Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

B. Allgemeine Bewegungswiderstände

urn:nbn:de:bsz:31-282938

dadurch erreicht werden soll, bestehend bei den Beispielen unter 1) in der Verwandlung der gegebenen Bewegungsart eines Gliedes in eine andere Bewegungsart eines anderen Gliedes, unter 2) in der an gewisse Bedingungen geknüpften Erzielung einer bestimmten Bahn, die von einem gewissen Körperpunkte durchlaufen werden soll, unter 3) in der Verwandlung einer gegebenen Bewegungsart (dort Rotation um eine gewisse Axe) in eine eben solche (Rotation um dieselbe Axe) mit anderer Geschwindigkeit, unter 4) in der Zusammensetzung verschiedener Bewegungen zu einer resultirenden Bewegung, unter 5) in der Förderung einer Flüssigkeit oder in ihrer Benutzung als Arbeitsflüssigkeit einer Kraftmaschine. Noch mannigfaltiger, als solche Zwecke selbst, sind die möglichen Arten ihrer Erfüllung, so dass eine allgemeine und erschöpfende synthetische Entwickelung von dergleichen nicht elementaren Mechanismen kaum thunlich erscheint. Eine mit Bezug auf technische Anwendungen beschränkte, in erster Reihe vom Zwecke, sowie event. von der Form des zum Betriebe disponiblen Arbeitsvermögens ausgehende Uebersicht derselben und ihre Besprechung mit Rücksicht auf die Vollkommenheit und Einfachheit der Erreichung des Zweckes, mit Rücksicht ferner auf die Anforderungen der praktischen Ausführung und des Betriebes, auch auf die Wirthschaftlichkeit der Benutzung des disponiblen Arbeitsvermögens, ist aber theils als Aufgabe der Technologie und des Maschinenbaues zu betrachten, theils in die einzelnen folgenden Abschnitte der theoretischen Maschinenlehre zu verweisen, wenigstens so lange die synthetische Entwickelung und systematische Uebersicht selbst der elementaren Mechanismen, als Grundlage jener weiteren Aufgabe, einstweilen nur so unvollständig durchgeführt ist, wie aus dem Vorhergehenden sich ergeben hat.

B. Allgemeine Bewegungswiderstände.

§. 65. Einleitende Erklärungen.

Die auf die Glieder eines Getriebes wirkenden äusseren Kräfte können unterschieden werden als active oder treibende Kräfte, als passive Kräfte oder Widerstände und als indifferente Kräfte, jenachdem ihre Arbeiten bei der Bewegung des Getriebes positiv, negativ oder Null sind. Diese Charaktere sind also nicht den Kräften an sich eigenthümlich, sondern davon abhängig, wie sie an dem betreffenden Getriebe zur Wirkung kommen; so kann die Schwerkraft ebensowohl treibende Kraft (z. B. bei hydraulischen Kraftmaschinen u. s. f.) wie Widerstand (z. B. bei Hebemaschinen) oder indifferente Kraft (z. B. als Gewicht einer Transmissionswelle) oder auch abwechselungsweise das Eine oder Andere sein (als Schwere eines periodisch auf- und niedergehenden Gliedes).

Die Widerstände sind theils primäre oder Nutzwiderstände, theils secundäre oder Bewegungswiderstände, jenachdem sie durch den Zweck des Getriebes (als Maschine oder als Theil einer solchen) unmittelbar oder aber mittelbar durch die Art und Weise bedingt werden, wie die Erreichung dieses Zweckes durch das Getriebe vermittelt wird. Sofern es eine der wesentlichsten Aufgaben der theoretischen Maschinenlehre ist, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen das zum Betriebe einer Maschine disponible Arbeitsvermögen möglichst vollkommen nutzbar, d. h. zur Ueberwindung der Nutzwiderstände zu verwerthen ist, sowie die Grösse des unter gegebenen Umständen erreichbaren Vollkommenheitsgrades solcher Verwerthung (des sogen. Wirkungsgrades) nachzuweisen, ist es hier am Platze, diese Bewegungswiderstände, die stets einen gewissen Theil jenes disponiblen Arbeitsvermögens zu ihrer Bewältigung in Anspruch nehmen, wenigstens die allgemeiner vorkommenden derselben einer zusammenfassenden Besprechung zu unterwerfen. Sie sind theils von den Nutzwiderständen abhängig und zwar wachsend mit denselben (namentlich in Folge des dadurch vermehrten Druckes zwischen den Elementen der betreffenden Elementenpaare), theils werden sie unabhängig vom Nutzwiderstande entweder durch die Bewegung der Maschine an und für sich verursacht (z. B. der Luftwiderstand, überhaupt der Widerstand des Mediums, in dem sich die Maschine oder einzelne bewegte Glieder derselben befinden) oder zugleich durch indifferente Kräfte (z. B. die Kolbenreibung und die Reibung der Schwungradwelle einer Dampfmaschine u. s. f.). Sind M und μN die Arbeiten, die in einer gewissen Zeit zur Ueberwindung beziehungsweise der vom Nutzwiderstande unabhängigen und der damit wachsenden Bewegungswiderstände aufzuwenden sind, unter N die Arbeit des Nutzwiderstandes selbst verstanden, so ist die erforderliche Betriebsarbeit (Arbeit der treibenden Kräfte) für dieselbe Zeit:

$$L = M + (1 + \mu) N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Alle Bewegungswiderstände werden veranlasst durch relative Bewegungen entweder der Theile eines und desselben Kettengliedes, oder der Elemente eines Elementenpaares an ihrer Berührungsstelle gegen einander, oder von Kettengliedern gegen das umgebende Medium. Die letzteren Widerstände sind meistens von untergeordneter Grösse und übrigens nach den Gesetzen der Hydraulik zu beurtheilen, insbesondere, was den hier vorzugsweise in Betracht kommenden Widerstand der Luft betrifft, nach §. 156 des I. Bandes. Die durch innere relative Bewegungen, nämlich durch die Deformation von Kettengliedern veranlassten Bewegungswiderstände können bei der Verwendung von bildsamen Körpern, insbesondere von Zug- oder Druckkraftorganen (§. 28) als Kettenglieder zwar unter Umständen von wesentlicher Bedeutung sein, doch sind von allgemeinstem Vorkommen und erheblichstem Einflusse solche, die durch die relativen Bewegungen der Elemente von Elementenpaaren veranlasst und als Reibungswiderstände im engeren Sinne bezeichnet zu werden pflegen. Nur von ihnen und zwar mit Bezug auf feste Körper wird (ausser von dem inneren oder Deformationswiderstande der Zugkraftorgane) hier die Rede sein, da in Betreff der äusseren und inneren Reibung von Flüssigkeiten als Druckkraftorganen auf die Gesetze der Hydraulik im I. Bande zu verweisen ist.

Was überhaupt die relative Bewegung einer Körperoberfläche (Elementenfläche) E gegen eine andere E' betrifft, so ist sie identisch mit der absoluten Bewegung von E, die dadurch hervorgeht, dass beiden Flächen zu ihren schon vorhandenen noch eine gemeinschaftliche, derjenigen von E' entgegengesetzte Bewegung mitgetheilt und somit E' in Ruhe versetzt wird. Sollen dabei E und E' beständig einander berühren und zwar, wie zunächst angenommen werde, in einem Punkte P, P' (P der Fläche E, P' der Fläche E' angehörig und mit P zusammenfallend), so kann jede unendlich kleine Elementarbewegung von E im Allgemeinen zerlegt werden in eine Gleitung längs einer gemeinsamen Tangente der Flächen und in eine Drehung um eine durch den Berührungspunkt P, P' gehende Axe, letztere wieder in zwei Drehungen beziehungsweise um die gemeinsame Normale und eine gemeinsame Tangente der Flächen. Hiernach zerfällt die Elementarbewegung im Allgemeinen in eine gleitende, bohrende und rollende (wälzende).

Die bohrende Bewegung ist dadurch charakterisirt, dass E und E' sich beständig mit denselben Punkten P und P' berühren, während eine durch P gehende Linie in E und eine durch P' gehende Linie in E' sich unter veränderlichem Winkel schneiden.

Bei gleitender Bewegung ist von den Berührungspunkten P und P' der Flächen E und E' nur der eine, etwa P unveränderlich, der andere P' aber nach und nach in den stetig auf einander folgenden Punkten einer Linie p' in E' gelegen, und es wird diese Linie p' von einer durch P gehenden Linie in E stets unter demselben Winkel geschnitten. Wäre letzteres nicht der Fall, so wäre die Bewegung eine bohrend-gleitende.

Die rollende Bewegung ist dadurch charakterisirt, dass die Berührungspunkte P und P' beziehungsweise in E und E' gewisse Linien p und p' durchlaufen der Art, dass 1) je zwei sich entsprechende (von P und P' gleichzeitig durchlaufene) Bögen PQ, $P'Q'$ derselben gleich lang sind, und dass 2) die Flächen E, E' in den Linien p, p' von abwickelbaren Flächen berührt werden können, deren entsprechende erzeugende Gerade PR, $P'R'$ die Linien p, p' unter gleichen Winkeln schneiden und von den folgenden entsprechenden Erzeugenden QR, $Q'R'$ in den Punkten R, R' der Wendecurven jener abwickelbaren Flächen stets so geschnitten werden, dass $PR = P'R'$ ist. Wäre diese Bedingung unter 2) nicht erfüllt, so wäre die relative Bewegung eine bohrend-rollende; wären entsprechende Bogenelemente PQ, $P'Q'$ der Linien p, p' nicht gleich lang, so wäre sie gleitend-rollend; fände beides nicht statt, so läge damit der allgemeine Fall einer bohrend-gleitend-rollenden Bewegung vor.

Berühren sich E und E' in einer Linie p, p' (p in E, p' in E' liegend und mit p zusammenfallend), so ist in den verschiedenen Punkten derselben die Art der relativen Bewegung im Allgemeinen verschieden. Bohrend kann die Bewegung nur in einem Punkte P, P' sein; in den übrigen Punkten der Berührungslinie ist sie dann gleitend, und zwar senkrecht zur Bohrungsaxe (der gemeinsamen Normale von E und E' im Punkte P, P') gerichtet, der Grösse nach proportional dem Abstande von dieser Axe. Dieselbe Curve der einen Fläche, z. B. p in E, fällt mit stets anderen congruenten Curven p' in E' zusammen, die sich alle in P' schneiden, und ist dann also E', so weit diese Curven p' reichen, eine Umdrehungsfläche. — Gleitend in solcher Weise, dass in allen Punkten der Berührungslinie p, p' die Gleitungen gleich gerichtet und gleich gross sind, kann die relative Bewegung dann sein, wenn die eine der beiden Flächen, etwa E', durch Translationsbewegung der Linie p entstanden gedacht werden kann, längs welcher sie von der anderen Fläche E in den wechselnden Linien p' berührt wird. — Rollend kann die Bewegung im Allgemeinen nur in einem Punkte sein, während sie in den übrigen Punkten der Berührungslinie dann gleitend-rollend ist. Diese gleitend-rollende Bewegung kann in allen Punkten der Berührungslinie gleich sein, wenn E und E' geradlinige Flächen sind, die sich stets in einer gemeinschaftlichen geraden Erzeugungslinie p, p' berühren, längs welcher die elementare Gleitung und um welche die elementare Drehung stattfindet. Sind E und E' abwickelbare Flächen, so kann die relative Bewegung eine für alle Punkte der geraden Berührungslinie gleiche rollende Bewegung sein, und sind dann die gleichzeitig abgewickelten Flächenelemente von E und E' stets einander gleich.

Berühren sich endlich E und E' in einer Fläche, so ist die Bewegung im Allgemeinen nur gleitend; die bohrende Bewegung ist wieder nur in einem Punkte, die rollende dagegen nur vorübergehend in Punkten des Umfanges der Berührungsfläche möglich.

Zwei Körper, die einen gegenseitigen Druck auf einander ausüben, berühren sich, da sie nie absolut starr sind, streng genommen stets in einer Fläche. Was dabei als eine bohrende Bewegung erscheint, ist eigentlich eine Gleitung, die in den verschiedenen Punkten jener Berührungsfläche senkrecht gegen die Perpendikel auf die Drehungsaxe gerichtet und denselben proportional ist. Die scheinbar rollende Bewegung ist eine stetige Folge von Drehungen um Berührungslinien der auf einander folgenden Berührungsflächen und wegen der wechselnden Deformationen beider Körper sowohl mit Gleitung und Reibung an ihren sich berührenden Oberflächen wie auch, den relativen Bewegungen im Innern der Körper entsprechend, mit inneren Reibungen verbunden.

Die Arbeitsverluste durch Bewegungswiderstände bei einer in Betrieb befindlichen Maschine nach vorstehenden Andeutungen einzeln und vollständig in Anschlag zu bringen, ist meistens unthunlich theils wegen mangelnder Kenntniss der dazu nöthigen Erfahrungswerthe, theils wegen übergrossen Zeitaufwandes, der dazu erforderlich wäre und weder dem erreichbaren Genauigkeitsgrade noch der beschränkten Wichtigkeit des Resultates entsprechen würde. In der Regel muss man sich vielmehr mit erfahrungsmässiger Schätzung der Werthe von M und μ in Gl. (1) für die verschiedenen Arten von Maschinen begnügen, besonders dann, wenn ihre Bewegungswiderstände von sehr mannigfaltiger und grossentheils von besonderer, der betreffenden Maschine eigenthümlicher Art sind. Insoweit sie aber von mehr einfacher und allgemeiner Art und dabei von erheblichem Einflusse sind, kann eine eingehendere Berechnung derselben doch thunlich und nützlich sein, und gilt das namentlich von denjenigen, welche durch die drei zwangläufigen niederen Elementenpaare, also durch Prismenpaare, Drehkörperpaare (insbesondere als Zapfenreibung von Wellen in ihren Lagern) und durch Schraubenpaare, sowie auch von solchen, die durch die vorzugsweise zu kinematischer Kettenbildung verwendeten höheren Elementenpaare veranlasst werden, nämlich durch Zahnräderpaare, Walzenpaare (Reibungsräder- oder Rollenpaare) und durch Elementenpaare mit Zugkraftorganen, während dergleichen mit Druckkraftorganen, insbesondere als mit Hohlcylindern (Röhren) gepaarte Flüssigkeiten vorkommend, solche Widerstände verursachen, die nach hydraulischen Gesetzen zu beurtheilen sind und deshalb hier ausser Betracht bleiben. Widerstände der genannten Gruppen von Elementenpaaren sind es vorzugsweise, die den gesammten mit einem Maschinenbetriebe verbundenen Arbeitsverlust bedingen und deshalb im Folgenden in nähere Untersuchung gezogen werden sollen, nachdem vorher die ihnen zu Grunde liegenden allgemeinen Reibungsgesetze im nächsten Paragraph besprochen sein werden.

§. 66. Reibungsgesetze im Allgemeinen.

Wenn zwei feste Körper sich in einer gewissen Fläche berühren, sei es in Folge ihrer Form (wie z. B. bei den Elementen eines Umschlusspaares) oder in Folge ihrer Deformation durch den gegenseitigen Normaldruck, so kommt die Reibung im engeren Sinne nur als Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung der Körper in Betracht, d. i. in Bezug auf die Bewegung des einen Körpers gegen den anderen als eine Kraft, die dieser Bewegung in der Berührungsfläche gerade entgegen gerichtet ist.*

* Wenn Reuleaux in einer Anmerkung zu seiner „theoretischen Kinematik" (S. 599) die allgemein übliche Auffassung der Reibung als Widerstand für praktisch und wissenschaftlich unrichtig, für einen der logischen Klarheit ermangelnden Rest altererbter Auffassung der Mechanik erklärt, da man bei „Verfeinerung der Untersuchung" finde, dass in jedem Falle die Reibung sowohl Bewegung verhindere wie solche erzeuge, so beruht dieses absprechende Urtheil theils auf dem Missverständnisse, als ob die Bezeichnung einer Kraft als Widerstand etwas dieser Kraft an und für sich Eigenthümliches ausdrücken solle, theils aber auch auf der Ausserachtlassung wirklich verfeinerter Anschauungen heutiger Naturwissenschaft. Wenn z. B. geltend gemacht wird, dass die Kolbenreibung einer Dampfmaschine deshalb kein Widerstand sei, weil der ihr entsprechende Verlust an lebendiger Kraft der Dampfwärme und somit der Leistung der Maschine wieder zu Gute komme, so bleibt damit doch diese Reibung ein Widerstand mit Bezug auf die bewegten Massen der Maschine und ist es übrigens nicht nur von der Reibung, sondern von allen Kräften gültig, dass jede Arbeit einer solchen den Uebergang von Arbeitsvermögen in eben solches von derselben oder von anderer Erscheinungsform, jedenfalls aber von gleicher Grösse vermittelt. Nach einem die heutige Naturwissenschaft beherrschenden Fundamentalgesetze ist eben die Gesammtgrösse des im Weltall vorhandenen Arbeitsvermögens unveränderlich, wie auch die Formen desselben, durch die Arbeiten von Kräften vermittelt, in beständiger gegenseitiger Umwandlung begriffen sein mögen. Als solche Formen des Arbeitsvermögens sind zu unterscheiden: äusseres und inneres freies und gebundenes Arbeitsvermögen. Unter einem freien Arbeitsvermögen (gewöhnlich als lebendige Kraft bezeichnet) ist ein solches zu verstehen, das eine bewegte Masse vermöge ihrer Bewegung besitzt, unter gebundenem aber ein solches, welches einer Gruppe von Massen in Folge ihrer relativen Lagen und der zwischen ihnen wirksamen Kräfte inne-

Ihre Grösse ist vor Allem von der des Normaldruckes Q abhängig und zwar wachsend mit demselben, weshalb sie $=\mu Q$ gesetzt zu werden pflegt, unter μ den sogenannten Reibungscoefficienten verstanden. Ist $\mu = tg\,\varrho$, so heisst ϱ der Reibungswinkel, indem er derjenige Winkel ist, unter welchem eine den einen Körper gegen den anderen in der Berührungsfläche drückende Kraft P wenigstens gegen die gemeinsame Normale geneigt sein muss, um entgegen der Reibung seine gleitende Bewegung einleiten oder beschleunigen zu können. Wäre nämlich dieser Winkel $=\varphi$, so wäre die auf Gleitung wirkende Kraftcomponente $=P\sin\varphi$, der Normaldruck $=P\cos\varphi$, also die Reibung $=\mu P\cos\varphi$, und somit der Ueberschuss jener activen über diese passive Kraft

$$= P(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)$$

nur dann positiv, wenn $tg\,\varphi > \mu$, also $\varphi > \varrho$ ist.

---

wohnt. Dieses wie jenes kann weiter als äusseres und inneres unterschieden werden; ebenso nämlich wie das äussere freie Arbeitsvermögen einer als solche wahrnehmbaren Bewegung entspricht, d. h. einer Bewegung, bei der die materiellen Punkte des betreffenden Körpers Wege von messbarer Länge durchlaufen, das innere dagegen den hypothetischen, als solche nicht wahrnehmbaren und messbaren relativen Bewegungen der die Körper constituirenden Atome, kommt das äussere gebundene Arbeitsvermögen Systemen von messbaren Massen zu vermöge ihrer relativen Lagen in gegenseitigen Entfernungen von messbaren Grössen, das innere den Körpern selbst vermöge der relativen Lagen ihrer sie constituirenden hypothetischen Atome und der zwischen diesen wirksamen Kräfte. So wird in dem obigen Falle des Dampfkolbens durch die Reibung eine Verwandlung von äusserem in inneres freies Arbeitsvermögen (Wärme) vermittelt. In anderen Fällen hat die Reibung eine zusammengesetztere, mehr mittelbare Wirkung, wie z. B. in dem von Reuleaux gleichfalls angeführten Falle der durch den Geigenbogen angestrichenen Saite, wobei sie es möglich macht, dass äussere lebendige Kraft vom Bogen auf die Saite übergehen kann, nicht aber ohne Verlust, da zugleich ein der Reibungsarbeit gleicher Theil der lebendigen Kraft des Bogens in innere lebendige Kraft, d. i. inneres freies Arbeitsvermögen (Wärme) verwandelt wird. Letzteres, nämlich die Verwandlung von äusserem in inneres Arbeitsvermögen (in freilich meist untergeordnetem Grade auch gebundenes inneres Arbeitsvermögen, insbesondere z. B. mit Rücksicht auf die Abnutzung der sich reibenden Körper) ist unter allen Umständen der unmittelbare Erfolg von Reibungsarbeit, und insofern unter Arbeit, Arbeitsvermögen und lebendiger Kraft schlechtweg in der Mechanik und Maschinenlehre allgemein äussere Arbeit, äusseres Arbeitsvermögen resp. äussere lebendige Kraft verstanden zu werden pflegt, kann man sagen, dass mit Reibung stets ein Verlust von Arbeit resp. äquivalenter lebendiger Kraft verbunden ist. Auf zwei in relativ gleitender Bewegung begriffene Körper wirkt sie zwar in entgegengesetztem Sinne, auf jeden aber als relative Widerstandskraft, nämlich im umgekehrten Sinne seiner relativen Bewegung gegen den anderen.

Mittelwerthe von μ, insbesondere gemäss den umfassenden Versuchen von Morin, finden sich in technischen Taschenbüchern angegeben. Erfahrungsmässig ist übrigens dieser Coefficient abhängig

1) von der materiellen Beschaffenheit der sich reibenden Körper (gleichartigen Körpern entspricht im Allgemeinen ein grösseres μ, als ungleichartigen),

2) von ihrer Oberflächenbeschaffenheit sowohl an und für sich (wachsend mit der Rauhigkeit), als in Bezug auf die Bewegungsrichtung (insbesondere z. B. bei Hölzern, überhaupt bei faserigen Körpern),

3) von der Beschaffenheit einer zwischen den Reibungsflächen etwa vorhandenen flüssigen oder weichen Substanz (Wasser, Oel, Fett, Seife), die den Werth des Coefficienten μ um so ausschliesslicher bestimmt, in je dickerer Schicht sie vorhanden und je kleiner der specifische Druck (Druck pro Flächeneinheit) ist, so dass die Oberflächen sich um so weniger unmittelbar berühren, je glatter sie zugleich sind,

4) von der Grösse des specifischen Druckes p,

5) von der relativen Geschwindigkeit v, mit der die Körper längs einander gleiten.

Was diese Einflüsse unter 4) und 5) betrifft, so wächst μ zugleich mit p insbesondere nach Versuchen von Rennie (Stahl und Messing auf Gusseisen, Gusseisen und Schmiedeisen auf Schmiedeisen bei etwas fettigen Oberflächen); wenn indessen p unter eine gewisse Grenze sinkt, so kann es bei sehr glatter oder fettiger Oberfläche auch der Fall sein, dass μ mit weiter abnehmenden Werthen von p nicht ab-, sondern zunimmt.

Dass μ mit wachsender Geschwindigkeit v abnimmt, haben insbesondere die Versuche von Bochet ergeben, angestellt mit Eisenbahnfahrzeugen, die bei festgestellten Rädern mittels besonderer, an der Sohle mit verschiedenen Substanzen bekleideter Schuhe auf den Schienen gleitend fortbewegt wurden. Ihnen zufolge soll, wenn v in Metern pro Secunde ausgedrückt ist,

$$\mu = \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + 0{,}3\,v} + \mu_1$$

gesetzt werden können, in welcher Formel μ_0 und μ_1 die Werthe von μ beziehungsweise für $v = 0$ und $v = \infty$ bedeuten. Für dieselben ergaben sich u. A. die folgenden Werthe bei den angeführten Bekleidungen der Schuhe und specifischen Drucken p in Kgr. pro Quadratcentim.

	μ_0	μ_1
Trockenes weiches Holz bei $p > 10$	0,6	0,3
Trockenes hartes Holz bei $p > 10$	0,55	0,25

	μ_0	μ_1
Halbpolirtes Eisen, trocken oder nass, bei $p > 300$ . . .	0,3	0,15
„ „ , trocken bei $p > 100$	0,25	0,075
„ „ , polirt und geschmiert bei $p > 20$.	0,25	0,075
Nicht harziges Holz, genässt mit Wasser bei $p > 20$.	0,25	0,075
Polirtes und angefettetes Holz bei $p > 20$	0,16	0,06

Die Werthe von μ_0 sind zugleich im Allgemeinen als die sogenannten Reibungscoefficienten der Ruhe, d. h. als diejenigen zu betrachten, die einer erst beginnenden Bewegung entsprechen. In gewissen Fällen, insbesondere z. B. für Holz oder Leder auf feuchten oder fettigen Eisenschienen, sowie auch bei sehr grossen Werthen von p ist indessen dieser Reibungscoefficient der Ruhe, namentlich wenn letztere lange Zeit gedauert hat, merklich grösser als derselbe für eine selbst sehr langsame Bewegung. —

Die Mannigfaltigkeit der Umstände, von denen hiernach der Reibungscoefficient abhängt, deutet auf verschiedene Ursachen, deren Zusammenwirken den fraglichen Widerstand zur Folge hat. Als diese Ursachen sind anzuführen: die Rauhigkeit der Oberflächen, die Deformation der Körper und die Molekularanziehung.

Die Rauhigkeit der Oberflächen hat zur Folge, dass die Körper mit kleinen Vorsprüngen und Vertiefungen in einander eingreifen, und dass somit die Verschiebung des einen Körpers gegen den anderen wiederholte Erhebungen des ersteren entgegen dem Drucke Q längs kleinen schiefen Ebenen des anderen nöthig macht. Ist φ der mittlere Neigungswinkel der letzteren gegen die scheinbare Berührungsfläche der Körper, so muss die längs dieser wirkende Kraft R, um eine Verschiebung zu ermöglichen, die durch folgende Gleichung bestimmte Grösse haben:

$$R \cos\varphi = Q \sin\varphi, \text{ woraus } \mu = \frac{R}{Q} = tg\,\varphi$$

folgt. Indem man sich die Erhabenheiten und Vertiefungen der Körperoberflächen von sehr verschiedenen abgerundeten Formen vorzustellen hat, wird φ und somit μ um so grösser sein, je tiefer die einen in die anderen durchschnittlich eingreifen, und das wird um so mehr der Fall sein, nicht nur je rauher die Körperoberflächen, sondern auch je gleichartiger die Rauhigkeiten beider sind, womit es abgesehen vom Einflusse der Molekularkräfte zusammenhängen mag, dass der Reibungscoefficient grösser für gleichartige, als für ungleichartige Körper gefunden zu werden pflegt.

Durch den Druck Q werden die Körper mehr oder weniger deformirt und zwar so, dass der kleinere resp. der nächst der Berührungsfläche stärker convex gekrümmte Körper abgeplattet und in den anderen um einen gewissen Betrag hinein gedrückt wird. Je mehr das der Fall ist, unter desto grösserem Winkel ist die effective Berührungsfläche gegen die scheinbare, längs welcher die gleitende Bewegung stattfindet, am Rande geneigt, desto grösser deshalb auch μ, sofern ein gewisses beständiges Hinaufgleiten des abgeplatteten Körpers längs dem Eindrucke des anderen vorhergehen muss, um diesen Eindruck im Sinne der Bewegung von Stelle zu Stelle fortschreiten zu lassen. Indem aber solche Deformation natürlich um so beträchtlicher ist, je grösser der specifische Druck p, erklärt sich dadurch das Wachsen von μ mit p.

Dass μ auch mit abnehmender Geschwindigkeit v zunimmt, mag u. A. dadurch bedingt sein, dass sowohl das periodische Eingreifen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche, als auch die so eben erwähnte Deformation einer gewissen Zeit zur Ausbildung bedarf, dass somit beides um so vollständiger zu Stande kommt, je langsamer die relative Bewegung ist.

Die Molekularanziehung kommt um so mehr zur Geltung, je inniger die Berührung ist, je glatter nämlich die Oberflächen sind oder je mehr ihre Vertiefungen durch eine flüssige oder weiche Zwischensubstanz ausgefüllt werden. Geschieht letzteres in solchem Grade, dass die festen Körper sich überhaupt kaum mehr unmittelbar, sondern vorzugsweise mittelbar, nämlich eben durch Vermittelung jener Zwischensubstanz berühren, so beruht der Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung vorwiegend auf der inneren Reibung, mit der die relativen Molekularverschiebungen dieser Zwischensubstanz verbunden sind. Je grösser übrigens der specifische Druck p ist, desto weniger wird das Eindringen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche durch die fragliche Zwischensubstanz verhindert.

I. Reibung von Prismenpaaren.

§. 67. Kolbenreibung.

Die Reibung von Prismenpaaren ergiebt sich meistens so unmittelbar als Folge des Druckes in der prismatischen Elementenfläche und eines erfahrungsmässigen Reibungscoefficienten, dass sie weiterer Besprechung an dieser Stelle nicht bedarf. Besondere Erwähnung wegen ihres erheblichen

Einflusses auf den Arbeitsverlust durch Bewegungswiderstände bei ausgedehnten Gruppen von Maschinen verdient indessen die Reibung einer besonderen Art von Prismenpaaren, bestehend aus einem Cylinder, der als sogenannter Kolben K mit einem Hohlcylinder C durch Vermittelung eines bildsamen Körpers L dicht anschliessend so gepaart ist, dass dadurch zwei in demselben Hohlcylinder beiderseits vom Kolben befindliche Flüssigkeiten F_1 und F_2 möglichst vollkommen von einander geschieden werden trotz ihres verschiedenen specifischen Druckes p_1 resp. p_2. Einer angenähert angebbaren einfachen Gesetzmässigkeit unterliegt diese Kolbenreibung freilich nur in dem Falle, dass die Liederung, nämlich jene Paarung von K und C mit Hülfe des bildsamen Körpers L, eine sogenannte hydrostatische Liederung ist, charakterisirt dadurch, dass der Druck in der Liederungsfläche F (Berührungsfläche zwischen L und C oder L und K, jenachdem L mit K oder mit C zu einem Element verbunden ist) vom Flüssigkeitsdrucke herrührend proportional demselben veränderlich ist. Ist der specifische Druck p_1 der Flüssigkeit F_1 der grössere, so wäre der specifische Druck p in der Fläche F, in welcher der bildsame Körper L, jenachdem er mit K oder C verbunden ist, von der Flüssigkeit F_1 gegen die cylindrische Oberfläche von C resp. K angedrückt wird, $= p_1$ selbst zu setzen, wenn der verschwindend enge Raum zwischen L und C resp. K längs der Fläche F als vollkommen leer gelten dürfte. Doch kann bei der beträchtlichen Steifigkeit, die der Körper L zu besitzen pflegt, wenn er auch aus Leder (als Stulp oder Manschette) gebildet sein mag, eine so innige Berührung kaum angenommen werden, und erscheint es richtiger, jenen specifischen Druck p in der Liederungsfläche nur $= p_1 - p_2$ zu setzen, eine Annahme, die besonders dann zutreffend sein wird, wenn L mit K zu einem Element verbunden ist und somit bei der relativen Bewegung von K gegen C im Sinne von F_1 gegen F_2 auch die Berührungsfläche F längs C in demselben Sinne von F_1 gegen F_2 fortrückt, wogegen, wenn L mit C verbunden ist, die Berührungsfläche längs K im umgekehrten Sinne, nämlich von F_2 gegen F_1 fortrückt und dann im Zwischenraume zwischen L und K ein noch grösserer specifischer Druck, als p_2, wohl stattfinden könnte in Folge anhaftender Flüssigkeit, die kurz zuvor noch die Pressung p_1 hatte.

Indem nun die Fläche F eine Cylinderfläche von gewisser Breite b, also $F = \pi d b$ ist, unter d den inneren Radius von C resp. äusseren Radius von K verstanden, jenachdem L mit K oder C zu einem Element verbunden ist, ergiebt sich die Grösse der Reibung:

$$R = \mu \,.\, \pi d b \,.\, p.$$

Auf Grund der Annahme $p = p_1 - p_2$ ist aber der Ueberdruck auf den Kolben im Sinne seiner relativen Bewegung gegen den Hohlcylinder:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} p$$

und somit das Verhältniss beider Kräfte, das wegen übereinstimmender Wege auch dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste durch die Kolbenreibung gleich ist:

$$\frac{R}{P} = 4 \mu \frac{b}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man im Durchschnitt $b = 0{,}1\, d$ und μ für eine hydrostatische Liederung im engeren Sinne des Wortes, nämlich für eine Ledermanschette als bildsamen Körper $L = \frac{1}{4}$, dagegen für eine hydrostatische Metall-Liederung nur 0,3 so gross $= \frac{3}{40} = 0{,}075$, so ergiebt sich die Reibung R im ersten Falle = 10 Procent, im zweiten = 3 Procent des Ueberdruckes auf den Kolben. (Eine hydrostatische Metall-Liederung kann nach Art eines von G. Krauss angegebenen Locomotivkolbens aus zwei aufgeschnittenen Metallringen gebildet werden, welche, mit nur sehr schwachem Zwange in den Cylinder passend, mit versetzten Fugen so in die Nuth des Kolbens neben einander eingelegt sind, dass die Summe ihrer Breiten, d. i. die Dimension b in Gl. (1) etwas kleiner ist, als die Breite der Nuth, ihre inneren Durchmesser aber etwas grösser sind, als der Kolbendurchmesser in der Nuth. Indem dann der Dampf diese Liederungsringe im Sinne der Kolbenbewegung gegen den vorderen Rand der Nuth drückt, kann er zwischen sie und die cylindrische Nuthfläche eindringen, um sie zugleich radial auswärts gegen die Cylinderwand zu drücken.)

Bei elastischen Liederungen wird der Druck des Liederungskörpers L gegen das nicht mit ihm zu einem Gliede verbundene Element des Prismenpaares K, C durch seine Elasticität vermittelt, entsprechend der Deformation dieses Körpers L bei seiner Einzwängung zwischen K und C. Indem aber diese Deformation durch die unvermeidliche Abnutzung sich ändert, ändert sich damit auch der specifische Druck p in der Liederungsfläche F und somit die entsprechende Reibung auf solche Weise, dass sie sich einer rationellen Berechnung gänzlich entzieht. Für die verschiedenen Arten von Maschinen, bei denen sie von wesentlichem Einflusse ist, muss sie erfahrungsmässig geschätzt werden.

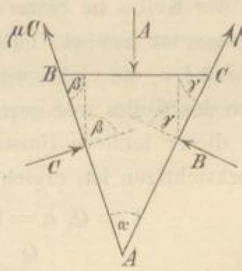
Dasselbe gilt von der unter ähnlichen Umständen stattfindenden Stopfbüchsenreibung, nämlich von der Reibung zwischen einer cylindrischen Stange und der Packung einer Stopfbüchse, wodurch sie geführt und zugleich eine Flüssigkeit am Entweichen längs der Berührungsfläche möglichst gehindert werden soll.

§. 68. **Beispiel.**

Bei Getrieben mit prismatisch gepaarten Gliedern kann der Arbeitsverlust durch Reibung verhältnissmässig sehr gross, folglich der Wirkungsgrad $\eta =$ dem Verhältnisse der Arbeit N des Nutzwiderstandes zur Arbeit L der treibenden Kraft (§. 65) sehr klein werden, besonders wenn die Reibung der betreffenden Prismenpaare nicht nur von indifferenten Kräften (wie z. B. die Kolbenreibung bei elastischer Liederung von der Elasticität des Liederungskörpers), sondern vom Nutzwiderstande herrührt, indem sie proportional demselben zunimmt. Als Beispiel diene die Keilkette a, b, c (Fig. 38, §. 34) unter der Voraussetzung, dass bei Feststellung des Gliedes c das Glied b entgegen einem Nutzwiderstande Q verschoben werden soll durch eine auf die obere (freie) Fläche des Keils a wirkende Kraft P, die rechtwinklig gegen die Schubrichtung des Prismenpaares b, c und somit gegen Q gerichtet sei. Es handelt sich um das Verhältniss dieser Kräfte P, Q und um den Wirkungsgrad η des Getriebes ($=$ dem Verhältnisse der Arbeit von Q zur gleichzeitigen Arbeit von P) mit Rücksicht auf die Reibungen der drei Prismenpaare, deren betreffende Reibungscoefficienten einander gleich $= \mu$ vorausgesetzt werden.

Zu dem Ende werde zunächst das Gleichgewicht der Kräfte an einem einzelnen Keil a betrachtet, indem dessen Querschnitt im Allgemeinen als ein beliebiges Dreieck ABC, Fig. 38, mit den Winkeln α, β, γ beziehungsweise an den Ecken A, B, C vorausgesetzt wird. Dieselben Buchstaben A, B, C mögen zugleich Kräfte bezeichnen, die von aussen her normal gegen die Seitenflächen BC, CA und AB auf den Keil ausgeübt werden, B und C als Widerstände zweier anderer Körper b und c, mit denen der Keil a prismatisch gepaart ist und längs welchen er beziehungsweise

Fig. 88.



im Sinne CA und BA in relativer Bewegung begriffen sei, so dass die betreffenden Reibungen, bei Voraussetzung gleicher Reibungscoefficienten $= \mu B$ und μC, als nach AC und AB, Fig. 88, gerichtete Kräfte auf den

Keil wirken. Dem Gleichgewichte aller Kräfte entsprechen dann die Gleichungen:

$$B\,(\sin\gamma - \mu\cos\gamma) = C\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)$$

und

$$A = B\,(\cos\gamma + \mu\sin\gamma) + C\,(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

Aus letzterer folgt mit Rücksicht auf die andere Gleichung:

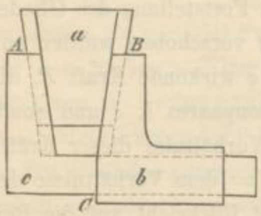
$$\begin{aligned} A\,(\sin\beta - \mu\cos\beta) &= B\,[(\sin\beta - \mu\cos\beta)(\cos\gamma + \mu\sin\gamma) \\ &\qquad + (\sin\gamma - \mu\cos\gamma)(\cos\beta + \mu\sin\beta)] \\ &= B\,[(1-\mu^2)\sin(\beta+\gamma) - 2\,\mu\cos(\beta+\gamma)] \end{aligned}$$

und stehen somit wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ die Kräfte A, B, C in der Beziehung:

$$\frac{A}{(1-\mu^2)\sin\alpha + 2\,\mu\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\beta - \mu\cos\beta} = \frac{C}{\sin\gamma - \mu\cos\gamma} \;.\;.\; (1).$$

Ist nun bei dem Keilgetriebe a, b, c (Fig. 38) der Zuschärfungswinkel des gleichschenkligen Keils a, d. i. der spitze Winkel, unter dem die Schubrichtungen der Prismenpaare c, a und a, b gegen einander geneigt sind, $= 2\,\sigma$, und wird mit B der Normaldruck zwischen den Gliedern a und b (gleich demselben zwischen a und c) bezeichnet, so folgt aus Gl. (1) mit

Fig. 38.



$$A = P,\quad \alpha = 2\,\sigma,\quad \beta = \gamma = 90^0 - \sigma:$$

$$\frac{B}{P} = \frac{\cos\sigma - \mu\sin\sigma}{(1-\mu^2)\sin 2\,\sigma + 2\,\mu\cos 2\,\sigma} \;.\;.\; (2).$$

In Betreff der Beziehung zwischen den Kräften B und Q am Gliede b ist letzteres als ein Keil zu betrachten, dessen Zuschärfungswinkel (der Angriffsfläche von Q gegenüber liegend) $= 90^0 - \sigma$ und dessen der Angriffsfläche von B gegenüber liegender Winkel $= 90^0$ ist, der sich aber nicht (wie der Keil a im Sinne der Kraft P) im Sinne der Kraft Q, sondern entgegengesetzt bewegt, entsprechend solchen Reibungen der Prismenpaare a, b und b, c, die nicht (wie die Reibungen in Fig. 88) von der Zuschärfungskante des Keiles weg gerichtet, sondern gegen sie hin gerichtet sind. Indem dieser letztere Umstand durch Umkehrung des Vorzeichens von μ zu berücksichtigen ist, ergiebt sich aus Gl. (1) mit

$$A = Q,\ \alpha = 90^0 - \sigma,\ \beta = 90^0 \text{ und } -\mu \text{ statt } \mu:$$

$$\frac{Q}{B} = (1-\mu^2)\cos\sigma - 2\,\mu\sin\sigma \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\frac{Q}{P} = \frac{[(1-\mu^2)\cos\sigma - 2\,\mu\sin\sigma]\,(\cos\sigma - \mu\sin\sigma)}{(1-\mu^2)\sin 2\,\sigma + 2\,\mu\cos 2\,\sigma}$$

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{[(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu](1-\mu\,tg\,\sigma)}{1-\mu^2+\mu\,(cotg\,\sigma-tg\,\sigma)}$$

wegen $$2\,cotg\,2\,\sigma=\frac{2}{tg\,2\,\sigma}=\frac{1-tg^2\,\sigma}{tg\,\sigma}=cotg\,\sigma-tg\,\sigma,$$

also auch $$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu}{1+\mu\,cotg\,\sigma}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2-2\,\mu\,tg\,\sigma}{\mu+tg\,\sigma}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu\,tg\,\sigma-\mu\,(\mu+tg\,\sigma)}{\mu+tg\,\sigma}$$

oder mit $\mu=tg\,\varrho$ (§. 66):

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(4).$$

Hiernach ist, wenn P_0 den Werth von P bedeutet, der $\varrho=0$, also $\mu=0$ entsprechen würde:

$$\frac{Q}{P_0}=\frac{1}{2}\,cotg\,\sigma.$$

Die gleichzeitigen Arbeiten von P_0 und Q sind einander gleich, da ohne Reibung weder Verlust noch Gewinn an Arbeit stattfindet, und es ist also der Wirkungsgrad η des Keilgetriebes = dem Verhältnisse der gleichen Wegen des Keils a entsprechenden Arbeiten von P_0 und P = dem Verhältnisse dieser Kräfte selbst:

$$\eta=\frac{P_0}{P}=tg\,\sigma\,[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(5).$$

Wenn an dieses Keilgetriebe die Forderung der **Selbstsperrung**, d. h. die Forderung gestellt wird, dass der Keil a nicht zurückgehe, wenn die Wirkung der Kraft P unterbrochen wird (wie es z. B. periodisch der Fall ist, wenn bei einer Keilpresse die Kraft P stossweise von einer niederfallenden Stampfe ausgeübt wird), so muss sich nach Gl. (2) die Kraft P negativ ergeben, die bei irgend einer augenblicklichen Grösse von B erforderlich wäre, um den Rückgang des Keils zu hindern. Da solchem Rückgange entgegengesetzt gerichtete Reibungen entsprächen, so gilt für fragliche Kraft die Gleichung (2) mit $-\mu$ statt μ:

$$\frac{B}{P}=\frac{cos\,\sigma+\mu\,sin\,\sigma}{(1-\mu^2)\,sin\,2\,\sigma-2\,\mu\,cos\,2\,\sigma}$$

und ist sie demnach negativ nur im Falle:

$$tg\,2\,\sigma<\frac{2\,\mu}{1-\mu^2}\text{ oder }tg\,2\,\sigma<tg\,2\,\varrho,\text{ d. i. }\sigma<\varrho.$$

Vorbehaltlich der Erfüllung dieser Bedingung ist η nach Gl. (5) um so grösser, je grösser σ, vorausgesetzt dass auch der Reibungscoefficient einen gewissen Werth nicht überschreitet. Denn mit $tg\,\sigma = x$ und $tg\,\varrho = \mu$ folgt aus Gl. (5):

$$\eta = x\left(\frac{1-\mu x}{\mu + x} - \mu\right) = \frac{(1-\mu^2)\,x - 2\,\mu x^2}{\mu + x}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{(\mu + x)(1-\mu^2 - 4\,\mu x) - (1-\mu^2)\,x + 2\,\mu x^2}{(\mu + x)^2}$$

$$= \mu\,\frac{1-\mu^2 - 4\,\mu x - 2\,x^2}{(\mu + x)^2},$$

mit $x < \mu$ folglich $\qquad \dfrac{d\eta}{dx} > \mu\,\dfrac{1-7\,\mu^2}{(\mu + x)^2}$

und somit $\dfrac{d\eta}{dx}$ positiv, sofern nur $\mu < \sqrt{\dfrac{1}{7}}$, d. i. $\mu < 0{,}38$ ist.

Der grösstmögliche Werth, den η haben kann, wenn $\mu < 0{,}38$ (ungefähr $\varrho < 21^0$) und $\sigma < \varrho$ ist, ergiebt sich aus Gl. (5) mit $\sigma = \varrho = arctg\,\mu$:

$$max\,\eta = \mu\left(\frac{1-\mu^2}{2\,\mu} - \mu\right) = \frac{1-3\,\mu^2}{2}.$$

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung.*

§. 69. Allgemeine Principien ihrer Berechnung.

Die Zapfen (Wellzapfen), nämlich die Theile rotirender Wellen, mit denen sie in den Lagern gestützt und damit zu einem Drehkörperpaare gepaart sind, können unterschieden werden in Spurzapfen und Tragzapfen, jenachdem der Zapfendruck P, d. i. der resultirende Druck zwischen Zapfen und Lager in die Zapfenaxe (Wellenaxe) fällt oder sie rechtwinklig schneidet; bei anders gerichtetem Zapfendrucke würde derselbe in zwei Componenten zerlegt werden können, beziehungsweise längs der Axe und senkrecht dazu gerichtet, und der Zapfen dann diesen Componenten entsprechend zugleich den Charakter als Spur- und als Tragzapfen haben. In allen Fällen handelt es sich um die Berechnung des Reibungsmomentes M in Bezug auf die Axe, das der relativen Drehung des Zapfens gegen das Lager um diese Axe entspricht. Dieses Moment, das auch als Grösse einer am Hebelarme = 1 wirkenden Kraft zu betrachten ist, giebt bei Multiplication mit $2\,\pi$ die Reibungsarbeit pro Umdrehung, bei Multiplication mit

* Siehe: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 200.

der Winkelgeschwindigkeit der Welle dagegen die Reibungsarbeit pro Zeiteinheit, d. i. die Arbeitstärke der Zapfenreibung.

Die Reibungsfläche $= F$ (Berührungsfläche zwischen Zapfen und Lagerpfanne) ist irgend eine Umdrehungsfläche. Ihre Meridianlinie sei auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der x und y bezogen so, dass die x-Axe in der Zapfenaxe liegt; a und b seien die zwei äussersten Werthe von y, d. h. die Radien der die Reibungsfläche begrenzenden Parallelkreise. Ist ferner p der specifische Normaldruck in einem Punkte der Reibungsfläche und μ der Reibungscoefficient, so ist die Reibung in einem Flächenelemente $dF = \mu p\, dF$ und ihr Moment in Bezug auf die Axe $= \mu p\, y\, dF$, also

$$M = \mu \int p y\, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Darin ist p an die Bedingung gebunden, dass die Summe der im Sinne des Zapfendruckes P genommenen Componenten der elementaren Normaldrucke $= P$, also

$$\int p \cos\varphi\, dF = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

sein muss, das Integral wie das vorige über die ganze Reibungsfläche ausgedehnt gedacht, und unter φ den Winkel zwischen den Richtungen von p und P verstanden.

Damit indessen p durch Gl. (2) bestimmt sei und dann auch die Integration von Gl. (1) bei gegebener Gestalt der Reibungsfläche ausgeführt werden könne, muss in Betreff des Vertheilungsgesetzes des Normaldruckes in der Fläche F eine Annahme gemacht werden. Die einfachste solche Annahme besteht darin, p als Constante vorauszusetzen, womit sich ergiebt:

$$M = \mu p \int y\, dF \text{ mit } p = \frac{P}{\int \cos\varphi\, dF} = \frac{P}{F'} \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

unter F' die Projection der Reibungsfläche F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene verstanden. Diese Annahme, die zugleich einen constanten Werth des nach P gerichteten Druckes in der Projection F', und zwar $= p$ pro Flächeneinheit von F' zur Folge hat, ist in Ermangelung genügender Anhaltspunkte für eine andere in der That am natürlichsten für einen neuen Zapfen oder einen solchen, der nur zeitweilig in relativer Drehung gegen das Lager befindlich und deshalb keiner merklichen Abnutzung unterworfen ist, indem dann thatsächlich die Druckvertheilung in der Berührungsfläche von elastischen Deformationen und von zufälligen Abweichungen der Zapfen- und Lageroberfläche von ihrer (bei $P = 0$) vorausgesetzten Congruenz, überhaupt von Umständen abhängt, die sich einer zutreffenden Beurtheilung und Berücksichtigung bei der in Rede stehenden Rechnung entziehen. Handelt es sich aber um einen

Zapfen, der sich in anhaltender Rotation im Lager befindet, d. h. um einen solchen, der mit Rücksicht auf die dann stattfindende merkliche Abnutzung beider Theile als eingelaufener Zapfen bezeichnet werde, so ist das Vertheilungsgesetz von p in der Reibungsfläche wesentlich abhängig von dem Gesetze, nach dem diese Abnutzung stattfindet, wie folgende Ueberlegung erkennen lässt.

Die Grösse der Reibung in einem Punkte der Reibungsfläche ist proportional p, also die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional dem Producte aus p und der relativen Geschwindigkeit, mit welcher im fraglichen Punkte die beiden sich berührenden Flächen an einander gleiten. Diese Geschwindigkeit ist aber proportional dem Abstande y des Punktes von der Rotationsaxe, mithin die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional py. Sie hat die Verwandlung eines ihr an Grösse gleichen äusseren in inneres theils freies, theils gebundenes Arbeitsvermögen zur Folge, nämlich theils Erwärmung des Zapfens und seines Lagers, theils Abnutzung (Ueberwindung der Cohäsion in oberflächlichen Schichten) dieser beiden Elemente. In welchem Verhältnisse diese Theilung der Reibungsarbeit in freies und gebundenes inneres Arbeitsvermögen stattfindet, ist hier gleichgültig, wesentlich dagegen die Frage, ob das Verhältniss in allen Elementen der Reibungsfläche dasselbe sei oder nicht. Sofern es aber ohne Zweifel hauptsächlich vom beiderseitigen Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper abhängt und diese beiden Umstände in allen Elementen der Reibungsfläche gleich, auch andere etwa influirende Umstände wenigstens nicht sehr verschieden sind, so ist die zunächst liegende Annahme die wahrscheinlich zutreffendste, dass in allen Elementen der Reibungsfläche ein gleicher verhältnissmässiger Theil der ganzen Reibungsarbeit zur Abnutzung verwendet werde, der demnach pro Zeiteinheit auch proportional py ist.

Ist a die während einer gewissen Zeit in einem Punkte der Reibungsfläche erfolgende resultirende Abnutzung, normal zur Fläche gemessen, so besteht dieselbe aus zwei Theilen: der Abnutzung a_1 des Zapfens und derjenigen a_2 des Lagers, und die zur Abnutzung a verwendete Arbeit ist proportional $m_1 a_1 + m_2 a_2$, unter m_1 und m_2 Constante verstanden, die vom Material des Zapfens resp. der Lagerpfanne abhängen. Die Grösse des Verhältnisses $\frac{a_1}{a_2}$, welches wegen der im Allgemeinen grösseren Härte des Zapfens < 1 sein wird, ist hier gleichgültig; wesentlich dagegen ist wieder die Frage, ob es in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross sei, und diese Frage scheint auch hier bejaht werden zu müssen, weil das fragliche

Verhältniss im Wesentlichen kaum von anderen Umständen als von der specifischen Abnutzungsfähigkeit beider Materialien abhängig sein kann. Setzt man demnach $a_1 = \alpha_1 a$ und $a_2 = \alpha_2 a$, unter α_1 und α_2 wieder zwei vom Zapfen- resp. Lagermaterial abhängige Constante verstanden, so wird die zur resultirenden Abnutzung a erforderliche Arbeit

$$\text{proportional } (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)\, a, \text{ also proportional } a,$$

und da die dazu nach Obigem in der Zeiteinheit verwendbare Arbeit auch proportional py ist, so ergiebt sich die resultirende normale Abnutzung pro Zeiteinheit in jedem Punkte der Reibungsfläche proportional py.

Wäre nun p nach der gewöhnlichen Annahme in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross, auch bei einem eingelaufenen, in der Abnutzung begriffenen Zapfen, so wäre letztere in den verschiedenen Punkten der Reibungsfläche normal dazu gemessen lediglich proportional y, was offenbar unmöglich ist. Der Spurzapfen einer stehenden Welle und seine Lagerpfanne (Spurplatte) z. B., die sich ursprünglich in einer ebenen Fläche berührten, müssten sich dann unter der Einwirkung des nach der Axe gerichteten Druckes P und der entsprechenden Reibung so abnutzen, dass sie durch Kegelflächen begrenzt werden, die sich nur in ihren Mittelpunkten (Spitzen) berühren; der cylindrische Tragzapfen einer liegenden Welle und seine Pfanne würden unter der Einwirkung des zur Axe rechtwinkligen Druckes P bei der Abnutzung zwar cylindrisch bleiben, aber während der Zapfen einen kleineren Radius erhielte, würde die Pfanne nach einem grösseren abgerundet werden, so dass beide sich nachher nur in einer geraden Linie berührten. In jenem Punkte des stehenden resp. dieser Linie des liegenden Zapfens müsste nun der ganze Druck concentrirt sein im Widerspruche mit der Annahme selbst, die dieses Resultat herbeigeführt hat, abgesehen davon, dass schon die Vorstellung des Ueberganges zu dem fraglichen Zustande stellenweiser Entfernung der Oberflächen von einander, nachdem sie ursprünglich in allseitiger Berührung waren, absurd ist; wenn auch der anfängliche Normaldruck an einer gewissen Stelle in Folge verhältnissmässig grösserer Abnutzung daselbst abnehmen mag, so kann er doch nicht bis Null abnehmen, weil damit die Abnutzung an dieser Stelle aufhörte, was bei der fortschreitenden Abnutzung an anderen Stellen unmöglich ist.

Hieraus ist ersichtlich, dass mit der Abnutzbarkeit des Zapfens und seines Lagers nicht nur die Annahme eines constanten Werthes von p in Widerspruch wäre, sondern dass zur Berechnung des Reibungsmomentes eingelaufener Zapfen überhaupt keine Annahme hinsichtlich der Vertheilung dieses Normaldruckes gemacht werden darf. Die Abnutzung selbst bedingt eben solche Vertheilung, die sich aus der Erwägung ergiebt, dass, indem sich der Zapfen im Sinne des Druckes P in die Lagerpfanne einfrisst, die Berührung in allen Punkten stets erhalten bleibt, woraus folgt, dass die resultirende Abnutzung, im Sinne von P gemessen, für alle Punkte der Reibungsfläche gleich gross sein muss. Dann ist aber die normale Abnutzung proportional $\cos\varphi$, und da sie nach Obigem auch proportional py ist, so folgt:

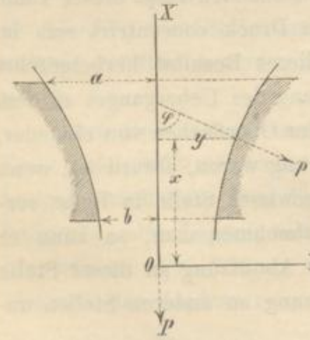
$$\frac{py}{\cos\varphi} = Const. = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Substitution des hieraus sich ergebenden Ausdruckes von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ in Gl. (1) liefert für M zunächst einen Ausdruck, der die Constante C enthält, deren Werth dann aus Gl. (2) durch Substitution von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ zu ermitteln ist:

$$M = \mu\, C \int \cos\varphi\, dF = \mu\, C F' \text{ mit } C = \frac{P}{\int \frac{\cos^2\varphi}{y}\, dF} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

§. 70. Reibungsmoment von Spurzapfen.

Fig. 89.



Die Reibungsfläche wird hier am einfachsten in ringförmige Flächenelemente dF zerlegt durch Ebenen, die in den Abständen dx normal zur x-Axe sind; indem sie die Meridianlinien in ihre Bogenelemente ds zerlegen, ist

$$dF = 2\pi y\, ds.$$

A. Neuer Spurzapfen.

Durch Substitution des vorstehenden Ausdruckes von dF sowie mit

$$F' = \pi(a^2 - b^2)$$

ergiebt sich nach Gl. (3) des vorigen Paragraphen das Reibungsmoment:

$$M = \frac{2\mu P}{a^2 - b^2} \int y^2\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

woraus dann leicht die Werthe von M für besondere Fälle zu erhalten sind.

1) Für einen abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche πb^2 erhält man mit $ds = \frac{dy}{\sin\alpha}$, unter α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe der Kegelfläche verstanden, und indem das Integral in Gl. (1) zwischen den Grenzen $y = b$ und $y = a$ genommen wird:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \frac{1}{\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

insbesondere für einen ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

für einen conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a}{\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und für einen ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P a \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

2) Ist der abgestumpft-kegelförmige Zapfen mit Reibung an der Endfläche πb^2 behaftet, so mag zwar die Annahme eines constanten, also namentlich auch für die conische Umfläche und die ebene Endfläche gleich grossen Werthes von p in erhöhtem Grade unsicher, weil eine kaum erreichbare Genauigkeit der Bearbeitung voraussetzend sein; wird sie aber gleichwohl beibehalten, so ergiebt sich M als Summe von zwei Bestandtheilen, von denen der erste aus Gl. (5) mit $\frac{b^2}{a^2} P$ statt P und b statt a, der zweite aus Gl. (2) mit $\frac{a^2 - b^2}{a^2} P$ statt P hervorgeht:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu P}{a^2}\left(b^3 + \frac{a^3 - b^3}{\sin\alpha}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

3) Ist bei einem kugelförmigen Zapfen r der Radius der Kugelfläche, α das Maximum von φ, nämlich der spitze Winkel zwischen der x-Axe (Fig. 89) und den nach den äussersten Punkten der Reibungsfläche gezogenen Radien, so folgt aus Gl. (1) mit

$$a = r\sin\alpha,\quad b = 0,\quad y = r\sin\varphi,\quad ds = r\,d\varphi:$$

$$M = \frac{2\mu P}{r^2 \sin^2\alpha} r^3 \int_0^\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi = \mu P r \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \ldots\ldots (7),$$

insbesondere z. B. für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \mu P r = \frac{4}{7} \mu P r \ldots\ldots (8)$,

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M = \frac{\pi}{2} \mu P r = \frac{11}{7} \mu P r \ldots\ldots\ldots (9)$.

4) Für den Schiele'schen Zapfen, dessen Meridianlinie dadurch charakterisirt ist, dass ihre Tangenten (zwischen den Durchschnittspunkten mit der x-Axe und den Berührungspunkten gemessen) gleiche Länge t haben, ist $ds = \frac{t}{y} dy$, also

$$M = \frac{2 \mu P}{a^2 - b^2} t \int_b^a y\, dy = \mu P t \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

somit unabhängig von der Länge des vom Lager umschlossenen Zapfenstücks.

B. Eingelaufener Spurzapfen.

Das Reibungsmoment sei zum Unterschiede hier mit M' bezeichnet; für den kegelförmigen und den kugelförmigen Zapfen behalte α die oben angegebenen Bedeutungen. Aus Gl. (5) im vorigen §. folgt dann mit

$$F' = \pi (a^2 - b^2), \quad dF = 2 \pi y\, ds, \quad \cos \varphi = \frac{dy}{ds}:$$

$$M' = \mu C \pi (a^2 - b^2) \text{ mit } C = \frac{P}{2 \pi \int \cos \varphi\, dy},$$

also
$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a^2 - b^2}{\int \cos \varphi\, dy} \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

1) Für den abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche ergiebt sich hieraus mit

$\cos \varphi = \sin \alpha$, also $\int \cos \varphi\, dy = (a - b) \sin \alpha$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a + b}{\sin \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

insbesondere für den ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P (a + b) \ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a}{\sin \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

für den ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

In den zwei letzten Fällen vermindert sich das Reibungsmoment durch die Abnutzung, wie die Vergleichung mit den Ausdrücken (4) und (5) erkennen lässt, im Verhältnisse:

$$M : M' = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 1 : \frac{3}{4}.$$

2) Sind bei dem abgestumpft-kegelförmigen Zapfen mit Reibung an der Endfläche P_1 und P_2 die Bestandtheile von P, die beziehungsweise die Reibungen an der Endfläche und der kegelförmigen Umfläche verursachen, M_1 und M_2 die bezüglichen Reibungsmomente, so ist

$$M_1 = \frac{1}{2} \mu P_1 b \text{ nach Gl. (15)}, \quad M_2 = \frac{1}{2} \mu P_2 \frac{a + b}{\sin \alpha} \text{ nach Gl. (12)},$$

und da diese Momente sich wie die Inhalte der gleichzeitig von beiden Flächen aus abgeschliffenen Körperschalen verhalten müssen:

$$M_1 : M_2 = P_1 b : P_2 \frac{a + b}{\sin \alpha} = b^2 : a^2 - b^2,$$

so folgt daraus $P_1 : P_2 = b : (a - b) \sin \alpha$,

$$P_1 = \frac{b}{b + (a - b) \sin \alpha} P, \quad P_2 = \frac{(a - b) \sin \alpha}{b + (a - b) \sin \alpha} P,$$

also $$M' = \frac{1}{2} \mu \left(P_1 b + P_2 \frac{a + b}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{2} \mu P \frac{a^2}{b + (a - b) \sin \alpha} \quad \ldots \quad (16).$$

3) Für den kugelförmigen Zapfen ist wegen $y = r \sin \varphi$:

$$dy = r \cos \varphi \, d\varphi, \quad \int \cos \varphi \, dy = r \int_0^\alpha \cos^2 \varphi \, d\varphi = r \frac{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

also nach Gl. (11) mit $a = r \sin \alpha$, $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{r \frac{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{2}} = \mu P r \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad \ldots \quad (17),$$

insbesondere für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M' = \frac{2}{\pi + 2} \mu P r = \frac{7}{18} \mu P r \quad \ldots \quad (18)$,

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M' = \frac{2}{\pi} \mu P r = \frac{7}{11} \mu P r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$.

Die Vergleichung mit obigen Ausdrücken (8) und (9) lässt erkennen, dass

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ sich } M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2 - 4} = 1 : 0{,}68$$

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sich } M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2} = 1 : 0{,}41$$

verhält, dass also namentlich bei diesem letzteren kugelförmigen Spurzapfen, dessen Reibungsfläche eine halbe Kugelfläche ist, durch das Einlaufen eine Verminderung des Reibungsmoments auf weniger als die Hälfte des ursprünglichen Werthes zu erwarten ist.

4) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

$$\int \cos\varphi \, dy = \int \frac{y}{t}\, dy = \frac{a^2 - b^2}{2\,t},$$

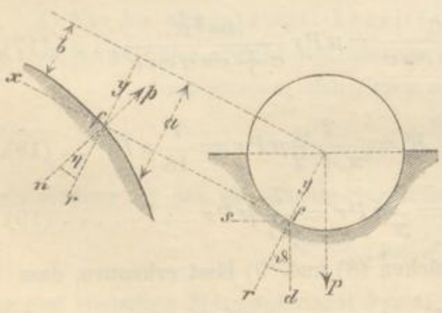
nach Gl. (11) somit $\qquad M' = \mu P t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20).$

Dieser Zapfen hat also die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, dass sein Reibungsmoment sich durch die Abnutzung nicht verändert, indem der Normaldruck immer gleichförmig in der Berührungsfläche vertheilt bleibt.

§. 71. Reibungsmoment von Tragzapfen.

Der Zapfen sei ringsum vom Lager umschlossen, so dass als Reibungsfläche F der Theil seiner Oberfläche zu rechnen ist, der (ausser von den Parallelkreisen mit den Radien a und b) von der zum Zapfendrucke P senkrechten Meridianebene begrenzt wird, indem sie von letzterer aus im Sinne von P gelegen ist. Der Inhalt jenes Meridianschnittes zwischen den Durchmessern $2\,a$ und $2\,b$ ist dann $= F' =$ der Projection von F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene. Die Reibungsfläche F ist hier in Elemente dF mit zwei unendlich kleinen Dimensionen zu zerlegen, und zwar am natürlichsten durch eine Schaar von Meridianebenen nebst einer Schaar von Ebenen, die in den Abständen dx, den Bogenelementen ds der Meridianlinie entsprechend, zur Zapfenaxe normal sind.

Fig. 90.



Vom Punkte f (Fig. 90) eines so erhaltenen Flächenelementes dF aus werde die Gerade

fn normal zur Reibungsfläche,
fr im Sinne des Radius des betreffenden Parallelkreises,
fd im Sinne des Zapfendruckes P,
fx parallel der Zapfenaxe

gezogen und der Winkel nfr mit η, rfd mit ϑ bezeichnet, während der Winkel $nfd = \varphi$ ist. Es ist dann

$$\cos\varphi = \cos\eta \cos\vartheta \text{ und } dF = y\,d\vartheta\,ds \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn ein solcher Tragzapfen nicht cylindrisch ist, so kommt ausser dem Reibungsmoment M noch ein anderer Umstand in Betracht. Denkt man nämlich die elementaren Normalpressungen der Reibungsfläche in je zwei Componenten zerlegt nach den Richtungen rf und xf, erstere weiter in je zwei Componenten nach df und senkrecht dazu nach sf, so sind (unter entsprechender Compression des Zapfens) die nach df gerichteten Druckcomponenten mit P, die nach sf gerichteten unter sich im Gleichgewichte. Die nach xf gerichteten Componenten aber setzen sich zu einer Resultanten $A =$ ihrer Summe:

$$A = \int p \sin \eta \, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zusammen, womit der Zapfen aus dem Lager herauszugleiten strebt, oder womit die ganze Welle im Sinne ihrer Axe in das Lager am anderen Ende gedrückt wird, wenn nicht dieser andere Zapfen in gleicher Weise einen entgegengesetzt gerichteten axialen Druck A_1 verursacht, so dass die Welle thatsächlich nur mit der Differenz beider Kräfte A, A_1 gegen das eine oder andere Lager gedrückt wird; der Zapfen des letzteren ist dann mit einem zusätzlichen Reibungsmoment als Spurzapfen behaftet, das nach der bezüglichen Formel im vorigen §. zu berechnen ist, indem darin für P jene Differenz der Kräfte A, A_1 substituirt wird.

A. Neuer Tragzapfen.

Mit $dF = y\, d\vartheta\, ds$ ergiebt sich für denselben aus Gl. (3) in §. 69:

$$M = \mu \frac{P}{F'} \iint y^2 \, d\vartheta \, ds = \mu \frac{P}{F'} \int y^2 \, ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \pi \mu \frac{P}{F'} \int y^2 \, ds \quad . . (3)$$

sowie nach Gl. (2):

$$A = \frac{P}{F'} \iint y \sin \eta \, d\vartheta \, ds$$

oder wegen $\sin \eta \, ds = dy$:

$$A = \frac{P}{F'} \int y \, dy \int d\vartheta = \pi \frac{P}{F'} \int y \, dy = \frac{\pi}{2} P \frac{a^2 - b^2}{F'} \quad . . . . . (4).$$

1) Für einen cylindrischen Zapfen vom Radius r und von der Länge l (insoweit er vom Lager umschlossen wird) ist

$$a = b = y = r, \quad F' = 2rl, \quad \int y^2 \, ds = r^2 l,$$

also nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2} \mu P r \text{ und } A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

2) Wenn bei dem **kegelförmigen Zapfen** wieder α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe bedeutet, so ist

$$F' = (a+b)\,l = (a+b)\,\frac{a-b}{tg\,\alpha} = \frac{a^2-b^2}{tg\,\alpha}$$

und
$$\int y^2\,ds = \frac{1}{sin\,\alpha}\int y^2\,dy = \frac{a^3-b^3}{3\,sin\,\alpha},$$

also
$$M = \frac{\pi}{3}\,\mu P\,\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\,\frac{1}{cos\,\alpha} \text{ und } A = \frac{\pi}{2}\,P\,tg\,\alpha \;\ldots\ldots\; (6).$$

Insbesondere für einen conischen Spitzzapfen ist $b=0$, also

$$M = \frac{\pi}{3}\,\mu P\,\frac{a}{cos\,\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\; (7).$$

3) Bei dem **Schiele'schen Zapfen** (siehe vorigen Paragraph) ist

$$ds = \frac{t}{y}\,dy, \text{ also } \int y^2\,ds = t\int y\,dy = t\,\frac{a^2-b^2}{2},$$

damit nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2}\,\mu P\,t\,\frac{a^2-b^2}{F'};\quad A = \frac{M}{\mu t} \;\ldots\ldots\ldots\; (8).$$

Für den Meridianschnitt F' erhält man:

$$F' = 2\int y\,dx = 2\int y\,cos\,\eta\,ds = 2\,t\int cos\,\eta\,dy$$

oder wegen $y = t\,sin\,\eta$, also $dy = t\,cos\,\eta\,d\eta$:

$$F' = 2\,t^2\int cos^2\eta\,d\eta = t^2(\eta + sin\,\eta\,cos\,\eta),$$

zu nehmen zwischen den Grenzen $\eta = arc\,sin\,\frac{b}{t}$ und $\eta = arc\,sin\,\frac{a}{t}$, also

$$F' = t^2\left(arc\,sin\,\frac{a}{t} - arc\,sin\,\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}}\right) .\; (9).$$

B. Eingelaufener Tragzapfen.

Die Grössen M und A seien zum Unterschiede hier mit M' und A' bezeichnet. Nach Gl. (5), §. 69, sowie mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen (1) und wegen $cos\,\eta\,ds = dx$ ist dann

$$\frac{P}{C} = \int\frac{cos^2\varphi}{y}\,dF = \iint cos^2\eta\,cos^2\vartheta\,d\vartheta\,ds = \int cos\,\eta\,dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$C = \frac{2}{\pi}\,\frac{P}{\int cos\,\eta\,dx}$$

$$M' = \mu C F' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{F'}{\int \cos \eta \, dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

ferner, da nach Gl. (4) in §. 69:

$$p = C \frac{\cos \varphi}{y} = C \frac{\cos \eta \cos \vartheta}{y}$$

ist, nach Gl. (2) mit $dF = y \, d\vartheta \, ds$ und $\cos \eta \, ds = dx$:

$$A' = C \iint \sin \eta \cos \eta \cos \vartheta \, d\vartheta \, ds = C \int \sin \eta \, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta = 2 \, C \int \sin \eta \, dx$$

oder mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von C:

$$A' = \frac{4}{\pi} P \frac{\int \sin \eta \, dx}{\int \cos \eta \, dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Hiernach und mit den vorigen Bedeutungen der Buchstaben r, l, α findet man

1) für den cylindrischen Zapfen wegen $\eta = 0$ und $F' = 2 \, r l$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{2 \, r l}{l} = \frac{4}{\pi} \mu P r; \quad A' = 0 \ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Vergleichung mit obigem Ausdrucke (5) ergiebt eine Abnahme des Reibungsmoments in Folge der Abnutzung im Verhältnisse:

$$M : M' = 1 : \frac{8}{\pi^2} = 1 : 0{,}81.$$

2) Für den kegelförmigen Zapfen wird mit $\eta = \alpha$ und $F' = (a + b) \, l$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a + b}{\cos \alpha}; \quad A' = \frac{4}{\pi} P \, tg \, \alpha \ldots\ldots\ldots (13),$$

insbesondere für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a}{\cos \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

und nach Gl. (7): $\quad M : M' = 1 : \frac{6}{\pi^2} = 1 : 0{,}61.$

3) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

$$dx = cotg \, \eta \, dy \text{ und } y = t \sin \eta, \text{ also } dy = t \cos \eta \, d\eta$$

und
$$\int \cos \eta \, dx = t \int \frac{\cos^3 \eta}{\sin \eta} \, d\eta.$$

Darin ist

$$\int \frac{\cos^3 \eta}{\sin \eta} \, d\eta = \int (1 - \sin^2 \eta) \frac{d \sin \eta}{\sin \eta} = ln \sin \eta - \frac{1}{2} \sin^2 \eta$$

zwischen den Grenzen $\sin\eta = \frac{b}{t}$ und $\sin\eta = \frac{a}{t}$ zu nehmen, also

$$\int \cos\eta\, dx = t\left(ln\,\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{t^2}\right).$$

Somit ergiebt sich nach Gl. (10) mit Rücksicht auf den Ausdruck (9) von F':

$$M' = \frac{2}{\pi}\mu P t \frac{arc\,sin\,\frac{a}{t} - arc\,sin\,\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}}}{ln\,\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{t^2}} \quad . (15).$$

Ferner ist:

$$\int \sin\eta\, dx = \frac{1}{t}\int y\, dx = \frac{1}{2}\frac{F'}{t}$$

und deshalb nach Gl. (10) und (11):

$$A' = \frac{2}{\pi}\frac{P}{t}\frac{F'}{\int \cos\eta\, dx} = \frac{M'}{\mu t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

analog obiger Beziehung (8) zwischen A und M.

§. 72. Versuche über Zapfenreibung.

Die betreffenden Versuche beziehen sich ausschliesslich auf cylindrische Tragzapfen. Wird, wie üblich, das Reibungsmoment eines solchen vom Radius r bei dem Zapfendruck P:

$$M = \mu' P r$$

gesetzt, so ergab sich nach älteren Versuchen, insbesondere von Morin, für eiserne Zapfen in Lagern von Gusseisen oder Bronze und bei Anwendung verschiedener Schmiermittel (Oel, Talg, Schweineschmalz) im Durchschnitt etwa:

$$\mu' = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}08$$

je nach der mehr oder weniger sorgfältigen Abwartung bezüglich auf Schmierung.

Neuere Versuche haben diesen Coefficienten meistens erheblich kleiner und zugleich in höherem Grade von den Umständen abhängig ergeben. Bei Versuchen von Waltjen und von Rühlmann mit der Waltjen'schen Reibungswage (sowie auch bei späteren Versuchen von Dr. Lunge) wurde er für Stahlzapfen meistens zwischen 0,01 und 0,04 liegend gefunden. Zugleich ergab sich eine auffallende Abhängigkeit des Coefficienten von der Peripheriegeschwindigkeit v des Zapfens in der Weise, dass er bei einem gewissen Werthe von v (ungefähr 0,4 Mtr. pro Sec.) am kleinsten war und bei abnehmender Geschwindigkeit schneller, bei wachsender langsamer zunahm. Das Minimum von μ' wurde vom Material der Lagerpfanne, vom Schmieröl und vom specifischen Drucke abhängig gefunden, von letzterem übrigens in verschiedenem Sinne bei verschiedenartigen Lagerpfannen.

Durch Versuche über die Zapfenreibung von Eisenbahnwagenaxen, die in den Jahren 1861 und 1862 in der Eisenbahnwerkstätte zu Hannover von Kirchweger angestellt wurden, fand sich jene so eben erwähnte Abhängigkeit des Coefficienten μ' von der Geschwindigkeit nicht bestätigt. Bei Anwendung von Lagerpfannen aus Bronze, Hartblei oder Zinncomposition, geschmiert mit Rüböl oder Cohäsionsöl, zeigte sich μ' für 10 bis 360 Umdrehungen pro Minute fast gleich gross. Uebrigens wurde dieser Coefficient ganz auffallend klein gefunden, nur etwa $= 0,01$ für die Lagerpfannen aus Hartblei oder Zinncomposition resp. $= 0,014$ für Pfannen aus Bronze; doch gelten diese Werthe nur für grössere specifische Belastungen von etwa 20 bis 120 Kgr. pro Quadratcentim. Innerhalb dieser Grenzen hatte die Grösse der Belastung keinen erheblichen Einfluss; bei ihrer weiteren Abnahme bis etwa 2 Kgr. pro Quadratcentim. nahm aber μ' bis zum Dreifachen jener Werthe zu.

Wiederum wesentlich anders waren die Ergebnisse von Versuchen Hirn's. Bei der Unsicherheit, die hiernach mit Rücksicht auf die erhebliche Abweichung ihrer Resultate den seitherigen Versuchen über die Reibung cylindrischer Tragzapfen anhaftet, wird es rathsam sein, den Coefficienten μ' in der Regel nicht kleiner als 0,06 zu veranschlagen, oder den Reibungscoefficienten μ in den Formeln der vorigen Paragraphen wenigstens $= 0,04$, entsprechend:

$$\mu' = \frac{\pi}{2} . 0,04 = 0,063 \text{ nach §. 71, Gl. (5),}$$

$$\mu' = \frac{4}{\pi} . 0,04 = 0,051 \text{ nach §. 71, Gl. (12).}$$

§. 73. **Beispiele.**

1) Das Gewicht einer Turbine sammt Welle und einem darauf sitzenden Zahnrade sei $P = 2500$ Kgr. Wie gross ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Reibung ihres ebenflächig-kreisförmigen Spurzapfens zu veranschlagen, wenn dessen Durchmesser $(2a) = 8$ Centim. ist (entsprechend einem specifischen Drucke in der Reibungsfläche von ungefähr

50 Kgr. pro Quadratcentim.), wenn ferner die Turbine 32 Umdrehungen in der Minute macht bei einem Aufschlagwasserquantum von 0,9 Cubikmtr. pro Secunde und bei 1,5 Mtr. Gefälle?

Der sogenannte absolute Effect, nämlich das dem Gefälle entsprechende Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pro Secunde ist

$$= 1000 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1{,}5 = 1350 \text{ Meterkilogramm.}$$

Setzt man das Reibungsmoment:

$$M = 0{,}04\, Pa = 0{,}04 \,.\, 2500 \,.\, 0{,}04 = 4 \text{ Meterkilogramm,}$$

entsprechend $\mu = 0{,}06$ nach §. 70, Gl. (5)

resp. $\mu = 0{,}08$ nach §. 70, Gl. (15),

jenachdem der Zapfen als neu oder eingelaufen betrachtet wird, so ist, da die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi \,.\, 32}{60} = 3{,}35$$

ist, die Reibungsarbeit pro Secunde:

$$M\omega = 4 \,.\, 3{,}35 = 13{,}4 \text{ Meterkilogramm,}$$

nahe $= 1\,\%$ des absoluten Effects.

2) Der verhältnissmässige Arbeitsverlust, der bei einem Schubkurbelmechanismus (§. 39, Fig. 47) durch die Reibung verursacht wird, sei unter der Voraussetzung auszudrücken, dass die auf den Schieber c abwechselungsweise im Sinne AC und CA (Fig. 47) wirkende Kraft S von constanter Grösse ist. Dieser Mechanismus enthält drei Drehkörperpaare A, B, C, deren Reibungen wie bei cylindrischen Tragzapfen zu beurtheilen sind, und ausserdem das Prismenpaar D mit den Elementen c, d. Indem aber der Druck zwischen den Elementen des Paares A, nämlich der Zapfendruck in den Lagern der Kurbelwelle, in viel höherem Grade durch das Gewicht dieser Welle, als durch die übertragene Kraft verursacht zu werden pflegt, während die Reibungen des Kurbelzapfens B (Radius $= k$), des Schieberzapfens C (Radius $= s$) und des Schiebers in seiner Prismenführung umgekehrt vorzugsweise von der Kraft S herrühren, sollen hier nur die letzteren drei Reibungen, insoweit sie von S abhängig sind, in Betracht gezogen werden, um das Verhältniss m der Summe ihrer Arbeiten, die für eine halbe Umdrehung der Kurbel (dem Uebergange aus einer in die andere der Lagen AB_0, AB_1, Fig. 47, entsprechend) beziehungsweise mit B, C, D bezeichnet seien, zur gleichzeitigen Arbeit von S:

$$m = \frac{B + C + D}{S \,.\, 2a}$$

auszudrücken. Insofern die Drucke zwischen den Elementen der Paare B, C, D und somit die betreffenden Reibungen während der halben Kurbelumdrehung variabel sind, genügt es mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Reibungscoefficienten, jene Veränderlichkeit nur näherungsweise zu berücksichtigen, etwa mit einer solchen Annäherung, wie sie der Vernachlässigung von λ^2 gegen 1 entspricht, unter λ das Verhältniss der Kurbellänge a zur Koppellänge b verstanden, das höchstens $=\frac{1}{4}$ zu sein pflegt. Mit dieser Annäherung kann, wenn, wie in §. 40 mit Bezug auf Fig. 47, der Winkel B_0AB mit α, ACB mit γ bezeichnet wird,

$$\gamma = tg\,\gamma = sin\,\gamma = \lambda\, sin\,\alpha$$

gesetzt werden und, wenn P, K die Componenten der Schubkraft S beziehungsweise normal zur Schieberbahn und im Sinne der Koppel CB bedeuten,

$$P = S\,tg\,\gamma = S\,\lambda\, sin\,\alpha,\quad K = \frac{S}{cos\,\gamma} = \frac{S}{\sqrt{1-\lambda^2 sin^2\alpha}} = S.$$

Mit der aus §. 72 hervorgehenden Bedeutung des Coefficienten μ' ist nun ein Elementarbestandtheil der Arbeit B:

$$dB = \mu' K k\, d(\alpha-\gamma) = \mu' S k\, d(\alpha-\gamma),$$

somit, da bei der halben Kurbelumdrehung sich der Winkel $ABC = \alpha - \gamma$ von 0 bis π ändert,

$$B = \mu' S k \pi.$$

Ferner ist, $d\gamma$ absolut verstanden:

$$dC = \mu' K s\, d\gamma = \mu' S s\, d\gamma,$$

also, da bei der halben Kurbelumdrehung γ von Null bis $max\,\gamma = max\,(\lambda\, sin\,\alpha) = \lambda$ zunimmt und dann wieder bis Null abnimmt,

$$C = 2\,\mu' S s\,\lambda.$$

Was endlich die Arbeit D betrifft, so kann, da der Ausdruck des Normaldruckes $P = S\lambda\, sin\,\alpha$ zwischen dem Schieber und seiner Gleitbahn schon den Factor λ enthält, der dem Drehungswinkel α der Kurbel entsprechende Schieberweg (§. 40, Gl. 3) einfach $= a\,(1 - cos\,\alpha)$, sein Differential $= a\, sin\,\alpha\, d\alpha$ gesetzt werden und somit, wenn μ den betreffenden Reibungscoefficienten bedeutet,

$$dD = \mu P a\, sin\,\alpha\, d\alpha = \mu S a \lambda\, sin^2\alpha\, d\alpha,$$

woraus sich durch Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$ ergiebt:

$$D = \mu S a \lambda \frac{\pi}{2}.$$

Hiernach ist:

$$m = \frac{B + C + D}{S \,.\, 2a} = \left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{a} + \lambda \frac{s}{a}\right)\mu' + \frac{\pi}{4}\lambda\mu.$$

Auf eine ebenso sorgfältige und wirksame Abwartung der Reibungsflächen, wie bei Zapfen in unbeweglichen Lagern, ist in Fällen der hier in Rede stehenden Art nicht zu rechnen, auch nicht auf Verminderung des Arbeitsverlustes durch das Einlaufen von Zapfen, sofern damit, wie hier, der wechselnden Kraftrichtung wegen ein zu periodischen Stössen Veranlassung gebender todter Gang verbunden ist. Setzt man deshalb etwa $\mu = 0{,}07$ und $\mu' = \frac{\pi}{2}\mu = 0{,}11$ nach §. 71, Gl. (5), so wird

$$m = \frac{0{,}173\,k + 0{,}11\,\lambda s}{a} + 0{,}055\,\lambda,$$

insbesondere mit durchschnittlich $s = \frac{3}{4}k$ und $\lambda = \frac{1}{5}$:

$$m = 0{,}19\,\frac{k}{a} + 0{,}011.$$

Schliesslich mag bemerkt werden, dass dieselben Ausdrücke ohne erheblichen Fehler auch bei veränderlicher Grösse der Schubkraft S zur Schätzung des mit einem Kurbelmechanismus verbundenen verhältnissmässigen Arbeitsverlustes durch Reibung zu Grunde gelegt werden können. Näherungsweise ist nämlich die auf den Schieberweg reducirte Reibung, d. i. die durch den angenäherten elementaren Schieberweg $= a \sin\alpha\, d\alpha$ dividirte elementare Reibungsarbeit für den Kurbelzapfen:

$$\frac{dB}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\alpha - \lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \lambda\, cotg\, \alpha,$$

für den Schieberzapfen:

$$\frac{dC}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d\gamma}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \lambda\, cotg\, \alpha$$

und für den Schieber selbst:

$$\frac{dD}{a \sin\alpha\, d\alpha} = \mu P \text{ proportional } \sin\alpha.$$

Während also der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die zwei Zapfenreibungen zusammen besonders an den Enden des Schieberweges (den grösseren Werthen von $\frac{1}{\sin\alpha}$ entsprechend) ins Gewicht fällt, ist er für die Gleitbahn des Schiebers gerade umgekehrt in der Mitte seines Weges am grössten, so dass eine wesentliche Aenderung der Grösse m durch die Veränderlichkeit von S nur dann zu erwarten sein würde, wenn $B + C$ entweder sehr gross oder sehr klein in Vergleich mit D, und S im ersten Falle von der Mitte gegen die Enden des Schieberweges, im zweiten umgekehrt von beiden Enden gegen die Mitte hin an Grösse zunähme. Wenn aber, wie bei Dampfmaschinen, wo S den Dampfdruck auf den Kolben (nach Abzug der Kolbenreibung) bedeutet, diese Kraft nur gegen das eine der beiden Wegenden des Schiebers hin abnimmt, auch die Arbeiten $B + C$ und D (die den Factoren μ' und μ entsprechenden zwei Glieder obiger Ausdrücke von m) nicht allzu verschieden sind, wird der Werth von m durch solche Veränderlichkeit von S nicht wesentlich beeinflusst werden können.

III. Reibung von Schraubenpaaren.

§. 74. Schraubenpaare mit scharfem oder flachem Gewinde.

Die Elementenfläche (Berührungsfläche von Schraube und Mutter) sei eine Schraubenfläche von solcher Art, dass sie durch Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, welche, indem sie die Axe des Schraubenpaares unter constantem Winkel schneidet, zugleich längs derselben verschoben und um sie gedreht wird mit constantem Verhältnisse der gleichzeitigen elementaren Schiebungen und Drehungen. Gesucht wird das Moment M eines Kräftepaares, welches mit Rücksicht auf die Reibung in der Elementenfläche auf das eine der beiden Elemente S, S', etwa auf das Element S in einer zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebene wirken muss, um dieses Element S am anderen S' entlang zu schrauben entgegen einer axialen Kraft Q, wodurch S gegen S' gedrückt wird.

Der gegenseitige Normaldruck zwischen S und S', sowie die entsprechende Reibung findet in einem solchen Theile F der Elementenfläche statt, welche S im Sinne von Q, S' im umgekehrten Sinne begrenzt, und es hängt die gesuchte Beziehung zwischen Q und M von dem Gesetze ab, nach dem die Pressung in jener Fläche F vertheilt ist. In letzterer Hinsicht werde indessen angenommen, der Druck sei so vertheilt, dass er in der mittleren Schraubenlinie L concentrirt zu denken ist, in welcher die Fläche F von der mit dem Schraubenpaare coaxialen Cylinderfläche C geschnitten wird, deren Radius r das arithmetische Mittel des äusseren und inneren Gewindehalbmessers ist. Wird dann

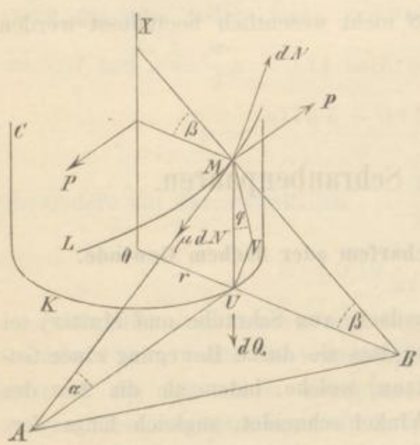
$$M = Pr$$

gesetzt, so handelt es sich um das Verhältniss der Kräfte P und Q als Function des Reibungscoefficienten $\mu = arctg\,\varrho$ und der Winkel α, β, unter denen beziehungsweise die Tangente der Schraubenlinie L und die erzeugende

Gerade der Schraubenfläche F gegen die zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebenen geneigt sind.

Für den beliebigen Punkt M (Fig. 91) der Schraubenlinie L sei MA ihre Tangente, MB die Erzeugende der Schraubenfläche F, MU die Erzeugende der Cylinderfläche C, und es seien A, B, U die Durchschnittspunkte dieser drei Geraden mit einer Ebene E, die im Punkte O normal zur Axe OX des Schraubenpaares ist und somit die Cylinderfläche C in einem Kreise K mit dem Radius r schneidet; UA berührt den Kreis K im Punkte U, während UB die Verlängerung des Radius OU ist, und es ist der Winkel $MAU = \alpha$, der Winkel $MBU = \beta$. Die Ebene AMB berührt die Schraubenfläche F im Punkte M, und wenn V die Projection des Punktes U auf diese Ebene ist, so sei der Winkel $UMV = \varphi$.

Fig. 91.



Auf ein Bogenelement MM' von L laste das Element dQ von Q, und es sei dN der Normaldruck, der in demselben vom Elemente S' des Schraubenpaares auf S nach der Richtung UV ausgeübt wird, folglich μdN die Reibung, die in MM' der relativen Bewegung von S gegen S' entgegen, also im Sinne MA gerichtet ist. Diese dreierlei Kräfte dQ, dN und μdN sind für alle Bogenelemente der Schraubenlinie L zusammen im Gleichgewichte mit dem Kräftepaare $= M = Pr$, von dessen entgegengesetzt gerichteten Kräften P, P die eine in M nach der Richtung AU angreifend gedacht werde, so dass die andere die Axe OX schneidet. Dieses Gleichgewicht erfordert, dass die Summe der Arbeiten aller Kräfte = Null ist für irgend eine relative Bewegung von S gegen S', die etwa so gross angenommen werde, dass der Weg der in M angreifenden Kraft P (Weg des Angriffspunktes im Sinne der Kraft) $= AU = 1$ ist; indem er dann für die andere, die Axe OX schneidende Kraft $P =$ Null,

für jede Kraft $dQ = -UM = -tg\,\alpha$,

für jede Kraft $dN = 0$,

für jede Kraft $\mu dN = -AM = -sec\,\alpha$

ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$P - \int dQ\, tg\,\alpha - \int \mu\, dN\, sec\,\alpha = 0$$
$$P = Q\, tg\,\alpha + \mu N\, sec\,\alpha.$$

N ist dadurch bestimmt, dass die Summe der Componenten aller Kräfte nach irgend einer Richtung, z. B. nach der Richtung der Axe = Null sein muss; daraus folgt:

$$\int dQ - \int dN\, cos\,(VUM) + \int \mu\, dN\, cos\,(AMU) = 0$$
$$Q - N\, sin\,\varphi + \mu N\, sin\,\alpha = 0,$$

und die Substitution des daraus folgenden Ausdruckes von

$$N = \frac{Q}{sin\,\varphi - \mu\, sin\,\alpha}$$

in obiger Gleichung für P giebt:

$$P = Q\left(tg\,\alpha + \frac{\mu}{cos\,\alpha\,(sin\,\varphi - \mu\, sin\,\alpha)}\right) = Q\,\frac{sin\,\alpha\, sin\,\varphi + \mu\, cos^2\alpha}{cos\,\alpha\,(sin\,\varphi - \mu\, sin\,\alpha)}$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha\, sin\,\varphi + \mu\, cos\,\alpha}{sin\,\varphi - \mu\, sin\,\alpha}.$$

Um darin schliesslich φ durch α und β auszudrücken, kann man bemerken, dass in Bezug auf UA, UB, UM als Axen der x, y, z die Gleichung der Ebene AMB ist:

$$\frac{x}{UA} + \frac{y}{UB} + \frac{z}{UM} = 1$$

oder mit $UA = 1$, $UB = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$, $UM = tg\,\alpha$:

$$x\, tg\,\alpha + y\, tg\,\beta + z = tg\,\alpha.$$

Daraus folgt der *Cosinus* des Winkels VUM, den die Normale der Ebene AMB mit UM, also mit der z-Axe bildet:

$$cos\,(VUM) = sin\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}$$

und somit $$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha \sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}{1 - \mu\, sin\,\alpha \sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

insbesondere für Schrauben mit flachem Gewinde mit $\beta = 0$ und $\mu = tg\,\varrho$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\, tg\,\alpha} = tg\,(\alpha + \varrho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus Gl. (1) ist ohne Weiteres ersichtlich, dass zur relativen Bewegung des einen gegen das andere Element des Schraubenpaares entgegen der auf ersteres wirkenden axialen Kraft Q eine um so kleinere Kraft P oder ein um so kleineres Kraftmoment $M = Pr$ nöthig ist, je kleiner der Winkel β ist, so dass in solchem Falle bezweckter Arbeitsleistung ein Schraubenpaar mit flachem Gewinde den Vorzug verdient. Wenn aber durch die Kraft P resp. durch das Moment M das betreffende Element des Schraubenpaares nicht sowohl relativ gegen das andere entgegen der Kraft Q bewegt, als vielmehr an der Bewegung im Sinne von Q verhindert werden soll, wobei dann die Reibung entgegengesetzt gerichtet ist wie zuvor und deshalb μ und ϱ in den Gleichungen (1) und (2) entgegengesetzt zu nehmen sind, so ist P um so kleiner und um so eher negativ (entsprechend dem Erforderniss eines Zwanges zur Bewegung selbst im Sinne von Q), je grösser β ist. Um diesen Fall handelt es sich bei Befestigungsschrauben, die deshalb mit scharfem Gewinde auszuführen sind bei ausserdem kleiner Grösse des mittleren Steigungswinkels α. Nach der für solche Schrauben üblichen Whitworth'schen Scala ist in der That α meistens $< 3^0$, so dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$\cos\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha+tg^2\beta}=\sqrt{1+tg^2\beta}=\sec\beta$$

gesetzt werden kann und somit nach Gl. (1):

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+\mu\sec\beta}{1-\mu\,tg\,\alpha\sec\beta}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

oder auch mit $\mu\sec\beta=tg\,\varrho'$:

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\varrho'}{1-tg\,\alpha\,tg\,\varrho'}=tg\,(\alpha+\varrho')\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Mit dem üblichen Werthe von $\beta=27^0\,30'$ und mit $\mu=0{,}15$ ergiebt sich:

$$tg\,\varrho'=0{,}169;\quad \varrho'=9^0\,36'.$$

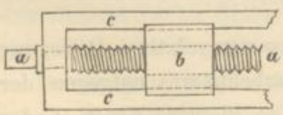
Bei Schraubenpaaren mit flachem Gewinde, die als Elementenpaare von Getrieben zu mechanischer Arbeitsleistung dienen, kann in der Regel auf grössere Glätte und Fettigkeit der Reibungsfläche gerechnet werden, entsprechend etwa:

$$\mu=tg\,\varrho=0{,}1;\quad \varrho=5^0\,43'.$$

§. 75. Beispiele.

1) Als Beispiel diene zunächst jene am häufigsten angewendete Form der coaxialen Schraubenkette, bei welcher, wie Fig. 62 (§. 49) andeutet, eines der drei coaxialen Schraubenpaare durch ein Drehkörperpaar, ein zweites durch ein Prismenpaar (beide als Specialfälle von Schraubenpaaren zu betrachten) ersetzt ist, und zwar bei Voraussetzung einer solchen Verwendung als Getriebe, dass in Bezug auf c als festgestelltes Glied das Glied b ent-

Fig. 62.



gegen einem axialen Widerstande Q bewegt werden soll durch Drehung der Schraube a vermittels eines Kraftmomentes M. Gesucht wird die Beziehung zwischen M und Q mit Rücksicht auf die Reibungen der Elementenpaare, entsprechend den Reibungscoefficienten:

$\mu = arctg\, \varrho$ für das Schraubenpaar b, a,
μ' für das Drehkörperpaar a, c,
μ'' für das Prismenpaar c, b.

Ist r der mittlere Radius, α der mittlere Steigungswinkel des flachen Gewindes des Schraubenpaares a, b, und ist A der axiale Druck zwischen a und b, sowie zwischen a und c, ferner M' das diesem Drucke entsprechende Reibungsmoment des Drehkörperpaares a, c, so ist nach Gl. (2) im vorigen Paragraph:

$$M = Pr + M' = Ar\, tg\,(\alpha + \varrho) + M'$$

oder mit $M' = \mu' A r'$, wo r' bei gegebener Spurzapfenfläche des Paares a, c nach §. 70 zu bestimmen ist:

$$M = A[r\, tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' r'].$$

Ist ferner r'' die mittlere Entfernung der Gleitfläche zwischen b und c von der Schraubenaxe, somit der gegenseitige Normaldruck dieser Glieder

$$= \frac{M - M'}{r''} = \frac{Ar\, tg\,(\alpha + \varrho)}{r''}$$

und die entsprechende Reibung $R = \mu'' \frac{Ar\, tg\,(\alpha + \varrho)}{r''}$,

so ergiebt sich $Q = A - R = A\left(1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg\,(\alpha + \varrho)\right)$

und durch Einsetzung des hieraus folgenden Ausdruckes von A in obiger Gleichung für M:

$$M = Qr \frac{tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}}{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg\,(\alpha + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ohne Reibungen, d. h. mit $\varrho = \mu' = \mu'' = 0$ wäre:

$$M_0 = Qr\, tg\, \alpha,$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\, \alpha \frac{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg\,(\alpha + \varrho)}{tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Es sei z. B. der Querschnitt des Gewindes ein Quadrat, dessen Seite

$= {}^1/_8$ des äusseren $= {}^1/_6$ des inneren, also $= {}^1/_7$ des mittleren Gewindedurchmessers d ist; die Steigung s ist dann doppelt so gross, also

$$s = \frac{2}{7} d$$

$$\text{und } tg\,\alpha = \frac{s}{\pi d} = \frac{2}{7\pi} = 0{,}091, \text{ entsprechend } \alpha = 5^0\,12'.$$

Die Schraube a stütze sich gegen das Lager (das festgestellte Glied c) auf der in Fig. 62 abgebrochen gezeichneten rechten Seite in einer kreisförmigen ebenen Fläche, während sie auf der linken Seite nur cylindrisch (ohne Anläufe resp. vortretende Ringe) mit dem Gliede c gepaart sei; dieses Cylinderpaar, jene ebene Stützfläche und die axiale Kraft A als Schliessungskraft bedingen dann zusammen eine Paarung der Glieder a und c, deren kinematischer Charakter der eines Drehkörperpaares ist. Der Radius jener kreisförmigen ebenen Spurzapfenfläche sei = dem inneren Gewindehalbmesser $= \frac{6}{7} r$, so dass bei Abstraction von dem Einflusse fortschreitender Abnutzung nach §. 70, Gl. (5) gesetzt werden kann:

$$r' = \frac{2}{3}\frac{6}{7} r = \frac{4}{7} r = 0{,}57\, r;$$

endlich sei $r'' = 4\, r$. Wird dann nach vorigem Paragraph

$$\varrho = 5^0\,43', \text{ entsprechend } \mu = 0{,}1$$

angenommen, also $tg\,(\alpha + \varrho) = tg\,(10^0\,55') = 0{,}193$
und wird auch $\mu' = \mu'' = 0{,}1$ gesetzt, so findet man nach Gl. (2):

$$\eta = 0{,}091\ \frac{1 - 0{,}25\,.\,0{,}0193}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}36.$$

Dieser geringe Wirkungsgrad rührt nur zu sehr kleinem Theile von der Reibung des Prismenpaares b, c her; denn mit $\mu'' = 0$ wird η nicht wesentlich $> 0{,}36$. Zum grössten Theile fällt die Kleinheit von η der Reibung des Schraubenpaares zur Last, doch hat auch die Spurzapfenreibung erheblichen Einfluss darauf, indem sich mit $\mu' = \mu'' = 0$ ergiebt:

$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = \frac{0{,}091}{0{,}193} = 0{,}47.$$

Durch diese Spurzapfenreibung des Paares a, c würde η in noch höherem Grade vermindert werden, wenn die betreffende Reibungsfläche nicht, wie hier angenommen, eine volle Kreisfläche, sondern eine Ringfläche wäre, deren innerer Radius dann wenigstens = dem Radius jener Kreisfläche sein würde. Uebrigens ist α hier ungewöhnlich gross angenommen worden; mit einem kleineren Steigungswinkel α ist auch η noch kleiner.

2) Eine coaxiale Schraubenkette der vorbesprochenen Art (entsprechend Fig. 62 bei Umkehrung des Schraubenpaares a, b, d. h. mit a als Mutter und b als Schraube) wird auch bei **Schraubenbefestigungen** von den zu verbindenden Körpern als dem Gliede c, von der sie durchdringenden Befestigungsschraube b und von der Mutter a gebildet, durch deren Anziehung mittels eines sie drehenden Kraftmoments M jene Körper mit einem gewissen gegenseitigen Drucke $= Q$ zusammengepresst werden sollen. Indem aber hier (abgesehen von untergeordneten Deformationswirkungen) die Glieder b und c nicht gegen einander verschoben werden, fällt die Reibung des Prismenpaares b, c ausser Betracht und ergiebt sich nach Gl. (1) mit $\mu''=0$ und ϱ' statt ϱ (entsprechend dem hier vorliegenden Falle eines scharfen Gewindes):

$$M=\left[tg\,(\alpha+\varrho')+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Werden hier ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen, so bedeutet M das Kraftmoment, das die Mutter am Rückgange (wobei auch die Reibungen im entgegengesetzten Sinne wirken) zu hindern im Stande ist; es muss negativ sein, damit die Mutter nicht von selbst, d. h. bei $M=0$ blos durch die Wirkung der Kraft Q zurückgehen könne. Das Kraftmoment M_1, womit dann die angezogene Mutter im umgekehrten Sinne gedreht werden muss, um sie zu lösen und damit die Befestigung wieder aufzuheben, ergiebt sich aus Gl. (3), indem ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen werden und darauf der ganze Ausdruck entgegengesetzt genommen wird; es ist also:

$$M_1=\left[tg\,(\varrho'-\alpha)+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Die nöthige Eigenschaft der Selbstsperrung kommt dieser Schraubenbefestigung in um so höherem Grade zu, je weniger $M_1 < M$, je kleiner also α ist.

Nach der Whitworth'schen Scala ist $\alpha = 2^0$ bis $3^0\,30'$ und mag, da die Verschiedenheiten dieses Winkels im Vergleich mit dem viel grösseren Reibungswinkel ϱ' und dessen Unsicherheit wenig ins Gewicht fallen, im Durchschnitt $\alpha = 2^0\,45'$ gesetzt werden. Damit und mit $\varrho' = 9^0\,36'$ (§. 74), ferner mit $\mu' = 0{,}15$ und $r' = 1{,}5\,r$, nahe entsprechend nach Gl. (3) in §. 70 einer ringförmigen Auflagerfläche der Schraubenmutter, deren Radien $= r$ und $1{,}9\,r$ sind, ergiebt sich:

$$M = 0{,}444\;Qr;\quad M_1 = 0{,}345\;Qr = 0{,}78\;M.$$

3) Der Wirkungsgrad eines singulären Schraubengetriebes (§. 51) ist mit alleiniger Rücksicht auf die Reibung seines Schraubenpaares, wodurch er vorwiegend bedingt zu werden pflegt,

$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)}$$

bei Voraussetzung eines flachen Gewindes, und er wurde z. B. oben unter 1) $= 0{,}47$ gefunden für $\alpha = 5^0\,12'$ und $\varrho = 5^0\,43'$. Er ist $= 0$ für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 90^0 - \varrho$, dazwischen am grössten für einen solchen Steigungswinkel α, welcher der Gleichung entspricht:

$$\frac{tg\,(\alpha + \varrho)}{cos^2\,\alpha} - \frac{tg\,\alpha}{cos^2\,(\alpha + \varrho)} = 0, \text{ woraus } sin\,(2\,\alpha + 2\,\varrho) = sin\,2\,\alpha$$

$$4\,\alpha + 2\,\varrho = 180^0, \text{ also } \alpha = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$$

$$\text{und } max\,\eta = \frac{tg\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{tg\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = tg^2\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

folgt, z. B. mit $\varrho = 5^0\,43'$, entsprechend $\mu = 0{,}1$:

$$\alpha = 42^0\,8' \text{ und } max\,\eta = 0{,}82.$$

Diesen vortheilhaftesten Verhältnissen kann dadurch wenigstens näher zu kommen gesucht werden, ohne die der Gleichung

$$M_0 = Qr\,tg\,\alpha$$

entsprechende Beziehung zwischen bewegender Kraft und Nutzwiderstand bei Abstraction von Reibungswiderständen zu beeinträchtigen, dass jenes Getriebe, Fig. 62, durch ein sogenanntes Differentialschraubengetriebe ersetzt, nämlich dahin abgeändert wird, dass das eingängige Schraubenpaar a, b durch ein $n$gängiges, das Drehkörperpaar a, c aber durch ein $(n - 1)$gängiges, in gleichem Sinne mit jenem gewundenes Schraubenpaar ersetzt wird. Zu der Steigung $= s$ und dem mittleren Steigungswinkel $= \alpha$ eines eingängigen Schraubenpaares von gleichem Gewindequerschnitte und gleichem Gewindehalbmesser r stehen die Steigung und der mittlere Steigungswinkel jener Schraubenpaare a, b und a, c in der Beziehung:

$$s_n = ns \text{ und } tg\,\alpha_n = n\,tg\,\alpha$$

$$s_{n-1} = (n - 1)\,s \text{ und } tg\,\alpha_{n-1} = (n - 1)\,tg\,\alpha.$$

Sind es dann auch die Reibungen von zwei Schraubenpaaren, die jetzt den Wirkungsgrad η bedingen, so sind sie doch zusammen nur ungefähr ebenso gross wie die eines einzelnen eingängigen Schraubenpaares, wogegen die Spurzapfenreibung des früheren Drehkörperpaares a, c in Wegfall gekommen ist. Der Wirkungsgrad η dieses Differentialschraubengetriebes ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ist wieder A der axiale Druck zwischen a und b sowie zwischen a und c, so ist mit Rücksicht darauf, dass die relative Bewegung von a gegen

b entgegen der von a auf b ausgeübten Kraft A, dagegen die ebenso gerichtete relative Bewegung von a gegen c im Sinne der von a auf c ausgeübten (der vorigen entgegengesetzten) Kraft A stattfindet,

$$M = Ar\,[tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)],$$

während mit Rücksicht auf die Reibung des Prismenpaares b, c gemäss der Entwickelung unter 1)

$$Q = A\left[1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)\right]$$

ist. Daraus folgt:

$$M = Qr\frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu''\dfrac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$M_0 = Qr\,(tg\,\alpha_n - tg\,\alpha_{n-1}) = Qr\,tg\,\alpha$$

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\,\alpha\,\frac{1 - \mu''\dfrac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Z. B. mit $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $r'' = 4\,r$, $\mu'' = 0{,}1$ findet man

für $n =$	2	3	4
$\eta =$	0,49	0,48	0,46

wesentlich $> 0{,}36$ und wenig verschieden von $\dfrac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = 0{,}47$. Uebrigens zeigt sich die Anwendung einer mehr als zweigängigen Schraube hier ohne Nutzen; auch wird η noch etwas grösser (um so mehr, je weniger $r'' > r$ ist), wenn das Schraubenpaar a, c mit n, dagegen a, b mit $n - 1$ Gängen ausgeführt wird. Es ist dann

$$M = Qr\frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu''\dfrac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

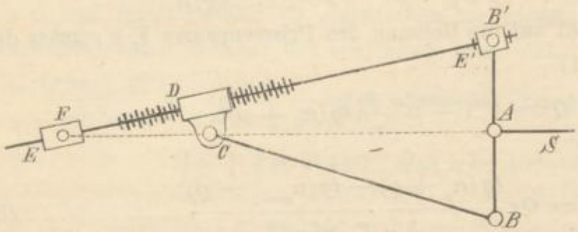
$$\eta = tg\,\alpha\,\frac{1 - \mu''\dfrac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei zu bemerken ist, dass, wenn auch $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ negativ werden sollte (wie bei obigen Beispielen für $n = 2$), doch das Glied mit μ'' negativ bleiben muss, indem hier die Zeichenumkehrung von $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ nur die Bedeutung hat, dass der Normaldruck des Gliedes b auf das Glied c in den Gleitflächen des Prismenpaares b, c im umgekehrten Sinne gerichtet ist.

4) Als Beispiel eines zwar elementaren, aber zusammengesetzten Schraubengetriebes diene das von Rogers angegebene Steuerruder-

getriebe: Fig. 92. Die verticale Welle A des Steuers S trägt den Hebel BB', dessen Arm AB durch die Koppel BC mit der Schraubenmutter CD zusammenhängt (B und C sind Drehkörperpaare mit verticalen Axen), während die zugehörige Schraube DE' den anderen Arm AB' vermittels eines Zwischengliedes $B'E'$ an-

Fig. 92.



greift, das mit beiden Theilen durch die Drehkörperpaare B' und E' gepaart ist (die Axe von B' ist vertical, die von E' fällt mit der horizontalen Schraubenaxe zusammen). Die Schraubenspindel, cylindrisch (coaxial zum Schraubenpaare D) gepaart mit der um eine verticale Axe F drehbaren Hülse EF, wird an ihrem über E hinaus liegenden Ende durch das Steuerrad gedreht und bewirkt dadurch eine entsprechend kleinere Drehung des Steuerruders. Die Kette dieses Getriebes besteht aus der sechsgliedrigen singulären Schraubenkette $ABCDEF$ und der fünfgliedrigen Drehkörperkette $AB'E'EF$, die so zusammengesetzt sind, dass sie das festgestellte Glied FA gemein haben und dass AB mit AB', DE mit $E'E$ zu je einem Gliede verbunden sind. Indem das Cylinderpaar E als Ersatz eines zwischen DE und EF befindlichen Gliedes betrachtet werden kann, das mit einem jener zwei Glieder durch ein zum Schraubenpaare D coaxiales Drehkörperpaar R, mit dem anderen durch ein Prismenpaar P (Schubrichtung parallel den Axen von R und D) gepaart ist, so erscheint die erstere jener zwei das vorliegende Getriebe constituirenden einfachen Ketten als eine siebengliedrige singuläre Schraubenkette $ABCDRPF$ mit nur zwangläufigen niederen Elementenpaaren, die nicht zwangläufig ist, weil sie das Prismenpaar P und das Drehkörperpaar F mehr enthält, als die Kette $ABCDR$, die nach Fig. 65, §. 51, als fünfgliedrige singuläre Schraubenkette zwangläufig wäre. Die fehlende Zwangläufigkeit der fraglichen Kette ist aber dadurch hergestellt, dass ihr Glied FA mit dem gleichnamigen Gliede FA, das Glied AB mit dem Gliede AB' der zwangläufigen Schubkurbelkette $AB'PF$ fest verbunden wurde, welcher Schubkurbelkette dann freilich, um die Schraube als das Glied $B'P$ derselben verwenden zu können, unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit das weitere (fünfte) Glied $B'E'$ mit dem Drehkörperpaare E' einschaltungsweise hinzugefügt werden musste unter gleichzeitigem Ersatze des Prismenpaares P durch das Cylinderpaar E.

Es sei nun das Kraftmoment M' zu bestimmen, mit welchem die Schraubenspindel EE' gedreht werden muss behufs Ueberwindung des Widerstandsmomentes M, das sich der Drehung des Steuerruders S um seine Axe A entgegensetzt. Insofern das Verhältniss $\frac{M'}{M}$ von der augenblicklichen Abweichung des Steuers aus seiner in Fig. 92 angenommenen mittleren Lage abhängt, werde letztere bei der Rechnung zu Grunde gelegt, und es sei φ' der Drehungswinkel der Schraube, der einem sehr kleinen Drehungswinkel $= \varphi$ des Steuers aus jener mittleren Lage entspricht. Es ist dann M' dadurch bestimmt, dass die aufgewendete Arbeit $M'\varphi'$ gleich sein muss der Nutzwiderstandsarbeit $M\varphi +$ den entsprechenden Arbeiten der verschiedenen Reibungswiderstände. Was letztere betrifft, so mag es genügen, ausser der Reibung des Schraubenpaares D nur die Spurzapfenreibung des Drehkörperpaares E' und die Tragzapfenreibungen der Drehkörperpaare B, B' zu berücksichtigen, da die Reibungsarbeiten der Paare C und F wegen Geringfügigkeit der betreffenden relativen Wege, die des Drehkörperpaares A und des Cylinderpaares E wegen Geringfügigkeit des Druckes von untergeordneter Grösse sind. Ist aber, wie ferner angenommen werde, die Länge $AB = AB' = a$ nur klein gegen die Längen AC und AF, so dass ACB und AFB' wenig veränderliche kleine Winkel sind und der axiale Druck zwischen den Elementen des Schraubenpaares $D =$ dem axialen Drucke in der Spurzapfenfläche des Paares $E' =$ den zu den Zapfenaxen B und B' senkrechten Drucken dieser Tragzapfen $= \frac{1}{2}\frac{M}{a}$ gesetzt werden kann, so ist die Reibungsarbeit des Schraubenpaares D

$$= \frac{1}{2}\frac{M}{a} r\,[tg\,(\alpha + \varrho) - tg\,\alpha]\,\varphi',$$

unter r den mittleren Gewindehalbmesser, α den mittleren Steigungswinkel und ϱ den betreffenden Reibungswinkel verstanden, ferner die Arbeit der Spurzapfenreibung des Paares E'

$$= \mu' . \frac{1}{2}\frac{M}{a} r' \varphi',$$

wenn r' den mittleren Radius der betreffenden Reibungsfläche bedeutet, und endlich die Summe der Reibungsarbeiten an den Zapfen B und B', wenn deren Radien $= b$ sind und der betreffende Reibungscoefficient $= \mu'$ ist,

$$= \mu' \frac{M}{a} b \varphi,$$

da die Aenderungen der Winkel ABC und $AB'D$ absolut genommen $= \varphi$ gesetzt werden können. Somit ist:

$$M'\varphi' = M\varphi + \frac{1}{2}\frac{M}{a} r [tg(\alpha + \varrho) - tg\,\alpha]\,\varphi' + \mu' . \frac{1}{2}\frac{M}{a} r'\varphi' + \mu'\frac{M}{a} b\varphi$$

und folgt daraus durch Division mit $M\varphi'$, da die relative Axialbewegung der Elemente des Schraubenpaares unter obiger Voraussetzung, dass ACB und AFB' kleine Winkel sind,

$$r\varphi'\,tg\,\alpha = 2\,a\varphi, \text{ also } \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\,tg\,\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\alpha + \varrho) + \mu'\frac{r'}{r} + \mu'\frac{b}{a}\,tg\,\alpha\right].$$

Dieser Ausdruck, in welchem $\frac{r'}{r}$ ein unechter, $\frac{b}{a}$ ein kleiner echter Bruch ist, lässt erkennen, dass auch die Reibungen der Paare B, B' von nur untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit den Reibungen der Paare D und E' sind, dass also ohne wesentlichen Fehler zu setzen ist:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\alpha + \varrho) + \mu'\frac{r'}{r}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Der $\varrho = 0$ und $\mu' = 0$ entsprechende Werth M'_0 von M' ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{M'_0}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\,tg\,\alpha$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M'_0}{M} = \frac{tg\,\alpha}{tg(\alpha + \varrho) + \mu'\frac{r'}{r}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Z. B. mit den oben angenommenen Werthen: $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $\mu' = 0{,}1$ und mit $\frac{r'}{r} = 1{,}2$ findet man

$$M' = 0{,}16\,\frac{r}{a} M \text{ und } \eta = 0{,}29.$$

Dem Getriebe kommt die Eigenschaft der Selbstsperrung zu, insofern das Steuer nicht von selbst in die Mittellage zurückkehrt, wenn das Kraftmoment M' zu wirken aufhört, sondern ein umgekehrt drehendes Kraftmoment:

$$M'_1 = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\varrho - \alpha) + \mu'\frac{r'}{r}\right]$$

dazu erforderlich ist, das im vorliegenden Falle $= 0{,}41\ M$ gefunden wird.

IV. Zahnreibung.

§. 76. Zahnreibung von Cylinderrädern.

Es werde zunächst ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen, dass die Zähne nur hinter der Axenebene, d. h. nach dem Durchgange durch dieselbe auf einander wirken, jedes Zähnepaar so lange, bis das folgende in der Axenebene, nämlich in der Polaxe zur Berührung kommt. Die Bogenlängen $Pa = Pa'$ (Fig. 93), mit denen sich unterdessen die Theilkreise B, B' auf einander abwälzen, sei $= b$. Indem dabei die Berührungslinie des treibenden Zahnkopfes, von der Axe A des betreffenden Rades sich entfernend, den Weg $ap = s$, die Berührungslinie des getriebenen Zahnfusses dagegen, der betreffenden Radaxe A' sich nähernd, den Weg $a'p$ durchläuft, ist $s - s'$ der dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Weg der Reibung, nämlich der Betrag der relativ gleitenden Bewegung der Zähne, während sie zugleich längs einem Wege $= s'$ sich auf einander abwälzen. Ist b hinlänglich klein in Vergleich mit den Radien r, r' der Theilkreise B, B', so kann jener Reibungsweg ohne erheblichen Fehler = der Projection der Geraden aa' auf die Centrale AA' (Fig. 93), also

$$s - s' = r\left(1 - \cos\frac{b}{r}\right) + r'\left(1 - \cos\frac{b}{r'}\right)$$

und dabei $$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2}, \quad \cos\frac{b}{r'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r'^2},$$

also $$s - s' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{b^2}{2}$$

gesetzt werden. Der Druck, den die Zähne auf einander ausüben, ist im Allgemeinen veränderlich und von der Theilrisskraft $= P$ nach Grösse und Richtung verschieden, mit der sie bei ihrer Berührung in der Polaxe im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise auf einander wirken; wird aber von diesen Abweichungen abgesehen, also die Reibungsgrösse constant $= \mu P$ gesetzt, unter μ den Reibungscoefficient verstanden, so ist die dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Reibungsarbeit:

$$\mu P(s - s') = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b^2}{2}P,$$

woraus die auf die Theilkreise reducirte Reibung R durch Division mit b sich ergiebt:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$\frac{R}{P}$ ist der durch die Zahnreibung verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, nämlich das Verhältniss der Reibungsarbeit $= Rb$ zu der Arbeit $= Pb$, die ohne Reibung gleichzeitig durch die Räder übertragen würde.

Dieselben, somit auch zu derselben Gleichung (1) führenden Betrachtungen gelten offenbar für den Fall, dass die Berührung der Zähne nur vor der Axenebene stattfindet. Wenn ferner mehr als ein Paar Zähne hinter oder vor der Axenebene sich gleichzeitig berühren, so zerfällt zwar der ganze Zahndruck P in eine entsprechende Zahl von Theilen, doch bleibt Gl. (1) gültig, da für jedes der in Berührung befindlichen Zähnepaare der betreffende Theil von P mit demselben Factor

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2}$$

zu multipliciren ist, um in der Summe aller dieser Producte $=$ dem Producte jenes gemeinschaftlichen Factors und der Summe aller Theilwerthe von P wieder die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung zu erhalten.

Wenn aber, wie es im Allgemeinen der Fall ist, die Zähne sowohl hinter wie vor der Axenebene auf einander wirken so, dass der Eingriffsbogen, d. h. der Abwälzungsbogen der Theilkreise, welcher der Berührungsdauer eines Zähnepaares entspricht, hinter der Axenebene $= b_1$, vor derselben $= b_2$ ist, so ergiebt sich nach Gl. (1):

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}(b_1 P_1 + b_2 P_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

unter P_1 und P_2 die Theile von P verstanden, mit denen beziehungsweise die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne auf einander wirken. Hier ist, falls b_1 und b_2 verschieden gross sind, die Reibung R von dem Verhältnisse abhängig, nach welchem P in die zwei Theile P_1 und P_2 zerfällt. Während dieses Verhältniss bei neuen oder neu gelagerten Rädern mehr oder weniger von zufälligen Umständen abhängen wird, lässt sich ohne Zweifel um so zutreffender

$$P_1 : P_2 = b_1 : b_2,$$

also

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}\,\frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1 + b_2} P \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

setzen, je mehr die Vertheilung des Zahndruckes unter die verschiedenen gleichzeitig in Berührung befindlichen Zähnepaare durch ihre zunehmende Abnutzung bedingt wird. Wenn dann der ganze Eingriffbogen $= b_1 + b_2$ mit Rücksicht auf die Anzahl der Zähnepaare, die im Durchschnitt gleichzeitig in Berührung sein sollen, gegeben ist, b_1 und b_2 einzeln aber nicht durch die Verzahnungsart bestimmt sind, so ist es mit Rücksicht auf R am vortheilhaftesten, d. h. es ist R am kleinsten, wenn $b_1 = b_2$ gemacht wird. Mit $b_1 = b_2 = b$ geht aber der Ausdruck (3) von R wieder in den Ausdruck (1) über, der übrigens in diesem Falle auch unmittelbar aus Gl. (2) sich ergiebt, und zwar unabhängig von dem Verhältnisse, in welchem P in die Bestandtheile P_1 und P_2 zerfällt.

Im Durchschnitt pflegt $b_1 = b_2 = b =$ der sogenannten Theilung zu sein, d. h. = der im Theilkreise gemessenen Entfernung homologer Punkte benachbarter Zähne, so dass beständig zwei Zähnepaare (eins hinter, eins vor der Axenebene) in Eingriff sind. Indem dann

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'}, \text{ also } \frac{b}{r} = \frac{2\pi}{z} \text{ und } \frac{b}{r'} = \frac{2\pi}{z'}$$

ist, unter z und z' die Zähnezahlen der betreffenden Räder verstanden, ergiebt sich aus Gl. (1):

$$R = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi \mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wäre $b_1 = b_2 =$ der $m$fachen Theilung, so wäre auch $R =$ dem $m$fachen dieses Werthes, ebenso wenn nur einer der Bögen b_1, $b_2 =$ der $m$fachen Theilung, der andere = Null wäre. —

Für den Eingriff eines Zahnrades und einer Zahnstange ist, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des Rades bedeutet, in obiger Gleichung $r' = \infty$ resp. $z' = \infty$ zu setzen, so dass insbesondere aus Gl. (4) folgt:

$$R = \frac{1}{z}\pi \mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Den Fall des inneren Eingriffes endlich kann man sich, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des inneren Rades bedeutet, aus dem Falle eines äusseren Eingriffes durch stetige Aenderung des Radius r' hervorgegangen denken, wobei der letztere, indem er wachsend durch ∞ (einer Zahnstange entsprechend) hindurch geht, für das Hohlrad negativ wird. Oder wenn r' nach wie vor seinen Absolutwerth bedeutet, so ist in den Gleichungen (1)—(3) das Vorzeichen von $\frac{1}{r'}$ umzukehren, wie auch leicht durch eine der obigen ganz analoge directe Ableitung sich ergiebt. Ebenso ist dann, unter z' die Zähnezahl des Hohlrades verstanden, nach Gl. (4):

$$R = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}\right)\pi \mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

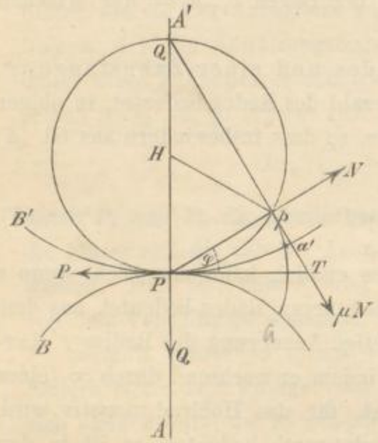
Was schliesslich den Reibungscoefficient betrifft, so kann in der Regel je nach der grösseren oder geringeren Fettigkeit und Glätte der Zahnflächen gesetzt werden:

$$\pi \mu = \frac{1}{3} \text{ bis } \frac{2}{5}, \text{ entsprechend } \mu = 0{,}11 \text{ bis } 0{,}13.$$

§. 77. **Einfluss der Zahnform.**

Durch die angenäherte Entwickelung im vorigen Paragraphen hat sich die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung R unabhängig von der Zahnform ergeben. Die Frage, ob und in welcher Weise letztere etwa von Einfluss sei, erfordert eine genauere Prüfung, die dann zugleich ein Urtheil gewähren wird über den die Zapfenreibungen der betreffenden Wellen beeinflussenden Druck, den die Räder bei Uebertragung einer gewissen Theilrisskraft im Sinne der Centrale AA' ihrer Theilkreise auf einander ausüben.

Fig. 93.



Sind zu dem Ende (Fig. 93) $ap = \sigma$ und $a'p = \sigma'$ die längs den Zahnprofilen gemessenen Wege ihres Berührungspunktes p, die dem Abwälzungsbogen $Pa = Pa' = x$ der Theilkreise entsprechen, ist $Pp = y$ die Entfernung des Punktes p vom Pol P, ferner N der nach Pp gerichtete Normaldruck zweier Zähne und φ dessen Neigungswinkel gegen die gemeinsame Tangente der Theilkreise, so ist, wenn zunächst wieder ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen wird, dass derselbe nur hinter oder nur vor der Axenebene stattfindet, dass ferner beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist und zwar jedes Paar während einer Abwälzung der Theilkreise mit den Bögen $x = b$, entsprechend den Wegen $\sigma = s$ und $\sigma' = s'$ des Berührungspunktes p der Zahnprofile, der Mittelwerth der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung:

$$R = \frac{\mu}{b} \int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma').$$

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der Theilkreise, deren Radien wieder $AP = r$ und $A'P = r'$ seien, entsprechen die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ derselben um ihre Mittelpunkte A, A'; die relative Drehung des einen gegen den anderen Theilkreis um den Pol P ist aber die Resultante aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen Drehungswinkel, somit = ihrer Summe bei dem hier vorausgesetzten, entgegengesetzten Drehungsrichtungen um A, A' entsprechenden äusseren Eingriffe, und indem dieser elementare relative Drehungswinkel $= \frac{dx}{r} + \frac{dx}{r'}$ durch Multiplication mit $Pp = y$ den relativen Weg des Punktes p des einen Zahnprofils gegen das andere ergiebt, ist

$$d\sigma - d\sigma' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) y\, dx$$

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{\mu}{b} \int_0^b N y\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ist nun P die constante Theilrisskraft, nämlich der Widerstand, den das getriebene dem treibenden Rade im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise entgegensetzt, Q der im Sinne der Centrale ausgeübte Widerstand, so sind die Kräfte P, Q, N und die Reibung μN in der Weise am getriebenen Rade im Gleichgewicht, wie es die Pfeilspitzen in Fig. 93 unter der Voraussetzung andeuten, dass der Eingriff hinter der Axenebene stattfindet, dass also das um A drehbare Rad das treibende ist. Dem Gleichgewicht jener Kräfte entsprechen die Gleichungen:

$$P = N \cos\varphi + \mu N \sin\varphi$$
$$Q = N \sin\varphi - \mu N \cos\varphi.$$

Findet der Eingriff vor der Axenebene statt, ist also in Fig. 93 das um A' drehbare Rad das treibende, so ist dessen Normaldruck N auf den betreffenden Zahn des getriebenen Rades umgekehrt wie in Fig. 93 gerichtet, und sind ebenso die Widerstände P, Q des getriebenen Rades entgegengesetzt gerichtet zu denken; die Reibung μN wirkt aber auf den getriebenen Zahn nach wie vor in dem durch die Figur angegebenen Sinne. In obigen zwei Gleichgewichtsbedingungen sind deshalb die linken Seiten und die ersten Glieder auf den rechten Seiten entgegengesetzt zu nehmen, oder es ist, was auf dasselbe hinaus läuft, $-\mu$ statt μ zu setzen, so dass sich daraus für beide Fälle zusammen ergiebt:

$$N = \frac{P}{\cos\varphi \pm \mu \sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$Q = P\frac{\sin\varphi \mp \mu\cos\varphi}{\cos\varphi \pm \mu\sin\varphi} = P\frac{tg\,\varphi \mp tg\,\varrho}{1 \pm tg\,\varphi\, tg\,\varrho} = P\,tg\,(\varphi \mp \varrho) \ldots (3),$$

unter ϱ den Reibungswinkel (§. 66) verstanden. Dabei gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem der Eingriff hinter oder vor der Axenebene stattfindet, und man erkennt aus Gl. (3), dass Q im letzteren Falle grösser ist. Bei Evolventenzähnen, bei denen φ einen constanten Werth hat, würde Q für den Eingriff hinter der Axenebene = Null sein, wenn $\varphi = \varrho$ wäre. In geringerem Grade, als Q, fällt nach Gl. (2) auch N und somit die Reibung μN vor der Axenebene grösser aus, als dahinter, wozu noch der Umstand hinzukommt, dass der im letzten Falle grössere Druck Q, indem er die Räder aus einander zu drängen strebt, vibrirende Bewegungen derselben verursachen und dadurch die Abnutzung der Zähne noch mehr vergrössern kann, wie es die Erfahrung bestätigt.

Die Einführung des Ausdruckes (2) von N in Gl. (1) giebt:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi \pm \mu\sin\varphi},$$

wofür mit Rücksicht darauf, dass $\mu\sin\varphi$ stets sehr klein in Vergleich mit $\cos\varphi$, dass also $\mu\,tg\,\varphi$ ein sehr kleiner Bruch ist, gesetzt werden kann:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b\,(1 \pm \mu\,tg\,\alpha)}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots (4),$$

unter α einen Mittelwerth von φ verstanden, oder noch einfacher:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots (5).$$

Ebenso wie im vorigen Paragraphen ist dann auch wieder die unveränderte Gültigkeit dieser Ausdrücke zu erkennen, wenn gleichzeitig mehrere Zähnepaare auf der einen oder der anderen Seite der Axenebene in Berührung sind, wogegen bei beiderseits von dieser Ebene zugleich stattfindendem Eingriffe die reducirte Reibung R im Allgemeinen als Summe von zwei Bestandtheilen darstellbar ist, die nach Gl. (4) oder (5) sich ergeben auf Grund einer Annahme in Betreff des Vertheilungsverhältnisses von P unter die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne. Nur wenn im letzten Falle die beiderseitigen Eingriffbögen b gleich gross sind, wobei Gl. (4) unbedingt durch die Gleichung (5) zu ersetzen ist, gilt diese unverändert als Ausdruck des resultirenden Werthes von R. Sie (und ebenso dann auch die daraus für einen inneren Eingriff durch Umkehrung des Vorzeichens von r oder r' hervorgehende Gleichung) liefert für verschiedene Verzahnungsarten etwas verschiedene Werthe von R, sofern dabei y und φ verschiedene Functionen von x sind.

Bei Evolventenzähnen (§. 19) ist φ constant und $y = x \cos \varphi$, also

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

übereinstimmend mit der allgemeinen Näherungsformel (1) im vorigen Paragraphen.

Bei Cykloidenzähnen (§. 17) ist, unter H (Fig. 93) den Mittelpunkt, $PQ = h$ den in der Centrale AA' liegenden Durchmesser des Hülfskreises verstanden, der durch äussere resp. innere Abwälzung auf den Theilkreisen B, B' mit dem Punkte p die Zahnprofile ap und $a'p$ beschreibt, und wenn T der Schnittpunkt der Geraden Qp mit der gemeinsamen Tangente der Theilkreise ist,

$$\frac{y}{\cos \varphi} = PT = h\, tg\,(PQp) = h\, tg\, \frac{1}{2}(PHp) = h\, tg\, \frac{x}{h},$$

da der Bogen Pp des Hülfskreises = den Bögen Pa, Pa' der Theilkreise, also $= x$ ist. Somit ergiebt sich das in Gl. (5) vorkommende Integral:

$$\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos \varphi} = h^2 \int tg\, \frac{x}{h}\, d\left(\frac{x}{h}\right) = -\, h^2\, ln \cos \frac{b}{h}$$

oder auch wegen $tg\, \frac{x}{h} = \frac{x}{h} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{h^3} + \ldots$

$$\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos \varphi} = h^2\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{b^4}{h^4} + \ldots\right) = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right)$$

und damit nach Gl. (5):

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P\left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots (7).$$

Die Reibung von Cykloidenzähnen ist also etwas grösser, als die von Evolventenzähnen; doch pflegt der Unterschied und überhaupt der Einfluss der Zahnform auf die hier in Rede stehende Reibung nicht so bedeutend zu sein, dass er in Vergleich mit der Unsicherheit des Coefficienten μ bei Schätzung des betreffenden Arbeitsverlustes besondere Beachtung erforderte. Wäre z. B. $h = r'$ (das Zahnprofil $a'p$ in Fig. 93 eine radiale Gerade) und $b =$ der Theilung, so wäre, unter z' die Zähnezahl des um A' drehbaren Rades verstanden,

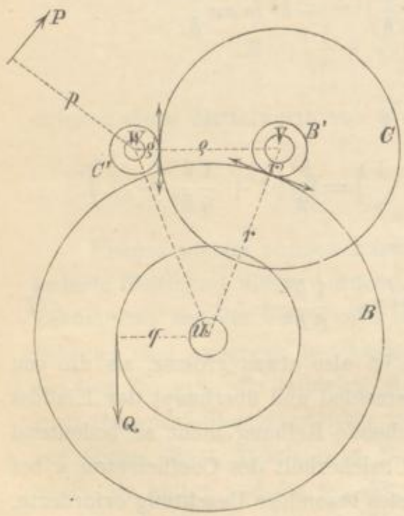
$$\frac{b}{h} = \frac{2\pi b}{2\pi r'} = \frac{2\pi}{z'},$$

$$\text{also } \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{z'^2} \text{ nahe } = \frac{20}{3z'^2} < \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{20}$$
$$\text{für } z' > 8 \quad 10 \quad 12.$$

§. 78. **Beispiel.**

Eine zum Aufwinden und Versetzen schwerer Baustücke (Gewicht $= Q$) dienende Winde enthalte (Fig. 94) zu unterst die Kettentrommel (Radius bis zur Mittellinie der Lastkette gerechnet $= q$), deren horizontale Welle U (Radius in den Lagern $= u$) am einen Ende neben der Trommel das grosse Zahnrad B (Theilkreisradius $= r$, Zähnezahl $= z$) trägt. In dieses greift ein kleineres Rad B' (Theilkreisradius $= r'$, Zähnezahl $= z'$) auf der Vorgelegewelle V (Radius in den Lagern $= v$), und in das am anderen Ende auf letzterer sitzende Rad C (Theilkreisradius $= \varrho$, Zähnezahl $= \zeta$) endlich greift das kleinere Rad C' (Theilkreisradius $= \varrho'$, Zähnezahl $= \zeta'$) auf der Kurbelwelle W (Radius in den Lagern $= w$), die durch entgegengesetzt gerichtete Kurbeln (Länge $= p$) an beiden Enden gedreht wird. Wie gross muss die an diesen zwei Kurbeln normal zu denselben wirkende gesammte Kraft P sein, um mit Rücksicht auf die Zapfen- und Zahnreibungen die an der Kette hängende Last Q zu heben?

Fig. 94.



Ist B die Theilrisskraft zwischen den Rädern B und B', C dieselbe zwischen den Rädern C und C', so hat B als treibende Kraft die Trommelwelle U zu drehen entgegen dem Nutzwiderstande Q und den Bewegungswiderständen, nämlich der Zahnreibung zwischen B und B' sowie der Zapfenreibung in den Lagern der Welle. Das Verhältniss β der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung zur Theilrisskraft B ist nach §. 76, Gl. (4):

$$\beta = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi\mu.$$

Die Zapfenreibung wird (abgesehen vom Eigengewicht der Trommelwelle) durch die Kräfte Q und B verursacht, von denen letztere fast ganz den Wellzapfen zunächst dem Rade B belastet, während Q sich auf beide Zapfen in verschiedenem Verhältnisse vertheilt je nach der Stelle, wo augenblicklich die Kette von der Trommel niederhängt. In den beiden Grenzfällen ihrer vollständigen Auf- oder Abwickelung kann mit Rücksicht darauf, dass die Kraft B nahe horizontal gerichtet ist, der gesammte Zapfendruck näherungsweise

$$= Q + B \text{ resp. } = \sqrt{Q^2 + B^2}$$

gesetzt werden, und da letzterer Ausdruck nach einer hier vollständig genügenden Näherungsformel* $= 0{,}96\ Q + 0{,}4\ B$ gesetzt werden kann, so mag im Durchschnitt der gesammte Zapfendruck zu

$$\frac{1{,}96}{2} Q + \frac{1{,}4}{2} B = 0{,}98\ Q + 0{,}7\ B$$

veranschlagt werden. Dem Gleichgewicht der Kräfte an der Trommelwelle entspricht dann die Gleichung:

$$(1 - \beta) Br = Qq + \mu' (0{,}98\ Q + 0{,}7\ B) u,$$

woraus folgt:

$$B = \frac{q + 0{,}98\ \mu' u}{(1 - \beta) r - 0{,}7\ \mu' u} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In Bezug auf die Vorgelegewelle V ist B Nutzwiderstand, C die treibende Kraft. Letztere wird vermindert durch die Zahnreibung zwischen den Rädern C und C' im Verhältnisse

---

* Zur angenäherten Berechnung eines Ausdruckes von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ kann man setzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax + by,$$

wenn nur den Coefficienten a und b angemessene Werthe beigelegt werden, die um so zutreffender bestimmt werden können, zwischen je engeren Grenzen das Verhältniss $\frac{y}{x}$ liegend vorauszusetzen ist. Ist nur $\frac{y}{x} < 1$ gegeben, so ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}96\ x + 0{,}4\ y$$

mit einem Fehler von höchstens 4 Procent des wahren Werthes der Wurzelgrösse; für $\frac{y}{x} < \frac{1}{2}$ ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}986\ x + 0{,}23\ y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{4}{3}$ Procent, für $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$ dagegen

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}816\ x + 0{,}59\ y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{3}$ Procent des wahren Werthes.

$$\gamma = \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'}\right)\pi\mu$$

und da, was die Zapfenreibung betrifft, die Kraft B fast nur den einen, C fast nur den anderen Wellzapfen als Zapfendruck belastet, indem das Rad B' dicht neben dem einen, das Rad C dicht neben dem anderen Lager auf der Welle V sitzt, so entspricht dem Gleichgewicht der Kräfte an letzterer die Gleichung:

$$(1-\gamma)\,C\varrho = Br' + \mu'(B+C)v$$

$$C = \frac{r' + \mu' v}{(1-\gamma)\varrho - \mu' v} B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Was endlich das Gleichgewicht der Kräfte an der Kurbelwelle W betrifft, so kann von jeder der beiden an je einer Kurbel angreifenden treibenden Kräfte $= 0{,}5\,P$ angenommen werden, dass sie nur das der betreffenden Kurbel zunächst liegende Lager als Zapfendruck belastet; an einem dieser Lager setzt sich aber fragliche Kraft mit dem vom Nutzwiderstande herrührenden lothrechten Drucke C zu einer Resultanten zusammen, welche, da sie bei den Umdrehungen der Kurbel zwischen den Grenzen $C + 0{,}5\,P$ und $C - 0{,}5\,P$ schwankt, im Mittel $= C$ gesetzt werden kann. Somit gilt für die Kurbelwelle durchschnittlich die Momentengleichung:

$$Pp = C\varrho' + \mu'(C + 0{,}5\,P)w$$

$$P = \frac{\varrho' + \mu' w}{p - 0{,}5\,\mu' w} C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch Multiplication der Gleichungen (1), (2), (3) ergiebt sich P im Verhältnisse zu Q. Ohne Bewegungswiderstände, d. h. mit $\mu' = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ wäre, unter P_0 den dieser Voraussetzung entsprechenden Werth von P verstanden,

$$P_0 = \frac{q}{r}\frac{r'}{\varrho}\frac{\varrho'}{p} Q = \frac{q}{p}\frac{z'}{z}\frac{\zeta'}{\zeta} Q \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Das Verhältniss $\dfrac{P_0}{P}$ ist der sogenannte Wirkungsgrad.

Da auf sorgfältige Wartung der Reibungsflächen bei einer solchen im Freien benutzten Winde kaum zu rechnen ist, mag

$$\pi\mu = 0{,}4 \text{ und } \mu' = 0{,}11$$

gesetzt werden. Ist nun z. B. bei Voraussetzung von zu hebenden Lasten bis $Q = 2500$ Kgr.

$$\underbrace{q = 240,\quad r = 462{,}5,\quad z = 74}_{u = 45}\qquad \underbrace{r' = 75,\quad \varrho = 323,\quad z' = 12\quad \zeta = 76}_{v = 32}\qquad \underbrace{\varrho' = 68,\quad p = 400,\quad \zeta' = 16}_{w = 20}$$

wo den angegebenen Längen das Millimeter als Einheit zu Grunde liegt und

$$\frac{r}{z} = \frac{r'}{z'}, \text{ sowie } \frac{\varrho}{\zeta} = \frac{\varrho'}{\zeta'}$$

ist, so findet man $\beta = 0{,}0387$ und $\gamma = 0{,}0303$, damit nach Gl. (1)—(3):

$$B = 0{,}555\ Q, \quad C = 0{,}2535\ B, \quad P = 0{,}176\ C,$$

also $$P = 0{,}176 \,.\, 0{,}2535 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}0248\ Q,$$

während nach Gl. (4): $$P_0 = 0{,}0205\ P$$

gefunden wird, entsprechend einem Wirkungsgrade

$$\frac{P_0}{P} = \frac{205}{248} = 0{,}83.$$

Zur Hebung der Maximallast $Q = 2500$ Kgr. wäre an den zwei Kurbeln ein gesammter Druck:

$$P = 0{,}0248 \,.\, 2500 = 62 \text{ Kgr.}$$

erforderlich, wozu 4 Arbeiter, zwei an jeder Kurbel, ausreichen würden, da es sich hier nicht um eine längere Zeit hindurch stetig andauernde Leistung handelt.

Wenn zur Hebung geringerer Lasten die Kurbelwelle verschieblich in ihren Lagern eingerichtet ist, so dass durch solche Verschiebung die Räder C' und C ausser Eingriff kommen, dagegen ein auf der Kurbelwelle sitzendes zweites und zwar dem Rade B' gleiches Rad mit B zum Eingriffe gebracht wird (wonach bei der nun im umgekehrten Sinne zu bewirkenden Drehung der Kurbeln die Vorgelegewelle leer mitläuft), so bleibt, wenn B jetzt die Theilrisskraft zwischen dem Rade B und dem auf der Kurbelwelle sitzenden Rade B' bedeutet, die obige Gleichung (1) unverändert bestehen, während Gl. (2) wegfällt und Gl. (3) zu ersetzen ist durch:

$$P = \frac{r' + \mu' w}{p - 0{,}5\,\mu' w}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

Gl. (4) durch: $$P_0 = \frac{q}{r}\frac{r'}{p}\, Q = \frac{q}{p}\frac{z'}{z}\, Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Mit den oben angenommenen Zahlenwerthen findet man hiernach:

$$P = 0{,}1935\ B = 0{,}1935 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}1074\ Q$$
$$P_0 = 0{,}0973\ Q$$

entsprechend einem Wirkungsgrade $\frac{P_0}{P} = \frac{973}{1074} = 0{,}91$. In diesem Zustande, nämlich ohne Hülfe der Vorgelegewelle, würden 4 Arbeiter bei gleicher durchschnittlicher Anstrengung von je $\frac{62}{4} = 15{,}5$ Kgr. Lasten heben können bis zu

$$Q = \frac{62}{0,1074} = 577 \text{ Kgr.}$$

natürlich mit entsprechend grösserer Geschwindigkeit, als bei Benutzung der Vorgelegewelle.

Mit Rücksicht darauf, dass bei dieser Rechnung die Belastung der Zapfen durch das Eigengewicht der Wellen, sowie auch die Kettenreibung unberücksichtigt blieb, wird schliesslich der Wirkungsgrad der Winde noch etwas kleiner zu veranschlagen sein, als 0,83 resp. 0,91, jenachdem sie mit oder ohne Vorgelegewelle benutzt wird.

§. 79. Zahnreibung von Kegelrädern.

Es werde zunächst wieder angenommen, dass der Eingriff nur auf einer Seite der Axenebene stattfindet und dass beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist. Letztere findet statt in einer Geraden, die verlängert durch den Durchschnittspunkt O der Axen OA, OA' geht, und wenn in ihr der Normaldruck N gleichförmig vertheilt vorausgesetzt wird, so kann er behufs der folgenden Betrachtung auch im Mittelpunkte p der fraglichen Berührungslinie concentrirt gedacht werden. Die Kugelfläche K, deren Mittelpunkt O und deren Radius $k = Op$ ist, schneidet dann die kegelförmigen Axoide der Räder in ihren mittleren Theilkreisen, deren Radien wieder mit r und r' bezeichnet seien; sie sind, unter P den Durchschnittspunkt der Kugelfläche K mit der Polaxe (der in der Axenebene liegenden Berührungslinie der Axoide) verstanden, beziehungsweise = den von P auf die Axen gefällten Perpendikeln PA, PA'. Die Eingriffslinie Pp, d. i. die Bahn des Punktes p in Bezug auf die Axenebene, sowie die Bahnen ap und $a'p$ dieses Punktes (analog Fig. 93) in den beiden Zahnflächen sind jetzt Curven in der Kugelfläche K, und wenn wieder σ, σ' die von den mittleren Theilkreisen aus gerechneten Bogenlängen ap, $a'p$ bedeuten, so ist der Mittelwerth der auf die mittleren Theilkreise reducirten Zahnreibung wie in §. 77:

$$R = \frac{\mu}{b} \int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma'),$$

unter b die Bogenlänge verstanden, mit der sich jene Theilkreise auf einander abwälzen, während die Berührung der Zähne dauert und der mittlere Berührungspunkt p längs den Zahnflächen die Wege $\sigma = s$, $\sigma' = s'$ durchläuft.

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der mittleren Theilkreise entsprechen wieder die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ der Räder; aber die relative Drehung des einen gegen das andere um die Polaxe $OP =$ der Resultanten aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen dieser elementaren Drehungswinkel ist jetzt:

$$d\varphi = dx\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}},$$

wenn ε den Axenwinkel AOA' bedeutet. Zerlegt man diese Drehung $d\varphi$ um OP in zwei Componenten um die Axe Op und um eine in der Ebene POp dazu senkrechte Axe, also, unter η den Winkel POp verstanden, in die Componenten $\cos\eta\, d\varphi$ und $\sin\eta\, d\varphi$, so ist es nur die letztere, welche die relativ gleitende Bewegung $= d\sigma - d\sigma'$ des Punktes p der einen Zahnfläche gegen die andere zur Folge hat:

$$d\sigma - d\sigma' = k\sin\eta\, d\varphi = y\, d\varphi,$$

wenn mit $y = k\sin\eta$ das vom Pol P auf die Berührungslinie Op gefällte Perpendikel bezeichnet wird. Die obige Gleichung für R geht somit über in:

$$R = \frac{\mu}{b}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}}\int_0^b Ny\, dx \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Indem sie sich von Gl. (1) in §. 77 nur dadurch unterscheidet, dass

$$\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \text{ an die Stelle von } \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

getreten ist, gelten mit der gleichen Modification auch die früher aus jener Gleichung gezogenen Folgerungen. Insbesondere kann, wenn P die auf die mittleren Theilkreise bezogene Theilrisskraft bedeutet, analog der allgemeinen Näherungsformel (1) in §. 76 gesetzt werden:

$$R = \frac{\mu b}{2}P\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

entsprechend der obigen Gleichung (1) mit $Ny = Px$.

Wenn endlich im Durchschnitt wieder der Eingriffsbogen b auf jeder Seite der Axenebene = der Theilung, also, unter z und z' die Zähnezahlen verstanden,

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{bz},\ \frac{1}{r'} = \frac{2\pi}{bz'}$$

gesetzt wird, so folgt aus Gl. (2):

$$R = \pi\mu P\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{zz'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

insbesondere für $\varepsilon = 90^0$:

$$R = \pi \mu P \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z'^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

Auch die früheren Formeln für Cylinderräder mit äusserem und innerem Eingriffe sind, wie es sein muss, als Specialfälle in der allgemeineren Gl. (3) enthalten, indem sie daraus beziehungsweise mit $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 180^0$ erhalten werden.

§. 80. Reibung von Schneckenrädern.

Zahnräderpaare mit windschiefen Radaxen werden selten zur Uebertragung so grosser Kräfte verwendet, dass ihre Reibung als wesentlicher Bestandtheil des gesammten Bewegungswiderstandes der betreffenden Maschine besondere Rücksicht erforderte, mit Ausnahme allenfalls des aus einer sogenannten Schnecke mit entsprechendem Schneckenrade (Schraube mit entsprechendem Schraubenrade) bestehenden Elementenpaares bei rechtwinkelig geschränkten Axen der Elemente. In dem gewöhnlichen Falle eines einfachen Gewindes der Schnecke entspricht einer vollen Umdrehung derselben eine Drehung des Rades um den Winkel $\frac{2\pi}{z}$, wenn z die Zähnezahl des Rades bedeutet, und wenn somit dieses Elementenpaar als einfaches Hülfsmittel für Bewegungsübersetzungen ins Langsame oft nützliche Dienste leisten kann, so ist damit doch der Nachtheil eines im Vergleich mit gewöhnlichen Räderpaaren sehr erheblichen Reibungswiderstandes verbunden, der nämlich (mit Rücksicht auf die Art der relativ gleitenden Bewegung in den Berührungspunkten beider Elemente) als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus der Gewindereibung eines Schraubenpaares und aus der Zahnreibung, die dem Eingriffe eines Cylinderrades von z Zähnen mit einer Zahnstange entspricht. Ist also Q der Nutzwiderstand im Theilrisse des Schneckenrades, so muss auf dasselbe wegen der Zahnreibung die etwas grössere Theilrisskraft Q' ausgeübt werden, die nach §. 76, Gl. (5) zu Q in der Beziehung steht:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z}\right) = Q,$$

und wenn dazu die Schnecke mit einem Kraftmomente $= Pr$ gedreht wird, so muss nach §. 74 mit Rücksicht auf die Gewindereibung:

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho) = Q \frac{tg(\alpha + \varrho)}{1 - \frac{\pi \mu}{z}} \dots\dots\dots\dots (1)$$

sein, wo P, r, α, ϱ die aus §. 74 bekannten Bedeutungen haben. —

Bei einem einfachen Schneckenradgetriebe, bestehend aus Schnecke, Schneckenrad und einem gemeinsamen Lagerkörper beider, können (abgesehen von noch mehr untergeordneten Widerständen) ausser der vorbesprochenen Reibung des Schneckenradpaares auch die Spurzapfenreibung der Schneckenwelle und die Tragzapfenreibung der Radwelle in Betracht kommen. Mit Rücksicht auf letztere und auf die Zahnreibung zusammen ist der Druck Q', der auf das Schneckenrad tangential an seinen Theilriss entgegen dem Nutzwiderstande Q ausgeübt werden muss, bestimmt durch die Gleichung:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z}\right)\left(1 - \mu' \frac{b}{a}\right) = Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}\right) = Q,$$

unter a den Theilrisshalbmesser, b den Zapfenhalbmesser des Schneckenrades und unter μ' einen Coefficienten verstanden, dessen Bedeutung aus §. 72 hervorgeht. Indem dann wieder

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho)$$

ist, ergiebt sich mit Rücksicht auf die Spurzapfenreibung der Schnecke das zu ihrer Drehung erforderliche Kraftmoment:

$$M = Pr + \mu' Q' r' = Q' r \left[tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r} \right],$$

unter r' den nach §. 70 zu bestimmenden mittleren Radius der Spurzapfenfläche und unter μ' den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, der, obschon von anderer Bedeutung, doch dem vorigen Coefficienten μ' gleich gesetzt werden mag. Die Einsetzung des aus obiger Gleichung folgenden Ausdruckes von Q' ergiebt endlich:

$$M = Qr \frac{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}}{1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Ohne Reibungen wäre $M = M_0 = Qr\, tg\, \alpha$, und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\, \alpha \frac{1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}}{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}} \dots\dots\dots\dots (3).$$

Von der Spurzapfenreibung der Schnecke sind M und η in viel höherem Grade abhängig, als von der Tragzapfenreibung der Schneckenradwelle (da $\mu' \frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist), und ist es deshalb rathsam, das Getriebe möglichst so anzuordnen, dass jene Spurzapfenreibung nicht in einer Ringfläche ($r' > r$), sondern in einer vollen Kreisfläche ($r' < r$), somit nicht an einer mit entsprechendem Bundringe versehenen mittleren Stelle, sondern am Ende der Schneckenwelle stattfindet. Wenn z. B. wie in §. 75

$$\alpha = 5^0\,12',\ \varrho = 5^0\,43',\ r' = 0{,}57\,r,\ \mu' = 0{,}1$$

gesetzt wird und $\pi\mu = 0{,}4$ (§. 76), $z = 20$, $b = 0{,}1\,a$,

so findet man

$$\eta = 0{,}091\,\frac{1 - 0{,}02 - 0{,}01}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}35.$$

V. Walzenreibung.

§. 81. Wesen und Gesetze der Walzenreibung.

Während man sich bisher meistens damit begnügt hat, den Widerstand gegen die wälzende Bewegung dadurch zu erklären, dass in Folge theils der Rauhigkeit der Oberflächen, theils der Deformation von Walze und Unterlage durch die Wirkung des Normaldruckes P die wälzende Bewegung als eine Folge von Umkantungen, nämlich von Drehungen um Axen vorzustellen sei, die im Sinne ihrer Aufeinanderfolge etwas neben der jeweiligen Richtungslinie von P vorbei gehen, ist von Prof. Osborne Reynolds* 1875 eine mit Versuchen verbundene eingehendere Untersuchung über das Wesen dieses Bewegungswiderstandes angestellt und danach derselbe als hauptsächlich auf relativ gleitender Bewegung beruhend, somit auch dieser Widerstand als gleichartig mit der im engeren Sinne so genannten Reibung erkannt worden.

Auf das Vorhandensein von relativ gleitender Bewegung deutet schon der Umstand, dass bei der rollenden Bewegung einer Walze (eines Cylinders) auf einer horizontalen ebenen Unterlagsplatte die von jener längs dieser durchlaufene Strecke im Allgemeinen merklich von der geometrischen Wälzungsstrecke, d. h. von derjenigen (= Product aus Radius und

* Philosophical Transactions, Vol. 166, auszugsweise in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure für 1877, S. 417.

Drehungswinkel der Walze) verschieden und zwar meistens kleiner gefunden wird, die bei demselben Drehungswinkel die vollkommen starre Walze auf der vollkommen starren Unterlage bei rein rollender Bewegung durchlaufen hätte, eine Thatsache, die an und für sich von Interesse ist und von Reynolds zunächst einer näheren Prüfung unterworfen wurde. Erklärlich ist sie folgendermaassen. Wenn die schwere Walze auf der Unterlagsplatte ruht, so berühren sich beide Theile nicht nur in einer Linie, sondern in einer Fläche, längs welcher die Walze eine Verflachung, d. h. eine Verminderung ihrer convexen Krümmung, die Unterlage dagegen einen Eindruck, d. h. eine concave Krümmung erleidet. Da mit der Abflachung der Walze an und für sich eine Verkleinerung ihres Umfanges, mit dem Eindruck der Unterlage dagegen eine Vergrösserung ihrer Oberfläche verbunden ist, so würde daraus eine Verkleinerung der von der Walze rollend durchlaufenen Strecke im Vergleich mit der geometrischen Wälzungsstrecke folgen. Indem aber ferner, auch abgesehen von der Oberflächengestaltung beider Körper, durch ihre verticale Zusammendrückung eine horizontale Ausdehnung an und in der Nähe ihrer Berührungsfläche bedingt wird (verbunden mit theilweiser seitlicher Verdrängung ihrer materiellen Theile über die Ränder der Berührungsfläche hinaus), so wird dadurch jene Oberflächenvergrösserung der Unterlage noch vermehrt, die Verkleinerung der Walzenoberfläche aber vermindert und möglicher Weise auch in Vergrösserung verwandelt: jenes um so mehr, je weicher (zusammendrückbarer) das Material der Unterlage, dieses um so mehr, je weicher das Material der Walze ist. Die Folge beider Umstände wird sein, dass die von einer harten Walze auf einer weicheren ebenen Unterlage rollend durchlaufene Strecke stets kleiner ist als die geometrische Wälzungsstrecke, dass es dagegen beim Rollen einer Walze auf härterer Unterlage von dem Härteverhältnisse beider Körper und vom Durchmesser der Walze abhängt, ob die von ihr rollend durchlaufene Strecke kleiner oder grösser ist, als die geometrische Wälzungsstrecke.

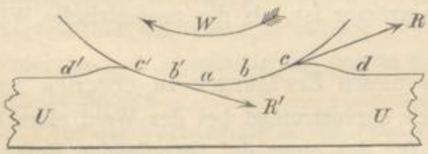
Dem Verhalten, wie es nach diesen Erwägungen zu erwarten war, insbesondere voraussichtlich deutlich hervortretend bei der Wahl eines in hohem Grade dehnbaren Materials für den einen der betreffenden Körper, entsprachen durchaus die Ergebnisse von Versuchen. Indem dabei als Unterlage einer sorgfältig polirten, 14 Pfund schweren gusseisernen Walze von 6 Zoll Durchmesser auf Holz geleimte Kautschukstreifen verschiedener Dicke benutzt wurden, zeigte sich die thatsächlich durchlaufene stets kleiner als die geometrische Wälzungsstrecke, und zwar für je zwei Umdrehungen der Walze beziehungsweise um

	0,44	0,84	0,49 Zoll
	= 1,2	2,2	1,3 Procent der geom. Wälzungsstrecke
bei	0,015	0,08	0,36 Zoll Dicke des Kautschukbandes.

Das in diesen Zahlen sich aussprechende Abhängigkeitsgesetz ist dadurch erklärlich, dass, je dünner das Kautschukband ist, desto mehr seine seitliche Ausdehnung an der oberen Fläche durch die aufgeleimte untere Fläche gehindert wird, dass aber andererseits, je dicker das Band ist, desto beträchtlicher der Eindruck, desto grösser die Berührungsfläche, desto kleiner der specifische Druck und somit desto kleiner auch die seitliche Ausdehnung ausfällt. Wurde auf die Walze ringsum ein $^3/_4$ Zoll dicker Kautschukreif geleimt, so war die auf einer Stahlunterlage oder auf einem sehr dünnen (auf Holz geleimten) Kautschukbande abgerollte Strecke etwas grösser, als die geometrische Wälzungsstrecke, auf einem dickeren Kautschukbande dagegen wieder kleiner; doch blieb der Unterschied zwischen effectiver und geometrischer Wälzungsstrecke stets wesentlich geringer, als beim Rollen der harten Walze auf einer Kautschukunterlage.

Inwiefern nun aber mit der unter solchen Umständen stattfindenden wälzenden Bewegung ein partielles Gleiten und somit Reibung verbunden ist, trotzdem dass (gemäss dem Begriffe einer wälzenden Bewegung) wenigstens in der Mitte der Berührungsfläche zwischen Walze und Unterlage, wo der specifische Druck am grössten ist, kein Gleiten stattfinden, dass nämlich μP, unter μ den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, grösser als die auf relatives Gleiten der beiden Körper hin wirkende Kraft sein soll, wird am deutlichsten erkennbar aus der Betrachtung des Falles einer harten, z. B. eisernen Walze auf einer weichen, z. B. einer Unterlage von Kautschuk: siehe Fig. 95, entsprechend einer rollenden Bewegung der harten Walze W im Sinne des krummen Pfeils auf der weichen Unterlage UU. Letztere ist längs der Berührungsfläche cc' in verticaler Richtung comprimirt und seitlich entsprechend ausgedehnt, beides in abnehmendem Grade von der Mitte a gegen die Ränder c und c' hin.

Fig. 95.



Der seitlichen Ausdehnung unterhalb der Berührungsfläche entspricht dann nothwendig ausserhalb derselben, etwa von c bis d und von c' bis d', eine seitliche Compression, verbunden mit verticaler Ausdehnung, also wulstförmiger Erhebung der hier convex nach oben gekrümmten Oberfläche der weichen Unterlage. Wenn nun etwa von b bis b' keine Gleitung stattfindet, so nimmt, wenn die Walze, im Sinne des Pfeils W sich drehend, im Sinne $d'd$ weiter rollt, längs bc die verticale Compression und seitliche Ausdehnung zu, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung bc und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R; andererseits nimmt von b' bis c' die verticale Compression und seitliche Ausdehnung ab, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung $c'b'$ und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R'. In diesen beiden Kräften R und R', deren Momente in Bezug auf die Walzenaxe dem Drehungssinne der Walze entgegen wirken, besteht wenigstens in der Hauptsache die hier in Rede stehende Walzenreibung. Wenn auch mit Rücksicht auf die hier ausser Acht gelassene gleichzeitige Deformation der Walze die thatsächlich stattfindenden Verhältnisse modificirt werden mögen, so bleibt doch ihr Gesammtcharakter derselbe.

Wenn diese Erklärung der Walzenreibung als Widerstand gegen eine solche Gleitung, die, durch Deformation der betreffenden Körper verursacht, nur an einem Theil ihrer Berührungsfläche stattfindet, richtig ist, so muss zwischen ihr und den bisher besprochenen Reibungen, die als Widerstände gegen relative Gleitungen in allen Punkten der Berührungsfläche zugleich, nämlich der ganzen Körper sich darstellten, insofern ein wesentlicher Unterschied stattfinden, als sie durch Verminderung des Reibungscoefficienten, z. B. durch Fettung der Oberflächen, nicht auch, wenigstens nicht in gleichem Maasse vermindert zu werden braucht. Indem dadurch nämlich die Breite des gleitungslosen Theiles bb' der Berührungsfläche verkleinert wird, ist es jetzt ein grösserer Theil des Gesammtdruckes, der längs bc und $b'c'$ die Reibungen R und R' verursacht, so dass diese grösser werden können trotz der Abnahme des Reibungscoefficienten. Zur experimentalen Prüfung dieses Verhaltens benutzte Reynolds die oben erwähnte polirte gusseiserne Walze auf ebenfalls möglichst glatt hergerichteten ebenen Platten von Gusseisen, Glas, Messing, Buchsbaum (Hirnholz) und Kautschuk, die theils ganz rein, theils leicht gefettet (die drei ersten mit Oel, die anderen mit Graphit) angewendet wurden. Die Versuche selbst sind in allen Fällen auf zweierlei Weise angestellt worden. Erstens wurde die Walze auf die horizontale Platte gelegt und diese allmählig geneigt bis bei einer gewissen Neigung α die Walze zu rollen anfing; zweitens wurde der Walze ein Anstoss gegeben, so dass sie auf der etwas geneigten Platte bis zu einer gewissen Stelle aufwärts rollte, und wurde dabei die Neigung allmählig vergrössert bis bei einem gewissen Werthe β derselben die Walze nicht mehr an jener Stelle liegen blieb, sondern rückwärts rollte. Die so gefundenen Werthe von α

und β (100 000 α und 100 000 β) sind als Mittelwerthe vieler einzelner Versuche folgende:

Art der Platte	100 000 α		100 000 β	
	rein	gefettet	rein	gefettet
Gusseisen	57	56	26	24
Glas	63	60	19	26
Messing	77	65	21	26
Buchsbaum	100	92	57	23
Kautschuk	354	387	319	290

In der That sind diese Werthe von α und β nicht deutlich und wesentlich abhängig von der Fettigkeit der Oberfläche, also von der Grösse des Reibungscoefficienten, sie wachsen aber erheblich mit abnehmender Härte der Unterlage, womit die Grösse der Deformation, also auch die Grösse der Relativbewegung (längs bc und $b'c'$ in Fig. 95) und damit die Arbeit der Reibungskräfte R, R' zunimmt. Dass die Werthe von β so erheblich kleiner sind, als die von α, dürfte zumeist dadurch erklärlich sein, dass die vollständige Wiederausdehnung der comprimirten Substanz wegen ihrer Trägheit und besonders der inneren Reibung eine gewisse Zeit erfordert; in Folge dessen wird hinter der Mitte a der Berührungsfläche (Fig. 95) beim Rollen der Walze ihre eigene Compression und die der Unterlage stets etwas beträchtlicher sein als sie auf der vorderen Seite ist, somit der hintere Theil ac' des Berührungsbogens etwas kleiner als der vordere ac, wodurch die Umkehrung der in gewissem Sinne stattgefundenen Rollung erleichtert wird, verglichen mit der aus dem Zustande der Ruhe beginnenden Rollung, bei der die Compression auf beiden Seiten der Mitte a gleich ist und überhaupt etwas grösser sein mag, als die vorübergehende Compression während der Bewegung der Walze.

Dieser so eben erwähnte Umstand, dass beim Rollen der Walze stets der vordere Theil des Berührungsbogens etwas grösser ist, als der hintere, muss zur Folge haben, dass der resultirende Gegendruck P, den die Unterlage vertical aufwärts auf die Walze ausübt, etwas vor der Walzenaxe vorbeigeht und so den durch die Reibungskräfte R, R' verursachten Widerstand vergrössert um so mehr, je grösser die Geschwindigkeit der rollenden Bewegung ist, weil damit auch der Längenunterschied jener Bögen zunehmen wird. Ob diese Folgerung zutrifft, bleibt durch Versuche nachzuweisen. —

Uebrigens waren die Untersuchungen von Reynolds zunächst nur auf die Aufklärung des Wesens der Walzenreibung, nicht auf die Ermittelung der Abhängigkeitsgesetze ihrer Grösse gerichtet; diese ist lediglich auf Versuche angewiesen, die freilich bisher nur in wenig befriedigender Weise angestellt wurden, so dass sie namentlich den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit von Walze und Unterlage sowie des Durchmessers der ersteren nicht mit Sicherheit erkennen lassen. Sofern diese Walzenreibung sich als ein Widerstandsmoment gegen die Drehung der Walze um die Polaxe (ideale Berührungslinie mit der Unterlagsplatte) darstellt, ist nur so viel durch die Versuche als constatirt zu betrachten, dass das fragliche Moment dem Normaldrucke P proportional ist; wird es aber somit $= mP$ gesetzt, unter m eine Länge verstanden, deren Zahlenwerth von der zu Grunde liegenden Längeneinheit abhängt und nach Coulomb, Rondelet, Poncelet, Pambour, Rittinger, Weisbach u. A.

1) für gusseiserne Walzen von ungefähr 0,5 Mtr. Durchmesser auf gusseisernen Schienen = 0,48 Millimeter,

2) für Eisenbahnwagenräder von ungefähr 1 Mtr. Durchmesser auf den Bahnschienen = 0,5 bis 0,55 Millimeter,

3) für gusseiserne Walzen auf Granitbahnen = 1 Millimeter,

4) für hölzerne Walzen auf gemeisselten Steinflächen = 1,3 Millimeter,

5) für hölzerne Walzen auf Unterlagen von Holz = 0,5 bis 1,5 Millimeter

gefunden wurde, so haben diese Zahlen kaum wissenschaftlichen Werth, so lange nicht ausser dem Walzendurchmesser namentlich die Oberflächenbeschaffenheit beider Theile genauer angegeben wird. Auf den erheblichen Einfluss der letzteren ist aus der Vergleichung dieser Zahlen mit den obigen Werthen von α nach den Versuchen von Reynolds zu schliessen, wenn von der ihnen anhaftenden Unsicherheit abgesehen wird. Zur Vergleichung des Winkels α mit dem Factor m kann man nämlich bemerken, dass, wenn eine Walze vom Gewichte G und Radius r auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten ebenen Fläche liegt, das auf Einleitung der Drehung um die Polaxe abzielende Kraftmoment $= G \sin \alpha \,.\, r$, der Normaldruck $P = G \cos \alpha$ und somit die beginnende Wälzung an die Gleichung gebunden ist:

$$m\,G \cos \alpha = G \sin \alpha \,.\, r, \text{ woraus } m = r\,tg\,\alpha = r\alpha$$

mit Rücksicht auf die Kleinheit von α folgt. Da hier $r = 3$ Zoll engl. $=$ 76 Millim. war, so würde sich z. B. für die polirte gusseiserne Walze auf eben solcher gusseiserner Platte

$$m = 76 \,.\, 0{,}00057 = 0{,}043$$

ergeben $= \frac{1}{11}$ des oben unter 1) angegebenen Werthes, der sich auf nicht polirte Oberflächen bezieht. Auch wenn es sich bewahrheiten sollte, dass, wie aus neueren Versuchen von Dupuit sowie von Poirée und Sauvage geschlossen wurde, der Factor m proportional $\sqrt{r}$ zu setzen sei, so würde darin jener erhebliche Unterschied doch nur zum kleineren Theil seine Erklärung finden, indem danach der auf gleichen Radius $r = 250$ Millim. (genauer 262 Millim.) reducirte Werth des Reynolds'schen Versuches doch nur

$$m = 0{,}043 \sqrt{\frac{262}{76}} = 0{,}08$$

$= \frac{1}{6}$ des obigen Werthes unter 1) gefunden würde. Die nähere Aufklärung dieses Unterschiedes erscheint um so nöthiger, als er mit der sonst so wohlbegründeten Reynolds'schen Auffassung vom Wesen des Rollungswiderstandes und mit der Erfahrung in Widerspruch zu stehen scheint, derzufolge sich der Einfluss einer Verminderung des Reibungscoefficienten durch Fettung der Oberflächen als unerheblich ergeben hat.

§. 82. Beispiele.

Indem das Product aus dem in vorigem Paragraph besprochenen Factor m und dem Normaldrucke zwischen Walze und Unterlage als ein Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider Theile um ihre ideale Berührungslinie (die Polaxe) sich darstellte, ergiebt sich die Arbeit der betreffenden Walzenreibung für eine gewisse Bewegung durch Multiplication jenes Productes mit dem (in Bogenmaass ausgedrückten) entsprechenden relativen Drehungswinkel. Diese Vorbemerkung ist nützlich zur Behandlung von Aufgaben, bei denen die Walzenreibung in Betracht kommt.

1) Um einen schweren Körper K vom Gewichte Q auf einer horizontalen Bahn B leichter, als bei relativ gleitender Bewegung, nach einer gewissen Richtung AX längs B fortbewegen zu können, sei er auf Walzen W von gleichen Radien r gelegt, die selbst auf der Bahn B so liegen, dass ihre parallelen Axen rechtwinklig gegen AX gerichtet sind. Einem unendlich kleinen Wege dx von K gegen B entspricht dann eine Neigung $= \frac{dx}{2r}$ jedes vorher lothrechten Walzendurchmessers gegen die Lothrechte, also ein ebenso grosser relativer Drehungswinkel von W gegen K sowohl wie von W gegen B. Sind also m_1 und m_2 die Constanten der Walzen-

reibung für W und K resp. W und B, und ist ΔQ der auf eine Walze entfallende Theil von Q, so ist die Reibungsarbeit für dieselbe

$$= (m_1 + m_2)\, \Delta Q \frac{dx}{2r}.$$

Indem die Summe dieser Arbeiten für alle Walzen = der Arbeit Pdx der Kraft P gesetzt wird, die am Körper K im Sinne AX angreifend zu seiner Fortbewegung erforderlich ist, ergiebt sich:

$$P = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Das Vertheilungsgesetz des Druckes auf die einzelnen Walzen ist in Folge der Voraussetzung gleicher Werthe von m_1 und m_2 für dieselben ohne Einfluss auf P, deshalb auch die Höhe des Angriffspunktes von P am Körper, die jenes Vertheilungsverhältniss insofern bedingt, als, je höher P angreift, desto mehr vorwiegend die vorderen Walzen belastet werden.

2) Wenn die den Körper K unterstützenden Walzen durch Rollen ersetzt werden, die mit Zapfen, deren Radien $= a$ seien, in festen Lagern drehbar sind, so entspricht dem elementaren Wege dx des Körpers K jetzt ein Drehungswinkel $= \frac{dx}{r}$ der Rollen. Ist also wieder ΔQ der Druck auf eine derselben, so ist die elementare Arbeit der Walzenreibung zwischen ihr und dem Körper K

$$= m\, \Delta Q \frac{dx}{r}.$$

Dazu kommt eine Zapfenreibungsarbeit

$$= \mu' \Delta Q \,.\, a \frac{dx}{r}$$

und wenn die Summe beider für alle Rollen zusammen wieder $= Pdx$ gesetzt wird, so folgt:

$$P = \frac{m + \mu' a}{r} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Indem hier die Rollen auch verschiedene Radien r und Zapfenradien a haben können, sofern sie nur oben von der horizontalen ebenen Unterfläche des Körpers K berührt werden, ist allgemein:

$$P = \Sigma \frac{m + \mu' a}{r} \Delta Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

3) Denkt man sich den aus dem Körper K, den n Rollen R und den unter sich zu einem Gliede L verbundenen Lagern dieser Rollen bestehenden Mechanismus in der Weise umgekehrt, dass K als nunmehr unterstes Glied festgestellt ist, so erscheint L als ein Wagen, der mit n Räderpaaren R

(deren jedes kinematisch als nur eine Rolle zu betrachten ist) auf der jetzt oberen horizontalen Fläche von K als Fahrbahn fortbewegt werden soll. Die dazu mit Rücksicht auf Zapfenreibung und Rollungswiderstand erforderliche horizontale Zugkraft P ergiebt sich aus Gl. (3), unter Q das Gewicht des Wagens verstanden. Insbesondere bei gleichen Durchmessern aller Räder und aller Zapfen (Axschenkel) ist nach Gl. (2):

$$P = \frac{m + \mu' a}{r} Q.$$

Wenn z. B. für Eisenbahnfahrzeuge im Durchschnitt $r = 500$ Millim., $a = 40$ Millim., ferner $m = 0,5$ Millim. (§. 81) und im Mittel nach den Bestimmungen von Kirchweger (§. 72) $\mu' = \frac{1}{80} = 0,0125$ gesetzt wird, so folgt:

$$P = \frac{0,5 + 0,5}{500} Q = \frac{Q}{500},$$

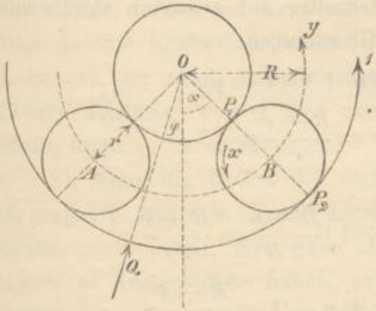
zu gleichen Theilen von der Reibung in den Axenlagern und vom Rollungswiderstande herrührend. (In Folge des Luftwiderstandes und des Anstreifens der Spurkränze an den Schienen ist, auch abgesehen von Krümmungen und Steigungen, das Verhältniss $P : Q$ in der That grösser und mit der Fahrgeschwindigkeit wachsend.)

4) Während im Vorhergehenden immer nur ein solches besonderes Walzenpaar vorausgesetzt wurde, dessen eines Element ein ebenflächig begrenzter Körper ist, kann es im Allgemeinen aus zwei Cylindern bestehen, von denen der eine auch ein Hohlcylinder sein mag. Das Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider um ihre ideale Berührungslinie (Polaxe) ist dann = dem Product aus dem gegenseitigen Normaldrucke und einem Factor m, der ebenso von beiden Cylinderradien abhängig sein wird, wie er in dem bisher betrachteten besonderen Falle von dem einen Radius der Walze abhängt. Weil aber dieses letztere Abhängigkeitsgesetz noch nicht genügend bekannt ist und Versuche über die Walzenreibung im allgemeineren Falle von zwei sich berührenden Cylindern überhaupt nicht vorliegen, so bleibt nichts übrig, als auch auf ihn einstweilen dieselben Werthe von m zu übertragen, die unter sonst gleichen Umständen jenem besonderen Falle erfahrungsmässig entsprechen.

Als Beispiel diene das Rollenlager eines um eine fest stehende verticale Säule drehbaren Krahngerüstes. Während dieses oben mittels eines Spurzapfens von der Säule getragen wird, würde sich seiner Drehung um dieselbe ein sehr beträchtliches Widerstandsmoment entgegensetzen, wenn es die am unteren Ende cylindrisch abgedrehte Säule unmittelbar mit entsprechendem Hohlcylinder umschlösse, in Folge des hier stattfindenden, mit Belastung und Ausladung des Krahnes wachsenden bedeutenden horizontalen Druckes Q. Zur Verminderung dieses Widerstandsmomentes sei deshalb das drehbare Krahngerüst mit einem so viel grösseren Radius $= R + r$ hier hohlcylindrisch gestaltet, dass ein System von gleichmässig ringsum vertheilten Rollen, deren Radien $= r$ sind, in dem ringförmigen Raume zwischen diesem Hohlcylinder und der damit coaxialen Cylinderfläche der Krahnsäule, deren Radius $= R - r$ ist, gerade Platz findet. Die Zahl der Rollen sei $= \frac{\pi}{\alpha}$, nämlich $2\,\alpha$ der Winkel, den zwei durch die Axe der Krahnsäule und durch die Axen auf einander folgender Rollen gehende Ebenen mit einander bilden.

Das Verhältniss, in welchem sich der Druck Q auf die Rollen vertheilt, ist streng genommen von ihrer Elasticität und von zufälligen Umständen, insbesondere z. B. von geringen Verschiedenheiten ihrer Durchmesser abhängig; hier genügt indessen die Annahme, dass jeweils nur solche zwei Rollen vom Drucke Q belastet werden, zwischen deren Axen A und B (Fig. 96) seine Richtungslinie hindurch geht. Bildet letztere dabei mit der Mittelebene des Winkels AOB (unter O die Axe der Krahnsäule verstanden) den Winkel φ, so sind die nach AO und BO gerichteten Componenten von Q

Fig. 96.



$$= Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin 2\,\alpha} \text{ und } = Q\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 2\,\alpha},$$

ist somit die Gesammtbelastung der Rollen

$$= Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 2\,\alpha} = Q\frac{2\sin\alpha\cos\varphi}{2\sin\alpha\cos\alpha} = Q\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}.$$

Ihr Mittelwerth ergiebt sich, da φ zwischen den Grenzen 0 und α veränderlich ist,

$$= \frac{Q}{\cos\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi = Q\frac{tg\,\alpha}{\alpha}$$

und folgt daraus weiter der entsprechende Mittelwerth M des Widerstandsmomentes $=$ der Widerstandsarbeit für einen Drehungswinkel $= 1$ des Krahngerüstes:

$$M = (m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q,$$

wenn die Constante der Walzenreibung für das aus einer Rolle und der convex-cylindrischen Krahnsäule bestehende Paar mit m_1, für das aus einer Rolle und dem concav-cylindrischen Krahngerüste bestehende Paar mit m_2 bezeichnet wird, und wenn ω_1, ω_2 die relativen Drehungswinkel der Elemente dieser Paare (beziehungsweise um die Berührungslinien wie P_1 und P_2, Fig. 96, als Polaxen) bedeuten, die einem Drehungswinkel $= 1$ des Krahngerüstes entsprechen.

Was letztere betrifft, so sei x der entsprechende Drehungswinkel einer Rolle um ihre Axe B in Bezug auf die Ebene OB, y der Drehungswinkel der Rollenaxen selbst um die Axe O; beide erfolgen (siehe die in Fig. 96 beigesetzten Pfeile) in gleichem Sinne wie die Drehung $= 1$ des Krahngerüstes. Denkt man dann dem ganzen System die gemeinschaftliche Drehung y im umgekehrten Sinne ertheilt, wodurch die relative Drehung x um B gegen OB unberührt bleibt, die Rollenaxen dagegen in Ruhe kommen und der Drehungswinkel des Krahngerüstes $= 1 - y$ wird, so entsprechen der Gleichheit der sich gleichzeitig auf einander abwälzenden Bögen der drei Querschnittskreise die Gleichungen:

$$(R - r)\,y = r\,x = (R + r)(1 - y),$$

woraus folgt:
$$y = \frac{R + r}{2\,R},\quad x = \frac{R - r}{r}\,y$$

und damit:

$$\omega_1 = x + y = \left(\frac{R - r}{r} + 1\right)\frac{R + r}{2\,R} = \frac{R + r}{2\,r}$$

$$\omega_2 = x - (1 - y) = x + y - 1 = \frac{R - r}{2\,r}$$

$$M = \frac{m_1\,(R + r) + m_2\,(R - r)}{2\,r}\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q \;\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

Die Kraft P, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, zur Drehung des Krahngerüstes mit alleiniger Rücksicht auf den Widerstand des Rollenlagers erforderlich ist, ergiebt sich $= \dfrac{M}{R + h}$. Sie geht, wie es sein muss, in den durch Gl. (1) bestimmten Grenzwerth über, wenn R ins Unendliche wächst, wobei r und h als Summanden gegen R verschwinden, $\alpha = 0$ und somit $\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1$ wird.

Setzt man für ein solches Krahnlager im Durchschnitt

$$\frac{r}{R}=\frac{3}{7} \text{ und } \frac{\pi}{\alpha}=6, \text{ also } \frac{tg\,\alpha}{\alpha}=1{,}103,$$

entsprechend 6 Rollen, so wird nach Gl. (4):

$$M=0{,}368\,(5\,m_1+2\,m_2)\,Q$$

und mit $m_1=m_2=m$: $\quad M=2{,}58\,m\,Q$,

im Durchschnitt etwa $M=1{,}2\ Q$ Millimeterkgr.,

entsprechend $m=\frac{1{,}2}{2{,}58}=0{,}465$ Millimeter.

Wäre im Falle eines gewöhnlichen Zapfenlagers der Coefficient μ' (§. 72) auch nur $=0{,}06$, so wäre doch das Reibungsmoment schon dann grösser, als 1,2 Q Millimeterkgr., wenn der Radius der Krahnsäule im Lager nur $>\frac{1{,}2}{0{,}06}$, d. i. >20 Millimeter wäre, während er in Wirklichkeit viel grösser sein wird. Zwar finden bei dem Rollenlager gewisse weitere Reibungen an den Stützflächen der Rollen auf dem Boden der sie aufnehmenden hohlcylindrischen Erweiterung des Krahngerüstes statt, sowie auch dergleichen durch die Hülfsmittel veranlasst werden können, die etwa angewendet werden, um die beständig gleichmässige Vertheilung der Rollen rings um die Krahnsäule herum zu sichern; doch sind solche zusätzliche Reibungen nur theils vom Gewichte der Rollen, theils von zufälligen Umständen abhängig, von Q aber unabhängig und überhaupt als verhältnissmässig klein zu vernachlässigen.

5) Wenn die Rollen des vorbesprochenen Rollenlagers durch Drehkörperpaare mit dem Krahngerüste gepaart sind (durch Zapfen, deren Radien $=a$ seien), ihre Axen A, B ... (Fig. 96) also unveränderliche Lagen im Krahngerüste haben, so tritt an die Stelle derjenigen Walzenreibung, der im vorigen Falle die Grössen m_2 und ω_2 entsprachen, jetzt Zapfenreibung, und wenn die Grössen m_1 und ω_1, die sich auf die aus der Krahnsäule und den Rollen bestehenden Walzenpaare beziehen, jetzt mit m und ω bezeichnet werden, so ist mit übrigens den vorigen Bedeutungen der Buchstaben der Mittelwerth des Widerstandsmomentes:

$$M=(m\omega+\mu' a x)\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q.$$

Indem aber jetzt die Rollenaxen dadurch zum Stillstande gebracht werden, dass die ihnen mit dem Krahngerüste gemeinschaftlich zukommende Drehung $=1$ um die Axe O dem ganzen Systeme im umgekehrten Sinne ertheilt wird, ist

$$x=\frac{R-r}{r} \text{ und } \omega=x+1=\frac{R}{r},$$

also
$$M = \frac{mR + \mu' a(R - r)}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Die Kraft $P = \frac{M}{R + h}$, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, mit den hier betrachteten Reibungswiderständen im Gleichgewichte ist, geht in den durch Gl. (2) bestimmten Grenzwerth über, wenn R unendlich gross und $\alpha =$ Null wird.

Uebrigens ist das hier zuletzt betrachtete Rollenlager mit einem grösseren Widerstandsmoment verbunden, als das unter 4) besprochene, für welches nach Gl. (4) insbesondere mit $m_2 = m_1 = m$ sich ergiebt:

$$M = \frac{mR}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q$$

= dem von der Walzenreibung herrührenden Bestandtheile des Widerstandsmoments nach Gl. (5).

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen.

§. 83. Spannung von Zugkraftorganen bei Rollengetrieben.

Die üblichen Zugkraftorgane (§. 28), Riemen, Seile und Ketten, insbesondere die zwei ersteren pflegen zur Getriebebildung mit Rollen kraftschlüssig so gepaart zu werden, dass die Reibung, die dem gegenseitigen Drucke beider Theile, bedingt durch die Spannung des Zugkraftorgans, entspricht, ein relatives Gleiten verhindert, insoweit es nicht die unvermeidliche Folge der verschieden grossen Spannungen und somit auch verschieden grossen Dehnungen ist, die dem Zugkraftorgane beim Auflaufen auf die Rolle und beim Ablaufen von derselben wegen ihres Drehungswiderstandes zukomen. Ausser der Reibung, die bei solcher Paarung einer Rolle mit einem sich gleichzeitig an verschiedenen Stellen auf- und abwickelnden Zugkraftorgane dem durch die Spannungs- und Dehnungsänderung desselben längs dem Rollenumfange bedingten partiellen relativen Gleiten entspricht, kann noch ein weiterer Bewegungswiderstand durch die sogenannte Steifigkeit verursacht werden, nämlich als Widerstand gegen die Krümmung des gestreckten Zugkraftorgans bei seiner Aufwickelung auf eine Rolle oder Trommel resp. gegen die Streckung desselben bei der Abwickelung. Die quantitative Beurtheilung jener Reibung und dieses Steifigkeitswiderstandes erfordert die Kenntniss der Spannung, die das Zugkraftorgan unter gegebenen Umständen haben muss, damit sein relatives Gleiten längs dem Umfange der Rolle, über die es hinweggeführt ist, auf das erwähnte partielle Gleiten beschränkt bleibe, nicht aber zu gleicher Zeit auf das ganze Zugkraftorgan sich erstrecke. Diese Spannung ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ein Band (unter welcher Bezeichnung hier der Kürze halber irgend ein Zugkraftorgan verstanden werde) sei längs der krummen Oberfläche eines starren Körpers K so ausgespannt, dass seine Mittellinie eine Curve bildet, deren Krümmungsradien normal zur Fläche sind; die Spannung des freien, d. h. ausser Berührung mit dem Körper K befindlichen und somit gerade gestreckten Bandes sei einerseits $= S_1$, andererseits $= S_2$, und es handle sich um die Beziehung, die zwischen S_1 und S_2 stattfinden muss, wenn ein Gleiten des Bandes im Sinne von S_1, also entgegen S_2 eben soll erfolgen können, während μ den betreffenden Reibungscoefficienten und α den gesammten Biegungswinkel, d. h. die Summe der Contingenzwinkel aller Bogenelemente des gekrümmten Theiles $B_1 B_2$ der Bandmittellinie bedeute. Indem bei fraglichem Grenzzustande die Spannung des Bandes von B_1 bis B_2 stetig von S_1 bis S_2 abnimmt, sei sie an irgend einer Stelle $= X$, an einer im Sinne gegen B_1 hin unendlich nahe benachbarten Stelle $= X + dX$, und $d\varphi$ der Contingenzwinkel des dazwischen liegenden Bogenelementes der Bandmittellinie. Der Normaldruck zwischen dem betreffenden Bandelemente und dem Körper K ist dann

$$= 2\,X \sin\frac{d\varphi}{2} = X\,d\varphi,$$

die Reibung $= \mu X d\varphi$, und da sie dem vorausgesetzten Grenzzustande entsprechend auch $= dX$ ist, ergiebt sich:

$$\frac{dX}{X} = \mu\,d\varphi;\quad ln\frac{S_1}{S_2} = \mu\alpha$$

oder $$S_1 = m S_2 \text{ mit } m = e^{\mu\alpha} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (1),$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden.

Ist nun bei einem offenen oder einfachen Rollengetriebe (Fig. 30, §. 30) S_1 die Spannung des ablaufenden, S_2 die des auflaufenden Bandes im Falle einer getriebenen, d. h. entgegen einem Widerstande umzutreibenden Rolle, oder umgekehrt S_1 die Spannung des auflaufenden, S_2 die des ablaufenden Bandes im Falle einer treibenden Rolle, d. h. einer solchen, die, durch eine treibende Kraft gedreht, das gespannte Band durch Reibung mitnehmen soll, so ist, wenn r den Radius der Rolle (bis zur Mittellinie des Bandes gerechnet) und Qr im ersten Falle das Widerstandsmoment der Rolle, im zweiten das sie umtreibende Kraftmoment bedeutet,

$$S_1 - S_2 = Q.$$

Damit also ein relatives Gleiten des Bandes auf der Rolle wenigstens im Ganzen, d. h. längs der ganzen Berührungsfläche nicht stattfinde, nach Gl. (1) somit $S_1 < m S_2$ sei, muss auch

$$Q + S_2 < m S_2, \quad S_2 > \frac{1}{m-1} Q, \quad S_1 > \frac{m}{m-1} Q \quad \ldots\ldots (2)$$

sein, wenn m die durch Gl. (1) bestimmte Bedeutung hat, unter α den Mittelpunktswinkel des vom Bande umspannten Umfangsbogens der Rolle verstanden.

Bei dem geschlossenen oder doppelten Rollengetriebe (Fig. 31, §. 30) sind S_1 und S_2 von der Anfangsspannung S abhängig, die im Falle $Q = 0$ gleichmässig in der ganzen Länge $= 2\,l$ des endlosen Bandes stattfindet, und die somit einen gewissen Minimalwerth haben muss, um den Bedingungen (2) zu genügen. Wenn nämlich die Längen, die ein ungespanntes Bandstück von der Länge $= 1$

für die Spannungen $S \quad S_1 \quad S_2$

annimmt, beziehungsweise $= 1 + \varepsilon \quad 1 + \varepsilon_1 \quad 1 + \varepsilon_2$

sind, so verhält sich

$$S : S_1 : S_2 = \varepsilon : \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

und indem nun in Folge des am Umfange der getriebenen Rolle stattfindenden Widerstandes Q resp. in Folge der am Umfange der anderen Rolle stattfindenden gleich grossen treibenden Kraft Q ein Stück $= x$ der einen Bandhälfte, indem deren Spannung sich von S auf S_1 erhöht, zur anderen Seite hinüber gleitet, indem hier die Spannung sich auf S_2 vermindert, ändert sich die Gesammtlänge nicht, ist also (unter $2\,l$ die ganze Bandlänge im spannungslosen Zustande verstanden)

$$(l - x)(1 + \varepsilon_1) + (l + x)(1 + \varepsilon_2) = 2\,l(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{x}{l}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2\,\varepsilon.$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\,\varepsilon, \text{ also } S_1 + S_2 = 2\,S,$$

so dass gemäss den Bedingungen (2) sein muss:

$$S > \frac{1}{2} \frac{m+1}{m-1} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da Q für beide Rollen denselben Werth $= S_1 - S_2$ hat und

$$\frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$$

um so grösser ist, je kleiner m, also je kleiner $\mu\alpha$, so muss die Bestimmung von S mit Rücksicht auf diejenige von beiden Rollen geschehen, für welche $\mu\alpha$ den kleineren Werth hat.

Für Lederriemen und für Drahtseile pflegt man im Durchschnitt $\mu = 0,25$ anzunehmen, während α wenig von π verschieden ist. Indem damit

$$m = e^{\mu\alpha} = 2,19 \text{ und } \frac{1}{2}\frac{m+1}{m-1} = 1,34$$

sich ergiebt, kann dann schliesslich etwa

$$S = 1,5\,Q, \quad S_1 = 2\,Q, \quad S_2 = Q$$

gesetzt werden, entsprechend einer Sicherheit der Spannung S im Betrage von etwa 12 % des erforderlichen Grenzwerthes.

Uebrigens ist der Reibungscoefficient μ in hohem Grade schwankend und besonders bei Riemengetrieben (Rollengetrieben mit Lederriemen als Zugkraftorganen) von verschiedenen Umständen in noch nicht genügend aufgeklärter Weise abhängig, nach Versuchen von Prof. Pinzger* z. B. wachsend mit der Wölbung der Rollenoberfläche und wesentlich (etwa im Verhältnisse 5 : 3) grösser für schmiedeiserne als für gusseiserne Rollen. Die Wölbung (entsprechend dem Ueberschusse des Rollendurchmessers in der Mitte über denselben an den Rändern) bedingt dabei nicht sowohl den Reibungscoefficienten selbst, als vielmehr die Riemenspannung, die bei gegebenem Reibungscoefficienten ein Gleiten des Riemens ermöglicht oder verhindert. Noch grösser wird die Unsicherheit in Betreff der zur Uebertragung einer gewissen Umfangskraft Q erforderlichen Riemenspannung S, wenn die nach Angaben von Prof. Radinger in Amerika den dort üblichen grossen Riemengetrieben zu Grunde liegende Anschauung zutreffend ist, derzufolge der Druck zwischen Riemen und Rolle nicht nur von der Riemenspannung, sondern auch wesentlich vom Atmosphärendrucke herrühren soll in Folge einer theilweisen Verdrängung der zwischen beiden Elementen befindlichen Luft, die bei ruhigem und gleichmässigem Auflegen des Riemens durch das stets stattfindende partielle Gleiten desselben längs der Rolle ermöglicht oder erleichtert werden mag. Auf Grund dieser Anschauung würde, wenn in Centimetern ausgedrückt b die Breite des Riemens und a die Länge des von ihm umspannten Bogens des Rollenumfanges bedeutet, und wenn am n^{ten} Theile der Berührungsfläche $= ab$ die Luft zwischen Rolle und Riemen vollständig verdrängt, somit der Atmosphärendruck mit etwa 1 Kgr. pro Quadratcentim. ausgeübt würde, dem eben beginnenden Gleiten des Riemens die Gleichung entsprechen:

$$S_1 = m S_2 + \mu \frac{ab}{n}$$

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingeniéure, 1878, Nr. 14.

oder, wenn die höchstens zulässige Riemenspannung pro 1 Centim. Breite $= k$ Kgr., also $b = \frac{S_1}{k}$ gesetzt wird:

$$S_1 = \frac{m S_2}{1 - \frac{\mu a}{n k}}.$$

Aus der Gleichung $S_1 = S_2 + Q$ würde also folgen:

$$S_2 = \frac{Q}{\frac{m}{1 - \frac{\mu a}{n k}} - 1} = \frac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q,$$

demnächst $S_1 = S_2 + Q$ und $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Damit ein totales Gleiten nicht stattfinde, muss also sein:

$$\left.\begin{array}{c} S_2 > \dfrac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q; \quad S_1 > \dfrac{m}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \\ S > \dfrac{1}{2} \dfrac{m + 1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

Mit $a = \pi r$, unter r den Rollenhalbmesser in Centimetern verstanden, und mit den Annahmen:

$$\mu = 0{,}25, \quad m = 2{,}19, \quad k = 10, \quad n = 10$$

ergiebt sich beispielsweise:

$$S > \frac{1}{2} \frac{3{,}19 - 0{,}00785\, r}{1{,}19 + 0{,}00785\, r} Q,$$

insbesondere z. B. für	$r = 20$	40	60	80	100 Centim.	
	$S > 1{,}13$	0,96	0,82	0,70	0,61 Q,	
also	$S_2 = S - \frac{1}{2} Q > 0{,}63$	0,46	0,32	0,20	0,11 Q	
und	$S_1 = S + \frac{1}{2} Q > 1{,}63$	1,46	1,32	1,20	1,11 Q.	

Bei einem Rollenhalbmesser $r = \frac{1}{0{,}00785} = 127$ Centimeter

wäre $S = \frac{1}{2} Q, \quad S_2 = 0, \quad S_1 = Q$

schon ausreichend, würde also unter den hier zu Grunde liegenden (bezüglich auf n freilich ganz willkürlichen) Voraussetzungen der Atmosphärendruck allein genügen, um die zur Uebertragung der Kraft Q erforderliche Reibung zu vermitteln. —

Der hier besprochenen günstigen Wirkung des Atmosphärendruckes steht, und zwar bei allen Rollengetrieben, eine ungünstige gegenüber in dem Einflusse der Centrifugalkraft, die den Druck des Bandes auf die Rolle bei grosser Geschwindigkeit wesentlich verkleinern kann. Ist nämlich p das Gewicht der Längeneinheit des Bandes, v seine Geschwindigkeit $=$ der Peripheriegeschwindigkeit der Rolle, bezogen auf den bis zur Bandmittellinie gerechneten Halbmesser r, so ist die Centrifugalkraft eines dem Mittelpunktswinkel $d\varphi$ des umspannten Bogens entsprechenden Bandelementes

$$=\frac{p\,r\,d\varphi}{g}\,\frac{v^2}{r}=p\frac{v^2}{g}d\varphi,$$

und indem sie dem Normaldrucke $=X d\varphi$, der nach obiger Entwickelung durch die Bandspannung X verursacht wird, gerade entgegenwirkt, ist die betreffende Reibung nur

$$=\mu\left(X-p\frac{v^2}{g}\right)d\varphi.$$

Für den Grenzzustand bezüglich auf Rutschen des Bandes ist sie wieder $=dX$, und folgt dann aus der Gleichung:

$$\frac{dX}{X-p\dfrac{v^2}{g}}=\mu\,d\varphi$$

durch Integration zwischen den Grenzen S_2 und S_1 von X, 0 und α von φ:

$$ln\frac{S_1-p\dfrac{v^2}{g}}{S_2-p\dfrac{v^2}{g}}=\mu\alpha$$

$$S_1-p\frac{v^2}{g}=m\left(S_2-p\frac{v^2}{g}\right)\text{ mit } m=e^{\mu\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots(5).$$

Diese Beziehung tritt an die Stelle von Gl. (1), und da die damit zu verbindende Gleichung $S_1-S_2=Q$ durch gleiche Abzüge von S_1 und S_2 nicht geändert wird, so erfahren auch die Bedingungen (2) für S_2 und S_1 sowie die Bedingung (3) für $S=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$ nur die Aenderung, dass auf der rechten Seite der Summand $p\frac{v^2}{g}$ hinzuzufügen ist. Dieselbe Bemerkung gilt von den Gleichungen (4). Wenn dabei die Zahlenwerthe von v und g auf das Meter als Längeneinheit bezogen werden, so ist auch unter p das Bandgewicht pro 1 Mtr. Länge zu verstehen.

Für ein bestimmtes Band hat S_1 einen gewissen als höchstens zulässig gegebenen Werth. Aus der Bedingung:

$$S_1 > \frac{m}{m-1} Q + p \frac{v^2}{g}$$

folgt also die durch das Band bei gegebener Geschwindigkeit v höchstens übertragbare Umfangskraft:

$$max\, Q = \frac{m-1}{m}\left(S_1 - p \frac{v^2}{g}\right).$$

Sie wäre $= 0$ für $$v = v_0 = \sqrt{\frac{g S_1}{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Indem aber die übertragbare Arbeitstärke $= Qv$ am grössten wird für

$$S_1 v - p \frac{v^3}{g} = max, \text{ also } S_1 - 3p \frac{v^2}{g} = 0,$$

also für $$v = v_1 = \sqrt{\frac{g S_1}{3p}} = 0{,}577\, v_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

entsprechend $$max\,(Qv) = \frac{2}{3} \frac{m-1}{m} S_1 v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8),$$

ist es nicht nur nöthig, dass $v < v_0$, sondern auch rathsam, dass $v \leqq v_1$ sei. Die Berücksichtigung des Atmosphärendruckes bei Riemengetrieben hat eine Aenderung von v_0 und v_1 nicht zur Folge, nur eine solche von $max\,(Qv)$, indem nach Gl. (4) zu setzen ist:

$$\frac{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}}{m} \text{ statt } \frac{m-1}{m}.$$

Wenn z. B. die Dichte eines Lederriemens $= 0{,}9$ angenommen wird, also das Gewicht eines Cubikcentimeters $= 0{,}0009$ Kgr. oder das Gewicht eines Lederprisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratcentim. Querschnitt $= 0{,}09$ Kgr., so ist für einen Riemen von b Centim. Breite und 0,45 Centim. Dicke das Gewicht pro 1 Mtr. Länge:

$$p = 0{,}09 \,.\, 0{,}45\, b = 0{,}0405\, b \text{ Kgr.}$$

Hiermit und mit obiger Annahme: $S_1 = 10\, b$ Kgr. folgt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81 \,.\, 10}{3 \,.\, 0{,}0405}} = 28{,}4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

Wenn ferner ein Drahtseil aus n Eisendrähten von je d Millim. Durchmesser besteht und in Folge der spiralförmigen Windungen der Drähte in den Litzen und der Litzen im Seile die Länge des letzteren $= 0,9$ von der Drahtlänge angenommen wird, so ist bei einer zulässigen specifischen Spannung der Drähte von 6 Kgr. pro Quadratmillim. (abgesehen von der hinzukommenden Biegungsspannung beim Umlegen um eine Rolle):

$$S_1 = \frac{1}{0,9} \cdot 6\, n \frac{\pi d^2}{4},$$

indem dann auch der Cosinus des durchschnittlichen Neigungswinkels der Drahtmittellinien gegen die Seilmittellinie $= 0,9$ ist. Weil ferner die Dichte des Drahteisens $= 7,7$ gesetzt werden kann, also das Gewicht eines Prisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratmillim. Querschnitt = dem Gewichte eines Cubikcentimeters $= 0,0077$ Kgr., ergiebt sich:

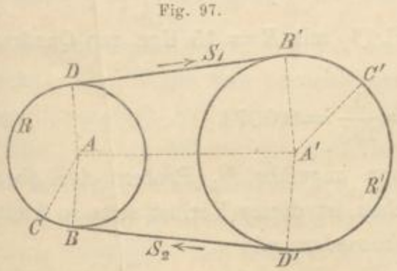
$$p = \frac{1}{0,9} \cdot 0,0077\, n \frac{\pi d^2}{4}$$

und somit $$v_1 = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 6}{3 \cdot 0,0077}} = 50,4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

§. 84. Reibung in Folge partiellen Gleitens des Zugkraftorgans bei Rollengetrieben.

Wie schon im vorigen Paragraph bemerkt wurde, ist ein gewisses partielles Gleiten des mit einer Rolle gepaarten Zugkraftorgans unvermeidlich in Folge der verschiedenen Spannungen S_1 und S_2, somit auch der verschiedenen Dehnungen ε_1 und ε_2, womit es einerseits auf die Rolle aufläuft und andererseits von ihr abläuft. Bei doppelten Rollengetrieben ist in Folge dessen die (auf die Mittellinie des Zugkraftorgans bezogene) Peripheriegeschwindigkeit der treibenden Rolle $= v'$ etwas grösser, als die der getriebenen $= v$, und ist dann auch in demselben Verhältnisse die von der Umfangskraft $Q = S_1 - S_2$ der treibenden Rolle pro Secunde geleistete Arbeit Qv' grösser, als die auf die andere gleichzeitig übertragene Arbeit Qv.

Fig. 97.



Ist nämlich (Fig. 97) R die getriebene, R' die treibende Rolle, so muss das Band, da längs dem Bogen BD der getriebenen Rolle R seine Spannung von S_2 bis S_1, seine Dehnung von ε_2 bis ε_1 zunimmt, nothwendig im Sinne seiner Bewegung relativ gegen R gleiten.

Indem dieses Gleiten den Grenzzustand des Gleichgewichtes bezüglich auf die Reibung voraussetzt, entsprechend der Gleichung

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha},$$

erstreckt es sich nicht längs dem ganzen umspannten Bogen BD, sondern nur längs dem Theile CD, dessen Mittelpunktswinkel α durch jene Gleichung bestimmt ist, während bis C die Spannung $= S_2$, die Dehnung $= \varepsilon_2$ bleibt. Ebenso bleibt auf der treibenden Rolle die Spannung des Bandes $= S_1$, seine Dehnung $= \varepsilon_1$ bis zu einer gewissen Stelle C' des umspannten Bogens $B'D'$, während es längs dem Bogen $C'D'$ in dem Maasse, wie die Spannung und Dehnung allmählig bis S_2 und ε_2 abnehmen, entgegen seinem Bewegungssinne relativ gegen R' gleitet. Indem nun die Peripheriegeschwindigkeiten der Rollen gleich den Geschwindigkeiten der sie ohne Gleitung berührenden Bandstücke $B'C'$ und BC, also proportional den Längen sind, die dasselbe Bandstück bei den Dehnungen ε_1 und ε_2 besitzt, ergiebt sich

$$\frac{v'}{v} = \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}$$

und der verhältnissmässige Geschwindigkeitsverlust = dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste:

$$\frac{v'-v}{v} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$$

oder sehr nahe, wenn E der Elasticitätsmodul, F der Querschnitt des Bandes ist:

$$\frac{v'-v}{v} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{S_1 - S_2}{EF} = \frac{Q}{EF} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Wenn z. B. nach vorigem Paragraph für das Millimeter als Längeneinheit im Falle eines Lederriemens von b Millim. Breite und 4,5 Millim. Dicke, also $F = 4{,}5\, b$ Quadratmillim. Querschnitt

$$S_1 = b \text{ Kgr.} = \frac{1}{4{,}5} F \text{ Kgr. und } Q = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{9} F \text{ Kgr.}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich nach Gl. (1) mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillimeter

$$\frac{v'-v}{v} = \frac{1}{9E} = \frac{1}{135} = 0{,}0074 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

entsprechend einem Arbeitsverlust von ungefähr $^3/_4$ Procent der übertragenen Arbeit. Bei Drahtseilgetrieben ist dieser Verlust stets so klein, dass er nicht in Betracht kommt; insbesondere mit

$$S_1 = \frac{1}{0{,}9} \cdot 6\, n \frac{\pi d^2}{4} = 6F \text{ und } Q = \frac{1}{2} S_1 = 3F$$

nach vorigem Paragraph wäre mit $E = 20000$:

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{3}{E} = \frac{3}{20000} = 0{,}00015 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Mit dem Umstande, dass ein hinlänglich gespannter Riemen sich von der Stelle B resp. B' an, wo er auf eine Rolle R resp. R' (Fig. 97) aufläuft, zunächst bis zu einer gewissen Stelle C resp. C' ohne Gleitung auf die Rolle auflegt, hängt es auch zusammen, dass die Mittellinie des auf eine Rolle auflaufenden Riemenstücks in der Mittelebene dieser Rolle liegen muss, um Sicherheit gegen das Abfallen des Riemens zu gewähren, wogegen das ablaufende Riemenstück ohne Nachtheil unter einem ziemlich beträchtlichen Winkel gegen fragliche Mittelebene geneigt sein darf; wäre nämlich jene Bedingung für das auflaufende Riemenstück nicht erfüllt, so würde es sich spiralförmig auf die betreffende Rolle auflegen und somit unvermeidlich alsbald den Rand derselben erreichen, wenn nicht durch andere Umstände ein seitliches Gleiten des Riemens in solchem Sinne veranlasst wird, dass er sich mit seiner Mittellinie stets aufs Neue der Mittelebene der Rolle zuwendet. Ein solcher Umstand, der indessen auch nur sehr kleine Abweichungen von jener fundamentalen Regel einer Riemenführung unschädlich machen kann, ist, wie nebenbei hier bemerkt werden mag, die übliche convexe Wölbung einer Riemenrolle, die zur Folge hat, dass bei transversaler Bewegung des Riemens der in Beziehung darauf hintere Riemenrand mit seiner Annäherung an die Mittelebene verlängert wird. Mit solcher longitudinalen Dehnung ist aber eine transversale Contraction, somit ein seitliches Gleiten im Sinne von dem schwächer gespannten gegen den stärker gespannten Riemenrand verbunden.

In noch höherem Grade mag übrigens dem Abfallen des Riemens aus folgendem Grunde durch die Wölbung der Rollen entgegen gewirkt werden. Es seien $s_1 = \frac{S_1}{b}$ und $s_2 = \frac{S_2}{b}$ die den Riemenspannungen S_1 und S_2 entsprechenden specifischen, d. h. auf die Einheit der Riemenbreite bezogenen Spannungen. Wenn nun zunächst bei der getriebenen Rolle R, Fig. 97, das Riemenstück BC aus irgend einem Anlass eine seitliche Verschiebung erfährt, so wird dadurch die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_2$, am anderen $< s_2$, während sie bei D in der ganzen Breite gleichmässig $= s_1$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2\, e^{\mu\alpha}$ ergiebt sich somit α für den schwächer gespannten Rand (Spannung $< s_2$) grösser, so dass an diesem das longitudinale Gleiten im Sinne der Riemenbewegung früher beginnt und durch convexe Biegung eine seitliche Ablenkung gegen den stärker gespannten Rand hin zur Folge hat, wodurch die Mittellinie des Riemens sich gegen die Mittelebene der Rolle zurückbewegt. Ebenso wird in Folge einer seitlichen Verschiebung des Riemenstücks $B'C'$ auf der treibenden Rolle R' die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_1$, am anderen $< s_1$, während sie bei D' in der ganzen Breite gleichmässig $= s_2$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2 e^{\mu \alpha}$ ergiebt sich also hier α grösser für den stärker gespannten Rand (Spannung $> s_1$), so dass an ihm das longitudinale Gleiten entgegen dem Bewegungssinne des Riemens früher beginnt und dadurch jetzt mit concaver Biegung wieder eine seitliche Ablenkung gegen diesen stärker gespannten Rand hin zur Folge hat.

§. 85. Steifigkeit von Zugkraftorganen.

Die Steifigkeit eines Zugkraftorgans äussert sich dadurch, dass der Krümmungsradius desselben nur stetig sich ändern, dass er insbesondere nicht plötzlich von ∞ in r oder umgekehrt übergehen kann, unter r den um die halbe Dicke des Zugkraftorgans vergrösserten Radius einer mit ihm gepaarten Rolle verstanden. Ist dann S die Spannung des Zugkraftorgans an einer Stelle, wo es gerade gestreckt, also noch nicht oder nicht mehr mit der Rolle in Berührung ist, so ist in Bezug auf deren Axe der Hebelarm von S im Allgemeinen nicht $= r$, sondern $= r + s$, unter s eine Grösse verstanden, die positiv oder negativ sein kann, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und je nach den Ursachen, die der Steifigkeit zu Grunde liegen.

In letzterer Hinsicht ist namentlich zu unterscheiden, ob die Steifigkeit von der Elasticität des Materials herrührt oder von innerer Reibung bei discontinuirlicher Beschaffenheit des Zugkraftorgans, wie solche insbesondere bei Seilen und Ketten vorliegt. Im ersten Falle ist s stets positiv, einerlei ob es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und es wird die Arbeit, die zur Biegung des gestreckten Bandes bei seiner Aufwickelung auf die Rolle oder Trommel aufgewendet werden muss, bei der Abwickelung wieder gewonnen; im zweiten Falle aber ist s nur bei der Aufwickelung positiv, bei der Abwickelung dagegen negativ, indem die Streckung des gebogenen nicht minder wie die Biegung des gestreckten Bandes den Aufwand einer gewissen Arbeit erfordert. Wenn also, wie gewöhnlich, die Steifigkeit von beiden Ursachen zugleich herrührt, so findet bei der Aufwickelung jedenfalls eine Absperrung statt, einem positiven s entsprechend, während bei der Abwickelung s positiv, Null oder negativ sein kann, jenachdem die Elasticität oder die innere Reibung von überwiegendem Einflusse ist.

Insofern die Steifigkeit von der Elasticität herrührt, kann sie als Bewegungswiderstand in Betracht kommen, wenn das durch einen Nutzwiderstand gespannte Zugkraftorgan, insbesondere z. B. ein Drahtseil auf eine Windetrommel aufzuwinden ist. Der Biegungswiderstand eines solchen Drahtseils ist wesentlich kleiner, als der eines homogenen Stabes von gleicher Dicke und gleichem Material; indem nämlich in Folge spiralförmiger Windung der Drähte in den Litzen und der Litzen im Seile jeder Draht periodisch in die kleinste und die grösste Entfernung von der Trommelaxe gelangt, ist damit wegen relativer Verschiebung der Drähte gegen einander keine wesentliche Aenderung ihrer mittleren Spannung verbunden. Abgesehen von der durch diese Verschiebung bedingten inneren Reibung kann somit die Arbeit, die ein aus n Drähten von je d Millim. Durchmesser bestehendes Seil pro Längeneinheit zur Aufwickelung auf eine Trommel von r Millim. Radius erfordert, dem n-fachen der betreffenden Biegungsarbeit A pro Längeneinheit eines einzelnen Drahtes gleich gesetzt werden. Letztere ist (siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, S. 394, Gl. 694):

$$A = \frac{EJ}{2r^2} = \frac{E}{2r^2}\frac{\pi d^4}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn also jeder Draht im Sinne der Seilmittellinie die Kraft

$$S = \frac{6}{0,9}\frac{\pi d^2}{4}$$

zu übertragen hätte, entsprechend einer specifischen Spannung $= 6$ Kgr. pro Quadratmillim. im Sinne der Drahtmittellinie, falls der Cosinus ihres durchschnittlichen Neigungswinkels gegen die Seilmittellinie (wie in §. 83) $= 0,9$ gesetzt wird, so wäre, da diese Kraft S bei der Aufwickelung eines Seilstücks von der Länge $= 1$ auch die Arbeit S verrichtet, der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die elastische Seilsteifigkeit:

$$\frac{A}{S} = \frac{0,3\,E}{64}\left(\frac{d}{r}\right)^2 = \frac{3000}{32}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

mit $E = 20000$ Kgr. pro Quadratmillimeter für Eisendraht. Bei $r > 800\,d$ ist er $< 0,00015$ und deshalb zu vernachlässigen.

Von Wichtigkeit dagegen, und zwar nicht nur bei Winden, sondern auch bei Rollengetrieben ist dieser elastische Biegungswiderstand von Zugkraftorganen insofern, als er mit erhöhter Anstrengung derselben verbunden ist. Insbesondere wird dadurch die specifische Spannung der Drähte eines Drahtseils bei obiger Bedeutung der Buchstaben um

$$k = E\frac{d}{2\,r}$$

vergrössert, und wenn diese Vergrösserung z. B. für Eisendraht höchstens $= 12$ Kgr. pro Quadratmillim. sein soll, damit die Gesammtspannung < 18 Kgr. bleibe und somit höchstens etwa $^1/_3$ der Zugfestigkeit erreiche, so muss mit $E = 20000$:

$$r > \frac{20000}{24}\,d, \text{ d. i. } > 833\,d$$

sein. In dem gewöhnlichen Falle eines aus 36 Drähten (6 Litzen zu je 6 Drähten) bestehenden Seiles ist der äussere Durchmesser desselben ungefähr $= 8\,d$, und muss also der Rollenhalbmesser wenigstens 100 mal so gross sein, wie die Seildicke, wenn jene höchstens zulässige Anstrengung nicht überschritten werden soll.

Fast unbeschränkt ist die Wahl des Rollenhalbmessers bei einem Riemengetriebe, wenn auch die Riemenspannung höchstens $= {}^1/_3$ der Zugfestigkeit werden soll. Der Zuwachs k dieser Spannung eines Riemens von der Dicke d auf einer Rolle vom Halbmesser r ist jedenfalls

$$< E\frac{d}{2\,r},$$

da der Riemen sich nicht vollständig wie ein homogener elastischer Stab verhält, mit seiner Biegung vielmehr eine relative Verschiebung der Gewebefasern in um so höherem Grade verbunden ist, je stärker der Riemen gebogen wird. Mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillim. und $d = 4{,}5$ Millim. ist also selbst für $r = 50$ Millim.

$$k < \frac{15\,.\,4{,}5}{100}, \text{ d. i. } < 0{,}68$$

und bleibt also die resultirende specifische Spannung, wenn sie im gestreckten und somit auch in der Mittelfläche des gebogenen Riemens (wie in den vorigen Paragraphen) $= \frac{1}{4{,}5} = 0{,}22$ Kgr. pro Quadratmillim. angenommen wird, wesentlich $< 0{,}9$ Kgr., während die Zugfestigkeit guten Rindsleders zu wenigstens 2,7 Kgr. pro Quadratmillim. anzunehmen ist. —

Die innere Reibung als Ursache der Steifigkeit eines Zugkraftorgans von discontinuirlicher Beschaffenheit, nämlich der Widerstand gegen die mit einer Krümmungsänderung seiner Mittellinie verbundene relative Bewegung seiner Bestandtheile (insbesondere der Fäden oder Drähte eines Seils, der Glieder einer Kette) ist sehr leicht zu beurtheilen und in Rechnung zu bringen bei einer Kette, die in Folge ihrer Paarung mit einer Rolle oder Trommel sich auf- oder abwickelt. Ist r der Halbmesser der letzteren (gerechnet bis zur Mittellinie der Kette), d der Durchmesser des Rundeisens, woraus die Kettenglieder verfertigt sind, oder der Bolzendurchmesser bei sogenannten Gelenk- oder Laschenketten, und ist α der Mittelpunktswinkel des einem einzelnen Kettengliede entsprechenden Bogenstücks der von der Kette umspannten Rolle, so haben sich zwei auf einander folgende Kettenglieder um den Winkel α gegen einander zu drehen während die Rolle sich um denselben Winkel dreht, also ein Kettenstück $= r\alpha$ sich auf- oder abwickelt. Ist dann S die Kettenspannung an der Auf- oder Abwickelungsstelle und μ der Reibungscoefficient, so wirkt jener relativen Verdrehung der Kettenglieder eine Reibung $= \mu S$ mit einer Arbeit $= \mu S \frac{d}{2} \alpha$ entgegen, während die Zugkraft S der Kette die Arbeit $S r \alpha$ verbraucht oder verrichtet, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung der Kette handelt. Somit ist die dem Gleichgewichtszustande entsprechende, am Hebelarme r wirkende Umfangskraft Q der Rolle für den Fall der Aufwickelung bestimmt durch die Gleichung:

$$Q r \alpha = S r \alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Q r = S\left(r + \frac{\mu d}{2}\right)$$

und für den Fall der Abwickelung durch die Gleichung:

$$S r \alpha = Q r \alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Q r = S\left(r - \frac{\mu d}{2}\right),$$

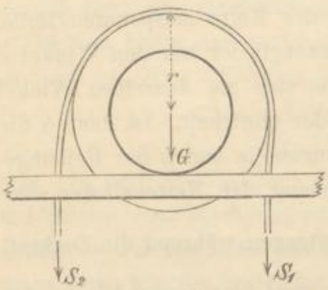
allgemein also
$$Q r = S(r + s) \text{ mit } s = \pm \frac{\mu d}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Der verhältnissmässige Arbeitsverlust ist $= \pm \frac{s}{r} = \frac{\mu d}{2r}$.

Bei Seilen hängt die analoge Grösse s von sehr mannigfachen Umständen ab: von der Beschaffenheit des Materials der Fäden oder Drähte und von der Art, wie das Seil aus ihnen hergestellt ist, insbesondere von ihrer mehr oder weniger starken Drehung in den Litzen und der letzteren im Seile, ferner von Substanzen, die absichtlich und dauernd (Theer) oder unabsichtlich und zeitweilig (Wasser in feuchtem Medium) das Seil durchdringen, von der Seilspannung und vom Radius der Rolle, vielleicht auch von der Geschwindigkeit, sofern die der Krümmungsänderung entsprechende relative Verschiebung der Fäden und Drähte eine gewisse Zeit erfordert, überhaupt also von einer so grossen Zahl und von so gearteten Umständen, dass ein genügender Aufschluss über die Wirkung derselben nur von Versuchen zu erwarten ist, die bisher nur in wenig umfassender Weise angestellt wurden.

Am meisten Vertrauen scheinen einige Versuche Weisbach's zu verdienen, bei denen, wie Fig. 98 andeutet, die Versuchsrollen mit zwei auf ihren Axen fest sitzenden und auf einer horizontalen Schienenbahn laufenden gleichen Rädern verbunden waren. Das zu prüfende Seil wurde über die Rolle gelegt, beiderseits mit gleichen Gewichten S_2 belastet, und dann zunächst auf der einen, demnächst auf der anderen Seite allmählig so lange weiter belastet bis der Apparat zu rollen anfing. Das dazu nöthige Zulagegewicht wäre in beiden Fällen ganz gleich, wenn die Schienenbahn genau horizontal wäre; setzt man aber $S_1 = S_2 +$ dem arithmetischen Mittel der beiden Fällen entsprechenden Zulagegewichte, so wird dadurch ein etwaiger kleiner Fehler der horizontalen Schienenlage eliminirt und ist, unter G das Gewicht des Apparates und unter m die Constante der Walzenreibung (§. 81) verstanden,

Fig. 98.



$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + m(S_1 + S_2 + G)$$

oder
$$(S_1 - S_2)r = S_2 s_2 - S_1 s_1 + m(S_1 + S_2 + G).$$

Dafür kann, da S_1 und S_2 hier nur sehr wenig verschieden sind, mit $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ ohne in Betracht kommenden Fehler auch gesetzt werden:

$$(S_1 - S_2)r = S(s_2 - s_1) + m(2S + G)$$

und ergiebt sich daraus die Grösse $s_2 - s_1$, nachdem die Constante m durch einen zweiten Versuch bestimmt wurde, bei welchem unter übrigens gleichen Umständen statt des Versuchsseiles eine so biegsame Schnur benutzt wird, dass für dieselbe s_1 und s_2 = Null gesetzt werden können. Da ferner die von der Elasticität herrührenden Bestandtheile von s_1 und s_2 einander gleich zu setzen sind, so können in der gefundenen Differenz $s_2 - s_1$ unter s_1 und s_2 auch die von der Elasticität unabhängigen, nur von innerer Reibung herrührenden betreffenden Grössen verstanden werden. Von diesen ist s_1 hier negativ und absolut genommen dem positiven s_2 gleich zu setzen, allgemein also $s_2 - s_1 = \pm 2s$, unter $r + s$ den Hebelarm verstanden, mit welchem bei alleiniger Rücksicht auf die von innerer Reibung herrührende Steifigkeit sich das betreffende, durch die Kraft S gespannte Seil auf die

Rolle vom Radius r aufwickelt resp. davon abwickelt. Weisbach fand diese Grösse ziemlich entsprechend der empirischen Formel:

$$s_2 - s_1 = \pm 2s = a + b\frac{r}{S},$$

unter a und b Constante verstanden, die von der Dicke und sonstigen Beschaffenheit des Seiles abhängen. Insbesondere ergab sich, wenn r in Centimetern, S in Kilogrammen ausgedrückt wird, für ein getheertes Hanfseil von 4,18 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}565 + 1{,}5\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein neues ungetheertes Hanfseil von 1,96 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}164 + 0{,}086\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein Drahtseil von 1,74 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}238 + 0{,}49\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile von 1,53 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}0694 + 0{,}57\frac{r}{S}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Grösse s von der Dicke und der Herstellungsart des Seiles, z. B. auch bei Drahtseilen von der Anzahl und Dicke der Drähte bei gegebener Seildicke abhängt, bleibt näherer Prüfung vorbehalten. Setzt man aber vorläufig den Absolutwerth von s proportional d^2, unter d hier den Seildurchmesser in Centimetern verstanden, eine Annahme, die insbesondere auch den Folgerungen Eytelwein's und Redtenbacher's aus älteren Versuchen Coulomb's mit Hanfseilen entspricht, so ergiebt sich aus obigen Resultaten der Weisbach'schen Versuche im Mittel:

$$\left.\begin{aligned}&\text{für Hanfseile: } s = \pm\left(0{,}019 + 0{,}027\frac{r}{S}\right)d^2\text{ Centim.}\\&\text{für Drahtseile: } s = \pm\left(0{,}027 + 0{,}102\frac{r}{S}\right)d^2\text{ Centim.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots(4).$$

Hiernach ist u. A. der bei einem Seilgetriebe durch die Seilsteifigkeit verursachte Arbeitsverlust zu beurtheilen. Ist dabei S_1 die Spannung des straffen, S_2 die des schlaffen Seilstückes und Q die Umfangskraft, so ist mit Bezug auf die getriebene sowohl wie die treibende Rolle (vom Halbmesser r):

$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + Qr,$$

indem dabei die Grössen s_1 und s_2, die hier nur mit ihren von der Elasticität unabhängigen Bestandtheilen in Betracht kommen, für die genannten zwei Fälle sich dadurch unterscheiden, dass für die getriebene Rolle s_2 positiv und s_1 negativ, für die treibende umgekehrt s_1 positiv und s_2 negativ ist. Indem also das obere Vorzeichen auf den ersten, das untere auf den zweiten Fall bezogen wird, ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \pm \frac{S_2 s_2 - S_1 s_1}{Qr}$$

oder, wenn nach Gl. (4) die Absolutwerthe von s_1 und s_2 beziehungsweise

$$= \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_1}\right) d^2 \text{ und } = \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_2}\right) d^2$$

gesetzt werden, unter d die Seildicke verstanden, und mit $S_1 + S_2 = 3\,Q$ (§. 83):

$$\sigma = \frac{\alpha(S_1 + S_2) + 2\beta r}{Qr} d^2 = \left(\frac{3\,\alpha}{r} + \frac{2\,\beta}{Q}\right) d^2$$

$$= 3\,\alpha \frac{d^2}{r} + \frac{2\,\beta}{\gamma} \text{ mit } Q = \gamma d^2.$$

Für ein Seil von gegebener Art sind α, β, γ Constante, ist somit σ um so kleiner, je kleiner d und je grösser r ist. Setzt man insbesondere für ein Drahtseil nach Gl. (4) für das Centimeter als Längeneinheit

$$\alpha = 0{,}027 \text{ und } \beta = 0{,}102,$$

ferner im Falle von $n = 36$ Drähten zu je d_1 Millimeter $= \frac{10\,d}{8}$ Millimeter Durchmesser nach §. 83:

$$S_1 = 2\,Q = \frac{6}{0{,}9} n \frac{\pi d_1^2}{4} = 60\,\pi\,d_1^2 = \frac{6000}{64} \pi\,d^2,$$

also $$\gamma = \frac{3000}{64} \pi = 147,$$

so ergiebt sich $$\sigma = 0{,}08 \frac{d^2}{r} + 0{,}0014 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Für Lederriemen fehlt es an bekannt gewordenen Versuchen über den Einfluss der Steifigkeit. Nimmt man aber etwa an, dass durch die bei der Streckung des von der Rolle ablaufenden Riemens verrichtete Elasticitätsarbeit die durch innere Reibung bei der Biegung des auflaufenden und bei der Streckung des ablaufenden Riemens verbrauchte Arbeit gerade aufgewogen wird, so besteht der ganze Arbeitsverlust für die getriebene oder für die treibende Rolle in derjenigen Arbeit, die zur Biegung des Riemens erfordert wird. Dieselbe ist nach Gl. (1) für ein Riemenstück von der Länge 1:

$$A = \frac{EJ}{2\,r^2} = \frac{E}{2\,r^2}\,\frac{b\,d^3}{12},$$

unter b die Breite, d die Dicke des Riemens verstanden, und da die gleichzeitige Arbeit der Umfangskraft Q selbst $= Q$ ist, so wäre der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \frac{A}{Q} = \frac{E\,b\,d^3}{24\,Q\,r^2}$$

oder für das Millimeter als Längeneinheit mit $E = 15$ und

$$S_1 = 2\,Q = \frac{1}{4{,}5}\,b\,d, \text{ also } \frac{b\,d}{Q} = 9:$$

$$\sigma = \frac{45}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2.$$

Insbesondere mit $d = 4{,}5$ Millim. wird $\sigma = \dfrac{114}{r^2}$ oder, wenn wie in Gl. (5) der Radius r in Centimetern ausgedrückt ist,

$$\sigma = \frac{1{,}14}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

ein Ausdruck, der freilich einstweilen nur als Nothbehelf zu betrachten ist in Ermangelung anderweitiger, besser begründeter Anhaltspunkte.

§. 86. **Beispiele.**

1) Der Arbeitsverlust bei **Riemengetrieben** rührt her von dem partiellen Gleiten des Riemens auf den Rollen, von der Steifigkeit desselben und von der durch die Riemenspannung vermehrten Zapfenreibung der die Rollen tragenden Wellen. Sind r und r' die Halbmesser der Rollen in Centimetern, so ist der durch die zwei ersten Umstände verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84, Gl. (2) und §. 85, Gl. (6)

$$= 0{,}0074 + 1{,}14\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

$$\text{z. B.} = 0{,}030 \quad 0{,}013 \quad 0{,}009 \quad 0{,}008$$

$$\text{für } r = r' = 10 \quad 20 \quad 40 \quad 100 \text{ Centim.}$$

Bei dem geringen Grade von Zuverlässigkeit dieser Werthe kann der betreffende Arbeitsverlust für Rollen von wenigstens 20 Centim. Radius allgemein zu 0,01 der übertragenen Arbeit geschätzt werden.

Sind ferner w und w' die Halbmesser der betreffenden Wellenzapfen, und ist μ' der Coefficient der Zapfenreibung im Sinne von §. 72, Q die Umfangskraft, so ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die den

Riemenspannungen S_1 und S_2 (§. 83) entsprechenden Zapfenreibungen, da jene Spannungen einen hinlänglich kleinen Winkel zu bilden pflegen, um ihre Resultante $= S_1 + S_2$ setzen zu können,

$$= \frac{\mu'(S_1 + S_2)\,w}{Qr} + \frac{\mu'(S_1 + S_2)\,w'}{Qr'}$$

$$= 3\,\mu'\left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } S_1 + S_2 = 3\,Q$$

$$= 0{,}2\left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } \mu' = 0{,}067$$

$$= 0{,}03 \text{ bis } 0{,}06 \text{ mit } \frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075 \text{ bis } 0{,}15.$$

Bei liegenden Wellen stellt sich aber dieses Verhältniss wesentlich günstiger heraus mit Rücksicht auf das Gewicht G der Wellen, das in der Regel viel $> 3\,Q$ ist. Liegen dann die Wellen über einander, so hat die Riemenspannung lediglich die Wirkung, dass die untere Welle um den Betrag $3\,Q$ entlastet und dieser Theil ihres Gewichtes von den Lagern der oberen Welle getragen wird, so dass im Falle $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'}$ für beide zusammen gar keine Vermehrung der Zapfenreibung durch das Riemengetriebe bedingt wird. Je mehr freilich die durch die Wellenaxen gehende Ebene einer horizontalen Lage sich nähert, desto grösser wird der durch die Riemenspannung verursachte Zuwachs an Reibung, indem er bei gleicher Höhenlage beider Axen für die Welle vom Gewichte G bedingt wird durch den Druck:

$$\sqrt{G^2 + 9\,Q^2} - G, \text{ z. B.} = 3\,Q \quad Q \quad 0$$

$$\text{für } G = 0 \quad 4\,Q \quad \infty$$

Sofern aber thatsächlich $G > 4\,Q$ zu sein pflegt, ergiebt sich der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung, insoweit diese von der Riemenspannung herrührt, doch nur höchstens etwa $= {}^1/_3$ des obigen ohne Rücksicht auf G ermittelten Werthes, d. h. höchstens $= 0{,}01$ bis $0{,}02$ für $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075$ bis $0{,}15$.

Bei Zahnrädergetrieben mit horizontalen Wellen findet ein Einfluss der Axenlage auf die Vergrösserung der Zapfenreibung durch den Theilrissdruck Q in umgekehrtem Sinne statt: liegen die Axen über einander, so findet eine solche Vermehrung derselben statt, die dem Druckzuwachse $\sqrt{G^2 + Q^2} - G$ entspricht; liegen sie aber in gleicher Höhe, so wird die eine Welle um Q entlastet und dieser Betrag des Zapfendruckes auf die andere Welle übertragen.

2) Bei **Drahtseilgetrieben** ist der vom Gleiten des Seiles auf den Rollen herrührende verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84 verschwindend klein. Der durch die Seilsteifigkeit verursachte ist für jede der beiden Triebrollen nach Gl. (5) in §. 85 zu beurtheilen, insbesondere mit $d = 0{,}01\,r$

$$= 0{,}0008\,d + 0{,}0014 = 0{,}002 \text{ bis } 0{,}003$$

zu setzen bei einem Seildurchmesser $d = {}^3/_4$ bis 2 Centimeter, für beide Triebrollen zusammen folglich $= 0{,}004$ bis $0{,}006$.

Die Verhältnisse $\frac{w}{r}$ und $\frac{w'}{r'}$ sind der grossen Rollendurchmesser wegen hier wesentlich kleiner, als bei Riemengetrieben, im Durchschnitt etwa $= 0{,}03$. Die durch die Seilspannung verursachte Vermehrung der Zapfenreibungsarbeit wird dann für das Seilgetriebe selten mehr als 0,005 der übertragenen Arbeit ausmachen, somit der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust kaum mehr als 0,01 abgesehen von den durch die Gewichte der Rollen sammt Wellen verursachten Zapfenreibungen, die je nach Umständen sehr verschieden sein können und in jedem Falle besonders beurtheilt werden müssen.

Liegen aber die beiden Triebrollen in so grosser Entfernung, dass das Seil an gewissen mittleren Stellen (in Abständen von etwa 100 Meter) der Unterstützung bedarf, so wird dadurch ein weiterer Arbeitsverlust bedingt, der für jede solche Zwischenstation, d. h. für je zwei über einander liegende Tragrollen (für das straffe und für das schlaffe Seilstück) oder für eine statt dessen eingeschaltete zweispurige, einerseits als getriebene, andererseits als treibende sich verhaltende Zwischenrolle mit Rücksicht auf die Seilsteifigkeit nach Obigem zu etwa 0,005 der übertragenen Arbeit veranschlagt werden kann ausser den Zapfenreibungsarbeiten, die den Eigengewichten und den von ihnen getragenen Seilgewichten dieser Zwischenrollen entsprechen.

Bei grosser, zuweilen bis 25 Mtr. pro Secunde betragender (nach §. 83 sogar bis 50 Mtr. zu erhöhender) Geschwindigkeit des langen Seiles mag schliesslich auch durch die dadurch mit in Bewegung versetzte adhärirende Luft ein merklicher Widerstand verursacht werden können.

3) Bei einem **Kettenrädergetriebe** sind die Verhältnisse vor Allem insofern abweichend von denen des Riemen- und des Seilgetriebes, als die Spannung S_2 des schlaffen Kettenstückes fast $=$ Null sein darf und somit die Spannung S_1 des anderen nur wenig grösser als die Umfangskraft Q zu sein braucht. Die Glieder der in solchem Falle üblichen Gelenkkette sind durch Bolzen (Radius $= b$) drehbar verbunden, und indem die Zähne

des treibenden Rades in die Lücken zwischen diesen Kettenbolzen, letztere in die Zahnlücken des getriebenen Rades eingreifen, ist ein relatives Gleiten der Kette im Sinne ihrer Bewegung bezüglich auf die Räder ausgeschlossen. Dagegen findet eine relativ gleitende Bewegung der Kettenbolzen gegen die Zähne der Räder statt gleich als ob die Kette eine mit Triebstöcken statt der Zähne versehene Zahnstange wäre, die mit den Zahnrädern in Eingriff ist. Der dadurch verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, der somit hier an die Stelle des in §. 84 betrachteten tritt, ist nach §. 76, Gl. (5)

$$=\frac{\pi\mu}{z}$$

für das treibende oder getriebene Rad, wenn z die Zähnezahl desselben bedeutet. Die Steifigkeit äussert sich als Reibungswiderstand gegen die relative Drehung der Kettenglieder um die sie verbindenden Bolzen; er kommt wegen $S_2=0$ für das treibende Rad nur an der Aufwickelungsstelle, für das getriebene nur an der Abwickelungsstelle in Betracht und zwar nach §. 85, Gl. (3) mit einem verhältnissmässigen Arbeitsverlust

$$=\mu\frac{b}{r}$$

im einen oder anderen Falle, unter r den Theilrisshalbmesser des betreffenden Rades verstanden. Indem endlich dergleichen Kettenrädergetriebe zur Uebertragung grosser Kräfte Q dienen, die grösser, als die Gewichte der betreffenden Wellen zu sein pflegen, sind die Zapfenreibungen der letzteren hier dem Drucke Q entsprechend zu berechnen, da der entsprechende Zapfendruck für beide Wellen zusammen hier durch die Gewichte derselben in ähnlicher Weise nur wenig vergrössert wird wie bei Riemen- und Seilgetrieben umgekehrt die Spannung des Zugkraftorgans nur wenig den durch das überwiegende Wellengewicht bedingten Zapfendruck zu vergrössern pflegt. Unter w den Radius des betreffenden Wellzapfens verstanden, ist dann der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung

$$=\mu'\frac{w}{r}.$$

Insbesondere mit $\pi\mu=0{,}4$ (§. 76) und $\mu=\mu'=0{,}08$ wäre also der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust für das einzelne Rad

$$=0{,}08\left(\frac{5}{z}+\frac{b+w}{r}\right)$$

und ebenso für das andere mit event. veränderten Werthen von z, w, r.