$  der Coordinaten (Fig. 150) liegt, wie man leicht daraus erkennt, dass, unter  $x$  und  $y$  die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve  $ABC$  in diesem ursprünglichen Gleichgewichtszustande verstanden,

$$ds \cos \vartheta_0 = dx \quad \text{und} \quad ds \sin \vartheta_0 = dy \dots (16)$$

ist. Was aber die Gleichungen (15) betrifft, so kann man bemerken, dass mit Rücksicht auf (16)

$$\begin{aligned} \int s \sin \vartheta_0 ds &= \int s dy = sy - \int y ds \\ \int s \cos \vartheta_0 ds &= \int s dx = sx - \int x ds \end{aligned}$$

ist und folglich, zwischen den Grenzen  $s = 0$  und  $s = \lambda$  genommen, sowie mit Rücksicht darauf, dass die ursprünglichen Coordinaten des Punktes  $C$ :

$$y = -r_0 \cos \vartheta_0'', \quad x = r_0 \sin \vartheta_0''$$

sind, und wenn hier mit  $x_1, y_1$  die Schwerpunktscoordinaten der ursprünglichen (nicht deformirten) Curve  $ABC$  bezeichnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\lambda} s \sin \vartheta_0 ds &= -\lambda r_0 \cos \vartheta_0'' - \lambda y_1 \\ \int_0^{\lambda} s \cos \vartheta_0 ds &= \lambda r_0 \sin \vartheta_0'' - \lambda x_1 \end{aligned} \right\} \dots (17).$$

Die Combination dieser mit den Gleichungen (15) giebt:

$$\lambda y_1 = -r_0^2 \sin \vartheta_0''; \quad \lambda x_1 = -r_0^2 \cos \vartheta_0''.$$

Hiernach ist, wenn mit  $G$  (Fig. 150) der Schwerpunkt der Curve  $ABC$  bezeichnet wird,

$$\operatorname{tg} GOX = \frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg} \vartheta_0'' = \operatorname{tg} (180^\circ + COY) = \operatorname{tg} COY,$$

also Winkel  $GOX = COY$ , oder Winkel  $COG = YOX = 90^\circ$ . Ferner ergibt sich die Strecke

$$OG = \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = \frac{r_0^2}{\lambda} \dots \dots \dots (18).$$

Die Endcurve  $ABC$  hat also folgenden zwei Bedingungen Genüge zu leisten:

1. Ihr Schwerpunkt  $G$  muss in der Geraden liegen, welche im Mittelpunkte  $O$  der Windungen normal zum Radius für den Punkt  $C$  gezogen wird, in welchem die Endcurve in die Kreiswindungen übergeht.

2. Dieser Schwerpunkt muss vom Mittelpunkte der Windungen eine solche Entfernung haben, dass der Radius  $r_0$  der letzteren mittlere Proportionale zu ihr und zur Länge  $\lambda$  der Endcurve ist.

Offenbar kann diesen Bedingungen durch unendlich mannigfach verschiedene Formen der Curve genügt werden, die am einfachsten graphisch zu bestimmen sind. Werden nämlich bei Voraussetzung eines grossen Maassstabes der Zeichnung (etwa der 20 fachen natürlichen Grösse entsprechend) zunächst die Punkte  $A$  und  $C$ , Fig. 150, willkürlich angenommen, erfahrungsmässig passend so, dass  $OA$  ungefähr  $= \frac{1}{2} OC$  und der Polarwinkel  $AO C$  der Curve  $ABC = 180^\circ$  bis  $270^\circ$  ist, und wird dann letztere so, dass  $OC$  ihre Normale im Punkte  $C$  ist, übrigens zunächst nach Schätzung gezeichnet, so kann, unter  $OG$  eine Gerade normal zu  $OC$  verstanden, jene Curve allmählig zuerst so verändert werden, dass ihr Schwerpunkt in  $OG$  liegt, dann so, dass dessen Entfernung von  $O$  der Gleichung (18) entsprechend wird. Wenn man zu dem Ende die jeweils vorliegende Curve in so kleine gleiche Bögen theilt, dass dieselben als gerade Linien und somit ihre Mittelpunkte als ihre Schwerpunkte zu betrachten sind, so erfordert die erste Bedingung, dass die algebraische Summe der Entfernungen dieser Einzelschwerpunkte von der Geraden  $OG = \text{Null}$  sei und die zweite Bedingung, dass die algebraische Summe ihrer Entfernungen von  $OC$  durch Multiplication mit der gemeinsamen Länge der Elementarbögen ein Produkt  $=$  dem Quadrat von  $OC$  ergebe. Da die Eintheilung der Bogenlänge  $ABC = \lambda$  in genau gleiche Theile lästig wäre, kann auch der letzte dieser Theile stets etwas kleiner bleiben, als die übrigen, falls dann nur seine Schwerpunktsabstände von  $OG$  und  $OC$  in denselben Verhältnisse verkleinert bei obigem Verfahren benutzt werden.

ie bei  
weiter  
ohne

(14)

(15)

nicht  
belage  
m Ur-  
daraus  
es der  
anden,  
(16)  
erken,

sowie  
tes C:

präng-

(17)

ABC

Die Eigenschaft des Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen verdankt die mit solchen Federendigungen versehene Unruhe dem Umstande, dass dadurch die Componenten  $X, Y$  der Lagerreaction = Null werden und somit in Gl. (2) das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet. Weil aber sowohl diese theoretische Formbestimmung der Endcurven auf gewissen Vernachlässigungen beruht, als auch die so theoretisch bestimmte Form nur angenähert realisiert werden kann, wird auch in Wirklichkeit die Lagerreaction nicht vollkommen = Null werden. Unter diesen Umständen würde das Verschwinden jenes Gliedes  $(Xy_1 - Yx_1)l$  in Gl. (2) dadurch unterstützt werden, dass gleichzeitig die Schwerpunkts-coordinaten  $x_1, y_1$  der Spiralfedercurve verschwindend klein wären, und ist es deshalb von Interesse zu bemerken, dass dieselben Endcurven, welche gemäss der Forderung einer verschwindend kleinen Lagerreaction bestimmt wurden, ohne Weiteres zugleich bewirken, dass der Schwerpunkt der ganzen Spiralfeder bezw. ihrer Mittellinie in die Unruheaxe fällt.

Um das zunächst für den Ruhezustand ( $g=0$ ) nachzuweisen, werde in Fig. 150 ausser der Curve  $ABC$  noch die ihr gleiche am andern Ende der Feder hinzugedacht; sie gehe bei  $C'$  in die Kreiswindungen über und liege folglich in Bezug auf die Halbirungslinie  $OX'$  des Winkels  $CO C' = 2\beta_0$  als Symmetrieaxe der Curve  $ABC$  gegenüber. Ist  $G'$  ihr Schwerpunkt und  $OY'$  senkrecht zu  $OX'$ , so ist nach Obigem

$$C'OG' = COG = 90^\circ, \quad OG' = OG = \frac{r_0^2}{\lambda}, \quad GOY' = \beta_0.$$

Nun besteht die ganze Federmittellinie aus den zwei symmetrisch gleichen Endcurven, dem Kreisbogen  $CC'$  und aus einer gewissen Zahl von (in der Projection) zusammenfallenden vollen Kreislinien. Der Schwerpunkt dieser letzteren liegt in ihrem gemeinsamen Mittelpunkte  $O$ , und bleibt also nur zu zeigen, dass auch der Schwerpunkt der als Ganzes betrachteten übrigen Bestandtheile in  $O$  liegt oder, da für diese Bestandtheile die Gerade  $OX'$  Symmetrieaxe ist, braucht nur gezeigt zu werden, dass für die Gerade  $OY'$ , bezüglich auf welche die Punkte  $G, G'$  auf der entgegengesetzten Seite wie der Schwerpunkt von  $CC'$  liegen, das Moment der zwei Endcurven dem Moment des Kreisbogens  $CC'$  gleich ist. In der That aber ist das erstere Moment

$$= 2\lambda \cdot OG \sin \beta_0 = 2r_0^2 \sin \beta_0$$

= dem andern, nämlich =  $r_0$  mal Sehne  $CC'$ .

Wenn nun ferner die schwingende Unruhe augenblicklich um den beliebigen Winkel  $g$  gegen ihre Ruhelage verdreht und die Feder ent-

sprechend deformirt ist, so bleibt doch der Schwerpunkt ihrer Mittel-  
linie nach wie vor im Punkte  $O$ . Zunächst nämlich gilt das von den  
vollen Kreiswindungen, deren Radius nur von  $r_0$  in  $r$  übergegangen ist,  
und wenn jetzt die Figur 150 auf den Zustand der Deformation bezogen  
und der geänderte Winkel  $COC'$  mit  $2\beta$  bezeichnet wird, so ist die  
Halbirungslinie  $OX'$  des letzteren nach wie vor Symmetrieaxe, so dass  
nur wieder die Gleichheit der Momente des Systems der zwei Endcurven  
und des Kreisbogens  $CC'$  für die Gerade  $OY'$  nachgewiesen zu werden  
braucht. Analog dem Obigen ist letzteres Moment  $= 2r^2 \sin \beta$  und bleibt  
also nur zu zeigen, dass das Moment  $= M$  der deformirten Curve  $ABC$   
für die Gerade  $OY' = r^2 \sin \beta$  ist. Werden zu dem Ende mit  $x', y'$  die  
Coordinaten ihres beliebigen Punktes  $B$  für  $OX', OY'$  als Axen be-  
zeichnet, so ist

$$M = \int_0^\lambda x' ds = (x's) \Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda s dx'$$

oder, da  $x'$  für den Punkt  $C = -r \cos \beta$  und analog Gl. (16), unter  $\vartheta'$   
den Neigungswinkel der Normale  $BJ$  gegen  $OY'$  verstanden,  $dx' = ds \cos \vartheta'$  ist:

$$M = -r \lambda \cos \beta - \int_0^\lambda s \cos \vartheta' ds \dots \dots \dots (19).$$

Mit Rücksicht auf (7) ist aber:

$$\vartheta' = \vartheta + YOY' = \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} + \left( \frac{\pi}{2} - YOC - \beta \right)$$

oder wegen  $YOC = \vartheta'' - \pi = \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} - \pi$ :

$$\vartheta' = \frac{3}{2} \pi + \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} - \vartheta_0'' - \frac{\varphi \lambda}{l} - \beta$$

$$\cos \vartheta' = \sin \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} - \vartheta_0'' - \frac{\varphi \lambda}{l} - \beta \right)$$

$$= \sin \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} \right) \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} + \beta \right) - \cos \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} \right) \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} + \beta \right).$$

Gleichung (19) erhält dadurch die Form:

$$M = -r \lambda \cos \beta - \cos \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} + \beta \right) \int_0^\lambda s \sin \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} \right) ds$$

$$+ \sin \left( \vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l} + \beta \right) \int_0^\lambda s \cos \left( \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} \right) ds \dots (20).$$

Indem aber ferner die durch (12) und (13) ausgedrückten Mittelpunkts-  
coordinaten  $\xi''', \eta'''$  der Kreiswindungen unabhängig vom Winkel  $\varphi = \text{Null}$





bleiben, sind auch ihre nach  $\varphi$  genommenen Differentiale = Null, ist also

$$0 = -\frac{r_0}{1 + \frac{\varphi r_0}{l}} \frac{\lambda}{l} \cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) + \frac{r_0}{\left(1 + \frac{\varphi r_0}{l}\right)^2} \frac{r_0}{l} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) - \frac{1}{l} \int_0^\lambda s \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds$$

$$0 = -\frac{r_0}{1 + \frac{\varphi r_0}{l}} \frac{\lambda}{l} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) - \frac{r_0}{\left(1 + \frac{\varphi r_0}{l}\right)^2} \frac{r_0}{l} \cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) + \frac{1}{l} \int_0^\lambda s \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds.$$

Daraus folgt mit  $r = \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi r_0}{l}}$ :

$$\int_0^\lambda s \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds = -r \lambda \cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) + r^2 \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right)$$

$$\int_0^\lambda s \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds = r \lambda \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right) + r^2 \cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi \lambda}{l}\right)$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in Gl. (20) die zu beweisende Gleichung:

$$M = -r \lambda \cos \beta + r \lambda \cos \beta + r^2 \sin \beta = r^2 \sin \beta.$$

Die vorhergehende Untersuchung bezog sich auf den Fall einer cylindrischen Spiralfeder, wie sie bei Chronometern gebräuchlich ist. Bei einer flachen Feder handelt es sich darum, dieselbe an ihrem äusseren, unbeweglich befestigten Ende möglichst so zu gestalten, dass die Lagerreaction verschwindend klein ist; denn am inneren Ende ist die übrigens nahe als Archimedische Spirale in stetig sich verengernden Windungen um die Unruhaxe herumlaufende Feder unmittelbar am Schwungrade befestigt, etwa im Abstände  $r_1$  von der Axe und zwar gewöhnlich so, dass die Normale der Mittellinie für diesen inneren Endpunkt eine radiale (die Axe schneidende) Richtung hat. Unter der Voraussetzung, dass Letzteres der Fall ist, und dass dann wieder die ganze Feder bei frei schwebender Unruhaxe gemäss dem Gesetze (3) deformirt wird, können die Coordinaten  $\xi'''$ ,  $\eta'''$  des Punktes, welcher in jener

Normale für den inneren Endpunkt der Federmittellinie von diesem Punkte den Abstand  $r_1$  hat, also die Coordinaten des ursprünglich in  $O$  gelegenen Punktes der Axe durch eine ganz ähnliche Entwicklung wie vorhin die Mittelpunktscordinaten der Kreiswindungen ausgedrückt werden. In den obigen Ausdrücken (12) und (13) ist jetzt nur

$$r_1 \text{ für } \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \text{ und } l \text{ für } \lambda$$

zu setzen, indem sich hier die Untersuchung auf die ganze Feder zu erstrecken hat, an die Stelle des Punktes  $C$  (Fig. 150) also der am Schwungrade feste innere Endpunkt tritt und dessen unveränderlicher Abstand  $r_1$  von der Schwungradaxe an die Stelle des veränderlichen Halbmessers  $r$  der Kreiswindungen. Somit ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \xi''' &= -r_1 \sin(\vartheta_0'' + \varphi) + \int_0^l \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds \\ \eta''' &= -a + r_1 \cos(\vartheta_0'' + \varphi) + \int_0^l \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right) ds \end{aligned} \right\} \dots (21).$$

Um nun aber diese Ausdrücke wieder als lineare Functionen von  $\varphi$  darzustellen, ist es nöthig, hier den Winkel  $\varphi$  selbst als hinlänglich klein anzunehmen, um seinen Cosinus = 1 und seinen Sinus = dem in Bogenmaass ausgedrückten Winkel setzen zu können. Dadurch ergeben die auch hier wieder zu erfüllenden Bedingungen  $\xi''' = 0$ ,  $\eta''' = 0$  die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^l \cos \vartheta_0 ds - \frac{\varphi}{l} \int_0^l s \sin \vartheta_0 ds = r_1 \sin \vartheta_0'' + \varphi r_1 \cos \vartheta_0''$$

$$\int_0^l \sin \vartheta_0 ds + \frac{\varphi}{l} \int_0^l s \cos \vartheta_0 ds = a - r_1 \cos \vartheta_0'' + \varphi r_1 \sin \vartheta_0''$$

und da sie unabhängig von  $\varphi$  erfüllt werden müssen, zerfallen sie in:

$$\int_0^l \cos \vartheta_0 ds = r_1 \sin \vartheta_0''; \quad \int_0^l \sin \vartheta_0 ds = a - r_1 \cos \vartheta_0'' \dots (22)$$

$$\int_0^l s \sin \vartheta_0 ds = -l r_1 \cos \vartheta_0''; \quad \int_0^l s \cos \vartheta_0 ds = l r_1 \sin \vartheta_0'' \dots (23)$$

Die Gleichungen (22) drücken analog den obigen Gleichungen (14) nur die Voraussetzung aus, dass in der Ruhelage die Axe der Unruhe durch den Ursprung  $O$  der Coordinaten geht. Aus (23) aber folgt, da

analog den Gleichungen (17) hier

$$\int_0^l s \sin \vartheta_0 ds = -lr_1 \cos \vartheta_0'' - ly_1$$

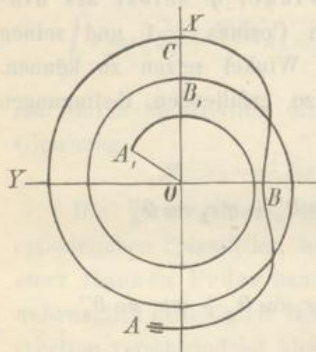
$$\int_0^l s \cos \vartheta_0 ds = lr_1 \sin \vartheta_0 - lx_1$$

ist, unter  $x_1, y_1$  die Schwerpunktskoordinaten der nicht deformirten Federmittellinie verstanden, einfach

$$x_1 = y_1 = 0 \dots \dots \dots (24).$$

Die flache Feder muss also auch, um möglichst isochrone Schwingungen zu gestatten, so gestaltet werden, dass der Schwerpunkt ihrer Mittellinie in der Axe liegt. Phillips zeigte a. a. O., dass sich dasselbe Resultat auch dann ergibt, wenn die Normale der Curve für ihren inneren Endpunkt unter einem beliebigen unveränderlichen Winkel gegen den Radius des Schwungrades geneigt ist. Um sie dieser Bedingung gemäss zu zeichnen, was wieder auf unendlich mannigfach verschiedene Weisen möglich ist, kann das oben für die Endcurven der cylindrischen Spirale angegebene graphische Verfahren durch die Rechnungsergebnisse des vorigen §. unterstützt werden.

Fig. 151.



Es sei nämlich  $ABCB_1A_1$  (Fig. 151) die der Ruhelage entsprechende Form einer solchen flachen Spiralfeder, von  $C$  bis  $A_1$  als Archimedische Spirale angenommen, welche thatsächlich mehr Windungen hat, als hier der Einfachheit wegen gezeichnet sind. Die Länge der Curve  $CB_1A_1$  sei  $=l_1$ , der Fahrstrahl  $OC=r_0$ ,  $OA_1=r_1$ , die radiale Entfernung von je zwei auf einander folgenden Windungen  $CB_1=e$ , der Winkel  $COA_1=\epsilon_0$ . Unter  $x_1$  und  $y_1$  hier die Schwerpunktskoordinaten des a priori angenommenen Curvenstückes

$CB_1A_1=l_1$  für die aus Fig. 151 ersichtlichen Koordinatenachsen verstanden, ist dann nach (5) im vorigen §:

$$f = l_1 x_1 = r_0^2 (p + q^2 \sin \epsilon_0 - pq \cos \epsilon_0)$$

$$g = l_1 y_1 = r_0^2 (1 - pq \sin \epsilon_0 - q^2 \cos \epsilon_0)$$

mit  $p = \frac{e}{\pi r_0}$  und  $q = \frac{r_1}{r_0}$ . Indem hiernach  $x_1$  von geringerer Grössenordnung als  $y_1$ , auch  $y_1$  jedenfalls positiv ist, ist die Endcurve  $ABC$

$= \lambda = l - l_1$  so anzunehmen, dass sie von der  $x$ -Axe aus hauptsächlich auf der Seite der negativen  $y$ -Axe liegt und von dieser beinahe halbirt wird, und kann sie dann allmählig so lange verändert werden bis, unter  $\xi_1$  und  $\eta_1$  ihre Schwerpunktskoordinaten für dieselben Axen  $OX, OY$  verstanden, mit genügender Annäherung

$$\lambda \xi_1 = -l_1 x_1 \quad \text{und} \quad \lambda \eta_1 = -l_1 y_1$$

geworden ist. —

Durch eine grössere Zahl sorgfältiger Versuche, die sich in dem hier benutzten Mémoire ausführlich beschrieben finden, ist von Phillips sowohl die Formel (4) für die Schwingungsdauer, als auch der Einfluss verschiedener Federendigungen auf die Deformation und den Isochronismus der Spiralfeder geprüft und mit der Theorie in Einklang gefunden worden. Auch werden mehrere Fälle angeführt, in denen die theoretisch bestimmten Curven fast genau mit denjenigen übereinstimmten, zu welchen praktische Chronometermacher empirisch durch lange Erfahrung und viele Proben gelangt waren.

#### §. 144. Einfluss der Temperatur auf die Schwingungsdauer der Unruhe.

Wenn auch durch Anwendung der in den zwei vorigen Paragraphen entwickelten Regeln die Schwingungsdauer einer Unruhe möglichst angenähert der Gleichung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Ql}{EJ}}$$

entsprechend gemacht ist, so bleibt sie doch vor Allem von der Temperatur abhängig, und zwar in gleichem Sinne mit derselben veränderlich in solchem Grade, dass eine mit solcher Unruhe als Regulator ausgerüstete Uhr für jeden Grad der Temperaturzunahme etwa 10 Secunden täglich nachgehen kann. In der That sind alle in obigem Ausdrucke vorkommenden Grössen  $Q, l, J, E$  mit der Temperatur veränderlich. Werden ihre Werthe für  $t=0$  bzw. mit  $Q_0, l_0, J_0, E_0$  bezeichnet und ist  $\mu$  der lineare Ausdehnungcoefficient des Materials des Schwungrades (in der Regel Messing),  $\sigma$  derselbe für die Stahlfeder, beide bezogen auf  $1^\circ \text{C.}$ , so ist bei der Temperatur  $t$  zu setzen:

$$Q = Q_0 (1 + \mu t)^2, \quad l = l_0 (1 + \sigma t), \quad J = J_0 (1 + \sigma t)^4.$$

Weniger zuverlässig bekannt (auch wohl mehr schwankend mit der materiellen Beschaffenheit) ist das Gesetz, nach welchem der Elasticitätsmodul  $E$  von der Temperatur abhängt. Während Wertheim denselben u. A.

insbesondere für Eisen und Stahl bei von  $0^{\circ}$  an wachsender Temperatur anfangs zunehmend und erst bei höheren Temperaturen abnehmend fand, ergab sich nach Kohlrausch für die von ihm untersuchten Metalle (Eisen, Kupfer und Messing) eine beständige Abnahme von  $E$  der Art, dass für solche Temperaturen, wie sie hier allein in Betracht kommen,

$$E = E_0 (1 - \epsilon t)$$

gesetzt werden kann. Bei Voraussetzung dieses letzteren Abhängigkeitsgesetzes würde sich durch eine Temperaturzunahme  $= t$  die Schwingungsdauer ändern im Verhältnisse

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{\frac{(1 + \mu t)^2}{(1 - \epsilon t)(1 + \sigma t)^3}}$$

$$\text{nahe} = \sqrt{1 + (\epsilon + 2\mu - 3\sigma)t} = 1 + \left(\frac{\epsilon}{2} + \mu - \frac{3}{2}\sigma\right)t.$$

Da der Ausdehnungscoefficient des Messings ungefähr 1,5 mal so gross ist wie der des Stahls, so ergibt sich auch nahe

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{\epsilon}{2}t.$$

Der Einfluss der Temperatur rührt also fast ausschliesslich von der Veränderlichkeit des Elasticitätscoefficienten her, und kann der Umstand, dass mit wachsender Temperatur in der That  $\tau$  zunimmt, die Schwingungszahl einer Unruhe nämlich abnimmt (die betreffende Uhr nachgeht), als Bestätigung der Gültigkeit des von Kohlrausch gefundenen Abhängigkeitsgesetzes von  $E$  für Federstahl gelten. Bei einer Temperaturzunahme von  $1^{\circ}$  C. würde entsprechend der Zunahme von  $\tau$  im Verhältnisse  $1 + \frac{\epsilon}{2}$  die betreffende Uhr um täglich

$$86400 \cdot \frac{\epsilon}{2} \text{ Sekunden}$$

nachgehen, und wenn dieses Nachgehen thatsächlich 10 Sekunden betrüge, könnte daraus

$$\epsilon = \frac{1}{4320} = 0,00023$$

gefolgert werden, etwa  $=$  der Hälfte des Werthes, der von Kohlrausch für Eisen gefunden wurde.

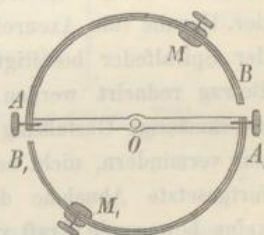
Um dem Einflusse der Temperatur zu begegnen, begnügt man sich bei gewöhnlichen Taschenuhren mit gelegentlicher Verkleinerung oder Vergrösserung der wirksamen (an der Deformation Theil nehmenden)

Länge der flachen Spiralfeder vermittels des sogenannten Rückers, eines ungleicharmigen Hebels, dessen Drehaxe mit der Unruhaxe zusammenfällt und dessen kürzerer Arm die Feder in der Nähe ihres am Gestell festen Endes so einklemmt, dass ein Gleiten der Klemme längs der Feder möglich ist, während der längere Arm zugleich als Griff und als Zeiger dient. Insoweit die Klemme längs der Feder beweglich sein soll, muss letztere möglichst genau kreisförmig gestaltet sein, damit die Handhabung des Rückers ohne Deformation der Feder und ohne Vergrößerung des Lagerdruckes der Unruhaxe geschehen könne.

Bei Chronometern sind besondere Compensationen nöthig, die ebenso wie beim Compensationspendel auf der verschiedenen Ausdehnbarkeit verschiedener Metalle beruhen. Bei der gewöhnlichen Anordnung (Fig. 152) besteht der Schwungring aus zwei getrennten Theilen  $AB$  und  $A_1B_1$ , jeder am einen Ende getragen von einem gemeinschaftlichen Stege  $AA_1$ , der in der Mitte  $O$  auf der Axe fest sitzt und an betreffender Stelle (in der Entfernung  $a$  von  $O$ ) mit der cylindrischen Spiralfeder fest verbunden ist. Jede Ringhälfte ist aus einem äusseren Messingstreifen und einem inneren Stahlstreifen zusammengelöthet; wegen der grösseren Ausdehnbarkeit des Messings nimmt dann bei wachsender Temperatur die Krümmung der beiden Halbringe zu, so dass ihre Enden  $B$  und  $B_1$  sich der Axe nähern, somit das Trägheitsmoment  $Q$  verkleinert und bei passender Wahl der Verhältnisse die Verkleinerung des Elasticitätsmodul  $E$  unschädlich gemacht wird. Massen  $M$  und  $M_1$ , welche an verschiedenen Stellen festgeklemmt oder in Form von Schrauben an verschiedenen Stellen eingeschraubt werden können, dienen zur Regulirung der compensirenden Wirkung. Andere Massen, bei  $A$  und  $A_1$  vermittels feiner Schrauben radial beweglich, dienen zur Regulirung von  $Q$  und dadurch von  $\tau$ , abgesehen vom Einflusse der Temperatur.

Uebrigens kann auch bei vollkommenster Ausführung dieser Compensation am Schwungrade ein gewisser Einfluss der Temperatur auf die Schwingungsdauer  $\tau$  dadurch übrig bleiben, dass mit der Längenänderung der Feder zugleich eine Formänderung derselben und somit eine vermehrte Lagerreaction verbunden ist. Um das zu verhindern, muss die Aehnlichkeit der allen Temperaturen entsprechenden Federmittellinien dadurch ermöglicht werden, dass die Abstände  $a$  ihrer Endpunkte von der

Fig. 152.



Axe in demselben Verhältnisse mit der Temperatur veränderlich gemacht werden wie die Länge der Feder. Das wäre der Fall, wenn der Theil des Uhrgestelles, an welchem das unbewegliche Federende befestigt ist, und wenn ebenso das Armsystem des Schwungrades, bezw. der Steg  $AA_1$  (Fig. 152) der Compensationsunruhe aus demselben Material wie die Spiralfeder, also aus Federstahl verfertigt würde; besser aber ist es durch die Wahl solcher Federendigungen zu erreichen, welche  $a=0$  oder wenigstens einem sehr kleinen Werthe von  $a$  entsprechen.

§. 145. Einfluss der Bewegungswiderstände auf die Schwingungen des Pendels oder der Unruhe.

Als Widerstände kommen hier in Betracht die Reibung und der Luftwiderstand. Erstere kann beim Pendel durch Federaufhängung, bei der Unruhe (als Axenreibung in den Lagern) durch passende Gestaltung der Spiralfeder beseitigt oder wenigstens auf einen fast unmerklichen Betrag reducirt werden, der Luftwiderstand dagegen lässt sich durch zweckmässige Gestaltung des Pendels oder des Schwungrades der Unruhe nur vermindern, nicht beseitigen. Natürlich würde jeder Widerstand eine fortgesetzte Abnahme des Ausschlagwinkels  $\alpha$  zur Folge haben, wenn keine bewegende Kraft vorhanden wäre, die periodisch den Arbeitsverlust ersetzt. Hier, wo es sich nicht sowohl um den Ausschlagwinkel, als um die Schwingungsdauer handelt, soll von jenem zeitweiligen Antriebe abgesehen werden. Auch werden solche Verhältnisse vorausgesetzt (herbeigeführt beim Pendel durch genügend kleine Schwingungen, bei der Unruhe durch Anwendung der in §. 142 und §. 143 entwickelten Regeln), dass eine Aenderung von  $\alpha$  an und für sich keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungsdauer ausübt, dass also diese beim Pendel

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Q}{Gr}}$$

ist, unter  $G$  dessen Gewicht,  $Q$  sein Trägheitsmoment für die Aufhängungsaxe und  $r$  den Schwerpunktsabstand von dieser Axe verstanden, bei der Unruhe aber nach §. 141, Gl. (4):

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Ql}{EJ}}$$

mit den dort erklärten Bedeutungen von  $Q, l, J, E$ . Wenn dann, wie im §. 142, die Zeit  $t$  von einem Augenblicke grössten Ausschlags  $= \alpha$  aus der Ruhelage gerechnet und für die Schwingung bis zur andern äussersten

Lage, während also  $\varphi$  ohne Widerstände von  $\alpha$  bis  $-\alpha$ , mit Rücksicht auf dieselben aber von  $\alpha$  bis  $-\alpha_1$  ( $\alpha_1$  etwas  $< \alpha$ ) abnimmt, die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  positiv gesetzt wird, so ist bei Abstraction von Widerständen für das Pendel:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Gr \sin \varphi}{Q} \quad \text{sehr nahe} \quad = \frac{Gr}{Q} \varphi$$

und für die Unruhe nach §. 142:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{EJ}{Ql} \varphi,$$

in beiden Fällen also

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2 \varphi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\pi}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{zu setzen mit } k^2 = \frac{Gr}{Q} \text{ für das Pendel} \\ \text{bzw. } k^2 = \frac{EJ}{Ql} \text{ für die Unruhe} \end{array} \right\} \dots \dots (1).$$

Mit Rücksicht auf die Widerstände kann also auch in beiden Fällen

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2 \varphi - w \dots \dots \dots (2)$$

gesetzt werden, unter  $w$  im Allgemeinen eine Function von  $\omega$  und  $\varphi$  verstanden. Aus dieser Differentialgleichung folgen dann durch Integration ebenso wie im §. 142 (woselbst  $w$  eine Function nur von  $\varphi$  bedeutete), die dort mit (15) und (16) bezeichneten Gleichungen:

$$\omega = k\alpha \sin(kt) - \sin(kt) \int_0^t w \sin(kt) dt - \cos(kt) \int_0^t w \cos(kt) dt \dots \dots \dots (3)$$

$$\varphi = \alpha \cos(kt) - \frac{\cos(kt)}{k} \int_0^t w \sin(kt) dt + \frac{\sin(kt)}{k} \int_0^t w \cos(kt) dt \dots \dots \dots (4).$$

Wäre  $w$  eine Constante, so würde aus (3) folgen:

$$\begin{aligned} \omega &= k\alpha \sin(kt) - \frac{w}{k} \left\{ \sin(kt) [1 - \cos(kt)] + \cos(kt) \sin(kt) \right\} \\ &= \left( k\alpha - \frac{w}{k} \right) \sin(kt) \end{aligned}$$



und würde  $\omega = 0$  für  $t = \frac{\pi}{k}$  unabhängig von  $w$ . Durch ein Widerstandsmoment von constanter Grösse wird also zwar das Maximum der Winkelgeschwindigkeit bei gegebenem anfänglichem Ausschlagwinkel  $\alpha$  verkleinert, dagegen die Schwingungsdauer nicht verändert. Eine Verkleinerung des Geschwindigkeitsmaximums hat natürlich jeder Widerstand zur Folge; ob aber die Schwingungsdauer durch ihn in anderen Fällen vergrössert oder verkleinert wird, ist daraus zu schliessen, ob die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für  $t = \frac{\pi}{k}$  noch positiv oder schon negativ ist. Wird diese Winkelgeschwindigkeit mit  $\omega_1$  bezeichnet, so folgt aus (3) mit  $x = kt$ :

$$\omega_1 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} w \cos(kt) dt = \frac{1}{k} \int_0^{\pi} w \cos x dx = \frac{1}{k} \int_0^{\pi} w d \sin x \dots (5).$$

Ist nun  $w = f(\omega)$  eine Function der Geschwindigkeit, wie es namentlich in Folge des Luftwiderstandes der Fall und wobei dann  $f(\omega)$  in gleichem Sinne wie  $\omega$  veränderlich ist, so folgt aus (5) mit dem Näherungswerthe

$$\omega = k\alpha \sin x \text{ nach (3):}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k\alpha \sin x) d \sin x - \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(k\alpha \sin x) d \sin x,$$

also  $\omega_1 = 0$ , weil  $\sin x$  von  $x = 0$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$  dieselben Werthe durchläuft wie von  $x = \pi$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$ . Ist aber  $w = f(\pm \varphi)$  eine Function des Absolutwerthes von  $\varphi$ , so folgt aus (5) mit dem Näherungswerthe

$$\varphi = \alpha \cos x \text{ nach (4):}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha \cos x) d \sin x - \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(-\alpha \cos x) d \sin x$$

auch  $= 0$ , weil  $\cos x$  von  $x = 0$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$  dieselben Werthe wie  $-\cos x$  von  $x = \pi$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$  durchläuft. Die verhältnissmässige Aenderung der Schwingungsdauer durch die Bewegungswiderstände ist also jedenfalls nur klein von höherer Ordnung.

Der Voraussetzung  $w = f(\varphi)$  entspricht das Widerstandsmoment, welches bei einer Unruhe von der durch die Lagerreaction verursachten Axreibung herrührt, sofern die Componenten  $X, Y$  dieser Lagerreaction dem Elasticitätsmoment  $M$  der Spiralfeder und somit sehr nahe dem Elongationswinkel  $\varphi$  — z. B. gemäss den Gleichungen (6) und (9) in §. 142 — proportional sind. Für diesen Fall lässt sich leicht erkennen, dass der Widerstand die Schwingungsdauer etwas vergrössert. In der That ist nach Gl. (2) mit  $w = \pm \alpha^2 \varphi$  für positive oder negative Werthe von  $\varphi$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = (k^2 - \alpha^2) \varphi \quad \text{bezw.} \quad = (k^2 + \alpha^2) \varphi$$

und ist daraus auf eine Schwingungsdauer:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{k} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{3}{8} \frac{\alpha^4}{k^4} + \dots \\ + 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{3}{8} \frac{\alpha^4}{k^4} - \dots \end{array} \right\} \\ &= \frac{\pi}{k} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\alpha^4}{k^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

zu schliessen, welche um eine kleine Grösse höherer Ordnung  $> \frac{\pi}{k}$  ist. —

Auf das Abhängigkeitsgesetz der durch den Bewegungswiderstand verursachten Winkelverzögerung  $w$  kann aus dem Gesetze geschlossen werden, nach welchem der Ausschlagwinkel  $\alpha$  eines Pendels oder einer Unruhe bei den ohne neuen Antrieb stattfindenden Schwingungen nach und nach abnimmt. Indem nämlich für  $t = \frac{\pi}{k}$  die oben mit  $\omega_1$  bezeichnete Winkelgeschwindigkeit und ebenso der Unterschied zwischen  $\frac{\pi}{k}$  und der Schwingungsdauer  $\tau$  sehr klein ist, ergibt sich die Aenderung des Elongationswinkels  $\varphi$  während der Zeit  $\tau - \frac{\pi}{k}$  oder  $\frac{\pi}{k} - \tau$  als eine sehr kleine Grösse höherer Ordnung, mit deren Vernachlässigung somit  $\alpha_1 =$  demjenigen Werthe von  $-\varphi$  gesetzt werden kann, welcher der Zeit  $t = \frac{\pi}{k}$  entspricht, d. i. nach (4):

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{k}} w \sin(kt) dt = \alpha - \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} w \sin x dx \dots (6).$$

Ist nun etwa, unter  $a, b, c, e$  Constante und unter  $(\pm \varphi)$  den Absolutwerth von  $\varphi$  verstanden,

$$w = a + b\omega + c\omega^2 + e(\pm \varphi),$$

so ergibt sich mit den Näherungswerthen

$$\omega = k\alpha \sin x \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha \cos x,$$

welche den Gleichungen (3) und (4) mit  $w = 0$  entsprechen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \frac{a}{k^2} \int_0^{\pi} \sin x dx - \frac{b\alpha}{k} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - c\alpha^2 \int_0^{\pi} \sin^3 x dx \\ &\quad + \frac{e\alpha}{k^2} \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx \\ &= \alpha - 2 \frac{a}{k^2} - \frac{\pi b\alpha}{2k} - \frac{4}{3} c\alpha^2 + \frac{e\alpha}{k^2} \int_0^{\pi} \sin x dx \sin x. \end{aligned}$$

Was das letzte Glied dieses Ausdruckes betrifft, so kann mit der hier beabsichtigten Annäherung das obere Vorzeichen von  $x = 0$  bis  $x = \frac{\pi}{2}$ , das untere von  $x = \frac{\pi}{2}$  bis  $x = \pi$  genommen und somit gesetzt werden:

$$\begin{aligned} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \sin x &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx \sin x \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} y dy - \int_0^{\frac{1}{2}} y dy = -1. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2} - \frac{2a}{k^2} \frac{1}{\alpha} - \frac{4}{3} c\alpha \dots (7)$$

und ebenso, wenn mit  $\alpha_2, \alpha_3 \dots$  die Ausschlagwinkel zu Ende der zweiten, dritten ... Schwingung bezeichnet werden,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2} - \frac{2a}{k^2} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{4}{3} c\alpha_1 \text{ u. s. f.}$$

Insbesondere ist für  $a = c = 0$ :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \dots = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2}$$

= einer Constanten, d. h. der Ausschlagwinkel nimmt nach einer geometrischen Reihe ab, wenn das Widerstandsmoment theils

der W  
der R  
schwin  
für de  
vorzug  
widrige

entspre  
metrisch  
dels v  
besteht  
schwin  
Geschw  
Grösse

werden  
zu sol  
Oberflä  
keit p

D  
nieders  
hängt,  
samme  
im Ge  
sei un  
einerse  
Stift,  
Federh  
Tromm  
welche  
werk t  
H  
spreche

der Winkelgeschwindigkeit, theils der Winkelentfernung von der Ruhelage proportional ist. Dies ist das Gesetz, welches für schwingende Pendel die Beobachtung thatsächlich ergeben hat, wenigstens für den Fall, dass durch Federaufhängung oder auf sonstige Weise die vorzugsweise der Constanten  $a$  entsprechende Reibung eliminirt wurde, widrigenfalls nach (7) eine dem Gesetze:

$$\frac{\alpha_1}{a} > \frac{\alpha_2}{a_1} > \frac{\alpha_3}{a_2} \dots$$

entsprechende Winkelabnahme zu erwarten wäre. Jene Abnahme in geometrischer Reihe lässt aber erkennen, dass der Luftwiderstand des Pendels vorzugsweise in einer Reibung zwischen der Luft und der Linse besteht, welche tangential längs dieser gerichtet und ihrer relativen Geschwindigkeit gegen die Luft proportional ist. Bei einer Unruhe, deren Geschwindigkeit grösser ist, kann auch das Glied mit  $c$  von merklicher Grösse und somit nach (7):

$$\frac{\alpha_1}{a} < \frac{\alpha_2}{a_1} < \frac{\alpha_3}{a_2} \dots$$

werden, besonders wenn hervorstehende Theile des Schwungrades (Fig. 152) zu solchen Widerständen Veranlassung geben, welche normal gegen die Oberfläche gerichtet und dem Quadrate der relativen Normalgeschwindigkeit proportional zu setzen sind.

#### b. Der Motor.

Die bewegende Kraft einer Uhr ist entweder ein Gewicht, welches niedersinkend vermittels einer Schnur, Darmsaite oder Kette, woran es hängt, eine Trommel in Umdrehung setzt, oder die Elasticität einer zusammengewundenen und in der Aufwindung begriffenen Spiralfeder, welche im Gegensatz zur Spiralfeder des Regulators als Triebfeder bezeichnet sei und im Inneren einer Trommel, dem hier sogenannten Federhause, einerseits mit der cylindrischen Trommelwand, andererseits mit einem Stift, dem Federstift, fest verbunden ist, um welchen als Welle das Federhaus sich drehen kann. In beiden Fällen wird die Drehung der Trommel durch ein damit verbundenes grösseres Zahnrad (Triebrad), welches in ein kleineres von wenig Zähnen eingreift, auf das übrige Uhrwerk übertragen.

Hierbei kommen verschiedene Rücksichten in Betracht, welche entsprechende Anordnungen des Motors bedingen, insbesondere

1. die Forderung möglichst constanter Grösse der Triebkraft während des Ganges einer aufgezogenen Uhr,
2. die Forderung, dass, wenn die Uhr aufgezogen, d. h. die abgelaufene Gewichtschnur auf die Trommel wieder aufgewunden bezw. die aufgedrehte Triebfeder wieder stärker zusammengedreht wird, dadurch weder das übrige Uhrwerk zu einer entgegengesetzten Bewegung oder zum Stillstande veranlasst, noch auch thunlichst eine zeitweilige Unterbrechung oder Störung der Wirksamkeit des Motors herbeigeführt werden soll.

#### §. 146. Wirksamkeit des Motors während des Ganges einer Uhr.

Indem es praktisch nicht möglich ist, die Schwingungsdauer eines Regulators von der Grösse seines Ausschlagwinkels vollkommen unabhängig zu machen, letzterer aber im periodischen Beharrungszustande dadurch bedingt ist, dass bei jeder Schwingung des Regulators der Arbeitsverlust in Folge seiner Bewegungswiderstände dem Ersatze an Arbeitsvermögen durch den Motor gleich ist, somit jede Aenderung dieses letzteren Arbeitsvermögens entsprechende Aenderungen der Widerstandsarbeit und folglich des Ausschlagwinkels zur Folge hat, so ist es von Wichtigkeit, für möglichste Unveränderlichkeit des dem Regulator periodisch mitgetheilten Arbeitsvermögens Sorge zu tragen. Indem dasselbe durch Vermittlung des Uhrwerkes vom Motor auf den Regulator übertragen wird, kommt es vor Allem darauf an, dass das Kraftmoment möglichst constant sei, mit welchem das Triebrad in Drehung erhalten wird.

Ist die Triebkraft ein niedersinkendes Gewicht, so ist diese Forderung ohne Weiteres und so vollkommen wie möglich erfüllt; eine kleine Unvollkommenheit wird nur durch die Schwere der mit veränderlicher wirksamer Länge das Gewicht tragenden Schnur verursacht, welcher Einfluss sich indessen leicht eliminiren liesse, wenn er überhaupt in Betracht käme. Da der mit der Triebkraft wachsende Ausschlagwinkel besonders bei einem Pendel die Schwingungsdauer beeinflusst, so ist es bei Pendeluhren nicht nur am einfachsten, sondern auch mit Rücksicht auf die Gleichförmigkeit des Ganges am besten, sie durch ein niedersinkendes Gewicht in Gang zu erhalten. Auch geht man von dieser Regel nur ab bei Stutz- und Tafeluhren, bei denen der Raum für ein niedersinkendes Gewicht zu sehr beschränkt ist und die Gleichförmigkeit des Ganges der äusseren Form untergeordnet wird.

Besteht aber die bewegende Kraft in der Elasticität einer zusammen-  
gewundenen Spiralfeder, so ist ihr Moment in Bezug auf die Axe des  
Federhauses bei Abstraction vom Einflusse des Lagerdruckes nach §. 141,  
Gl. (2):

$$M = \frac{EJ}{l} \varphi \dots \dots \dots (1),$$

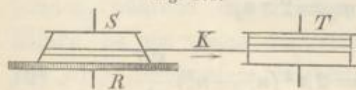
unter  $E$  den Elasticitätsmodul des Materials (gehärteter Stahl),  $J$  das  
Trägheitsmoment des Querschnittes für die Biegungsaxe und unter  $l$  die  
Länge der Feder verstanden. Es ist also  $M$  dem Verdrehungswinkel  $\varphi$   
proportional und mit diesem beim Ablaufen der Uhr zwischen zwei  
Grenzwerten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abnehmend veränderlich. Dasselbe gilt von  
der auf den Umfang des Federhauses (Radius =  $a$ ) reducirten Triebkraft

$$P = \frac{M}{a},$$

und um nun trotzdem das Moment =  $Pr$ , mit welchem diese

Kraft auf Umdrehung des Triebrades wirkt, constant zu erhalten, macht  
man den Hebelarm  $r$  zwischen zwei entsprechenden Grenzen  $r_1$  und  $r_2$   
so zunehmend veränderlich, dass  $\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2$  und überhaupt  $\varphi r$  constant  
ist, indem nämlich (Fig. 153) das Federhaus  $T$  vermittle einer

Fig. 153.



Gliederkette  $K$  zunächst eine co-  
nische Trommel  $S$ , die sogenannte  
Schnecke in Umdrehung setzt, welche  
ihrerseits mit dem Triebade  $R$  ver-  
bunden ist. Beim Ablaufen der Uhr

wickelt sich die Kette vom dünneren gegen den dickeren Theil der  
Schnecke hin von dieser ab und auf das Federhaus auf.

Der Einfluss des Ausschlagwinkels, mithin der bewegenden Kraft  
auf die Schwingungsdauer ist übrigens bei einer Unruhe im Allgemeinen  
geringer, als bei einem Pendel, wenigstens nicht grösser, als der Einfluss  
der Temperatur, für welche bei gewöhnlichen Taschenuhren eine Com-  
pensation ohnehin nicht vorhanden ist. Man zieht es deshalb heutzutage  
vor, die Schnecke mit Kette bei den gewöhnlichen Taschenuhren ganz  
wegzulassen unter Verminderung des betreffenden Fehlers durch möglichst  
grosse Länge der Triebfeder. Diese gestattet einen grösseren Windungs-  
winkel  $\varphi$ , mithin bei gegebenem Unterschiede der Grenzwerte  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$

(etwa  $\varphi_1 - \varphi_2 = 4.2\pi$ ) eine grössere Annäherung des Verhältnisses  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$

an 1. Die Taschenuhren haben dadurch eine erhebliche Vereinfachung  
und Preisermässigung erfahren, und es ist mit der Kette eine Haupt-  
ursache von Beschädigungen fortgefallen. Bei Chronometern ist aber die

Schnecke ein wesentlicher Bestandtheil; zur Schonung der Kette wird hier eine besondere Vorrichtung angebracht, welche es verhindert, die Uhr so weit aufzuziehen oder ablaufen zu lassen, dass sich die Kette ganz vom Federhause bezw. von der Schnecke abwickelt.

Für Taschenuhren werden als Dimensionen der Triebfeder angegeben (Rühlmann, allgem. Maschinenlehre, I, S. 45):

$$\begin{aligned} l &= 400 \text{ bis } 700 \text{ Millimeter Länge,} \\ b &= 2 \quad \text{,,} \quad 5 \quad \quad \quad \text{Breite,} \\ d &= 0,15 \quad \text{,,} \quad 0,25 \quad \quad \quad \text{Dicke.} \end{aligned}$$

Bei 20 Windungen im aufgezogenen Zustande der Uhr, also  $\varphi_1 = 40\pi$ , ergibt sich dann mit  $E = 20000$  Kgr. pro Quadratmillimeter und mit

$$J = \frac{bd^3}{12} \text{ der Anfangswerth des Momentes } M:$$

$$M_1 = 40\pi \frac{EJ}{l}$$

$$= 3,5 \text{ Millimeterkgr. für } l = 400, b = 2, d = 0,15$$

$$\text{bezw. } = 23,4 \quad \quad \quad \text{,,} \quad \quad \quad \text{für } l = 700, b = 5, d = 0,25.$$

Entsprechend 4 Umdrehungen des Federhauses beim Ablauen der Uhr nimmt dieses Moment bis  $M_2 = 0,8 M_1$  ab. Das dabei ausgegebene Arbeitsvermögen ist mit  $\varphi_1 = 2\pi n_1$  und  $\varphi_2 = 2\pi n_2$ :

$$A = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M d\varphi = \frac{EJ}{l} \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{2} = 2\pi^2 (n_1^2 - n_2^2) \frac{EJ}{l} \dots (2),$$

insbesondere mit  $n_1 = 20$  und  $n_2 = 16$ :

$$A = 80 \text{ Millimeterkgr. für } l = 400, b = 2, d = 0,15$$

$$\text{bezw. } A = 529 \quad \quad \quad \text{,,} \quad \quad \quad \text{für } l = 700, b = 5, d = 0,25.$$

Uebrigens ist zu bemerken, dass, wenn auch durch die besprochenen Hilfsmittel vollkommene Unveränderlichkeit der ganzen Triebkraft einer Uhr zu erreichen wäre, damit doch wegen unvermeidlicher (z. B. durch Staub und Verdickung des Schmieröls bedingter) Veränderlichkeit der Widerstände des Uhrwerks nicht auch die Gleichförmigkeit der Grösse desjenigen Theils dieser Triebkraft gesichert wäre, welcher nach Abzug des Verlustes durch jene Widerstände zu periodischem Antriebe des Regulators übrig bleibt und worauf es eigentlich allein ankommt. Letzterer Zweck ist am vollkommensten dadurch zu erreichen, dass der Regulator mit einem besonderen schwächeren Hilfsmotor (Gewicht oder Feder) verbunden und dieser periodisch vom Hauptmotor durch Vermittlung des Uhrwerks stets in genau gleichem Maasse aufgezogen (das Hilfgewicht immer gleich hoch gehoben, bezw. die Hilfsfeder immer gleich stark

gespannt) wird, um so ganz unabhängig von den Aenderungen der Hauptbetriebskraft und der Widerstände des Uhrwerks periodisch immer dasselbe Arbeitsvermögen zum Antriebe des Regulators verfügbar zu machen. Indem aber solche Einrichtungen sich auf die Art der Verbindung des Motors mit dem Regulator beziehen, gehören sie ihrer Wirksamkeit nach zu den Hemmungen, bei deren Besprechung darauf als auf sogenannte „Hemmungen mit constanter Kraft“ zurückgekommen werden wird.

§. 147. Wirksamkeit des Motors beim Aufziehen der Uhr.

Das Aufziehen einer Uhr wird im Allgemeinen dadurch ermöglicht, dass das Triebrad mit dem Motor durch ein Gesperre verbunden ist, wodurch beim Aufziehen eine relative Bewegung beider Theile in entsprechendem Sinne möglich wird, während beim Ablaufen der aufgezogenen Uhr die dabei angestrebte entgegengesetzte relative Bewegung unmöglich ist.

Bei der durch ein Gewicht getriebenen Uhr ist die auf ihrer Welle festsitzende Trommel mit dem Klinkrade des Gesperres fest verbunden, während das Triebrad lose auf der Trommelwelle sitzt. Die Klinke ist um einen am Triebade seitlich befestigten Zapfen drehbar und wird durch eine gleichfalls an diesem Rade befestigte Feder gegen die Verzahnung des Klinkrades angedrückt; auch kann sie selbst zugleich als Feder wirken. Während des Ablaufens der Uhr zieht oder schiebt also das Klinkrad vermittels der Klinke das Triebrad so fort, als ob beide zusammen ein Ganzes ausmachten; beim Aufziehen der Uhr aber, d. h. bei der durch eine äussere Kraft bewirkten entgegengesetzten Drehung der Trommel sammt ihrer Welle und dem Klinkrade bewegen sich die Zähne des letzteren gleitend an der der Reihe nach in die Zahn-lücken einfallenden Klinke vorbei.

Bei der durch eine Feder getriebenen Uhr mit Schnecke und Kette (Fig. 153) ist das lose auf der Schneckenwelle sitzende Triebrad *R* ebenso mit der Schnecke *S* durch ein Gesperre verbunden wie bei der Gewichtuhr mit der Schnurtrommel. Das Aufziehen geschieht durch Umdrehung der Schneckenwelle in solchem Sinne, dass die einerseits am Federhause *T*, andererseits am dickeren Theile der Schnecke befestigte Kette *K* sich auf letztere gegen den dünneren Theil hin aufwickelt und dadurch das Federhaus entgegen seinem Drehungssinne beim Ablaufen der Uhr so dreht, dass die mit ihrem inneren Ende am unbe-

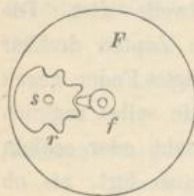


weglichen Federstift befestigte Triebfeder wieder stärker zusammengewunden wird.

Wenn aber bei der durch eine Feder getriebenen Uhr Schnecke und Kette fehlen, wie es bei den heutigen Taschenuhren der Fall zu sein pflegt, so ist das Triebrad mit dem Federhause fest verbunden, kann sich also dieses auch nicht beim Aufziehen in entgegengesetztem Sinne drehen, vielmehr wird das Aufziehen hier durch Drehung des Federstiftes bewerkstelligt. Damit er dann aber beim Ablauf der Uhr wieder feststehe, trägt er ein nur jene Drehung beim Aufziehen gestattendes Klinkrad, dessen zugehörige Klinke am Ende einer Feder sich befindet, die an der das betreffende Lager des Federstiftes enthaltenden Uhrplatte festgeschraubt ist. Diese Anordnung einer festen Verbindung des Federhauses mit dem Triebade heisst das Federhaus mit Zähnen oder das verzahnte Federhaus.

Zur Einschliessung des Windungswinkels  $\varphi$  der Triebfeder zwischen gewissen Grenzen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  dient bei dem verzahnten Federhause die sogenannte Stellung. Der dem Triebade gegenüberliegende Boden des Federhauses  $F$ , Fig. 154, trägt nämlich einen Stift  $s$ , um welchen mit

Fig. 154.



einiger Reibung, die eine willkürliche Drehung verhindert, ein kleines nur an einem Theile des Umfanges verzahntes Rädchen  $r$  drehbar ist. An entsprechender Stelle trägt der Federstift  $f$  eine kleine Scheibe, von deren Umfange ein einzelner Zahn, in jene Verzahnung zeitweilig eingreifend, hervorragt. Die beim Ablauf und beim Aufziehen der Uhr entgegengesetzten relativen Drehungen des Federstiftes

und Federhauses gegen einander sind in Folge dessen nur so lange möglich, bis der einzelne Zahn gegen den unverzahnnten Theil des Rädchens  $r$  auf der einen oder anderen Seite anstösst; die Zahl der möglichen ganzen relativen Umdrehungen ist gleich der Anzahl von Zähnen des Rädchens  $r$ . Bei der Uhr mit Schnecke und Kette wird zwar schon durch die begrenzte Länge der letzteren auch die Aenderung des Windungswinkels der Triebfeder begrenzt; weil dann aber durch unvorsichtiges Aufziehen leicht das Reissen der Kette bewirkt wird, kann besser auch in diesem Falle durch eine jener Stellung, Fig. 154, ähnliche Vorrichtung der Zweck ohne Beihülfe der Kette erreicht werden.

Der Forderung, dass die Wirksamkeit der Triebkraft durch das Aufziehen der Uhr nicht unterbrochen werden soll, wird bei dem vorbesprochenen verzahnten Federhause ohne weitere Hilfsvor-

richtung von selbst entsprochen, und es liegt auch hierin ein Vortheil dieses Systems. In den übrigen Fällen ist aber eine weitere Complication nöthig, um jene Bedingung zu erfüllen, und zwar dient dazu im Allgemeinen Harrison's Gegengesperre. Es ist nämlich der federnde Sperrhaken  $H$ , welcher in das an der Schnurtrommel einer Gewichtuhr oder an der Schnecke einer Triebfederuhr festsitzende Klinkrad eingreift, nicht unmittelbar am Triebade, sondern an einem zwischen diesem und jenem Klinkrade  $K$  eingeschalteten zweiten Klinkrade  $K_1$  befestigt, dessen Zähne denen von  $K$  entgegengerichtet sind und welches ebenso wie das Triebad  $R$  lose auf der Trommelwelle bzw.

Schneckenwelle drehbar ist (Fig. 155, woselbst die Verzahnungen der verschiedenen Räder nur theilweise angedeutet sind). Die Axe der in die Verzahnung von  $K_1$  eingreifenden Klinke  $H_1$  ist am Uhrgestelle fest, und endlich ist  $K_1$  mit dem Triebade durch eine Hilfsfeder  $F$  oder durch mehrere solche symmetrisch vertheilte Federn verbunden, welche einerseits an  $K_1$  befestigt sind und andererseits gegen Arme oder Vorsprünge des Triebades sich stützen.

Bei dem Ablafen der Uhr wirkt nun  $K$ , im Sinne des Pfeils rotirend, durch  $H$  treibend auf  $K_1$ , weiter  $K_1$  durch  $F$  treibend auf  $R$ , während  $H_1$  auf den Zähnen von  $K_1$  relativ gleitet. Beim Aufziehen der Uhr, also bei umgekehrtem Drehungsinne von  $K$  gleitet umgekehrt  $H$  auf den Zähnen von  $K$  und wird  $K_1$  durch  $H_1$  festgehalten, während die Spannung der Hilfsfeder  $F$  unterdessen treibend wirkt mit genügend constanter Kraft, sofern eine nur kurze Zeit zum Aufziehen gebraucht wird.

Bei Gewichtuhren kann zu demselben Zwecke auch die von Huyghens angegebene Vorrichtung benutzt werden, welche in §. 102 als Beispiel eines Gewichtsaccumulators erwähnt und durch Fig. 108 im Princip dargestellt wurde. In dieser bedeutet  $A$  die mit dem Triebade fest verbundene, beständig im Sinne des beigetzten Pfeiles rotirende Schnurtrommel,  $B$  eine Leitrolle, welche im Sinne des Pfeils nur beim Aufziehen gedreht wird, indem sie an entgegengesetzter Drehung durch ein Gegengesperre gehindert ist; beim Aufziehen wie beim Ablafen der Uhr wirkt

Fig. 155.

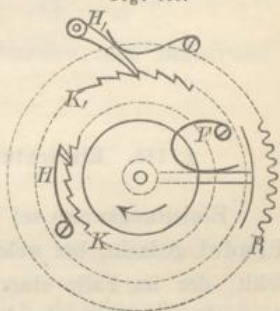
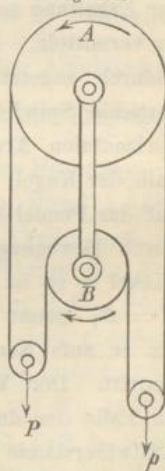


Fig. 108.



die Triebkraft mit unveränderter Intensität  $= \frac{1}{2}(P-p)$  am Umfange der Trommel. Letztere pflegt ebenso wie  $B$  als Schnurrolle gebildet zu werden mit zahnartig gekerbter Rinne, in welcher ein Rutschen der endlosen Schnur trotz nur halber Windung nicht zu befürchten ist, während sie anderen Falles bei mehrfacher Umschlingung einer glatten Trommel sich allmählig axial längs derselben bewegen und zeitweilig zurückrutschen würde. Freilich ist damit der Uebelstand verbunden, dass die Schnur bzw. Darmsaite allmählig aufgeraut wird, weshalb diese Einrichtung z. Z. nur noch weniger in Gebrauch ist.

### c. Die Hemmung.

#### §. 148. Einrichtung und Wirkungsweise im Allgemeinen.

Einleitungsweise sei hier zunächst kurz der Uhren mit conischem Pendel gedacht, bei welchen der als Hemmung bezeichnete Mechanismus fehlt, der im Falle einer Uhr mit hin- und herschwingendem Regulator dazu dient, theils durch Vermittlung des letzteren die Bewegung des übrigen Uhrwerkes periodisch zu unterbrechen, theils nach Wiederbeginn dieser Bewegung die antreibende Wirkung des Motors auf den Regulator zur Erhaltung seines periodischen Bewegungszustandes in geeigneter Weise zu vermitteln. Bei einer Uhr mit conischem Pendel wird dieses einfach dadurch angetrieben, dass der Motor vermittels des Räderwerkes eine verticale Spindel in Rotation erhält, welche durch einen geschlitzten horizontalen Arm die Spitze der Pendelstange (ihre Fortsetzung unterhalb der Kugel) continuirlich schiebt. Ist dabei für eine Umdrehung die auf das Pendel übertragene Arbeit  $= A$ , der Arbeitsverlust des letzteren durch Bewegungswiderstände  $= B$ , wachsend mit seinem Elongationswinkel  $\alpha$ , so ist der Beharrungszustand charakterisirt durch die Gleichung  $A=B$ ; nimmt  $A$  zu oder ab, so wird der Beharrungszustand gestört bis er aufs Neue bei einem grösseren bzw. kleineren Werthe von  $\alpha$  eintritt. Der Widerstand des Pendels besteht vorzugsweise, besonders im Falle der durch Fig. 147 (§. 140) dargestellten Federaufhängung, im Luftwiderstande der Kugel, wächst also mit ihrer Grösse und mit der Geschwindigkeit  $v$  ihres Mittelpunktes. Letztere ist, wenn

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \text{ nach §. 140, Gl. (6)}$$

die Umdrehungszeit und  $b$  die Entfernung des Kugelmittelpunktes vom Aufhängungspunkte bedeutet,

$$v = \frac{2\pi b \sin \alpha}{\tau} = b \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} \text{ nahe proportional } \alpha \sqrt{b},$$

so dass, wenn der Luftwiderstand  $W$  der Kugel (Radius  $= r$ ) proportional  $r^2 v^m$  gesetzt wird ( $m$  nahe  $= 2$ ), auch  $W$  proportional  $r^2 b^{\frac{m}{2}} \alpha^m$  und die Arbeit dieses Widerstandes für eine Umdrehung:

$$B = W \cdot 2\pi b \sin \alpha \text{ nahe proportional } r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^{m+1}$$

ist. Somit kann, unter  $C$  eine Constante verstanden, der Beharrungszustand durch die Gleichung:

$$A = B = C r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^{m+1}$$

charakterisirt werden, aus welcher folgt:

$$\frac{dA}{d\alpha} = (m+1) C r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^m \dots \dots \dots (1).$$

Dieses Verhältniss ist um so grösser, also die Aenderung von  $\alpha$ , welche einer gewissen Aenderung von  $A$  entspricht, um so kleiner, je länger das Pendel und je grösser die Kugel ist; durch Vergrösserung von  $\alpha$  darf die Vergrösserung von  $\frac{dA}{d\alpha}$  natürlich nicht erstrebt werden, weil damit nach §. 140 auch der Absolutwerth von  $\frac{d\tau}{d\alpha}$  wachsen würde. Der Luftwiderstand der Kugel bietet hier einen gewissen Ersatz für den fehlenden günstigen Einfluss einer Hemmung. —

In dem gewöhnlichen Falle einer Uhr mit ebenem Pendel oder mit Unruhe als Regulator sind im Allgemeinen drei Theile  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  der Schwingungsdauer  $\tau$  desselben zu unterscheiden. Während der Zeit  $\tau_1$  ist die Wirkung des Motors gehemmt, das Uhrwerk in Ruhe, wobei es von der Art der Hemmung abhängt, ob sie während eines grösseren oder kleineren Theiles von  $\tau_1$  mit dem seine Schwingung fortsetzenden Regulator in Berührung ist; jedenfalls fällt  $\tau_1$  zum Theil auf den Anfang, zum Theil auf das Ende der Schwingung. Während der Zeit  $\tau_2$  wirkt der Motor treibend auf das Uhrwerk und durch Vermittlung der Hemmung zugleich auf den damit in Berührung befindlichen Regulator. Während der Zeit  $\tau_3$  endlich, welche unmittelbar auf  $\tau_2$  folgt, wird nur das Uhrwerk vom Motor angetrieben, indem der Regulator unterdessen

unabhängig davon, nämlich ausser Berührung mit der Hemmung seine Schwingung fortsetzt. Im Allgemeinen ist  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ , letztere Zeit  $\tau_3$  oft verschwindend klein.

Ist jetzt  $A$  der Ueberschuss der Arbeit des Motors über die Arbeit der Widerstände des Uhrwerkes während der Zeit  $\tau_2$ ,  $B$  dagegen die Widerstandsarbeit des Regulators für dessen ganze Schwingungsdauer  $\tau$ , so wird nicht das ganze  $A$  als Ersatz für  $B$  verwendet, sondern, da zu Anfang der Zeit  $\tau_2$  das Uhrwerk in Ruhe war, nur der Theil  $A - \frac{1}{2} M v_2^2$ , unter  $M$  die auf den Angriffspunkt  $P$  der Hemmung am Regulator reducirte Masse des Uhrwerkes und unter  $v_2$  die Geschwindigkeit jenes Punktes der Hemmung zu Ende der Zeit  $\tau_2$  verstanden. Indem ferner  $B$  aus zwei Theilen besteht, nämlich aus der Arbeit  $= W$  des Widerstandes, insbesondere Luftwiderstandes, welcher dem Regulator unabhängig von seiner zeitweiligen Berührung mit der Hemmung eigenthümlich ist, und aus der Reibungsarbeit  $= R$ , welche während der Zeit  $\tau_2$  und event. eines Theiles von  $\tau_1$  durch die relativ gleitende Bewegung des Regulators längs der ihn berührenden Hemmung veranlasst wird, so gilt die Gleichung:

$$A = \frac{1}{2} M v_2^2 + R + W \dots \dots \dots (2).$$

Bezeichnet  $w_2$  die der Geschwindigkeit  $v_2$  des Punktes  $P$  der Hemmung entsprechende Geschwindigkeit des damit zusammenfallenden Regulatorpunktes,  $w'$  das Maximum der Geschwindigkeit  $w$  dieses letzteren Punktes, also die Geschwindigkeit desselben im Mittelpunkte seines Schwingungsbogens, so kann mit Rücksicht auf die fast vollständige Unveränderlichkeit des Aenderungsgesetzes von  $w$  sowie der Schwingungsdauer  $\tau$ , selbst bei erheblicher Aenderung des Ausschlagwinkels  $\alpha$ , die Geschwindigkeit  $w'$  proportional  $\alpha$  gesetzt werden, etwa  $w' = n\alpha$ , somit

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M \left( \frac{v_2 w_2}{w_2 w'} n \right)^2 \alpha^2 \dots \dots \dots (3),$$

unter  $n$  eine Constante verstanden. Die Reibungsarbeit  $R$  kann, insoweit sie sich auf den Antrieb des Regulators in der Zeit  $\tau_2$  bezieht, als unabhängig von  $\alpha$  betrachtet werden; insoweit sie aber von relativ gleitender Bewegung des Regulators längs der ihn berührenden Hemmung während der Zeit  $\tau_1$  herrührt, ist sie dem betreffenden Wege und somit nahezu dem Winkel  $\alpha$  proportional. Im Allgemeinen sei, unter  $a$  und  $b$  Constante verstanden,

$$R = a + b\alpha \dots \dots \dots (4).$$

Was endlich die Widerstandsarbeit  $W$  betrifft, so kann der sie vorzugsweise bedingende Luftwiderstand bezw. sein Moment für die Schwingungsaxe des Regulators proportional  $w^m$  gesetzt werden, etwa

$$= Cw^m = C\left(\frac{w}{w'}\right)^m (n\alpha)^m$$

und somit  $W = 2 \int_0^\alpha Cw^m d\varphi = 2 C(n\alpha)^m \int_0^\alpha \left(\frac{w}{w'}\right)^m d\varphi.$

Das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral ist = dem Product aus  $\alpha$  und einem durch das Schwingungsgesetz bestimmten Mittelwerthe von  $\left(\frac{w}{w'}\right)^m$ , so dass, wenn dieser und ebenso  $2n^m$  als Factoren in die neue Constante  $c$  eingeschlossen werden, damit

$$W = c\alpha^{m+1} \dots \dots \dots (5)$$

wird, unter  $m$  eine Zahl verstanden, die zwischen 1 und 2 liegt und zwar um so näher bei 1, je mehr der Luftwiderstand vorzugsweise als Reibung zwischen dem schwingenden Regulator und der Luft sich geltend macht.

Die Einsetzung der Ausdrücke (3) — (5) in Gl. (2) giebt:

$$A = \frac{1}{2} M \left(\frac{v_2}{w_2} \frac{w_2}{w'} n\right)^2 \alpha^2 + a + b\alpha + c\alpha^{m+1} \dots \dots \dots (6)$$

und folgt daraus:

$$\frac{dA}{d\alpha} = M \left(\frac{v_2}{w_2} \frac{w_2}{w'} n\right)^2 \alpha + b + (m+1)c\alpha^m \dots \dots \dots (7).$$

Um die Aenderungen von  $\alpha$  möglichst klein zu erhalten, sind die Ursachen der Aenderung von  $A$  thunlichst fern zu halten und ausserdem die Verhältnisse so zu wählen, dass  $\frac{dA}{d\alpha}$  möglichst gross wird ohne diesen Vortheil durch ebenso grosse anderweitige Nachtheile zu erkaufen. In dem Ausdrucke (7) sind aber  $m, n, c$  als durch die Umstände gegebene Grössen zu betrachten, so dass die Vergrößerung von  $\frac{dA}{d\alpha}$  durch eine solche von  $b, M, \alpha, \frac{v_2}{w_2}$  und  $\frac{w_2}{w'}$  herbeigeführt werden könnte. Indessen würde die Vergrößerung von  $b$  eine Vermehrung der bei ruhendem Uhrwerke (in der Zeit  $\tau_1$ ) zwischen dem Regulator und der Hemmung stattfindenden Reibung bedeuten, die wie jede Reibung hier möglichst vermieden werden muss theils wegen der damit wachsenden Grösse der

nöthigen Betriebskraft und der Abnutzung an den betreffenden Reibungsflächen, theils wegen schwankender Grösse dieser Reibung und dadurch bedingter Veränderlichkeit von  $\mathcal{A}$ . Aehnliche Gründe sprechen gegen Vergrößerung der Masse des Uhrwerkes, also von  $M$ , weil damit gleichfalls die Reibung und der Bedarf an Betriebskraft zunehmen. Indem auch der Ausschlagwinkel  $\alpha$  durch anderweitige Rücksichten auf die Eigenschaften des Regulators dem Früheren zufolge bedingt ist, bleibt in der Hauptsache nur übrig, die Verhältnisse  $\frac{v_2}{w_2}$  und  $\frac{w_2}{w'}$  möglichst gross zu machen. Das erstere derselben ist von den Eigenthümlichkeiten der einzelnen Hemmungsarten abhängig und bei diesen zu besprechen; das Verhältniss  $\frac{w_2}{w'}$  aber kann allgemein durch eine derartige Anordnung möglichst gross, nämlich möglichst = 1 gemacht werden, bei welcher der Regulator stets während einer solchen (im Verhältnisse zur Schwingungsdauer  $\tau$  meistens kleinen) Zeit  $\tau_2$  angetrieben wird, dass er zu Ende derselben mit seiner Maximalgeschwindigkeit die Ruhelage passirt. Die unterschiedenen Bestandtheile der Schwingungsdauer folgen sich dann nahezu in der Ordnung:

$$\tau = \frac{1}{2} \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \frac{1}{2} \tau_1 \dots \dots \dots (8).$$

Der Haupttheil der Hemmung ist ein je nach den Umständen mit sehr verschiedenartig gestalteten Zähnen versehenes Rad, das Hemmungsrade oder Steigrade, welches durch die bewegende Kraft der Uhr eine beständige Tendenz zur Drehung in gewissem Sinne besitzt, derselben aber nur während der kleinen Zeit  $\tau_3$  bei jedem Schwunge des Regulators ungehindert durch letzteren folgen kann, wogegen es während  $\tau_1$  vermittels seiner Zähne gehemmt wird, während  $\tau_2$  aber durch diese Zähne treibend auf den schwingenden Regulator wirkt. Es befindet sich dabei während  $\tau_1$  und  $\tau_2$  entweder in unmittelbarer Berührung mit dem Regulator oder mittelbar vermittels eines zwischen beide Theile eingeschalteten Hilfsmechanismus, wonach man unmittelbar oder direct wirkende und mittelbar oder indirect wirkende Hemmungen unterscheiden kann. Letztere Anordnung ist die vollkommenere und hat den Zweck, den Regulator während des grösseren Theiles der Hemmungsdauer  $\tau_1$  ganz frei, d. h. unabhängig von der Hemmung schwingen zu lassen, mithin die Reibungsarbeit  $R$  des an der Hemmung entlang gleitenden Regulators möglichst zu verkleinern.

## 1. Direct wirkende Hemmungen.

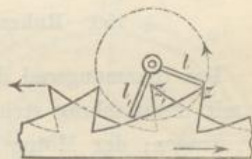
Dieselben werden als zurückspringende und ruhende Hemmungen unterschieden, jenachdem das Hemmungsrad während der Zeiten  $\tau_1$  kleinen rückläufigen Bewegungen unterworfen ist oder vollkommen ruht und niemals eine rückläufige Bewegung erhält.

## §. 149. Zurückspringende Hemmungen.

Hierzu gehören: die Spindelhemmung oder der sogenannte Spindelgang für Taschenuhren und die zurückspringende Ankerhemmung oder Hakenhemmung für Pendeluhren.

Der Spindelgang ist in seiner ursprünglichen Form, nämlich in Verbindung mit einer Unruhe, die lediglich in einem oscillirenden Schwungradchen ohne regulirende Spiralfeder bestand, die älteste aller Hemmungen; auch in Verbindung mit der Spiralfederunruhe ist er lange Zeit die gewöhnlichste Hemmung für Taschenuhren geblieben, bis er durch die Cylinderhemmung und später durch indirect wirkende Hemmungen mehr und mehr verdrängt wurde. Seine Einrichtung und Wirkungsweise sind in der Hauptsache folgende. Das Hemmungsrad oder sogenannte Steigrad ist nach Art eines Kronrades mit seitwärts vorstehenden, sägenförmig gestalteten Zähnen versehen und erhält durch den Motor eine Drehung in solchem Sinne, dass die Zahnschneiden vorausgehen. Die Spindel der Unruhe, deren Axe diejenige des Steigrades rechtwinklig schneidet, ist mit zwei radial gerichteten, nahe unter rechtem Winkel gegen einander geneigten Lappen  $l, l_1$  verbunden in einer Entfernung = dem Durchmesser des Steigrades; dieselben treffen an diametral gegenüberliegenden Stellen des Steigrades mit dessen Zähnen abwechselungsweise zusammen, indem sie in die Zahnspitzen hineingreifen: siehe Figur 156, in welcher bei verticaler Lage der Steigradaxe, also horizontaler Lage der Spindel der Lappen  $l$  und der Zahn  $z$  vorn,  $l_1$  und  $z_1$  hinten liegend zu denken sind. Stößt bei den Schwingungen der Unruhe ein Lappen  $l$  ihrer Spindel gegen eine Zahnschneide  $z$ , so springt das Steigrad zunächst etwas zurück, bis die lebendige Kraft des Schwungrades vernichtet ist; dann erfolgt die umgekehrte Bewegung, wobei der Regulator durch den Motor getrieben wird, während  $z$  an  $l$  abgleitet. In dem (durch Fig. 156 dar-

Fig. 156.





gestellten) Augenblicke aber, in welchem  $z$  und  $l$  ausser Berührung kommen, stehen sich  $z_1$  und  $l_1$  schon nahe gegenüber, so dass nach der kleinen Zeit  $\tau_3$  ihr Zusammentreffen erfolgt und dann der beschriebene Vorgang in Beziehung auf eine zweite Schwingung der Unruhe sich wiederholt. Das Steigrad hat eine ungerade Anzahl Zähne, damit sich Zähne und Zahnücken diametral gegenüberliegend entsprechen; nach jeder Doppelschwingung der Unruhe rückt es um eine Zahntheilung bleibend vor.

Es unterscheidet sich diese Hemmung von anderen besonders dadurch, dass der Regulator während des grössten Theiles seiner Bewegung vom Motor getrieben wird und dadurch einen viel grösseren Ersatz an Arbeitsvermögen erhält, als der ihm eigenthümlichen Widerstände wegen nöthig wäre. Die ihm bei jeder Schwingung überschüssig mitgetheilte Arbeit bewirkt das Zurückspringen des Steigrades. Die Zeit  $\tau_1$  der Hemmung ist auf die kleine Dauer dieser rückgängigen Bewegung und der darauf folgenden gleich grossen rechtläufigen Bewegung des Steigrades, wodurch jene rückgängige wieder ausgeglichen wird, beschränkt. Die durch die Stösse verursachten Erschütterungen und Arbeitsverluste machen übrigens diesen Spindelgang zu einem wenig vollkommenen Mechanismus. —

Die Hakenhemmung oder zurückspringende Ankerhemmung für Pendeluhren, um das Jahr 1680 von dem Londoner Uhrmacher Clement erfunden, geht durch eine so einfache Modification in die vollkommnere ruhende Ankerhemmung über, dass es genügt, bei Besprechung der letzteren auf den Unterschied beider aufmerksam zu machen.

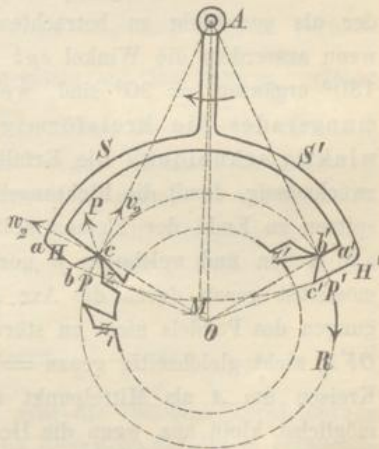
#### §. 150. Ruhende Ankerhemmung für Pendeluhren.

Das Hemmungsrad dieser von Graham 1715 erfundenen Hemmung ist mit etwas schräg stehenden Zähnen versehen, welche in der Radebene hervorragen; der Motor strebt es mit voraus gerichteten Zahnspitzen zu drehen. Der sogenannte Anker ist ein um eine horizontale Axe  $A$ , Fig. 157, parallel der Axe  $O$  des Hemmungsrades  $R$ , drehbarer Körper, dessen zwei Schenkel  $S, S'$  an den Enden zu Haken  $H, H'$  umgebogen sind. Die Ankerwelle ist durch einen Mitnehmer mit der Pendelstange verbunden, d. h. durch einen abwärts reichenden Arm, welcher unten vermittels einer sogenannten Gabel mit kleinem Spielraume die Pendelstange umfasst; damit hier keine relativ gleitende Bewegung stattfindet, muss die Schwingungsaxe des Ankers mit der Aufhängungsaxe des Pen-

dels zusammenfallen, in welchem Falle die Schwingungswinkel von Anker und Pendel gleich gross sind. Die Wirkung ist dann abgesehen von dem kleinen Spielraume der Pendelstange in der Gabel dieselbe, als ob erstere mit der Ankerwelle fest verbunden wäre, nur mit dem Unterschiede, dass bei der mittelbaren Verbindung durch den Mitnehmer eine möglichst reibungslose Aufhängung des Pendels, insbesondere vermittelst einer dünnen und flachen Stahlfeder (Fig. 142) möglich wird. Bei den sonach gemeinschaftlichen Schwingungen des Pendels und des Ankers greifen die Haken  $H, H'$  wechselseitig in die Zahnücken des Hemmungsrades ein und lassen dasselbe bei jeder Doppelschwingung um eine Zahntheilung sich drehen.

Was diese Hemmung zu einer (während der Zeiten  $\tau_1$ , §. 148) ruhenden macht, ist der Umstand, dass die Haken  $H, H'$  durch Cylinderflächen begrenzt sind, deren gemeinsame Axe die Schwingungsaxe  $A$  des Ankers ist, und dass die Vorderflächen der Hemmungszähne so gegen die betreffenden Radien des Hemmungsrades geneigt sind, dass sie die äussere Cylinderfläche  $ab$  des einen Hakens  $H$  und die innere  $a'b'$  des andern  $H'$  stets nur mit ihren äussersten Kanten berühren. Dadurch, dass diese Bedingungen nicht erfüllt sind, unterscheidet sich die zurückspringende Ankerhemmung, §. 149, von dieser ruhenden. Der Antrieb des Ankers und somit des Pendels während der Zeiten  $\tau_2$  wird durch ebene Angriffsflächen  $bc$  und  $b'c'$  an den Enden der Haken  $H, H'$  vermittelt. Sind  $p$  und  $p'$  die Punkte, in welchen die Peripherie des Hemmungsrades von der äusseren Kreislinie der Ankerhaken geschnitten wird, so ergibt sich bei entsprechender Construction das folgende Spiel der Hemmung, gerechnet von einem Augenblicke, in welchem das Pendel seinen äussersten Ausschlag rechts hat und das Rad  $R$  durch Stützung eines Zahnes  $z$  gegen die Fläche  $ab$  des Hakens  $H$  gehemmt ist. Während der Zeit  $\frac{1}{2}\tau_1$  gleitet  $ab$  an der Spitze dieses Zahnes entlang bis zu ihrer Berührung mit der Kante  $b$ , worauf während der Zeit  $\tau_2$  diese Zahnschneide, längs der Angriffsfläche  $bc$  gleitend, das Pendel antreibt, indem sich dasselbe mit dem Anker

Fig. 157.



um den kleinen Winkel  $bAp$ , Fig. 157, das Hemmungsrad um den Winkel  $pOc$  dreht. In dem durch die Figur dargestellten Augenblicke, in welchem die Spitze des Zahnes  $z$  die Angriffsfläche  $bc$  bei  $c$  verlässt, ist die Kante  $b'$  des anderen Hakens  $H'$  gerade in die Peripherie von  $R$  gelangt und befindet sich die Spitze eines Zahnes  $z'$  dieser Kante dicht gegenüber, so dass es nur einer sehr kleinen Zeit  $\tau_3$  bedarf, um  $z'$  durch die Fläche  $b'a'$  des Hakens  $H'$  aufzufangen und dann während der Zeit  $\frac{1}{2}\tau_1$  das Rad  $R$  wieder zu hemmen, indem dabei  $b'a'$  längs  $z'$  gleitet bis das Pendel seinen grössten Ausschlag links erreicht hat. Bei der folgenden Schwingung gleitet zuerst der Haken  $H'$  längs dem durch ihn gestützten Zahn  $z'$  zurück bis gleichzeitig die Kanten  $b'$  und  $c$  durch die Peripherie des Hemmungsrades  $R$  hindurch gehen; dann gleitet die Spitze von  $z'$  längs  $b'e'$ , um dem Pendel einen neuen Impuls zu geben, während sich  $R$  um den Winkel  $b'Op' = pOc$  dreht. Indem dann in demselben Augenblicke, in welchem  $c'$  durch den Punkt  $p'$  hindurch geht, auch  $b$  den Punkt  $p$  erreicht haben soll, damit der Haken  $H$  mit seiner Fläche  $ab$  den dem Zahne  $z$  folgenden Zahn  $z_1$  von  $R$  dicht bei der Kante  $b$  auffange, muss  $bp = c'p'$ , müssen also auch die Drehungswinkel  $bAp$  und  $c'Ap'$  des Ankers während des Antriebes im einen und im anderen Sinne gleich gross sein. Schliesslich gleitet  $z_1$  längs  $ba$  bis zur Grenzlage des Pendels u. s. f.

Aus den Gleichungen  $pc = p'b'$  und  $pb = p'e'$  folgt die Congruenz der als geradlinig zu betrachtenden kleinen Dreiecke  $cpb$  und  $b'p'e'$ , wenn ausserdem die Winkel  $cpb$  und  $b'p'e'$ , die sich im Allgemeinen zu  $180^\circ$  ergänzen,  $= 90^\circ$  sind, wenn also die Peripherie des Hemmungsrades die kreisförmig gekrümmten Ankerhaken rechtwinklig schneidet. Die Erfüllung dieser Bedingung ist zu dem Ende zweckmässig, damit die Richtungslinien der Stösse, mit welchen die Zahnspitzen zu Ende der kleinen Zeiten  $\tau_3$  gegen die Hakenflächen  $ab$  und  $a'b'$  treffen und welche in  $p$  normal zu  $Op$ , in  $b'$  normal zu  $Ob'$  sind, möglichst genau durch die Axe  $A$  des Ankers gehen, um die Schwingungen des Pendels nicht zu stören. Zwar können die Winkel  $OpA$  und  $Ob'A$  nicht gleichzeitig genau  $= 90^\circ$  sein, wenn  $p$  und  $b'$  verschiedenen Kreisen um  $A$  als Mittelpunkt angehören, doch fällt die Abweichung möglichst klein aus, wenn die Hemmung so angeordnet wird, dass, unter  $m$  und  $m'$  die Mittelpunkte der kleinen Bögen  $pc$  und  $p'b'$  verstanden, die gleichen Winkel  $OmA$  und  $Om'A = 90^\circ$  sind. Diese Anordnung vorausgesetzt, können die Punkte  $A, c, p$  und ebenso die Punkte  $A, b', p'$

als in gerader Linie liegend betrachtet werden, so dass mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} Ab = Ac' = l, & \quad \text{Winkel } bAc = c'Ab' = \lambda \\ pc = p'b' = e, & \quad \text{Winkel } pcb = p'b'c' = \varepsilon \end{aligned}$$

zwischen diesen Grössen die Beziehung stattfindet:

$$l\lambda = e \operatorname{tg} \varepsilon \quad \dots \dots \dots (1).$$

Nach den allgemeinen Erörterungen im §. 148 soll ferner die Anordnung möglichst so getroffen werden, dass das Pendel zu Ende der Antriebszeit  $\tau_2$  seine Ruhelage passirt, und dass in diesen Augenblicken das Verhältniss  $\frac{v_2}{w_2}$  der Geschwindigkeit  $v_2$  der treibenden Zahnspitze und der Geschwindigkeit  $w_2$  des von ihr berührten Ankerpunktes möglichst gross ist. Erstere Forderung kann zwar nicht für die Schwingungen im einen und anderen Sinne zugleich vollkommen erfüllt werden, weil die Punkte  $c$  und  $c'$  (Fig. 157) des Ankers bei verschiedenen Lagen desselben durch die Peripherie des Hemmungsrades hindurchgehen; doch wird ihr mit möglichster Annäherung durch eine solche Disposition entsprochen, welche zur Folge hat, dass die Mittelpunkte  $n$  und  $n'$  der Angriffslinien  $bc$  und  $b'c'$  des Ankers bei dessen mittlerer Lage (der Gleichgewichtslage des Pendels entsprechend) mit den Punkten  $m$  und  $m'$  jener Peripherie zusammenfallen, wie es z. B. dann der Fall ist, wenn die Axe  $A$  vertical über der Axe  $O$  liegt und die Mittellinie  $AM$  des Mitnehmers den Winkel  $nAn'$  halbt.

Was aber die andere Forderung eines möglichst grossen Verhältnisses  $\frac{v_2}{w_2}$  betrifft, so ist z. B. mit Rücksicht auf den Zahn  $z$ , welcher in Fig. 157 eben im Begriff ist, die Angriffslinie  $bc$  bei  $c$  zu verlassen,  $v_2$  normal zu  $Ac$  oder näherungsweise (wegen Kleinheit des Winkels  $pOc$ ) normal zu  $Ob$ , d. i. längs  $cA$ , dagegen  $w_2$  normal zu  $cA$  gerichtet, und da diese zwei Geschwindigkeiten, wenn sie in Componenten längs  $bc$  und normal zu  $bc$  zerlegt werden, nach letzterer Richtung gleiche Componenten ergeben müssen, so folgt:

$$w_2 \cos \varepsilon = v_2 \sin \varepsilon \quad \text{und somit} \quad \frac{v_2}{w_2} = \operatorname{cotg} \varepsilon \quad \dots \dots \dots (2)$$

um so grösser, je kleiner  $\varepsilon$ . Indessen wird die zulässige Verkleinerung dieses Winkels  $\varepsilon$  begrenzt theils durch die Rücksicht auf die zu erfüllende Gleichung (1), worin  $\lambda = 0,04$  bis  $0,05$  gemacht zu werden pflegt, theils durch die Berücksichtigung der Reibung. Die Arbeit der letzteren  $= R$

für eine ganze Schwingung besteht aus den Theilen  $R_1$  und  $R_2$ , welche den Zeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , also den relativen Bewegungen der Hemmungszähne bezw. längs den cylindrischen Hemmungsflächen und längs den ebenen Antriebsflächen des Ankers entsprechen. Während erstere Reibung nach §. 148 wenigstens den Nutzen hat, dass sie in Gl. (7) daselbst den Summand  $b$  vergrössert und somit die einer gewissen Aenderung der disponiblen Arbeit  $A$  entsprechende Aenderung des Ausschlagwinkels  $\alpha$  verkleinert, ist die letztere Reibung unbedingt schädlich. Die Arbeit derselben während des Antriebes ist, wenn dabei der Zahn  $z$  den mittleren Normaldruck  $P$  auf die Angriffsfläche  $bc$ , Fig. 157, ausübt und wenn  $\mu$  den betreffenden Reibungscoefficienten bedeutet,

$$R_2 = \mu P \cdot \overline{bc} = \mu P \frac{e}{\cos \varepsilon}$$

und da die gleichzeitig auf den Anker übertragene Arbeit des Normaldruckes  $P$ :

$$A_2 = P e \sin \varepsilon$$

ist = dem Product aus  $P$  und dem Wege des Angriffspunktes im Sinne von  $P$ , ergibt sich der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch diese Reibung:

$$\frac{R_2}{A_2} = \frac{\mu}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} = \frac{2\mu}{\sin 2\varepsilon} \dots \dots \dots (3)$$

am kleinsten =  $2\mu$  für  $\varepsilon = 45^\circ$ . Hiernach ist es rathsam, den Winkel  $\varepsilon$  nur wenig  $< 45^\circ$  zu machen. Zur Verkleinerung des Reibungscoefficienten  $\mu$  und der Abnutzung an diesen Angriffsflächen werden dieselben wohl aus Achat oder anderen harten Steinen hergestellt. —

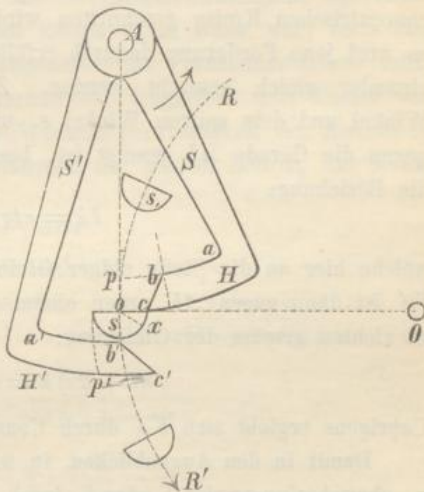
Der Umstand, dass bei der Graham'schen Ankerhemmung, Fig. 157, die Zähne des Hemmungsrades abwechselnd von der einen und andern Seite gegen den Anker stossen, ist mit dem Nachtheile verbunden, dass auch die Axen  $A$  und  $O$  abwechselnd nach verschiedenen Richtungen gegen die Lager gedrängt werden und so bei etwas Spielraum in denselben Veranlassung zu einem unsanften, schlotternden Gange gegeben werden kann. Auch die Zahnform des Hemmungsrades gemäss Fig. 157 und die zur Umfassung des letzteren weite Oeffnung des Ankers ist bei Ausführungen in grossen Dimensionen und bei entsprechend grosser Triebkraft, insbesondere bei Haus- und Thurmuhren, nicht zweckmässig und wird vielmehr in solchen Fällen die durch Fig. 158 dargestellte Modification der ruhenden Ankerhemmung vorgezogen. Die Zähne des Hemmungsrades sind dabei durch cylindrische Stifte von halbkreisförmigem

Querschnitte ersetzt, welche rechtwinklig zur Radebene einseitig hervorragen; der Radius  $s$  dieser Halbkreise ist etwas kleiner, als die Dicke  $e$  der Ankerhaken  $H, H'$ , die übrigens auch hier von coaxialen Kreiscylinderflächen mit der Schwingungsaxe  $A$  des Ankers als geometrischer Axe und an den Enden von schräg gerichteten ebenen Angriffsflächen  $bc, b'c'$  begrenzt sind. Die Schenkel  $S, S'$  bilden einen spitzen Winkel und sind von verschiedener Länge der Art, dass die Radien der inneren Cylinderflächen  $ab$  und  $a'b'$  der Ankerhaken, welche hier kleiner sein können, als der Radius  $r$  des Hemmungsrades, sich um die halbe Theilung des letzteren, gemessen in dem die Mittelpunkte  $o$  der Stifte enthaltenden Theilkreise  $RR'$ , unterscheiden. Nur an diesen inneren Cylinderflächen kommen die Haken  $H, H'$  während der Hemmungszeiten  $\tau_1$  mit den Stiften in Berührung, und zwar in der Weise, dass bei der durch den Pfeil angedeuteten Schwingung, in welcher der Anker gemäss Fig. 158 begriffen ist, zuerst der Stift  $s$  längs  $ab$  und später längs  $b'a'$  gleitet, bei der folgenden Schwingung aber zuerst derselbe Stift längs  $a'b'$  zurück und später der folgende Stift  $s_1$  längs  $ba$  gleitet u. s. f. Das Spiel der Hemmung bedarf keiner weiteren Erklärung, und auch die Constructionsregeln ergeben sich leicht nach Analogie der vorhergehenden Erörterungen.

Unter der Voraussetzung, dass die Ankerhaken  $H, H'$  gleiche Dicken  $= e$  erhalten und dass der Radius  $s$  der die Stifte begrenzenden Kreiscylinderflächen etwas  $< e$  ist, kann  $e = \frac{1}{4}$  der Theilung des Hemmungsrades gemacht werden, so dass der Radius  $l$  der Cylinderfläche, welche den Haken  $H$  von aussen begrenzt,  $=$  dem arithmetischen Mittel der Radien von  $ab$  und  $a'b'$  wird. Aus früher besprochenen Gründen ist es zweckmässig, dass der um  $A$  mit diesem Halbmesser  $l$  beschriebene Kreis den Theilkreis  $RR'$  rechtwinklig schneide.

In dem durch Fig. 158 dargestellten Augenblicke, in welchem ein Stift zu Ende der Antriebszeit  $\tau_2$  im Begriffe ist, die Angriffsfläche  $bc$

Fig. 155.



des Hakens  $H$  an der scharfen Kante  $c$  zu verlassen, soll die stumpfe Kante  $b'$  des Hakens  $H'$  gerade in den Theilkreis  $RR'$  eingetreten sein; ebenso soll sich bei der im umgekehrten Sinne stattfindenden folgenden Schwingung die Kante  $b$  von  $H$  im Theilkreise befinden, wenn derselbe Stift den Haken  $H'$  an der Kante  $c'$  verlässt. Ist  $p$  der Durchschnittspunkt von  $RR'$  mit dem verlängerten Kreisbogen  $ab$  und  $p'$  der Punkt, in welchem die äussere Kreislinie des Hakens  $H'$  von einem mit  $RR'$  concentrischen Kreise geschnitten wird, dessen Halbmesser  $= r + s$  ist, so wird jene Forderung dadurch erfüllt, dass die Winkel  $bAp$  und  $c'Ap'$  einander gleich gemacht werden. Zwischen der Grösse  $= \lambda$  dieser Winkel und dem spitzen Winkel  $\varepsilon$ , unter welchem die Angriffsfläche  $bc$  gegen die Gerade  $Ab$  geneigt ist, besteht mit der Bezeichnung  $Ac = l$  die Beziehung:

$$l\lambda = \text{ctg } \varepsilon + s \dots \dots \dots (4),$$

welche hier an die Stelle obiger Gleichung (1) tritt. Die Angriffsfläche  $b'c'$  ist dann gegen  $Ab'$  unter einem etwas grösseren Winkel  $\varepsilon'$  geneigt zu richten gemäss der Gleichung:

$$(l + 2e)\lambda = \text{ctg } \varepsilon' + s \dots \dots \dots (5).$$

Uebrigens ergibt sich  $b'c'$  durch Construction, wenn  $bc$  gegeben ist.

Damit in den Augenblicken, in welchen zu Ende der Antriebszeiten  $\tau_2$  abwechselungsweise  $b$  oder  $b'$  durch den Theilkreis  $RR'$  hindurch geht, das Pendel möglichst wenig, also in beiden Fällen gleich viel auf entgegengesetzten Seiten von seiner Ruhelage abweiche, ist der Mitnehmer so anzuordnen, dass das Pendel dann seine Ruhelage passirt, wenn die Gerade  $Ab$  des Ankers den Winkel  $bAp$  von Fig. 158 halbirt, also mit der Geraden  $Ao$ , welche den Theilkreis  $RR'$  bei  $o$  berührt, auf der Seite gegen den Schenkel  $S$  hin einen Winkel  $= \frac{\lambda}{2}$  bildet.

Uebrigens ist der Vorgang während des Antriebes hier weniger einfach, so dass auch die obigen Erwägungen in Betreff des vortheilhaftesten Winkels  $\varepsilon$  hier nur näherungsweise zutreffend sind. Ist nämlich  $o$  der Mittelpunkt,  $s$  der (in  $RR'$  liegende) Scheitelpunkt der den Stiftquerschnitt begrenzenden halben Kreislinie, deren Radius auch mit  $s$  bezeichnet wurde, und ist  $x$  der in dem Viertelkreise  $so$ , Fig. 158, so gelegene Punkt, dass der Winkel  $cox = \varepsilon$  ist, so zerfällt die Antriebszeit  $\tau_2$  in drei Theile so, dass im ersten der Bogen  $sx$  des Stiftes längs dem Punkte  $b$  des Ankers, im zweiten der Punkt  $x$  des Stiftes längs der Geraden  $bc$  des Ankers, im dritten der Bogen  $xc$  des Stiftes längs dem Punkte  $c$  des

Ankers gleitet. Während dieser drei Zeiten sind

die Drehungswinkel des Hemmungsrades =  $sOx, bOc, xOc$

„ „ des Ankers =  $sAx, bAc, xAc$

und ist die Richtung des vom Stifte auf den Anker ausgeübten Druckes in der ersten dieser drei Zeiten wechselnd von  $os$  bis  $ox$ , in der zweiten constant und normal zu  $bc$ , in der dritten wechselnd von  $ox$  bis  $oc$ . Dabei nimmt, wie es sein muss, die Winkelgeschwindigkeit des Hemmungsrades, welches zu Anfang der Zeiten  $\tau_2$  in Ruhe war, nach und nach zu. In der That ist näherungsweise das Verhältniss seiner mittleren Winkelgeschwindigkeiten während der fraglichen drei Theile von  $\tau_2$  mit Rücksicht darauf, dass die Winkelgeschwindigkeit des Ankers in der Nähe seiner Mittellage, also während der ganzen Zeit  $\tau_2$  nur wenig veränderlich ist,

$$\begin{aligned} &= \frac{sOx}{sAx} : \frac{bOc}{bAc} : \frac{xOc}{xAc} \\ &= \frac{s(1 - \sin \varepsilon) : r}{s \cos \varepsilon : l} : \frac{e : r}{e \operatorname{tg} \varepsilon : l} : \frac{s \sin \varepsilon : r}{s(1 - \cos \varepsilon) : l} \\ &= \frac{1 - \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} : \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} : \frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \\ &= \frac{\sin \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon} : 1 : \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon}. \end{aligned}$$

Um die Abnutzung der Angriffsflächen zu vermindern, sollten die Stifte ziemlich lang gemacht werden. Indem aber damit auch die Schwierigkeit wächst, sie stets längs einer Geraden mit den Angriffsflächen des Ankers in Berührung zu bringen, ist wohl die Einrichtung getroffen worden (z. B. bei der grossen Uhr zu Windsor), dass diese Flächen als besondere Platten um geeignete Axen etwas drehbar hergerichtet und mit Federn versehen wurden, welche sie stets in richtiger Lage mit den Stiften in Berührung erhalten.

#### §. 151. Cylinderhemmung für Unruhuhren.

Bei dieser für Taschenuhren sehr gebräuchlichen Hemmung, welche von Tompion (1695) erfunden, von Graham verbessert wurde, wird die Axe der Unruhe durch einen kurzen Hohlcyliner gebildet, der an einer Stelle auf eine gewisse kleine Länge ausgeschnitten ist, und zwar an einem Theile dieser Länge ungefähr zur Hälfte des Umfanges, am anderen Theile etwas weiter, wie Fig. 159 andeutet. Das Hemmungsrad

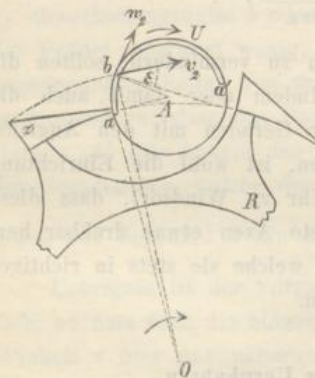


*R*, Fig. 160, trägt an entsprechenden Armen keilförmig gestaltete Zähne, welche vor der Radebene etwas hervorstehen, so dass sie selbst der weniger weit, die Arme der weiter ausgeschnittenen Stelle des Hohlzylinders entsprechen; der Motor treibt dieses Rad mit vorausgerichteten Zahnsitzen (im Sinne des Pfeiles bei *O*, Fig. 160) um. Während der Hemmungszeiten  $\tau_1$  stützen sich die Zähne abwechselnd gegen die äussere und innere Cylinderwand, je zu Anfang einer Schwingung gegen die eine, zu Ende gegen die andere; der Antrieb während der Zeiten  $\tau_2$  aber wird dadurch vermittelt, dass die schräg gegen die betreffenden Radien des Hemmungsrades gerichteten äusseren Zahnflächen an den Lippen *a* und *a'*, Fig. 160, des Hohlzylinders, nämlich an den der Axe desselben parallel laufenden Schnittflächen seines weniger weiten Ausschnittes entlang gleiten.

Fig. 159.



Fig. 160.



Das Spiel der Hemmung ist hiernach folgendes. Zu Anfang einer Schwingung der Unruhe, die im Sinne des Pfeiles *U*, Fig. 160, erfolge, findet Hemmung statt, indem sich der Zahn *z* gegen die äussere Cylinderfläche stützt bis nach der Zeit  $\frac{1}{2} \tau_1$  in der durch Fig. 160 angedeuteten Stellung die schräge Fläche jenes Zahnes an der Lippe *a* des Hohlzylinders entlang zu gleiten und dadurch die Unruhe anzutreiben beginnt. Während dieses Antriebes in der Zeit  $\tau_2$  dreht sich die Unruhe um einen Winkel  $aAb = \lambda$ , dessen Grösse, wie in Fig. 160 angedeutet ist, von der Zahnhöhe (der radialen Dimension des Zahnes *z*) abhängt. Zu Ende der Zeit  $\tau_2$  ist der Zahn *z* ganz in das Innere des Hohlzylinders eingetreten, und bedarf es nur der sehr kurzen Zeit  $\tau_3$ , während welcher das Uhrwerk mit dem Hemmungsrade *R* ohne die Unruhe vom Motor getrieben wird, bis die vordere Kante von *z* nahe bei der andern Lippe *a'* gegen die innere Cylinderfläche trifft und damit auf's Neue das Uhrwerk zum Stillstande bringt, indem die Unruhe noch während der Zeit  $\frac{1}{2} \tau_1$  ihre Schwingung fortsetzt; gegen das Ende derselben findet der den

§. 151.  
Zahn  
Theil  
ruh  
Schw  
a' ge  
mung  
zung  
wie  
des  
lator  
werd  
dort  
Ang  
geke  
Aus  
sind,  
derh  
Lipp  
die  
Unte  
Fig.  
letz  
halt  
dure  
der  
scha  
auss  
den  
gem  
Stös  
der  
Bew  
wer  
lere  
dab  
des  
Cyli

Zahn  $z$  tragende Arm in dem bei  $a'$  sich etwas weiter erstreckenden Theile des Cylinderausschnittes Platz, falls der Ausschlagwinkel der Unruhe eine gewisse Grösse überschreitet. Wie sich dann die umgekehrte Schwingung der Unruhe vollzieht, wobei sie vom Zahne  $z$  an der Lippe  $a'$  getrieben wird, bedarf keiner weiteren Erklärung.

Im Princip ist die Cylinderhemmung von der ruhenden Ankerhemmung, Fig. 157, nicht verschieden, indem dort die cylindrischen Begrenzungsflächen  $ab, a'b'$  der Ankerhaken  $H, H'$  dieselbe Function haben wie hier die äussere und innere Cylinderfläche; letztere Ausführungsform des gleichen Principis gestattet einen grösseren Ausschlagwinkel des Regulators, wie er für die Unruhe im Gegensatze zum Pendel gefordert werden muss. Auch ist es kein wesentlicher Unterschied, dass, während dort die Angriffsflächen für den Antrieb dem Anker, die entsprechenden Angriffskanten den Zähnen des Hemmungsrades angehören, hier das Umgekehrte der Fall ist. Dass es bei der durch Fig. 157 dargestellten Ausführungsform der ruhenden Ankerhemmung verschiedene Zähne  $z, z'$  sind, welche nach einander zur Wirkung kommen, während bei der Cylinderhemmung derselbe Zahn  $z$  nach einander gegen die eine und andere Lippe des Cylinderausschnittes treibend wirkt, bzw. durch Stützung gegen die eine und andere Cylinderfläche die Hemmung vermittelt, ist ein Unterschied, der auch schon zwischen den zwei Formen Fig. 157 und Fig. 158 der Ankerhemmung zu bemerken war. Auch die bei dieser letzteren Art von Ankerhemmung besprochene Complication des Verhaltens in Folge des Ersatzes von Angriffskanten am Hemmungsrade durch die cylindrischen Angriffsflächen der Stifte hat ihr Analogon bei der Cylinderhemmung, insofern dabei die Hemmungszähne nicht gegen scharfkantig abgeschrägte, sondern gegen abgerundete Lippen des Cylinderausschnittes zur Wirkung kommen.

Die Constructionsregeln der Cylinderhemmung sind hiernach auch denen der ruhenden Ankerhemmung besonders bei ihrer Ausführungsform gemäss Fig. 158 ganz entsprechend. Damit auch bei ersterer durch die Stösse, welche die vorderen Zahnkanten des Hemmungsrades zu Ende der Zeiten  $\tau_3$  gegen die äussere oder innere Cylinderfläche ausüben, die Bewegung des Regulators, also hier der Unruhe, möglichst wenig gestört werde, soll die durch jene Zahnkanten gehende Cylinderfläche die mittlere Cylinderfläche des Hohlcylinders rechtwinklig schneiden. Indem dabei letzterer zwischen einer vorderen Zahnkante und der Hinterfläche des vorausgehenden Nachbarzahnes, ein Zahn aber in der Höhlung des Cylinders Platz finden muss, ist es nöthig, dass der innere Durchmesser

des Hohlcylinders etwas grösser, als die (im Sinne der Peripherie verstandene) Zahnlänge  $e$ , der äussere Durchmesser etwas kleiner, als die um jene Zahnlänge verminderte Theilung des Hemmungsrades sei. Je kleiner die betreffenden Unterschiede gemacht werden, desto kleiner sind die Zeiten  $\tau_3$  und desto geringer die Stösse beim Anschlagen der Zahnkanten gegen den Cylinder zu Ende dieser Zeiten.

Für die Wahl des Winkels  $\varepsilon$ , unter welchem die Angriffsfläche eines Zahnes gegen die Peripherie des Hemmungsrades geneigt und dessen trigonometrische Tangente = dem Verhältnisse der Höhe und Länge eines Zahnes ist, sind hier ebenso wie bei der im vorigen Paragraph besprochenen ruhenden Ankerhemmung die zwei Rücksichten massgebend, dass das Geschwindigkeitsverhältniss  $\frac{v_2}{w_2}$  möglichst gross und das Arbeits-

verhältniss  $\frac{R_2}{A_2}$  möglichst klein sein soll. Die Geschwindigkeiten  $v_2$  und  $w_2$  beziehen sich auf das Ende der Zeiten  $\tau_2$ , also etwa auf die Lage  $b$ , Fig. 160, der Angriffskante  $a$  des Hohlcylinders, und ist dabei  $v_2$  die Geschwindigkeit des Punktes  $b$  des Hemmungsrades,  $w_2$  die Geschwindigkeit desselben Punktes des Hohlcylinders. Erstere ist normal zu  $Ob$  oder sehr nahe normal zu  $Oa$ , letztere normal zu  $Ab$ , folglich der Winkel zwischen den Richtungen von  $v_2$  und  $w_2$  nahe =  $90^\circ \mp$  Winkel  $aAb = 90^\circ \mp \lambda$ . Das obere Vorzeichen gilt für die Angriffskante  $a$ , das untere für  $a'$ . Indem nun die normal zur Angriffsfläche des Zahnes gerichteten Componenten von  $v_2$  und  $w_2$  einander gleich sind, folgt

$$v_2 \sin \varepsilon = w_2 \sin (\varepsilon + 90^\circ \mp \lambda) = w_2 \cos (\varepsilon \mp \lambda)$$

$$\frac{v_2}{w_2} = \cotg \varepsilon \cos \lambda \mp \sin \lambda \dots \dots \dots (1).$$

Ist aber  $r$  der Radius des Hohlcylinders, so ist

$$\sin \lambda = \frac{e \operatorname{tg} \varepsilon}{r}$$

und da auch nahe (mit um so kleinerem Fehler, mit je kleinerem Spielraume der Zahn im Hohlcylinder gerade Platz finden, je kleiner also die betreffende Zeit  $\tau_3$  sein soll)

$$e = r (1 + \cos \lambda)$$

gesetzt werden kann, so folgt

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \lambda}{1 + \cos \lambda} = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \dots \dots \dots (2)$$

und somit nach Gl. (1):

$$\frac{v_2}{w_2} = \cotg \frac{\lambda}{2} \cos \lambda + \sin \lambda \dots \dots \dots (3).$$

Dieser Ausdruck ist für beide Vorzeichen des letzten Gliedes unendlich gross für  $\lambda = 0$ , also  $\varepsilon = 0$  nach Gl. (2), und ist folglich  $\varepsilon$  möglichst klein zu machen, um  $\frac{v_2}{w_2}$  möglichst gross zu erhalten.

Ist wieder  $P$  der mittlere zur Angriffsfläche des Hemmungszahnes normal gerichtete Druck zwischen ihm und der Angriffskante des Hohlcyllinders während der Zeit  $\tau_2$  und  $\mu$  der Reibungscoefficient, so ergibt sich die Reibungsarbeit

$$R_2 = \mu P \frac{e}{\cos \varepsilon},$$

während die unterdessen auf die Unruhe übertragene Arbeit nahe

$$A_2 = P \frac{e \operatorname{tg} \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt

$$\frac{R_2}{A_2} = \mu \cotg \varepsilon \dots \dots \dots (4)$$

um so kleiner, je grösser  $\varepsilon$ .

Während im Falle der Ankerhemmung der Rücksicht auf einen möglichst kleinen Werth von  $\frac{R_2}{A_2}$  das Hauptgewicht beizulegen war, weil dort  $\tau_2$  ein erheblicher Theil der ganzen Schwingungsdauer und damit auch  $R_2$  ein erheblicher Theil der ganzen durch die Hemmung veranlassten Reibungsarbeit ist, verhält es sich hier anders in Folge des grossen Ausschlagwinkels einer Unruhe, und pflegt deshalb  $\varepsilon$  thatsächlich nur ein kleiner Winkel zu sein. Die Reibungsarbeit  $R_1$  während der Hemmungszeit  $\tau_1$  ist um so mehr  $> R_2$ , als auch der Druck  $P_1$ , welchen die Zahnspitze dabei auf den Hohlcyllinder ausübt, wesentlich grösser, als die Theilrisskraft  $P_2$  des Hemmungsrades während der Zeit  $\tau_2$  ist; letztere ist kleiner als  $P_1$  um die Summe der auf den Umfang des Hemmungsrades reducirten Reibung des Uhrwerkes und der ebenso verstandenen bewegenden Kraft zur Beschleunigung des Uhrwerkes. Auch ist die Reibungsarbeit  $R_2$  thatsächlich kleiner, als sie oben berechnet wurde, und zwar um so mehr kleiner, je kleiner der Winkel  $\varepsilon$  ist. Indem nämlich zu Anfang der Zeiten  $\tau_2$  die Unruhe nahe das Maximum ihrer Geschwindigkeit besitzt, während das Hemmungsrad mit

dem ganzen Uhrwerke erst allmählig in Bewegung versetzt wird, eilt erstere dem letzteren zunächst voraus, so dass beide ausser Berührung kommen und der Druck  $P$  nebst entsprechender Reibung  $\mu P$  in der That nur an einem gewissen gegen die äussere Zahnkante hin liegenden Theile der schrägen Zahnfläche zur Wirkung gelangen. Bei der Ankerhemmung kommt ein ähnliches Verhalten deshalb weniger in Betracht, weil der dem Winkel  $\varepsilon$  entsprechende Winkel grösser und die Geschwindigkeit des Pendels kleiner ist.

Die bedeutende Gesamtreibung und entsprechende Abnutzung der Cylinderhemmung sind Mängel derselben. Man hat deshalb wohl, während gewöhnlich Cylinder und Hemmungsrad aus gehärtetem Stahl verfertigt werden, ausnahmsweise Cylinder aus hartem Stein (Rubin) verfertigt angewendet. Allein solche Uhren werden sehr theuer, und pflegt man heutzutage indirect wirkende Ankerhemmungen bei den besseren Taschenuhren vorzuziehen.

## 2. Indirect wirkende Hemmungen.

Dieselben haben den Zweck, durch Einschaltung eines Hilfsmechanismus zwischen das Hemmungsrad und den Regulator die Schwingungen des letzteren während des grössten Theiles der Hemmungsdauer  $\tau_1$  ganz frei geschehen zu lassen und so die betreffende Reibungsarbeit auf ein Minimum zu reduciren, was besonders bei den grossen Ausschlagwinkeln der Unruhen von Wichtigkeit ist.

Solche indirect wirkende Hemmungen, bei denen dieser Zweck sehr vollkommen erreicht ist, pflegt man freie Hemmungen zu nennen.

Endlich unterscheidet man als die vollkommensten Einrichtungen dieser Art noch sogenannte freie Hemmungen mit constanter Kraft, bei denen man nicht sowohl die mehr oder weniger veränderliche Hauptbetriebskraft des Uhrwerkes, sondern eine davon abgeleitete constante Hilfskraft (Gewicht oder Feder) bei jedem Schwunge auf den Regulator wirken lässt, um ihm den nöthigen Ersatz an lebendiger Kraft zu leisten.

## §. 152. Indirect wirkende Ankerhemmung.

Die Einrichtung einer indirect wirkenden Ankerhemmung, wie sie bei Taschenuhren gebräuchlich ist, zeigt Fig. 161. Die Ankerwelle  $A$  ist mit einem Arme  $G$ , der Gabel, verbunden, welcher am Ende in

zwei Zinken oder Fangohren  $F_1$  und  $F_2$  ausläuft. Die Unruhspindel  $U$  trägt eine Scheibe oder einen Kurbelarm mit einem so weit hervorstehenden Treibstifte  $S$ , dem sogenannten Hebesteine, dass er von den Fangohren  $F_1, F_2$  gefasst werden kann. Durch Anschlagstifte  $T_1$  und  $T_2$  oder auf sonstige Weise ist der Winkel  $g_1 Ag_2$  begrenzt, innerhalb dessen die Gabel hin- und herschwingen soll.

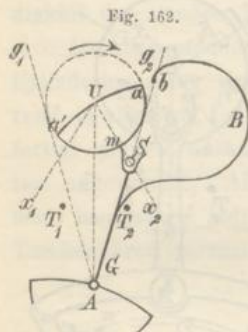
Angenommen die Unruhe befinde sich in der äussersten Lage, in welcher  $S$  bei  $S_1$  liegt, und sie beginne ihre Schwingung im Sinne des beigezeichneten Pfeils.  $G$  ist in der Lage  $Ag_1$ ; die Kante  $\beta$  des Zahnes  $z$  des Hemmungsrades  $R$  stützt sich gegen die Fläche  $ab$  des linken Ankerhakens fast bei  $b$ , welche, damit die Gabel sanft gegen  $T_1$  angedrückt wird, eine solche Richtung haben muss, dass die Richtungslinie des Normaldruckes von  $\beta$  gegen  $ab$  etwas unter  $A$  vorbeigeht. Das Uhrwerk ist nun gehemmt und die Unruhe bewegt sich frei von der Hemmung etwa bis die Richtung  $US$  in  $Ux_1$  fällt; dann stösst der Hebestein

Fig. 161.



$S$  gegen das Fangohr  $F_2$  und entfernt die Gabel von  $T_1$ , die Zahnkante  $\beta$  gleitet von der Fläche  $ab$  auf die Endfläche  $bc$  des Ankers, darauf die Zahnfläche  $\alpha\beta$  längs der Ankerkante  $c$  und wird dabei treibend zunächst auf den Anker und dadurch, indem jetzt  $F_1$  gegen  $S$  stösst, auch treibend auf die Unruhe gewirkt. Die beiden Stösse von  $S$  gegen  $F_2$  und von  $F_1$  gegen  $S$  hört man bei solcher Uhr unmittelbar nach einander. Wenn der Zahn  $z$  den linken Ankerhaken verlässt, steht die Kante  $\beta$  eines anderen Zahnes  $z'$  schon dicht vor der Fläche  $a'b'$  des rechten Ankerhakens, wodurch alsbald das Uhrwerk wieder gehemmt wird, während  $G$  in die Lage  $Ag_2$  und  $US$  in die Lage  $Ux_2$  gelangt ist. Damit jetzt  $G$  sanft gegen  $T_2$  gedrückt wird, muss  $a'b'$  eine solche Richtung haben, dass die Richtungslinie des Normaldruckes von  $\beta$  gegen  $a'b'$  etwas über  $A$  vorbeigeht. Nun schwingt die Unruhe wieder frei von der Hemmung bis  $US$  die Richtung  $US_2$  hat. Kommt dann bei der umgekehrten Schwingung  $US$  in die Lage  $Ux_2$ , so stösst  $S$  gegen  $F_1$ ,  $\beta$  gleitet an  $a'b'$ , dann  $\alpha\beta$  an  $b'$ , endlich  $\alpha$  an  $b'e'$ , wobei der Anker angetrieben wird und durch seine Gabel, indem  $F_2$  gegen  $S$  stösst, auch die Unruhe u. s. f.

Bei der Ausführung pflegt die Gabel  $G$  über  $A$  hinaus als ein Gegengewicht verlängert zu werden, um den Schwerpunkt in die Axe  $A$  zu bringen. Auch kann durch eine verschieden auszuführende Sicherheitsvorrichtung verhindert werden, dass die Gabel in Folge einer zufälligen äusseren Einwirkung (Erschütterung) ihre Lage  $Ag_1$  oder  $Ag_2$  früher verlässt, als bis sie vom Hebesteine  $S$  gestossen wird. Eine Art solcher Sicherung ist durch Fig. 162 angedeutet. Dabei wird die Spindel



der Unruhe an geeigneter Stelle von einer Scheibe  $Uama'$  gebildet von solchem Durchmesser  $aa'$ , dass sie von  $A$  aus unter einem Winkel nahe  $= g_1Ag_2$ , Fig. 161, erscheint. Dieselbe ist längs  $ama'$  kreisförmig zum Mittelpunkte  $U$  begrenzt, und zwar an solcher Stelle, dass die Mittellinie  $Um$  des Winkels  $aUa'$  mit der Richtung  $US$  zusammenfällt; der flache Begrenzungsbogen  $aUa'$  ist aus einem Mittelpunkte beschrieben, welcher in  $UmS$  liegend von  $U$  eine Entfernung etwas  $< AU$  hat. Jenem scheibenförmigen Theile der Unruhspindel entsprechend geht von der Gabel  $G$  ein Bügel  $B$  aus von solcher Gestalt und Lage, dass die Scheibe bei jeder Richtung von  $US$  darin Platz finden kann und dass sein Endpunkt  $b$  von der Ankeraxe  $A$  etwas weiter als die Unruhaxe  $U$  entfernt, übrigens in der verlängerten Mittellinie der Gabel gelegen ist. Zu Anfang der im Sinne des Pfeiles stattfindenden Schwingung der Unruhe liegt dann  $b$  so nahe an der Begrenzungsfläche  $a'ma$ , dass zwischen ihr und dem Anschlag  $T_2$  nur ein sehr kleines Spiel für die Gabel frei ist. Kommt aber  $US$  in die Lage  $Ux_2$ , wie Fig. 162 zeigt, so hat sich die Kante  $a$  der Sicherungsscheibe eben an  $b$  vorbei bewegt, so dass jetzt die Gabel  $G$  ungehindert gegen den anderen Anschlag  $T_1$  getrieben werden kann, indem sich das Ende  $b$  des Sicherungsbügels  $B$  längs  $aUa'$  hin bewegt. Ist  $US$  in die Lage  $Ux_1$ , die Gabel in die Lage  $Ag_1$  gekommen, so liegt  $b$  der Kante  $a'$  der Sicherungsscheibe gegenüber, und wird im weiteren Verlaufe der Unruherschwingung durch die Begrenzungsfläche  $a'ma$  dieser Scheibe eine etwaige Lagenänderung des Ankers wieder unmöglich gemacht, bis bei umgekehrter Schwingung der Unruhe die Kante  $a'$  den Punkt  $b$  wieder passirt hat u. s. f.

Analog der durch Fig. 158 dargestellten Ausführungsform einer direct wirkenden Ankerhemmung (§. 150) können auch hier die Hemmungszähne durch Stifte ersetzt werden, wenn es sich um grössere Uhr-

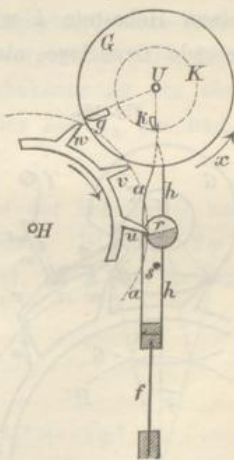
werke handelt. Bei allen diesen indirect wirkenden Ankerhemmungen schwingt zwar die Unruhe während des grösseren Theils ihres Winkelweges frei, aber es ist der Winkel  $x_1 U x_2$ , Fig. 161, im Vergleich mit dem ganzen Schwingungswinkel doch noch zu gross, als dass dieser Hemmung schon die Bezeichnung als freie Hemmung gebührte.

### §. 153. Freie Hemmungen.

Die freien Hemmungen, wie sie namentlich bei Chronometern Anwendung finden, sind dadurch charakterisirt, dass der die indirecte Wirkung vermittelnde Zwischenmechanismus eine federnde Beschaffenheit hat und dass der Regulator nur bei seiner Schwingung in einem Sinne angetrieben wird, während er selbst bei der umgekehrten Schwingung eine dünne Feder etwas zu biegen hat, um diejenige Lage aller Theile wieder herbeizuführen, welche für den Impuls bei der neuen Schwingung im ersteren Sinne nöthig ist. Uebrigens schwingt der Regulator fast ganz frei und bestehen seine Widerstände, insoweit sie von der Hemmung herrühren und ihm nicht ohnehin eigenthümlich sind, bei jeder Doppelschwingung lediglich in zweimaliger sehr geringer Biegung einer Feder, in einer kleinen Reibung während des Impulses und einer solchen bei der Auslösung der Hemmung.

Fig. 163 lässt die wesentliche Einrichtung der freien Chronometerhemmung von Earnshaw erkennen. Die Unruhespindel  $U$  ist mit zwei zu ihr senkrechten Scheiben  $G$  und  $K$  ausgerüstet, welche bezw. den grossen Hebestein  $g$  und den kleinen Hebestein  $k$  tragen, deren wirksame Flächen radial gerichtet sind. Der Zwischenmechanismus besteht aus zwei Federn, einer schwächeren sogenannten Auslöschungsfeder  $a$  und einer stärkeren sogenannten Hemmungsfeder  $h$ ; beide laufen am Ende zu einer einzigen Feder  $f$  zusammen. Am anderen Ende stützt sich  $a$  gegen die Spitze der etwas kürzeren Feder  $h$ ; an letzterer befindet sich ein ungefähr zur Hälfte ausgeschnittener Cylinder, der Ruhestein  $r$ . Die Federn  $a, h$  liegen entsprechend der Scheibe  $K$  so, dass die Spitze von  $a$  eben vom kleinen Hebesteine  $k$  getroffen werden kann; die Scheibe  $G$  mit dem grossen Hebesteine  $g$  sowie auch der Ruhestein

Fig. 163.





$r$  treten aber so weit vor, dass  $g$  und die ebene Hemmungsfläche von  $r$  mit den Zahnsitzen des Hemmungsrades zusammentreffen können, die an den Federn ungehindert vorbeigehen.

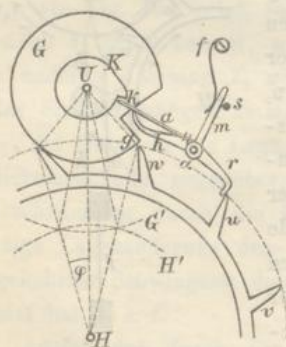
In der durch die Figur dargestellten Lage ist Hemmung vorhanden, indem der Zahn  $u$  sich gegen  $r$  stützt. Die Unruhe befindet sich ungefähr in der Mitte ihrer Schwingung im Sinne des Pfeiles  $x$ , und es ist eben  $k$  im Begriff gegen  $a$  zu stossen. In Folge dessen werden die Federn, besonders die Feder  $f$  gebogen,  $r$  gleitet unter  $u$  weg, kehrt aber sofort in seine frühere Lage zurück, nachdem  $k$  die Feder  $a$  verlassen hat. Unterdessen ist  $g$  am Zahne  $w$  vorbeigegangen, wird aber alsbald von demselben eingeholt und dadurch die Unruhe angetrieben, bis dieser Zahn  $w$  den grossen Hebestein  $g$  wieder verlässt und unmittelbar darauf der dem Zahne  $u$  folgende Hemmungszahn  $v$  vom Ruhestein  $r$  aufgehalten wird. Bei der umgekehrten Schwingung hat nur der kleine Hebestein  $k$  die dünne Feder  $a$  allein etwas zu biegen, um passiren zu können, während die Hemmung erhalten bleibt und die Unruhe übrigens ganz frei schwingt. Auch bei der erstgenannten Schwingung, bei welcher die Hemmung ausgelöst und die Unruhe angetrieben wird, kommt die Feder  $h$  als solche kaum zur Wirkung, so dass sie auch durch ein starres Stäbchen ersetzt werden könnte. Durch einen Anschlagstift  $s$  für die Feder, bzw. das Stäbchen  $h$  kann bewirkt werden, dass, wenn zur Vorbereitung neuer Hemmung die Feder  $f$  nach ihrer Biegung durch den kleinen Hebestein  $k$  wieder zurückschnellt, der Ruhestein  $r$  über eine passende Grenzlage nicht hinausgeht und überhaupt eine schwingende

Bewegung desselben vermieden wird. Wesentlich ist es, der ebenen Hemmungsfläche des Ruhesteins  $r$  eine solche Richtung zu geben, dass seine relative Bewegung längs dem gehemmten Zahne  $u$  behufs der Freigebung des letzteren ohne rückläufige Bewegung des Hemmungsrades geschehen kann.

Eine Chronometerhemmung nach Jürgens von ganz ähnlicher Wirkung zeigt Fig. 164. Auf der Unruhaxe  $U$  befindet sich eine grössere Scheibe  $G$  mit radialer Angriffsfläche  $g$  ihres Ausschnittes und eine kleinere Scheibe  $K$  mit einer Nase von

gleichfalls radialer Angriffsfläche  $k$ , beide entsprechend den gleich bezeichneten Theilen der vorbeschriebenen Hemmung. Die Axe  $a$  trägt drei

Fig. 164.



Arme:  $r$  in der Ebene der Scheibe  $G$  und des Hemmungsrades,  $h$  in der Ebene der Scheibe  $K$ ,  $m$  in beliebiger Ebene. Auf  $h$  ist nahe bei  $a$  das leichte Auslöschungsfederchen  $a$  befestigt, welches etwas in den von der Nasenspitze  $k$  beschriebenen Kreis hineinreicht und nahe bei diesem freien Ende sich gegen die Spitze des etwas gekrümmten Armes  $h$  stützt. Gegen den Arm  $m$  wirkt die Feder  $f$ , und es ist der Stift  $s$  so angebracht, dass, wenn  $m$  durch  $f$  dagegen gedrückt wird,  $r$  etwas in den äusseren Theilkreis des Hemmungsrades hineinreicht.

Das Spiel ist dasselbe wie bei der vorigen Hemmung und passt darauf die vorhergehende Beschreibung, indem gleich bezeichnete Theile in beiden Fällen gleiche Function haben unbeschadet dessen, dass hier der Zahn  $v$ , welcher nach  $u$  gehemmt wird, nicht gegen  $w$  hin, sondern auf der anderen Seite liegt. Das System der drei Hebelarme  $h$ ,  $r$ ,  $m$  kann übrigens verschiedentlich in seiner Anordnung modificirt werden. —

Eine weitere Vervollkommnung, welche an diesen freien Hemmungen noch angebracht werden kann, ergibt sich aus folgender Ueberlegung. Während mit Hilfe des Stiftes  $s$ , der die Lage des Armes  $r$ , bezw. des Ruhesteines sichert, der letztere so adjustirt werden kann, dass er nur äusserst wenig in den äusseren Theilkreis des Hemmungsrades hineintritt und also sowohl die Deformationsarbeit der Feder  $f$  wie die Reibungsarbeit beim Lösen der Hemmung beliebig klein wird, auch die Bieigungsarbeit der feinen Auslöschungsfeder bei der umgekehrten Unruheschwingung beliebig klein gemacht werden kann, besteht die hauptsächlichste Reibung, welche auch hier noch immer am Regulator hervorgerufen wird, in derjenigen beim Entlanggleiten der treibenden Zahnkante an der ebenen Fläche  $g$ . Der Weg dieser Reibung, während der Zeit  $\tau_2$  hin und her durchlaufen, ist

$$s = g + h - e,$$

wenn  $e$  die Axenentfernung  $UH$ ,  $g$  den Radius der Scheibe  $G$  und  $h$  den äusseren Radius des Hemmungsrades bedeutet. Ist aber  $2\varphi$  der Drehungswinkel des letzteren während  $\tau_2$ , so ist, da  $\varphi$  ein hinlänglich kleiner Winkel, um

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

setzen zu können,

$$g^2 = e^2 + h^2 - 2eh \cos \varphi = (e - h)^2 + eh\varphi^2$$

$$g = e - h + \frac{1}{2}(e - h)^{-1} \cdot eh\varphi^2$$

$$s = g + h - e = \frac{eh}{e - h} \frac{\varphi^2}{2} \dots \dots \dots (1).$$

Nun ist, wenn  $P$  der Druck des Zahnes gegen die Scheibe  $G$  und  $\mu$  der Reibungscoefficient, die Reibungsarbeit beim Antriebe der Unruhe:

$$R_2 = \mu P \cdot 2s.$$

Ihr Verhältniss zu der gleichzeitig auf die Unruhe übertragenen Arbeit

$$A_2 = P \cdot 2h\varphi$$

ist mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{R_2}{A_2} = \frac{\mu s}{h\varphi} = \mu \frac{e}{e-h} \frac{\varphi}{2} \dots \dots \dots (2)$$

unter übrigens gegebenen Umständen um so kleiner, je kleiner  $h$ .

Darauf beruht der Vorzug einer sogenannten Doppelrad-Hemmung, bei welcher das Hemmungsrad aus zwei auf derselben Axe miteinander verbundenen Rädern besteht, von denen das grössere zur Hemmung, das kleinere aber, welchem entsprechend die Scheibe  $G$  vergrössert ist, als treibendes Rad dient, wie die gestrichelten Kreise  $G'$ ,  $H'$  in Fig. 164 andeuten. Dieselbe Figur lässt übrigens erkennen, dass die Verkleinerung des Kreises  $H'$  mit Verkleinerung des Schwingungswinkels der Unruhe während ihres Antriebes verbunden ist, und wird dadurch die zulässige Verkleinerung jenes Kreises  $H'$  beschränkt, weil das Hemmungsrad, nachdem es seine nicht mehr gehemmte Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begonnen hat, einer gewissen Zeit und somit eines gewissen Schwingungswinkels der Unruhe bedarf, um letztere mit seinem betreffenden Zahne  $w$  einzuholen, bevor dieser das Bewegungsgebiet der Angriffsfläche  $g$  wieder verlassen hat und dann abermals Hemmung erfolgt ist.

#### §. 154. Hemmungen mit constanter Kraft.

Um die freie Hemmung schliesslich noch zu einer sogenannten Hemmung mit constanter Kraft zu machen, deren Zweck und vortheilhafte Wirkungsweise zu Ende von §. 146 im Allgemeinen erklärt wurden, kann man die Hauptbetriebskraft der Uhr in der Weise mittelbar auf den Regulator wirken lassen, dass man sie veranlasst, bei jeder Doppelschwingung desselben eine besondere Feder stets auf's Neue und immer um gleich viel zu spannen, welche dann ihrerseits den jedesmaligen Impuls während der Zeit  $\tau_2$  ertheilt. Letzterer ist sonach stets gleich, wie auch die Betriebskraft oder die Widerstände des Uhrwerkes veränderlich sein mögen.

Von der im vorigen Paragraph beschriebenen Doppelradhemmung ausgehend, könnte zu dem Ende die feste Verbindung zwischen dem

kleineren Rade (dem Triebrade) und dem grösseren (dem Hemmungsrade im engeren Sinne), welches letztere unter der unmittelbaren Einwirkung der Hauptbetriebskraft steht, aufgehoben und jenes kleinere, unter der Einwirkung der Hilfskraft stehende Rad mit einer besonderen Hemmungs- vorrichtung versehen werden, welche in denselben Augenblicken wie die Haupthemmung unterbrochen wird.

Dergleichen Hemmungen mit constanter Kraft mögen zwar bei den an sich schon sehr vollkommenen freien Hemmungen von Chronometern, deren Triebkraft zudem durch eine Schnecke möglichst constant erhalten wird, am wenigsten Bedürfniss sein; sie leisten aber, auch ohne freie Hemmungen zu sein, gute Dienste besonders bei grossen Uhrwerken, z. B. bei Thurmuhren wegen der hier verhältnissmässig grossen Veränderlichkeit der Reibungswiderstände des Räderwerkes und des grösseren Ausschlagwinkels des als Regulator dienenden Pendels, dessen Aenderung somit (§. 139) eine verhältnissmässig bedeutende Aenderung von  $\tau$  bedingt. Die Hilfsfeder kann dabei durch ein periodisch zu liegendes Hilfsgewicht ersetzt werden. —

Im Einzelnen ist die Anordnung sehr grosser Mannigfaltigkeit fähig. Als Beispiel zeigt Fig. 165 eine indirect wirkende Ankerhemmung mit constanter Kraft nach einem Modell der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Dabei ist  $H$  das Hemmungsrad. Durch  $AB, A'B'$  sind die Grenzlagen des um  $a$  drehbaren, links in die (nicht gezeichnete) Gabel auslaufenden Ankers angedeutet, dessen Drehung durch die Anschlagstifte  $t, t'$  begrenzt wird. Die schrägen Endflächen der Ankerhaken sind hier so geneigt, dass sie mit den Zähnen des Rades  $H$  nicht in Berührung kommen und dass somit der Anker nur zur Hemmung, nicht auch zum Antriebe dient.  $U$  ist die Axe der Unruhe,  $S$  eine Scheibe auf derselben mit einem radial hervorragenden Antriebszahne  $z$  und einem von der Seitenfläche hervorstehenden Auslösestifte  $s$ . Mit der Axe  $\beta$  des Armsystems  $a, b, c$  ist das innere Ende der Hilfsspiralfeder verbunden, deren äusseres Ende am Uhrgehäuse befestigt ist.

In der Lage  $abc$  dieses Armsystems, wie sie die Figur als augenblicklich stattfindend voraussetzt, hat die Hilfsfeder das Maximum ihrer

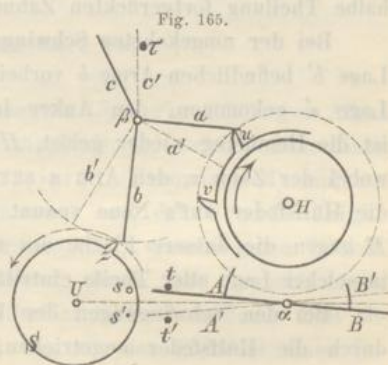


Fig. 165.

Spannung, indem der auf dem Zahne  $u$  von  $H$  ruhende Arm  $a$  die Aufdrehung der Feder verhindert. Die Unruhe ist etwas über die Mitte ihrer Schwingung im Sinne des Pfeils hinaus, und ist durch den Stift  $s$  vermittels der Gabel so eben der Anker aus der Lage  $A'B'$  in die Lage  $AB$  gebracht worden. Dadurch ist so eben der bis dahin gehemmte Zahn des Hemmungsrades von der äusseren Fläche des rechten Ankerhakens abgeglitten. Das Hemmungsrade wird jetzt durch die Triebkraft der Uhr im Sinne des Pfeils gedreht, und zwar um eine halbe Theilung, indem dann durch den Anschlag eines anderen Zahnes von  $H$  gegen die innere Fläche des linken Ankerhakens abermals Hemmung eintritt. Wenn diese Bewegung von  $H$  um eine halbe Zahntheilung beginnt, wird die Hilfsfeder nur noch ganz wenig gespannt (entsprechend der kleinen Strecke, um welche der Arm  $a$  in den äusseren Theilskreis des Hemmungsrades hineinreicht, wenn ein Zahn des letzteren gegen die äussere Fläche des rechten Ankerhakens sich stützt), dann aber schnappt  $a$  von  $u$  ab, die Hilfsfeder kommt zur Wirkung, bringt  $abc$  in die durch Stützung des Armes  $c$  gegen den Anschlagstift  $\tau$  fixirte Lage  $a'b'c'$ , und es wirkt dabei der Arm  $b$  durch den Zahn  $z$  antreibend auf die Unruhe. In der Lage  $a'b'c'$  des Armsystems steht der Arm  $a$  dem um eine halbe Theilung fortgerückten Zahne  $v$  dicht gegenüber.

Bei der umgekehrten Schwingung der Unruhe geht  $z$  an dem in der Lage  $b'$  befindlichen Arme  $b$  vorbei,  $s$  ergreift die Gabel und hat, in die Lage  $s'$  gekommen, den Anker in die Lage  $A'B'$  gebracht. Dadurch ist die Hemmung wieder gelöst,  $H$  rückt um eine halbe Theilung weiter, wobei der Zahn  $v$ , den Arm  $a$  aus der Lage  $a'$  in die Lage  $a$  schiebend, die Hilfsfeder auf's Neue spannt bis durch Anschlag eines Zahnes von  $H$  gegen die äussere Fläche des rechten Ankerhakens wieder Hemmung in solcher Lage aller Theile eintritt, von welcher die Betrachtung ausging.

Bei den Schwingungen der Unruhe im einen Sinne wird also sie durch die Hilfsfeder angetrieben, bei den Schwingungen im anderen Sinne wird die Hilfsfeder durch die Triebkraft der Uhr neu gespannt.

Uebrigens pflegt der Ersatz an Arbeitsvermögen, dessen ein Regulator für jede Doppelschwingung bedarf, so klein zu sein, dass bei einem Uhrwerke von jener durch das Modell, Fig. 165, dargestellten Einrichtung entweder die Hilfsfeder sehr schwach oder die jedesmalige Aenderung ihres Windungswinkels sehr klein gemacht werden müsste, letzteres entsprechend sehr grossen Längen der Arme  $a$  und  $b$ . Meistens wird deshalb die Einrichtung so getroffen, dass die Hilfsfeder, wenn sie auch bei jeder einfachen oder doppelten Schwingung den Regulator antreibt,

doch nur jeweils nach einer grösseren Zahl von Schwingungen desselben auf's Neue gespannt wird durch Verdrehung um einen Winkel, welcher nicht an und für sich sehr klein zu sein braucht, wenn er nur im Vergleich mit dem bleibenden Verdrehungswinkel dieser Feder hinlänglich klein ist. Geboten ist solche Einrichtung bei Thurmuhren und ähnlichen grossen Uhrwerken mit springenden Zeigern; indem letztere nur jeweils nach Verlauf einer Minute durch den in den Zwischenzeiten gehemmten Hauptmotor für wenig Secunden in (durch einen Windfang einigermaßen regulirte) Bewegung versetzt werden, wird dadurch gleichzeitig die neue Anspannung einer als Triebkraft für den Regulator sammt Hemmung dienenden Hilfsfeder von Minute zu Minute bewirkt. Um dabei auch grösseren Aenderungen der Reibungswiderstände Rechnung zu tragen, wie sie besonders bei Frostwetter durch Verdickung des Schmieröls verursacht werden, kann sowohl die Haupttriebkraft (in den genannten Fällen ein Gewicht), als auch die bleibende Minimalspannung der Hilfsfeder durch den Wärter entsprechend verändert werden.

#### d. Das Uhrwerk.

##### §. 155. Räderwerk einer Uhr.

Zu dem im engeren Sinne sogenannten Uhrwerke gehört vor Allem das Räderwerk, nämlich der Zahnrädermechanismus, welcher dazu dient, die Bewegung vom Motor auf das Steigrad (Hemmungsrade) und auf die Zeiger, insbesondere auf den Minuten- und den Stundenzeiger zu übertragen, die, mit einer im Verhältnisse 12:1 verschiedenen Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotirend, durch ihre augenblickliche Lage gegen die Kreistheilung eines Zifferblattes die betreffende Zeit abzulesen gestatten. In der Regel geht das mit der Trommel einer Gewichtuhr, bezw. mit dem Federhause oder der Schnecke einer Triebfederuhr rotirende Triebrad unmittelbar in ein kleineres Rad auf der mit dem Minutenzeiger fest verbundenen Minutenwelle, von welcher dann die Bewegung einerseits nach dem Steigrade abzweigt und andererseits auf den Stundenzeiger übertragen wird.

Was die erstere Uebertragung betrifft, so ist zu bemerken, dass bei allen besprochenen Hemmungen das Steigrad für jede Doppelschwingung des Regulators um einen Zahn fortrückt. Ist also  $s$  die Zahl der Doppelschwingungen des Regulators pro Secunde,  $z$  die Zahl der Zähne des

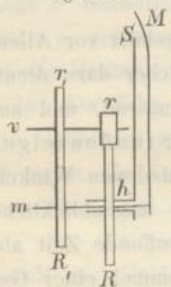
Steigrades, so dass letzteres pro Secunde  $\frac{s}{z}$  Umdrehungen macht, so muss, da die Minutenwelle stündlich eine, also pro Secunde  $\frac{1}{3600}$  Umdrehung macht, die Steigradwelle

$$n = 3600 \frac{s}{z}$$

mal so schnell umlaufen, als die Minutenwelle. Bei Pendeluhrn genügt dazu gewöhnlich eine Zwischenwelle, die sogenannte Mittelwelle, welche ein kleines und ein grösseres Rad trägt, von denen jenes mit dem Minutenrade auf der Minutenwelle, dieses mit einem kleinen Rade auf der Steigradwelle in Eingriff ist, entsprechend einer Zerlegung jenes Umsetzungsverhältnisses  $n$  in zwei Factoren. Bei Unruheuhren werden aber wegen des grösseren Werthes von  $n$ , in Folge besonders der grösseren Schwingungszahl  $s$ , im Allgemeinen zwei Zwischen- oder Mittelwellen zwischen die Minuten- und Steigradwelle eingefügt, wird also die resultirende Uebersetzung  $n$  in drei einzelne zerlegt.

Um den Stundenzeiger  $S$ , Fig. 166, mit  $\frac{1}{12}$  der Geschwindigkeit des Minutenzeigers  $M$  um die Minutenwelle  $m$  rotiren zu lassen, ist er mit

Fig. 166.



einer um  $m$  drehbaren Hülse  $h$  verbunden, die zugleich ein Rad, das Stundenrad  $R$ , trägt in Eingriff mit dem kleinen Rade  $r$  auf der Vorgelegewelle  $v$ ; letztere erhält ihre Bewegung von der Minutenwelle aus durch die Räder  $R_1$  und  $r_1$ , welche gewöhnlich einander gleich gemacht werden, so dass  $R$  dann 12mal so viel Zähne haben muss, wie  $r$ , z. B.  $R_1$  und  $r_1$  je 36 Zähne,  $R$  und  $r$  bezw. 72 und 6 Zähne. Die Theilung der Räder  $R$  und  $r$  muss dann nur im Verhältnisse

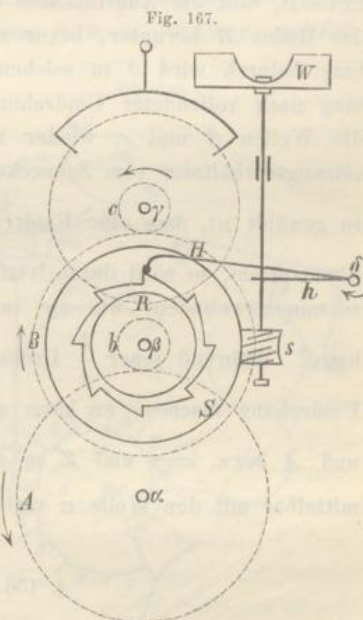
$$\frac{36 + 36}{72 + 6} = \frac{12}{13}$$

kleiner sein, als die von  $R_1$  und  $r_1$ . Die Theilungen würden gleich, wenn bei 72 und 6 Zähnen von  $R$  und  $r$  die Räder  $R_1$  und  $r_1$  je 39 Zähne erhielten, doch pflegt man jene Zahnzahlen von grösserer Theilbarkeit vorzuziehen.

Um den Stundenzeiger leicht in die richtige Lage zum Minutenzeiger bringen zu können, wird er mit der Hülse  $h$  nicht fest, sondern vermittels einer Klemme verbunden, die mit entsprechender Reibung um jene Hülse gedreht werden kann. —

Abgesehen von der durch Fig. 166 angedeuteten Bewegungsübertragung vom Minuten- auf den Stundenzeiger setzen die obigen Bemerkungen bezüglich des Räderwerkes einer Uhr den gewöhnlichen Fall einer schleichenden Zeigerbewegung voraus. Wenn aber bei grösseren Uhrwerken die Zeiger eine minutenweise springende Bewegung erhalten sollen, in welchem Falle durch einen gleichfalls minutenweise neu aufzuziehenden Hilfsmotor (§. 154) der beständige Antrieb auf das Steigrad auszuüben ist, so erhält das Uhrwerk eine abweichende Einrichtung, zu deren Erklärung die Thurmuh der Kreuzkirche zu Hannover\* mit Bezugnahme auf Fig. 167 als Beispiel diene.

Hier ist  $\alpha$  die horizontale Welle des Haupttriebrades  $A$ , angeregt zur Drehung im Sinne des Pfeils durch ein Triebgewicht mit zugehöriger Trommel. Indem aber das Rad  $A$  in das Trieb  $b$  auf der Welle  $\beta$  und das auf letzterer gleichfalls fest sitzende Schneckenrad  $S$  in die Schnecke  $s$  auf der verticalen Welle des Windfanges  $W$  eingreift, wird die Bewegung der genannten Theile in der Zwischenzeit zwischen zwei vollen Minuten dadurch verhindert, dass ein Ansatz der Windfangwelle von einer Umbiegung am Ende des Arms  $h$  aufgehalten wird, welcher rechtwinklig an der horizontalen Welle  $\delta$  befestigt ist. Die mit ihrem äusseren Ende an der Innenwand eines Federhauses befestigte Hilfsfeder ist mit ihrem inneren Ende fest an der Welle  $\beta$ , indem sie diese in Windungen so umgibt, dass dadurch das Federhaus zu relativer Drehung um  $\beta$  in demselben Sinne (des Pfeils  $B$ ) angetrieben wird, in welchem die Welle  $\beta$  selbst nach Auslösung der vorbemerkten Hemmung des Windfanges durch die Haupttriebkraft gedreht wird. Mit dem Federhause fest verbunden ist das Rad  $B$ , eingreifend in das Trieb  $c$  auf der Steigradwelle  $\gamma$ , und ausserdem das nach Art eines Klinkrades gestaltete Auslösungsrad  $R$ ,



\* Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, §. 25.



auf dessen schrägen Zahnflächen der an der Welle  $\delta$  sitzende Auslöschungshebel  $H$  mit seinem Ende aufliegt. Nun sind die Zahnzahl  $= n$  dieses Rades  $R$ , sowie die Zahnzahlen der Räder  $B$ ,  $c$  und des Steigrades so gewählt, dass  $R$  in einer Minute  $\frac{1}{n}$  Umdrehung um  $\beta$  macht, und indem dann je zu Ende einer Minute die Endkante des Hebels  $H$  von einer Zahnkante des Rades  $R$  fast erreicht ist, wurde dadurch die Welle  $\delta$  im Sinne des beigesetzten Pfeils so weit gedreht, dass der Hemmungshebel  $h$  den Windfang  $W$  und damit die Wellen  $\beta$ ,  $\alpha$  frei giebt. Indem dieselben in Bewegung gerathen, während  $R$  seine langsamere Drehung unter dem durch das Pendel regulirten Einflusse der Hilfsfeder fortsetzt, fällt die Angriffskante des Hebels  $H$  in die folgende Zahnücke des Rades  $R$  herunter, bevor noch  $W$  eine volle Umdrehung gemacht hat; dadurch wird  $\delta$  in solchem Sinne zurückgedreht, dass der Windfang nach vollendeter Umdrehung wieder aufgehalten wird, somit auch die Wellen  $\beta$  und  $\alpha$  wieder in Ruhe kommen. Weil aber das Umsetzungsverhältniss vom Schneckenrade  $S$  zur (mehrgängigen) Schnecke  $s$  so gewählt ist, dass eine Umdrehung des Windflügels  $\frac{1}{n}$  Umdrehung von  $\beta$  entspricht, so wird durch letztere die Hilfsfeder um ebenso viel stärker zusammengewunden, wie sie in der vorigen Minute sich aufgewunden hatte. Während jener  $\frac{1}{n}$  Drehung von  $\beta$  musste der Minutenzeiger  $\frac{1}{60}$  Umdrehung machen; er kann also, wenn die Zahnzahlen der Räder  $b$  und  $A$  bezw.  $= z$  und  $Z$  so gewählt werden, dass  $\frac{1z}{nZ} = \frac{1}{60}$  ist, unmittelbar mit der Welle  $\alpha$  verbunden werden.

#### §. 156. Schlagwerke.

Die Schlagwerke der Uhren, welche dazu dienen, den Ablauf gewisser Zeitabschnitte (voller, halber, Viertel-Stunden) durch Schläge eines Hammers gegen eine Glocke oder einen sonstigen dadurch zum Tönen zu bringenden Körper hörbar zu machen, pflegen in zweierlei Formen ausgeführt zu werden: mit Rechen und Staffel oder mit Schlossrad und Falle.

Die wesentliche Einrichtung eines Stunden-Schlagwerkes mit Rechen und Staffel zeigt Fig. 168. Der Rechen ist ein verzahntes Segment  $r$ , drehbar um die Axe  $\alpha$ , mit welcher ausserdem vermittels

156.  
 ings-  
 ieses  
 es so  
 ndem  
 einer  
 lle  $\delta$   
 ungs-  
 In-  
 Dreh-  
 feder  
 lücke  
 macht  
 Wind-  
 auch  
 Um-  
 ecke  $s$   
 g von  
 ärker  
 enden  
 1  
 er 60  
 der  $b$   
 , un-  
 af ge-  
 eines  
 Tönen  
 ormen  
 d und  
 s mit  
 ahntes  
 mittels

eines dem Zahnsegmente  $r$  gegenüberliegenden kürzeren Armes  $\alpha a$  ein Stift  $a$  verbunden ist, dessen Bestimmung sich weiterhin ergeben wird. Eine gegen den Arm  $\alpha a$  wirkende Feder  $r'$  strebt den Rechen im Sinne des Pfeiles  $r$  zu drehen; doch wird in dem durch die Figur dargestellten Ruhezustande des Schlagwerkes jene Drehung durch eine Sperrklinke verhindert, welche sich an dem um  $\beta$  drehbaren und durch eine Feder  $b'$  gegen den Rechen hin gedrückten Hebel  $b$  befindet. Fragliche Drehung kann nur stattfinden, nachdem zuvor die Sperrklinke aus der betreffenden Zahnücke herausgehoben wurde dadurch, dass gegen den Hebel  $b$  das Ende eines um  $\gamma$  drehbaren Hebels  $c$  drückt, welcher durch den Druck einer Feder  $e'$  gegen den Anschlagstift  $d$  anliegt, aber von demselben kurz vor Ablauf einer Stunde vermittels des Seitenarmes  $e$  entfernt wird. Dies geschieht durch einen Stift  $n$ , welcher, seitlich von einem Zahnrade hervorrage-

nd, mit diesem um die Axe  $\nu$  stündlich eine Umdrehung macht, indem jenes Rad mit einem gleichen Rade auf der Minutenwelle  $\mu$  in Eingriff ist; letzteres trägt gleichfalls einen seitlich hervorrage-

nden Stift  $m$  von weiterhin zu erklä-

render Bestimmung. Zwischen ihm und dem Stifte  $a$  befindet sich die Staffel  $s$ , eine schneckenförmig mit 12 Stufen, gleichen Mittelpunkts-

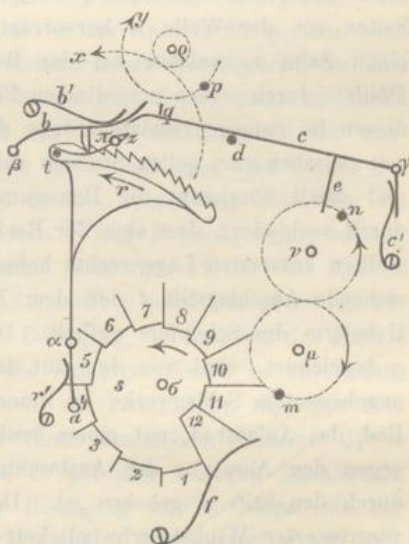
winkeln entsprechend, versehene Scheibe, welche um die Axe  $\sigma$  im Sinne des Pfeils, nämlich in sol-

chem Sinne drehbar ist, dass die mit 1, 2, 3 . . . 12 bezeichneten Stufen in dieser Reihenfolge dem Stifte  $a$  gegenüber zu liegen kommen. Diese Drehung, und zwar jeweils um  $\frac{1}{12}$  Umdrehung, wird durch einen auf der Axe  $\sigma$  sitzenden Stern vermittelt, von dessen 12 Strahlen, bzw. spitzen Zähnen immer einer kurz vor Ablauf einer Stunde von dem Stifte  $m$  getroffen wird, während in der Zwischenzeit zwei benach-

barte dieser Strahlen die Arretirung der Scheibe in ihrer augenblicklichen Lage durch die Feder  $f$  vermitteln.

Noch bleibt anzuführen, dass das Schlagwerk seinen besonderen Motor

Fig. 168.



besitzt, und dass von dem mit der Gewichtstrommel bezw. dem Federhause verbundenen betreffenden Triebrade mehrere Wellen der Reihe nach mit wachsenden Geschwindigkeiten in Umdrehung versetzt werden können, indem jede derselben ein kleines und ein grösseres Zahnrad trägt, von denen jenes die Bewegung empfängt, dieses sie weiter fortpflanzt. Drei aufeinander folgende dieser Wellen heissen die Hebnägelradwelle, die Schöpfradwelle und die Anlaufradwelle. Auf der erstgenannten sitzt das Hebnägelrad, ausgerüstet mit einer gewissen Zahl von gleichmässig am Umfange vertheilt seitlich hervorstehenden Stiften (Hebnägeln), durch welche entgegen dem Drucke einer Feder der Hammer gehoben wird, welcher zurückschnellend den tonerzeugenden Schlag ausübt. Die Lage der folgenden Welle (Schöpfradwelle) ist in der Figur durch den Buchstaben  $\pi$  bezeichnet; sie wird durch den Motor des Schlagwerkes zur Drehung im Sinne des Pfeils  $x$  angeregt und trägt einen Arm, den sogenannten Schöpfer, der nach zwei entgegengesetzten Seiten von der Welle  $\pi$  hervorragt. Die kürzere Hervorragung bildet einen Zahn  $z$ , welcher bei der Rotation des Schöpfers im Sinne des Pfeils  $x$  durch seinen periodischen Eingriff in eine Zahnücke des Rechens diesen im entgegengesetzten Sinne des Pfeils  $r$  bewegt; in der Zwischenzeit zwischen zwei vollen Stunden wird jedoch jene Rotation des Schöpfers und damit überhaupt die Bewegung aller Theile des Schlagwerkes dadurch verhindert, dass sich der Rechen in seiner durch Fig. 168 dargestellten äussersten Lage rechts befindet, in welcher der von ihm hervorstehende Anschlagstift  $t$  den dem Zahne  $z$  gegenüberliegenden längeren Hebelarm des Schöpfers aufhält. Die Anlaufradwelle, in der Figur mit  $\rho$  bezeichnet, wird von dem auf der Welle  $\pi$  sitzenden Schöpfrade bei ungehemmtem Schlagwerke im Sinne des Pfeils  $y$  gedreht; sie trägt ein Rad, das Anlaufrad, mit einem seitlich hervorstehenden Stifte  $p$ , welcher gegen den Ansatz  $q$  des Auslösungshebels  $e$  treffen kann, wenn dieser durch den Stift  $n$  gehoben ist. Dasselbe Anlaufrad setzt mit abermals vergrösserter Winkelgeschwindigkeit eine letzte Welle mit einem Windflügel in Rotation, der dazu dient, eine allzu beschleunigte Bewegung des ausgelösten Schlagwerkes zu hindern, namentlich also die Zeiten zwischen den aufeinander folgenden Hammerschlägen annähernd gleich zu machen.

Der Vorgang ist nun folgender. Einige Zeit vor dem Ablauf der  $n$ ten Stunde, bevor also der Hammer zu  $n$  Schlägen veranlasst werden soll, trifft der mit der Minutenwelle  $\mu$  rotirende Stift  $m$  gegen einen Strahl des Staffelsterns und ertheilt der Staffel eine solche Zwölfeldrehung, dass ihre  $n$ te Stufe dem Stifte  $a$  gegenüber zu liegen kommt.

Kurze  
lösung  
dann  
des F  
geben  
gegen  
Stufe  
ungsw  
von d  
Mecha  
bis de  
lösung  
herbe  
Anlau  
nur u  
Umset  
kleine  
eine F  
komm  
bereit  
Stift  
fallen  
bis  $e$   
aufgeh  
gelang  
des S  
ücke  
Sinne  
Beweg  
dessel  
länger  
gehalte  
ist die  
Winke  
jeder  
fortrü  
chend  
Schlag  
V

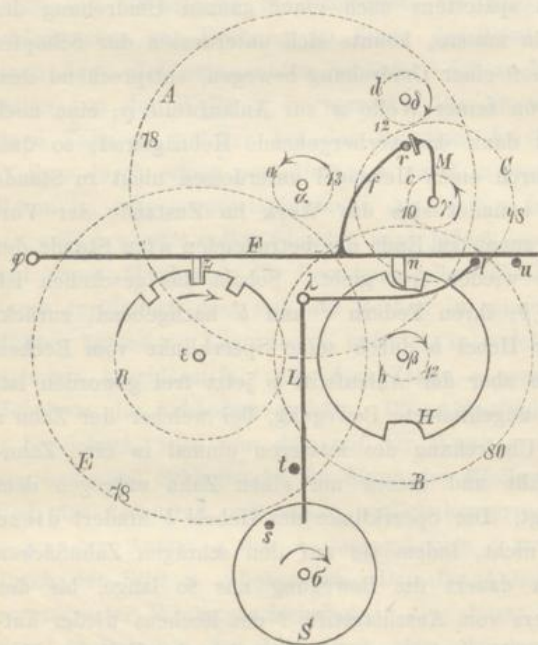
Kurze Zeit nachher trifft auch der Stift  $n$  gegen den Arm  $e$  des Auslösungshebels und hebt durch diesen zugleich den Sperrhebel  $b$ . Sobald dann die an letzterem sitzende Sperrklinke die betreffende Zahnücke des Rechens verlassen hat, kann dieser dem Drucke seiner Feder  $r'$  nachgebend sich im Sinne des Pfeils  $r$  um  $\alpha$  drehen so lange, bis der Stift  $a$  gegen jene  $n$ te Stufe der Staffel trifft, was einen der Stellenzahl  $n$  dieser Stufe proportionalen, nämlich  $n$  Zähnen des Rechens entsprechenden Drehungswinkel desselben erfordert. In Folge dieser Bewegung ist der Schöpfer von dem Aufhaltungsstifte  $t$  abgeschnappt und es setzt sich der ganze Mechanismus des Schlagwerkes in Bewegung, vorläufig jedoch nur so lange, bis der Stift  $p$  des Anlaufrades gegen den Ansatz  $q$  des gehobenen Auslösungshebels trifft und damit die Hemmung des Schlagwerkes auf's Neue herbeiführt. Indem das spätestens nach einer ganzen Umdrehung des Anlaufrades der Fall sein musste, konnte sich unterdessen der Schöpfer nur um einen kleinen Theil einer Umdrehung bewegen, entsprechend dem Umsetzungsverhältnisse von seiner Welle  $\pi$  zur Anlaufwelle  $\rho$ ; eine noch kleinere Drehung macht dann das vorhergehende Hebnägelrad, so dass eine Hammererhebung durch einen Hebnagel unterdessen nicht zu Stande kommen konnte. Jetzt befindet sich das Werk im Zustande der Vorbereitung, bis möglichst genau zu Ende der betreffenden  $n$ ten Stunde der Stift  $n$  den Hebelarm  $e$  wieder frei giebt. Sobald das geschehen ist, fallen die Hebel  $c$  und  $b$ , ihren Federn  $e'$  und  $b'$  nachgebend, zurück, bis  $c$  vom Stifte  $d$ , der Hebel  $b$  durch seine Sperrklinke vom Rechen aufgehalten wird. Indem aber der Anlaufstift  $p$  jetzt frei geworden ist, gelangt das Uhrwerk in ungehinderte Bewegung, bei welcher der Zahn  $z$  des Schöpfers für jede Umdrehung des letzteren einmal in eine Zahnücke des Rechens einfällt und diesen um einen Zahn entgegen dem Sinne des Pfeils  $r$  bewegt. Die Sperrklinke des Hebels  $b$  hindert diese Bewegung des Rechens nicht, indem sie auf den schrägen Zahnflächen desselben gleitet; jedoch dauert die Bewegung nur so lange, bis der längere Arm des Schöpfers vom Anschlagstifte  $t$  des Rechens wieder aufgehalten wird, was nach  $n$  Umdrehungen des Schöpfers der Fall ist. Nun ist die Zahl der Hebnägel ebenso gross wie das Verhältniss gleichzeitiger Winkelwege der Schöpferwelle und der Hebnägelradwelle, so dass bei jeder Umdrehung der ersteren das Hebnägelrad um einen Hebnagel vorrückt, durch diesen also ein Hammerschlag vermittelt wird, entsprechend im vorliegenden Falle  $n$  Hammerschlägen bis zur Hemmung des Schlagwerkes.

Wenn man zu einer beliebigen Zeit nach dem Ablauf der  $n$ ten Stunde

und bevor noch die Vorbereitung des Schlagwerkes für die folgende  $(n + 1)$ te Stunde erfolgt ist, während also der Stift  $a$  des Rechens noch der  $n$ ten Staffelstufe gegenüber liegt, den Hebel  $c$  willkürlich von seinem Anschlagstifte  $d$  entfernt und wieder zurückfallen lässt, so erfolgen natürlich die  $n$  Hammerschläge auch und lassen sie sich so oft wiederholen, als man auf's Neue den Hebel  $c$  vom Stifte  $d$  entfernt und so lange der Motor des Schlagwerkes noch nicht abgelaufen ist. Hierauf beruht die Einrichtung sogenannter Repetiruhren, bei welchen die Auslösung überhaupt nur willkürlich, nicht zugleich durch den mit dem Uhrwerke beweglichen Stift  $n$  bewirkt wird. —

Schlagwerke mit Schlossrad und Falle finden vorzugsweise

Fig. 169.



bei grösseren Uhrwerken (für öffentliche Gebäude) sowie auch bei den billigen Schwarzwälder Uhren Anwendung. In Einzelheiten zeigen sie mancherlei Unterschiede; im Princip werde ihre Einrichtung durch Fig. 169 erläutert, entsprechend einem Modell der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Uebrigens ist ihre Wirkungsweise derjenigen des eingehend beschriebenen Schlagwerkes mit Rechen und Staffel in so vielen Beziehungen analog, dass hier eine

kürzer gefasste Erläuterung genügen wird.

Bei dem fraglichen Modell eines Stundenschlagwerkes ist der Motor eine Spiralfeder; mit ihrem Federhause, drehbar um die Welle  $\alpha$ , ist das Hebnelrad  $A$  und ein Trieb  $a$  fest verbunden. Letzteres ist in Eingriff mit dem Schlossrade  $E$ , auf derselben Axe  $\epsilon$  sitzend wie die Schlossscheibe  $R$ . Diese ist am Umfange mit 12 Einschnitten versehen, deren Entfernungen von Mitte zu Mitte sich wie  $1:2:3:\dots:11:12$  ver-

halten, welche also wegen

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12 = (1 + 12) \frac{12}{2} = 78$$

bezw.  $\frac{1}{78}$ ,  $\frac{2}{78}$  ...  $\frac{12}{78}$  des Umfanges betragen; indem aber die Einschnitte selbst über je  $\frac{1}{78}$  des Umfanges sich erstrecken, sind diejenigen zwei derselben, deren Mittelpunktsentfernung auch nur ebensoviel beträgt, zu einem einzigen Einschnitte von doppelter Breite vereinigt. Das Hebnägelrad  $A$  greift in das Trieb  $b$ , welches mit dem Fallenrade  $B$  und der Hebescheibe  $H$  auf der Axe  $\beta$  sitzt; jene Scheibe hat zwei diametral gegenüber liegende Ausschnitte, die an den bei der Bewegung hinteren Seiten abgerundet sind.  $B$  ist in Eingriff mit dem Triebe  $c$ , mit dem Anlaufrade  $C$  auf der Welle  $\gamma$  sitzend, womit zugleich der Anlaufarm  $M$  fest verbunden ist;  $C$  endlich greift in ein Trieb  $d$  der Windflügelwelle  $\delta$ . Die Zahnzahlen der verschiedenen Räder sind ihren Theilkreisen beigeschrieben; die Zahl der Hebnägel ist = 13. Ferner ist  $S$  die sogenannte Stundenscheibe, welche den Auslösungsstift  $s$  trägt und sich stündlich einmal um ihre Axe  $\sigma$  dreht.  $L$  ist der Auslösungshebel, um  $\lambda$  drehbar, mit dem einen Hebelarme so weit bis vor die Stundenscheibe reichend, dass er eben vom Auslösungsstifte  $s$  getroffen werden kann, am Ende des anderen Armes selbst einen Stift  $l$  tragend.  $F$  ist die sogenannte Falle, ein um  $\varphi$  drehbarer Hebel mit dem Zahne  $z$  und der Nase  $n$ , von welchen im Ruhezustande des Schlagwerkes, wobei  $F$  auf dem Stifte  $u$  ruht, jener in einen Einschnitt der Schlossscheibe  $R$ , diese in einen der beiden Ausschnitte der Hebescheibe  $H$  hineinreicht. Ausserdem ist die Falle mit einem Arm  $f$  versehen, dessen Stift  $r$  den Anlaufarm  $M$  aufhält und dadurch das Schlagwerk hemmt bis nach Verlauf von je einer Stunde  $s$  gegen  $L$  trifft. Dann wird  $L$  so gedreht, dass durch den Stift  $l$  die Falle  $F$  gehoben wird;  $M$  wird dadurch frei und macht eine halbe Umdrehung bis zum Anprall gegen  $l$ . Die dieser halben Umdrehung von  $M$  entsprechende  $\frac{1}{16}$  Umdrehung von  $H$  reicht gerade hin, um vermittels der Nase  $n$  die Falle  $F$  vollends so weit zu heben, dass jetzt  $n$  auf dem Umfange von  $H$  aufliegt und auch  $z$  den Einschnitt von  $R$  verlassen hat; der Spielraum von  $z$  in diesem Einschnitte liess schon vorher die entsprechende kleine Drehung von  $R$  zu, die den beigeschriebenen Zahnzahlen gemäss für die  $\frac{1}{16}$  Drehung von  $H$  nur

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{12}{78} \cdot \frac{13}{78} = \frac{1}{624}$$

einer ganzen Umdrehung betrug.

Jetzt befindet sich das Schlagwerk im Zustande der Vorbereitung bis  $s$  von  $L$  abschnappt, dadurch  $L$  bis zum Anschläge an den Stift  $t$  zurückfällt,  $M$  wieder frei wird und das Schlagwerk in jetzt länger dauernde Bewegung kommt, da das Zurückfallen von  $n$  in den anderen Ausschnitt der Hebescheibe  $H$  nach einer halben Umdrehung der letzteren vorläufig durch das Aufliegen des Zahnes  $z$  auf  $R$  unmöglich gemacht ist ausser wenn sich  $z$  über dem oben erwähnten Einschnitte der Schlossscheibe von doppelter Breite befindet. Indem dann aber gerade nur ein Glockenschlag erfolgen sollte, war schon durch die halbe Umdrehung von  $H$ , welcher  $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{78} = \frac{1}{13}$  Umdrehung des Hebnägelrades entspricht, gerade Zeit dazu gewesen. In anderen Fällen kann man bemerken, dass für jeden Glockenschlag die Welle  $\alpha$  mit dem Hebnägelrade  $\frac{1}{13}$  Umdrehung, also die Welle  $\varepsilon$  mit der Schlossscheibe  $\frac{1}{13} \cdot \frac{13}{78} = \frac{1}{78}$  Umdrehung macht, so dass, wenn dann  $z$  auf dem Umfangtheile von  $R$  gleitet, welcher von Mitte zu Mitte der benachbarten Einschnitte gerechnet  $\frac{n}{78}$  des Umfanges beträgt, erst nach  $n$  Glockenschlägen das Zurückfallen von  $z$  in den folgenden Einschnitt stattfindet, sobald auch die Nase  $n$  wieder über einem Einschnitte von  $H$  steht. Die Hemmung erfolgt dann unmittelbar danach durch den Anprall von  $M$  gegen  $r$ , und zwar ist  $M$  so auf der Welle  $\gamma$  befestigt, dass in diesem Augenblicke die Nase  $n$  dicht an dem hinteren abgerundeten Ende eines Ausschnittes von  $H$  sich befindet.

Das hier als Modell beschriebene Schlagwerk eignet sich zur Ausführung in grossen Verhältnissen, nur würde es dann vorzuziehen sein, das Federhaus um  $\varepsilon$  drehbar zu machen, also mit dem Schlosstrate  $E$  fest zu verbinden, um die entsprechend stärker zu machende Triebfeder oder ein an ihrer Stelle zu benutzendes Gewicht mit Trommel weniger schnell ablaufen zu lassen. Das Schlagwerk einer Schwarzwälder Uhr hat im Wesentlichen dieselben Theile, wie das hier beschriebene, nur der leichten Ausführung entsprechend von anderer Form; insbesondere wird die Schlossscheibe durch seitliche Hervorragungen am Umfange des als Triebrad dienenden Schlosstrades ersetzt und erhält die Scheibe  $H$  mit der Nase  $n$  der Falle lediglich die Function eines Gesperres, indem die Erhebung der Falle hier vollständig durch den Auslösungshebel bewirkt wird.

Wenn auch die halben Stunden durch je einen einzelnen Glocken-

schlag angezeigt werden sollen, so kann natürlich die Einrichtung gerade so getroffen werden, als ob es sich um die Folge 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1 ... von Stunden handelte, indem zugleich die Stundenscheibe *S* durch eine Halbstundenscheibe oder der einzelne Stift *s* durch ein Paar von solchen diametral gegenüber sitzenden Stiften ersetzt wird. Wenn aber, wie es bei grossen Uhrwerken üblich ist, die Viertelstunden durch 1, 2, 3, 4 Schläge, letztere unmittelbar vor den Stundenschlägen angezeigt werden sollen, und zwar mit Glocken von anderem Ton, so ist ausser dem Stundenschlagwerke ein besonderes Viertelstundenwerk anzuordnen, das übrigens auf denselben Principien beruht wie jenes.

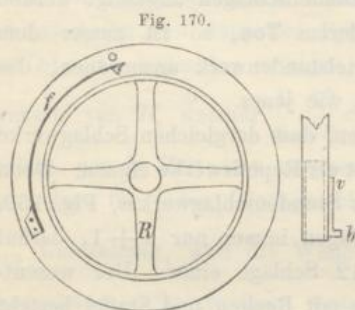
Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass dergleichen Schlagwerke mit Schlossrad und Falle sich offenbar nicht als Repetirwerke eignen. Denn bei willkürlicher Auslösung der Falle des Stundenschlagwerkes, Fig. 169, können nach den zuletzt erfolgten *n* Schlägen immer nur  $n + 1$ , darauf  $n + 2$  Schläge u. s. f. stattfinden, auf 12 Schläge einer. Der wesentliche Unterschied von einem Schlagwerke mit Rechen und Staffel besteht eben darin, dass bei letzterem die Lage der Staffel, welche die Zahl der Schläge bedingt, durch das Stattfinden dieser Schläge nicht verändert wird, wie es dagegen bezüglich des der Staffel analogen Schlossrades thatsächlich der Fall ist.

#### §. 157. Registrirwerke.

Während die in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Zeiger- und Schlagwerke die Zeit nur momentan für das Auge oder Ohr wahrnehmbar machen, kann es in manchen Fällen von Interesse sein, die Zeiten dauernd behufs beliebig späterer Ablesung zu registriren, zu welchen gewisse Ereignisse stattgefunden haben. Die Einrichtung solcher Registrirwerke kann sehr mannigfaltig sein je nach der Art der zu registrirenden Ereignisse, und sei hier nur als Beispiel von technischem Interesse der Wächter-Controlluhren gedacht, welche dazu dienen, die Pünktlichkeit der Pflichterfüllung von Nachtwächtern in technischen Anlagen zu controlliren. Selbst zu diesem besonderen Zwecke sind mancherlei verschiedene Vorrichtungen angegeben und mehr oder weniger benutzt worden; von denselben hat in Deutschland die Controluhr des Uhrmachers Bürk in Schwenningen (Württemberg) wegen ihrer Einfachheit unbeschadet ihrer Sicherheit mit Recht Anerkennung und Verbreitung gefunden. Ihre Einrichtung ist in der Hauptsache folgende.



In einem cylindrischen Gehäuse befindet sich zunächst am Boden ein gewöhnliches Uhrwerk, dessen Centralwelle aber nicht der Bewegung eines Minuten-, sondern der eines Stundenzeigers entspricht, also in 12 Stunden eine Umdrehung macht. Auf ihrer Verlängerung in der oberen, durch einen Deckel verschlossenen Abtheilung des Gehäuses trägt diese Welle mittels entsprechender Arme einen Ring *R*, Fig. 170, ähnlich einer Riemenrolle, nur nicht gewölbt, sondern mit cylindrischer Um-



fläche. Dieser Ring wird täglich vor der Wache von dem Controleur mit einem Papierstreifen (Länge = Umfang, Breite = Breite des Ringes) bespannt, welcher durch gerade Linien der Länge nach in  $6 \cdot 12 = 72$  Felder, den  $\frac{1}{6}$  Stunden entsprechend, der Breite nach in  $n$  Felder getheilt ist = der Zahl der zu besuchenden  $n$  Stationen.

Den letzteren Feldern bzw. ringsum laufenden schmalen Flächenstreifen gegenüber liegen zwischen dem Ringe und der Wand des Gehäuses  $n$  Federn *f*, an ihren freien Enden mit Spitzen ausgerüstet, die dem Ringe zugekehrt sind; diese Spitzen, denen gegenüber der Ring an seiner Umfläche mit  $n$  ringsumlaufenden Rillen versehen ist, verursachen kleine Löcher in dem Papier, wenn die Federenden durch entsprechende Schlüssel gegen den Ring gedrückt werden. Solcher Schlüssel befinden sich an jeder Station einer, an einer Kette angeschlossen, und zwar von solcher Beschaffenheit, dass jeder Stationsschlüssel seinen Bart an derjenigen Stelle hat, welche der betreffenden Stationsfeder der Controluhr entspricht, wenn der Schlüssel mit seinem Rohr soweit es angeht auf den Dorn geschoben wird, der als Schlüsselführung zwischen den Federn und der Wand des Gehäuses angebracht ist. Ein seitlicher Schlitz des Schlüsselrohres im Gehäusedeckel und entsprechende Vorsprünge aussen an den Schlüsselrohren zwingen den Wächter zum vollständigen Aufschieben des Schlüssels auf den Dorn, damit eine Drehung möglich werde, und verhindern so die Möglichkeit, mit einem bestimmten Schlüssel andere Federn zu biegen ausser derjenigen, welche ihm und also der betreffenden Station zukommt. Die betreffende Einrichtung eines solchen Schlüsselrohres lässt die Nebenfigur 170 erkennen beispielsweise für den zur untersten Feder gehörigen Schlüssel, dessen Bart *b* somit ganz am Ende des fraglichen Vorsprunges *v* sich befindet.