

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Theoretische Maschinenlehre**

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

**Grashof, Franz**

**Leipzig, 1883**

A. Kinematik

[urn:nbn:de:bsz:31-282938](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-282938)

## ERSTER ABSCHNITT.

# Theorie der Getriebe.

### A. Kinematik.\*

#### §. 1. Einleitende Erklärungen.

Während unter Kinematik im Allgemeinen die Lehre von der Bewegung eines Punktes, Körpers oder Körpersystems ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte und bewegten Massen verstanden wird, beschränken sich einerseits die folgenden Untersuchungen auf die gegenseitigen Bewegungen der Bestandtheile solcher besonderen Körpersysteme, wie sie den Maschinen eigenthümlich sind, erweitern aber andererseits die Aufgabe durch das vorgesetzte Ziel einer systematischen Entwicklung und Uebersicht der zur Vermittlung bestimmter Bewegungen geeigneten Körperverbindungen. Im ersteren Sinne könnte die hier in Rede stehende Lehre auch als Maschinen-Kinematik (Anwendung der Kinematik auf Maschinen), im letzteren als Kinetik\*\* bezeichnet werden im Gegensatze

\* Den unter dieser Ueberschrift folgenden Entwicklungen liegt zwar in der Hauptsache Reuleaux's „Theoretische Kinematik, 1875“ zu Grunde, wodurch dieser Zweig der Maschinenlehre vor Allem (trotz mancher Mängel und Irrthümer) in systematischer Weise ausgebildet wurde; indessen sind die Abweichungen der folgenden Darstellung von derjenigen des genannten Werkes, die sich zum Theil mit der kritischen Besprechung desselben durch Prof. Rittershaus im 21. Bande des „Civilingenieur“ in Uebereinstimmung befinden, zu mannigfach, als dass es thunlich war, sie einzeln hervorzuheben und zu begründen, ohne der Darstellung einen derartig polemischen Charakter zu geben, wie er dem Zwecke des vorliegenden Buches nicht entsprechend erachtet wurde. Dem sachverständigen Leser werden die Abweichungen und ihre Gründe aus der Darstellung selbst und ihrer Vergleichung mit dem Reuleaux'schen Werke erkennbar sein.

\*\* *κίνημα*, Bewegung; *κίνητρον*, Hilfsmittel zur Bewegung.

zur allgemeinen oder reinen, kurzweg sogenannten Kinematik, welche als Theil der theoretischen Mechanik behandelt zu werden pflegt, und deren Fundamentalsätze deshalb hier als bekannt vorausgesetzt werden.\*

Nun ist eine Maschine als Körpersystem besonderer Art vor Allem dadurch ausgezeichnet, dass jeder dieser Körper, welche einstweilen (vorbehaltlich gewisser später erst zu besprechender Begriffserweiterungen) als starre Körper vorausgesetzt werden, durch beständige Berührung mit wenigstens einem anderen derselben in seiner Beweglichkeit beschränkt wird. Je zwei solche sich berührende und dadurch sich gegenseitig stützende Körper heissen Elemente und bilden zusammen ein Elementenpaar, das übrigens als solches vollständig charakterisirt ist durch die Gestalten der sich berührenden Oberflächentheile beider Elemente und durch die Art dieser Berührung, die ihrerseits vor Allem bedingt ist durch den Sinn, in welchem der fragliche Oberflächentheil jedes Elementes dasselbe begrenzt, d. h. durch die Seite der Fläche, auf der die materielle Substanz des Elementes gelegen ist. So ist z. B. ein Elementenpaar als solches bestimmt, wenn angeführt wird, dass die dasselbe als Elemente bildenden Körper sich mit gewissen Cylinderflächen in einer Geraden berühren, wenn nur ausserdem noch gesagt ist, ob beide Körper Vollycylinder (Convexcylinder) sind, d. h. ihre Substanz innerhalb der Cylinderfläche gelegen, oder der eine ein Hohlcyylinder (Concavcyylinder), d. h. seine Substanz ausserhalb der Cylinderfläche gelegen ist; es ist aber gleichgültig für den Charakter dieses Körperpaares als Elementenpaar, wie etwa der Hohlcyylinder von aussen begrenzt, ob ferner der Vollycylinder innerhalb seiner Cylinderfläche ganz mit Körpersubstanz erfüllt, und wie er anderenfalls etwa innen begrenzt sein mag. — Die speciellen Bezeichnungen gewisser Körper, wie Prisma, Cylinder, Kegel, Kugel, Drehkörper (Rotationskörper) etc. sollen in der Folge stets auf Vollkörper bezogen, und nur Hohlkörper immer zugleich als solche ausdrücklich bezeichnet werden, z. B. als Hohlprisma, Hohlcyylinder etc. Auch soll ein Cylinder oder Kegel stets als Kreiscylinder resp. Kreiskegel, somit als Drehkörper verstanden werden, wenn er nicht ausdrücklich als allgemeiner oder als specieller anderer Cylinder resp. Kegel bezeichnet wird. Ein Vollkörper und ein Hohlkörper sollen einander entsprechend heissen, wenn ihre charakteristischen Oberflächen congruent sind. Unter einem Körperpunkt endlich wird irgend ein mit dem betreffenden Körper fest verbunden gedachter Punkt verstanden, der weder in der Körpersubstanz, noch auch selbst bei einem Vollkörper inner-

\* Siehe: Dr. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

halb, bei einem Hohlkörper ausserhalb seiner charakteristischen Oberfläche zu liegen braucht.

In Betreff des Grades gegenseitiger Beweglichkeit der Elemente eines Paares können 3 Fälle unterschieden werden:

1) Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind wenigstens theilweise begrenzte Räume, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere beliebig je in einem solchen Raume bewegen. Ein Elementenpaar dieses Charakters wird z. B. von einer Kugel mit einem dieselbe in einem grössten Kreise berührenden Hohlcyliner gebildet: ein Punkt der Kugel in der Entfernung  $r$  von ihrem Mittelpunkte ist gegen den Hohlcyliner beliebig innerhalb der mit letzterem conaxialen Cylinderfläche, deren Halbmesser  $= r$  ist, beweglich; ein Punkt des Hohlcyliners in der Entfernung  $r$  von seiner Axe aber gegen die Kugel beliebig ausserhalb der mit dieser concentrischen Kugelfläche mit dem Halbmesser  $r$ .

2) Elementenpaare von zweifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Flächen, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Fläche bewegen. Ein solches Paar wird z. B. von einem Cylinder mit entsprechendem Hohlcyliner gebildet, und zwar ist das Bewegungsgebiet eines Punktes irgend eines der beiden Elemente gegen das andere die mit beiden conaxiale Cylinderfläche, deren Halbmesser der Entfernung des Punktes von der Axe gleich ist.

3) Elementenpaare von einfacher Beweglichkeit oder zwangläufige Elementenpaare. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Linien, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Linie bewegen. Bei einer Schraube mit entsprechender Mutter (Hohlschraube) z. B. ist jeder Punkt eines Elementes gegen das andere in einer bestimmten Schraubenlinie beweglich.

Mit Rücksicht darauf, dass jede elementare, d. i. unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers in einem gewissen Raume in 3 Schiebungen längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen und in 3 Drehungen um diese zerlegt werden kann, und dass diese 6 einfachen Elementarbewegungen bei einem frei beweglichen Körper unabhängig von einander sind, können dem letzteren nach einem von W. Thomson gebrauchten Ausdrucke 6 Freiheitsgrade der Bewegung zugeschrieben werden, einem Körper von beschränkter Beweglichkeit aber so viele Freiheitsgrade der Bewegung, wie von jenen einfachen Elementarbewegungen mit Rücksicht auf die der Beschränkungsart entsprechenden Beziehungen

zwischen ihnen unabhängig bleiben. Hiernach ist offenbar die Zwangläufigkeit oder einfache Beweglichkeit eines Elementenpaares mit nur einem Freiheitsgrade, die dreifache Beweglichkeit mit höchstens 5 Freiheitsgraden verbunden. Die zweifache Beweglichkeit eines Elementenpaares kann, wie in dem angeführten Beispiele eines Cylinders mit entsprechendem Hohlcyylinder, 2 oder auch, wie im Falle einer von entsprechender Hohlkugel umschlossenen Kugel oder einer in entsprechendem Schlitz beweglichen gleichförmig dicken Platte, 3 Freiheitsgraden entsprechen.

Diese und ebenso auch die folgenden Erklärungen setzen einstweilen (vorbehaltlich späterer Ergänzungen) selbständig geschlossene Elementenpaare voraus, d. h. solche, bei denen die beständige gegenseitige Berührung und zwar bei unveränderter Art der entsprechenden gegenseitigen Stützung der Elemente bloß in Folge ihrer Gestalt und Begrenzung ohne anderweitige Hilfsmittel bei jeder möglichen relativen Bewegung erhalten bleibt. Wenn z. B. bei dem oben unter 2) genannten Paare (Cylinder mit entsprechendem Hohlcyylinder) der Hohlcyylinder nur unvollständig als ein zwischen zwei Meridianebenen enthaltener Ausschnitt ausgeführt würde, so wäre die Geschlossenheit des Paares im erklärten Sinne an die Bedingung geknüpft, dass der Winkel jenes Ausschnitts  $> 180^\circ$  ist.

Ausser in Beziehung auf den oben erklärten dreifach verschiedenen Grad der gegenseitigen Beweglichkeit ihrer Elemente können die Paare hinsichtlich der Art dieser Beweglichkeit von verschiedenen Gesichtspunkten aus unterschieden werden, und zwar namentlich in Beziehung darauf, ob die Beweglichkeit des einen Elementes gegen das andere in jeder Hinsicht dieselbe wie die des letzteren gegen das erstere ist oder nicht, wonach man niedere und höhere Elementenpaare unterscheidet. Sind nämlich  $E$  und  $E'$  die beiden gepaarten Elemente, und ist  $P$  ein beliebiger Punkt von  $E$ ,  $P'$  aber ein solcher Punkt von  $E'$ , der mit  $P$  zusammenfallen kann, so soll das Elementenpaar  $E, E'$  ein niederes oder höheres heissen, je nachdem das Bewegungsgebiet von  $P$  gegen  $E'$  mit dem Bewegungsgebiete von  $P'$  gegen  $E$  zusammenfällt oder nicht. In diesem Sinne ist z. B. das oben unter 1) erwähnte Elementenpaar von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcyylinder von gleichem Durchmesser) ein höheres, sind dagegen die unter 2) und 3) beispielsweise angeführten Paare von zwei- und einfacher Beweglichkeit (Cylinder mit entsprechendem Hohlcyylinder, Schraube mit entsprechender Mutter) niedere. — Wenn die relative Bewegung eines Punktes oder Körpers gegen den jeweils als ruhend gedachten Raum (d. h. gegen einen anderen Körper, z. B. gegen die Erde bei der Untersuchung einer auf festem Lande aufgestellten Maschine oder gegen

das bewegte Schiff bei der Untersuchung einer Schiffsmaschine etc.) kurzweg die Bewegung jenes Punktes oder Körpers genannt wird, und wenn allgemein, wie es im Folgenden stets der Fall sein soll, irgend ein Körper festgestellt heisst, wenn er in dem als ruhend gedachten Raum unbeweglich ist, wenn endlich die Vertauschung der beiden Elemente eines Paares, von denen das eine festgestellt, also das andere beweglich ist, hinsichtlich dieser Feststellung resp. Beweglichkeit die Umkehrung des Paares genannt wird, so kann man auch sagen, dass die Umkehrung eines niederen Elementenpaares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, und diesen Satz als Definition des niederen Paares im Gegensatze zum höheren betrachten.

Die beiden Elemente eines Paares können sich übrigens entweder in einer Fläche (resp. einem System getrennter Flächen) oder nur in einzelnen Linien oder Punkten berühren, ohne dass durch diese Unterschiede an und für sich, d. h. vorbehaltlich entsprechender Configuration des Systems von Berührungs-Flächen, Linien oder Punkten, auch der kinematische Charakter des Paares hinsichtlich der Geschlossenheit, des Beweglichkeitsgrades und der Umkehrbarkeit nothwendig bedingt wäre. Wenigstens ist es einer näheren Untersuchung bedürftig, welche Beziehungen etwa zwischen der Gestaltung der Elemente, d. h. ihrer einzig hier in Betracht kommenden charakteristischen Oberflächentheile, und den kinematischen Eigenschaften des betreffenden Paares stattfinden. So könnte z. B. bei dem mehrerwähnten, aus einem Cylinder und entsprechendem Hohlcylinder bestehenden Paare die eine der beiden cylindrischen Elementenflächen (abgesehen von Anforderungen der praktischen Ausführung) offenbar durch zwei Parallelkreise oder durch drei gerade Meridianlinien, von denen auf jeder Seite jeder Meridianebene wenigstens eine gelegen ist, als Berührungslinien ersetzt werden, oder auch nur durch die 6 Schnittpunkte jener 2 Kreise mit diesen 3 Geraden als Berührungspunkte, ohne dass dadurch der kinematische Charakter des fraglichen Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen niederen Paares von zweifacher Beweglichkeit aller Punkte in conaxialen Cylinderflächen verändert würde. —

Eine kinematische Kette entsteht durch eine solche Aneinanderreihung von Elementenpaaren, bei welcher die Elemente verschiedener Paare zu starren (wenigstens einstweilen hier als starr vorausgesetzten) Körpern der Art vereinigt werden, dass je zwei dieser Körper und der etwa unvereinigt bleibenden einzelnen Elemente durch mehr oder weniger Elementenpaare zusammenhängen. Eine kinematische Kette ist also eine durch Elementenpaare vermittelte solche Verbindung von Körpern, den

sogenannten Gliedern der Kette, dass dadurch jedes der letzteren in seiner Beweglichkeit gegen jedes andere Glied der Kette beschränkt wird. Auf die dieser Beschränkung entsprechende gegenseitige Beweglichkeit von je zwei Gliedern können dieselben Begriffe der mit einer gewissen Zahl von Freiheitsgraden verbundenen dreifachen, zweifachen und einfachen Beweglichkeit resp. Zwangläufigkeit, sowie der Umkehrbarkeit ohne Bewegungsänderung übertragen werden, wie sie für die Elemente eines Paares erklärt wurden. Während ein Elementenpaar durch die gepaarten Elemente kinematisch vollständig bestimmt ist, wenn letztere als übrigens beliebige Verkörperungen gewisser Flächen als Stützflächen betrachtet werden, ist ein Kettenglied durch die darin vereinigten Elemente, d. h. durch die denselben charakteristischen Stützflächen, die das Glied als Oberflächentheile an sich trägt, allein noch nicht kinematisch bestimmt, vielmehr gehört zu dieser Bestimmung wesentlich auch die gegenseitige Lage, in welcher das Glied diese Stützflächen als Oberflächentheile enthält oder an sich trägt. Um diesen Umständen durch den sprachlichen Ausdruck einigermaßen zu entsprechen, soll gesagt werden, ein Paar bestehe aus gewissen zwei Elementen, dagegen ein Glied enthalte gewisse (ein, zwei oder mehr) Elemente, ferner eine kinematische Kette bestehe aus gewissen Gliedern und enthalte gewisse Elementenpaare.

Wenn kein Glied einer kinematischen Kette Elemente von mehr als zwei Paaren enthält, so heisst sie einfach, anderenfalls zusammengesetzt; wenn jedes Glied Elemente von wenigstens zwei Paaren enthält, so ist die Kette geschlossen, widrigenfalls offen. Wenn also die Buchstaben Elemente bedeuten, ein dazwischen gesetztes Komma die Paarung, ein Verbindungsstrich die Verbindung der betreffenden Elemente zu einem Gliede, so bezeichnet z. B.

$$A, A' \text{ ————— } B, B'$$

eine einfache offene Kette, die aus 3 Gliedern besteht und 2 Elementenpaare enthält;

$$\begin{array}{ccc} A, A' & \text{—————} & B, B' \\ | & & | \\ D, D' & \text{—————} & C, C' \end{array}$$

eine einfache geschlossene viergliedrige (aus 4 Gliedern bestehende) und 4 Elementenpaare enthaltende Kette;

$$\begin{array}{ccccc} A, A' & \text{—————} & & & B, B' \\ | & & & & | \\ D, D' & \text{—————} & & & C, C' \\ | & & & & | \\ E, E' & \text{—————} & F, F' & \text{—————} & G, G' \end{array}$$

eine zusammengesetzte geschlossene sechsgliedrige und 7 Elementenpaare enthaltende Kette, deren Glieder  $ADE$  und  $B'C'G'$  je 3 Elemente enthalten. Glieder mit 2, 3 . . . Elementen mögen zur Abkürzung als binäre, ternäre . . . Glieder bezeichnet werden; hiernach besteht z. B. die letztgenannte Kette aus 4 binären und 2 ternären Gliedern.

Eine kinematische Kette soll zwangläufig genannt werden, wenn jedes Glied gegen jedes andere zwangläufig oder von einfacher Beweglichkeit ist, d. h. wenn die Punkte jedes Gliedes gegen jedes andere sich nur in bestimmten Linien bewegen können; zu dem Ende ist es bei einer geschlossenen Kette nicht nöthig, dass jedes ihrer Elementenpaare, dass also jedes Paar benachbarter Glieder für sich, nämlich unabhängig von ihrer Verbindung durch die übrigen, die Kette schliessenden Glieder zwangläufig ist, indem vielmehr gewisse der ihrer gegenseitigen Beweglichkeit an und für sich zukommenden Freiheitsgrade durch ihre fragliche Kettenverbindung bis auf einen aufgehoben oder überhaupt in bestimmter Weise von einander abhängig gemacht werden können. Ein Mechanismus ist eine zwangläufig geschlossene (d. i. zwangläufige und geschlossene) kinematische Kette, von der ein Glied festgestellt ist; so viele Glieder die Kette hat, so viele Mechanismen können aus ihr erhalten werden, die im Allgemeinen verschieden sind, d. h. deren beweglichen Gliedern im Allgemeinen verschiedene oder wenigstens verschieden begrenzte Bewegungen (im ruhend gedachten Raume) zukommen. Der Mechanismus soll insbesondere ein Getriebe heissen, wenn ein bestimmtes seiner beweglichen Glieder als dasjenige vorausgesetzt ist, von dem die Bewegung ausgeht, d. h. welches unmittelbar zur Bewegung in einem gewissen Sinne angetrieben wird; hiernach kann derselbe Mechanismus verschiedene Getriebe umfassen, die, wie sich später zeigen wird, theilweise verschiedene kinematische Eigenschaften haben können.

Dieser den Mechanismus als ein Getriebe charakterisirende unmittelbare Antrieb eines gewissen Gliedes in einem gewissen Sinne lässt es noch unbestimmt, wie, d. h. in welchen Punkten, nach welchen Richtungen und in welchen Intensitätsverhältnissen nicht nur das betreffende, sondern auch die übrigen Glieder von äusseren Kräften angegriffen werden; auch sind die sämtlichen vorhergehenden Begriffsbestimmungen bis zu der des Getriebes ganz sachliche, der Beschaffenheit und dem Bewegungsinne des betreffenden Gebildes entsprechende, von mechanisch-technischen Zwecken abstrahirende Definitionen gewesen. Zum Begriffe der Maschine dagegen, wie er hier und im Folgenden stets verstanden wird, gehört wesentlich auch der Zweck und die Wirksamkeit der äusseren Kräfte. Der Mechanismus



wird zur Maschine dadurch, dass gewisse Glieder desselben auf gewisse Weise von äusseren Kräften angegriffen werden, von denen die einen vermöge ihrer Grössen und der Wege ihrer Angriffspunkte die Arbeit leisten sollen, die zur Ueberwindung der anderen für die entsprechenden Wege ihrer Angriffspunkte aufzuwenden ist: eine Maschine ist ein Mechanismus zum Zwecke einer bestimmten mechanischen Arbeitsleistung.

Im Allgemeinen kann der Mechanismus einer Maschine eine so zusammengesetzte kinematische Kette sein, dass er in mehrere elementare Mechanismen, d. h. in solche zerlegbar ist, deren kinematische Ketten einer weiteren Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene Ketten nicht mehr fähig sind. Die kinematische Kette eines solchen elementaren Mechanismus ist übrigens einfach oder zusammengesetzt. So kann es z. B. der Fall sein, dass, wenn die durch das obige Schema beispielsweise dargestellte zusammengesetzte sechsgliedrige geschlossene Kette zwangläufig ist, doch nicht auch von den beiden einfachen geschlossenen Ketten  $A, A' - B, B' - C, C' - D, D'$  und  $C, C' - D, D' - E, E' - F, F' - G, G'$ , worin sie zerlegt werden kann, jede für sich zwangläufig ist, dass vielmehr die Zwangläufigkeit der letzteren dieser beiden einfachen Ketten nur durch die feste Verbindung ihrer Glieder  $DE$  und  $C'G'$  mit den Gliedern  $AD$  und  $B'C'$  der ersteren zu den ternären Gliedern  $ADE$  resp.  $B'C'G'$  vermittelt wird. In solchem Falle ist dann der Mechanismus, der durch Feststellung eines Gliedes der ursprünglichen sechsgliedrigen Kette entsteht, trotz der Zusammengesetztheit dieser Kette doch ein elementarer Mechanismus.

Dergleichen elementare Mechanismen oder Getriebe (mit Rücksicht nämlich zugleich auf den Sinn der Bewegungsübertragung von Glied zu Glied) sind die näheren Bestandtheile aller Maschinen, und man könnte einfache und zusammengesetzte Maschinen besser, als nach dem seither üblichen Sprachgebrauch (wenn überhaupt ein Bedürfniss dazu vorhanden wäre) mit Rücksicht darauf unterscheiden, ob ihr Mechanismus elementar oder eine Verbindung von elementaren Mechanismen ist. Auf die kinematische und mechanische Untersuchung nur solcher elementarer Mechanismen bezieht sich dieser von der „Theorie der Getriebe“ handelnde Abschnitt vorliegenden Werkes, und zwar hat die hier einstweilen allein in Rede stehende kinematische Untersuchung derselben sich zunächst mit den Elementenpaaren als den kinematischen Fundamentalgebilden zu beschäftigen, nachdem vorher noch darauf hingewiesen sein wird, wie die beschränkte gegenseitige Beweglichkeit von irgend zwei starren Körpern überhaupt, die auch beliebige Glieder einer kinematischen Kette sein können,

vermittels gewisser Hilfsgebilde veranschaulicht werden kann, und wie die letzteren insbesondere auch zur Uebersicht der Bedingungen für die wichtige Eigenschaft der Umkehrbarkeit einer gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern ohne Aenderung der Bewegungsgebiete ihrer Punkte dienen können.

### §. 2. Polaxen, Axoide und Axoidensysteme.

Die allgemeine Kinematik lehrt bekanntlich, dass jede Bewegung eines starren Körpers in einem ruhend gedachten Raume als eine bestimmte Folge von elementaren Schraubenbewegungen betrachtet werden kann um und längs gewissen Geraden, den sogenannten Momentanaxen oder Polaxen, deren aufeinander folgende Lagen  $A$  gegen den Körper und  $A'$  im ruhenden Raume im Allgemeinen stetig veränderlich sind ebenso wie die Steigungsverhältnisse der elementaren Schraubenbewegungen, d. h. die Verhältnisse der ihnen entsprechenden elementaren Schiebungen längs der Axe und Drehungen um dieselbe. Der Ort aller Geraden  $A$  ist eine mit dem Körper fest verbundene Regelfläche, der Ort aller Geraden  $A'$  eine im ruhend gedachten Raume feste Regelfläche, und die Bewegung des Körpers erscheint als eine gleitend-rollende (zugleich gleitende und rollende) Bewegung der ersten Fläche an der zweiten bei beständiger Berührung beider in einer wechselnden Geraden, der Polaxe. So kann nun auch die gegenseitige Bewegung der Elemente eines Paares oder der Glieder einer kinematischen Kette immer als eine gegenseitige gleitend-rollende Bewegung zweier mit ihnen verbundener Regelflächen oder Axoide bei beständiger Berührung derselben längs einer im Allgemeinen wechselnden Geraden, der Polaxe, betrachtet werden. Einer nur drehenden gegenseitigen Bewegung entsprechen Axoide, die aufeinander rollen ohne zu gleiten, also abwickelbare Flächen sind, insbesondere z. B. allgemeine Kegelflächen, Cylinderflächen oder zwei zusammenfallende Gerade, je nachdem die aufeinander folgenden elementaren Drehungen um Axen stattfinden, die sich in demselben Punkte schneiden, parallel sind oder zusammenfallen.

Einer bestimmten gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern entsprechen bestimmte Axoide derselben, aber nicht umgekehrt bedingen bestimmte Axoide auch immer eine bestimmte gegenseitige Bewegung. Insbesondere können zwei sich berührende allgemein-cylindrische Axoide sich gleitend-rollend oder nur rollend oder nur gleitend aneinander bewegen; zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade können als Axoide sowohl

einer Schraubenbewegung mit beliebigem gleich- oder ungleichförmigem Steigungsverhältnisse, wie auch einer blossen Drehung oder Schiebung für jene Gerade als Drehungsaxe resp. als Schubrichtung entsprechen, zwei im Unendlichen als Axoide zusammenfallende Gerade einer Schiebung nach jeder Richtung in einer damit parallelen Ebene. Im Allgemeinen indessen, nämlich abgesehen von solchen besonderen Fällen, entspricht bestimmten Axoiden nur eine bestimmte gegenseitige Bewegung der mit ihnen verbundenen Körper, so dass auch im Allgemeinen nur dann kurzweg von den Axoiden eines Elementenpaares resp. eines Paares von Gliedern einer kinematischen Kette als von bestimmten, event. zu geraden Linien zusammenschrumpfenden, geradlinigen Flächen gesprochen werden kann, wenn das betreffende Paar zwangsläufig ist. Bei der zwangsläufig geschlossenen Kette irgend eines Mechanismus ist das nun zwar bezüglich auf jedes Paar von Gliedern der Fall, doch können dabei die vereinzelt Elementenpaare auch von mehrfacher Beweglichkeit sein, und ist es dann im Allgemeinen ein System von unendlich vielen Axoidenpaaren, das den unendlich vielen möglichen gegenseitigen Bewegungen der Elemente entspricht. Das Axoidensystem jedes Elementes eines solchen mehrfach beweglichen Paares ist im Allgemeinen keine Fläche, sondern ein räumliches System von Geraden, die als Polaxen mit den Geraden des dem anderen Elemente zugehörigen Axoidensystems zusammenfallen können. Beide Axoidensysteme zusammen veranschaulichen zwar nicht mehr die wirkliche Bewegung, wohl aber nach wie vor die gegenseitige Beweglichkeit. Z. B. bei dem im vorigen §. beispielsweise erwähnten Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcylinder von gleichem Durchmesser) kann jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade der Kugel mit jeder durch irgend einen Punkt ihrer geometrischen Axe gehenden Geraden des Hohlcylinders als Polaxe zusammenfallen; das Axoidensystem der Kugel ist deshalb ein räumlicher Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt im Kugelmittelpunkte liegt, das des Hohlcylinders ist eine Schaar von unendlich vielen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte in der Cylinderaxe liegen.

### §. 3. Umkehrbare Körperpaare.

Wenn ein Paar von Körpern bezüglich auf ihre irgendwie beschränkte gegenseitige Beweglichkeit umkehrbar sein soll, d. h. wenn das Bewegungsgebiet irgend eines Punktes  $P$  dasselbe sein soll, einerlei ob der eine

Körper festgestellt und  $P$  als ein Punkt des anderen betrachtet, oder ob letzterer festgestellt und  $P$  als ein Punkt des ersteren Körpers betrachtet wird, so müssen offenbar die Axoide resp. Axoidensysteme beider Körper beständig zusammenfallen, und umgekehrt hat dieser Umstand offenbar jene Eigenschaft der Umkehrbarkeit des Körperpaares zur Folge. Es ist daher von Interesse, die Fälle übersichtlich kennen zu lernen, in denen das beständige Zusammenfallen der Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit möglich ist, trotz einzeln oder zusammen stattfindender Rollung und Gleitung irgend einer Geraden des einen um resp. längs der mit ihr zusammenfallenden Geraden des anderen der beiden geradlinigen Gebilde. Der einfachste Fall ist der, dass die Axoide sich auf

1) zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade reduciren, die dann entweder

a) nur um einander rollen, oder

b) nur längs einander gleiten,

oder zugleich rollen und gleiten können so, dass das Verhältniss der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen

c) unveränderlich, oder

d) in bestimmter Weise veränderlich, oder

e) beliebig (unbestimmt) ist.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind in diesen Fällen: a) conaxiale Kreise, b) parallele Gerade, c) conaxiale sogenannte Normalschraubenlinien von gleicher Steigung, d) andere bestimmte Linien in conaxialen Cylinderflächen, von denen je zwei in derselben Cylinderfläche gelegene congruent sind, je zwei in verschiedenen Cylinderflächen gelegene aber in der Beziehung stehen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die Axe den Radien der betreffenden Cylinderflächen proportional sind; im Falle e) sind die Bewegungsgebiete der Körperpunkte jene conaxialen Cylinderflächen selbst, entsprechend einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares.

Fallen zwei Gerade als Axoide im Unendlichen zusammen, so ist, wenn sie um einander rollen oder längs einander gleiten, oder zugleich rollen und gleiten mit einem unveränderlichen Verhältnisse der zu einander senkrechten, den zweierlei Bewegungen entsprechenden elementaren Schiebungen, das Ergebniss immer nur eine Schiebung von unveränderlicher Richtung wie im Falle 1, b). Hinzuzufügen bleibt also nur noch der Fall

2) zweier im Unendlichen zusammenfallender Geraden, die zugleich um einander rollen und längs einander gleiten, während die diesen

beiden Bewegungen entsprechenden, zu einander senkrechten elementaren Schiebungen

a) ein in bestimmter Weise veränderliches,

b) jedes beliebige Verhältniss haben.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind: a) parallele congruente ebene Curven, oder b) parallele Ebenen, letzteren Falls einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares entsprechend.

Uebrigens können diese Fälle unter 2) auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide dargestellt werden, die man sich im Falle a) von allen Schaaren paralleler Geraden bedeckt zu denken hat, welche den Tangenten einer gewissen Curve in den Ebenen parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können, im Falle b) aber von allen möglichen solchen Schaaren ohne bestimmte Folge der elementaren Schubrichtungen.

Wenn zu dem einen Paar zusammenfallender Geraden, wovon die Betrachtung ausging, noch andere dergleichen und zwar zunächst parallele als Bestandtheile zusammenfallender Axoide oder Axoidensysteme hinzugenommen werden, so würde ihrem blossen gegenseitigen Gleiten keine andere Beweglichkeit wie im Falle 1, b) entsprechen. Damit aber trotz des Rollens irgend zweier zusammenfallender Geraden um einander doch beständig jede Gerade des einen mit einer solchen des anderen Systems zusammenfalle, muss jedes von beiden unendlich viele, den ganzen Raum stetig erfüllende Gerade enthalten, d. h. es müssen die zwei im Falle 1) als Axoide zusammenfallenden Geraden durch zwei als Axoidensysteme zusammenfallende unbegrenzte Parallelstrahlenbüschel ersetzt werden. Wenn diese freilich neben ihrer Rollbarkeit um je zwei zusammenfallende Strahlen auch noch gleichzeitige Gleitbarkeit längs denselben besässen, so würde jeder Punkt des einen mit jedem Punkt des anderen Systems vereinigt werden können, die gegenseitige Beweglichkeit der betreffenden zwei Körper also ganz unbegrenzt sein. Als zulässig und neu bleibt somit nur übrig der Fall:

3) zweier zusammenfallender Parallelstrahlenbüschel mit Rollbarkeit (Drehbarkeit) um je zwei zusammenfallende Strahlen. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind parallele Ebenen wie im Falle 2, b), von welchem der vorliegende sich aber dadurch unterscheidet, dass die entsprechende zweifache Beweglichkeit des Körperpaares hier mit 3 anstatt 2 Freiheitsgraden verbunden ist: mit Verschiebbarkeit nach zwei sich schneidenden Axrichtungen (den Drehungen um die unendlich fernen Strahlen-

paare entsprechend) und mit Drehbarkeit um eine im Endlichen liegende, zu diesen Schubrichtungen senkrechte Axe.

Wenn zu dem ursprünglichen Paare zusammenfallender Geraden noch andere dergleichen, nicht damit parallele hinzugenommen werden, so ist der einfachste Fall, in welchem die so erhaltenen Axoide oder Axoidensysteme (unbeschadet beständigen Zusammenfallens jeder Geraden des einen mit einer solchen des anderen Systems) längs allen gemeinsamen Strahlen gleiten können, der schon unter 2) besprochene von zwei im Endlichen zusammenfallenden Ebenen (resp. zusammenfallender Systeme von ebenen Parallelstrahlenbündeln), der gleichzeitige Rollbarkeit ausschliesst; der einfachste Fall aber, in dem unter solchen Umständen die Axoidensysteme um alle gemeinsame Strahlen rollbar sind, ist der Fall

4) zweier concentrischer räumlicher Strahlenbüschel, die gleichzeitige Gleitbarkeit längs den Strahlenpaaren ausschliessend. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind dabei concentrische Kugelflächen, und die Beweglichkeit des betreffenden Körperpaares ist eine mit 3 Freiheitsgraden verbundene zweifache.

Eine von diesem Falle 4) ausgehende noch weitere Verallgemeinerung zusammenfallender Axoidensysteme könnte nur zu unendlich vielen concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln führen, deren Mittelpunkte den Raum stetig erfüllen, d. i. zu zwei zusammenfallenden Räumen, die als Axoide nach allen möglichen Richtungen von Parallelstrahlenbündeln durchzogen sind, ein Fall, der auch als letzte Verallgemeinerung des Falles 3) zu betrachten wäre; alle Strahlen könnten dann Polaxen für Gleitung oder für Rollung sein unbeschadet des beständigen allseitigen Zusammenfallens beider Axoidensysteme, aber das Bewegungsgebiet jedes Punktes wäre in beiden Fällen ganz unbegrenzt. Dagegen ist eine beschränkte Verallgemeinerung der Axoidensysteme des Falles 3) möglich, und zwar zu

5) zwei zusammenfallenden Systemen von Parallelstrahlenbündeln, die

- a) den Tangenten einer gewissen Raumcurve parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können,
- b) den Tangenten einer gewissen Fläche parallel sind ohne bestimmte Folge der längs ihnen möglichen elementaren Schiebungen.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind im Falle a) parallele congruente Raumcurven, im Falle b) parallele congruente Flächen, einer zweifachen Beweglichkeit mit 2 Freiheitsgraden des Körperpaares entsprechend.

Analog wie oben der Fall 2) zweier im Unendlichen als Axoide zusammenfallender Geraden auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide ersetzt werden konnte, so könnte man auch umgekehrt die Axoidensysteme des Falles 5) durch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen ersetzt denken. Da nämlich bei dem gegenseitigen Gleiten von irgend zwei zusammenfallenden Parallelstrahlenbündeln die unendlich fernen Punkte der Strahlen nicht aufhören zusammenzufallen, und somit auch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen trotz einer gegenseitigen endlich grossen Verschiebung in normaler Richtung als nach wie vor zusammenfallend zu betrachten sind, diese Ebenen aber ausserdem längs jeder in ihnen liegenden Geraden verschiebbar sind, so können sie unbeschadet ihres beständigen Zusammenfallens beliebig gerichteten gegenseitigen Verschiebungen von endlicher Grösse unterworfen sein, insbesondere also auch solchen, die den Tangenten einer gewissen Raumcurve oder einer gewissen Fläche parallel sind. Weil ferner die Normalverschiebung der Ebenen auch als Ergebniss einer unendlich kleinen Drehung um eine unendlich ferne gemeinsame Gerade derselben, und weil ein Parallelstrahlenbündel als ein Strahlenbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkte zu betrachten ist, so sind in solchem Sinne schliesslich alle möglichen Fälle, wie Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit beständig zusammenfallen können, beschränkt auf die Fälle

1) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Geraden, die um einander rollen und längs einander gleiten können,

2) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Ebenen, die längs gemeinsamen Geraden gegenseitig verschiebbar und letzteren Falls (d. h. wenn die Ebenen im Unendlichen liegen) zugleich um unendlich kleine Winkel um gemeinsame Gerade drehbar sind,

3) von zwei concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte im Endlichen oder Unendlichen liegen und die um gemeinsame Strahlen gegenseitig drehbar sind.

Von diesen 6 Fällen sind die 4 unter 1) und 2) begriffenen, von denen übrigens der zweite unter 1) mit dem ersten unter 2) einerlei ist, durch weitere Specialisirung gemäss den obigen Erörterungen in Unterfälle zerlegbar. —

Mit Rücksicht auf das Folgende seien schliesslich die sämtlichen 11 Einzelfälle — a, b, c, d, e unter 1); a, b unter 2); ferner 3); 4); und a, b unter 5) —, in denen ein Paar von Körpern bezüglich ihrer beschränkten gegenseitigen Beweglichkeit umkehrbar sein kann, in anderer Ordnung wie folgt zusammengestellt:

## I. Die Körper sind gegen einander

- a) um eine gemeinsame Gerade nur drehbar,
- b) längs einer gemeinsamen Geraden nur verschiebbar,
- c) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit unveränderlichem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen.

## II. Die Körper sind gegen einander

- a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit beliebigem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
- b) um alle zu einer gemeinsamen Ebene senkrechte Axen drehbar,
- c) um alle durch einen gemeinsamen Punkt gehende Axen drehbar.

## III. Die Körper sind gegen einander

- a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit einem in bestimmter Weise veränderlichen Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
- b) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
  - $\alpha$ ) ebenen Curve,
  - $\beta$ ) Raumcurve des anderen bleibt,
- c) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
  - $\alpha$ ) ebenen,
  - $\beta$ ) krummen Fläche des anderen bleibt.

## I. Elementenpaare.

## a. Niedere Elementenpaare.

## §. 4. Niedere Elementenpaare im Allgemeinen; Umschlusspaare.

Indem ein niederes Elementenpaar als ein umkehrbares im Sinne des vorigen §. definiert wurde, so ergeben sich aus der dort angestellten Untersuchung die principiell möglichen Fälle niederer Elementenpaare, und ist daraus vor Allem ersichtlich, dass dergleichen nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein können. Es bleibt nur zu ermitteln, ob, welche und wie diese Fälle



durch sich berührende starre Körper als Elemente des Paares verwirklicht werden können, das hier und im Folgenden im Sinne von §. 1 immer als ein selbständig geschlossenes Paar vorausgesetzt ist, sofern nicht später das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird. Wenn diese materielle Verwirklichung aber überhaupt, dann ist sie u. A. offenbar so möglich, dass die Elemente sich mit zusammenfallenden Oberflächentheilen berühren, da diese es sind, welche den kinematischen Charakter des Paares bestimmen und somit zusammenfallend müssen sein können, wenn durch ihre der Umkehrung des Paares entsprechende Vertauschung die Bewegung nicht geändert werden soll. Auch ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn umgekehrt die Elemente eines Paares sich in einer Fläche beständig berühren, das Paar nothwendig umkehrbar und von höchstens zweifacher Beweglichkeit ist.

Ein selbständig geschlossenes Elementenpaar, dessen Elemente sich in einer Fläche berühren, soll ein Umschlusspaar heissen; dem Vorstehenden zufolge ist es jedenfalls ein niederes. Umgekehrt brauchen zwar niedere Elementenpaare nicht Umschlusspaare zu sein, können aber aus solchen entstanden gedacht werden durch Reduction der Flächenberührung auf eine Berührung in Linien oder Punkten der Art, dass dadurch die gegenseitige Stützung nur der Form, nicht dem Wesen nach, d. h. nicht bezüglich der ihr entsprechenden gegenseitigen Beweglichkeit beider Elemente geändert wird. In den folgenden Paragraphen sollen deshalb zunächst nur die verschiedenen Arten von Umschlusspaaren besprochen, und soll dann erst nachträglich die unbeschadet des kinematischen Charakters des Paares etwa mögliche Reduction der Berührungsfläche auf ein System von Linien oder Punkten untersucht werden. Diese Untersuchung wird insofern von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu führen sein, als sie zugleich die Vorbereitung und den Uebergang zur sachgemässen Beurtheilung höherer Elementenpaare bildet. Während diese als selbständig geschlossene Paare keine Umschlusspaare sein können, werden niedere Elementenpaare nur ausnahmsweise nicht als solche ausgeführt, weil die Berührung in Flächen, wenn sie den Umständen gemäss zulässig ist, besonders mit Rücksicht auf Abnutzung vorgezogen werden muss.

Uebrigens wird die Eigenschaft eines Paares als Umschlusspaar (vorbehaltlich der Erhaltung seiner selbständigen Geschlossenheit) dadurch nicht beeinträchtigt, dass das eine Element mit seiner Berührungsfläche nur unvollständig ausgeführt wird aus Gründen, die ebenso wie die besondere Art der unvollständigen Ausführung durch die Bestimmung des Paares in der betreffenden Maschine bedingt werden. Wenn z. B. die Führung

eines Teller- oder Kegelventils durch einen mit dem Ventilteller verbundenen Cylinder vermittelt werden soll, der vom Zuflussrohr der Flüssigkeit als entsprechendem Hohlcylander umschlossen wird, so kann jener Cylinder, um den Durchfluss bei gehobenem Ventil zu gestatten, nicht massiv oder als Röhre vollständig ausgeführt werden. Wird er etwa massiv auf 3 oder 4 symmetrisch vertheilte radiale Rippen beschränkt, die äusserlich von nur schmalen Streifen der Cylinderfläche begrenzt werden, so kann es ferner durch eine etwas spiralog gekrümmte Ausführung dieser Rippen beabsichtigt werden, dem Ventil bei jeder Erhebung zugleich eine wenn auch nicht zwangläufig bestimmte Drehung durch den Flüssigkeitsstrom ertheilen zu lassen und so bezüglich der Lagen, in denen es auf seinen Sitz zurückfällt, einen einigermaßen zufälligen Wechsel herbeizuführen.

Die Umkehrbarkeit eines niederen Elementenpaares, insbesondere also eines Umschlusspaares, gewährt oft constructive oder mechanische Vortheile, die der Maschinenbau vielfach ausbeutet. Eine solche kinematisch gleichgültige, aus anderen Gründen aber nicht unwichtige Paarumkehrung ist es z. B., wenn bei Eisenbahnfahrzeugen die mit den Rädern fest verbundene Axe in den am Wagengestell festen Lagern drehbar ist anstatt der bei gewöhnlichen Strassenwagen umgekehrten Anordnung von am Gestell festen Axen, um welche die Räder sich drehen; oder wenn bei dem Condie'schen Dampfhammer der Cylinder auf dem befestigten Kolben anstatt umgekehrt dieser im befestigten Cylinder beweglich ist u. s. f.

#### §. 5. Zwangläufige Umschlusspaare.

Bei einer gewissen gegenseitigen Lage der Elemente  $E$  und  $E'$  seien  $A$  und  $A'$  zwei zusammenfallende Punkte ihrer zusammenfallenden (sich berührenden) Oberflächentheile  $F$  und  $F'$ . Für eine der beiden von dieser Lage ausgehenden einander entgegengesetzten, der vorausgesetzten Zwangläufigkeit entsprechenden elementaren (unendlich kleinen) Bewegungen sei  $A'B$  das Bahnelement von  $A$  in  $F$ . Ferner sei  $B$  der vor dieser Bewegung mit  $B'$  zusammenfallende Punkt von  $F$ ,  $B'C'$  für die fragliche Bewegung sein Bahnelement in  $F'$ ;  $C$  der vorher mit  $C'$  zusammenfallende Punkt von  $F$ ,  $C'D'$  sein Bahnelement in  $F'$  etc. Dann sind  $ABC\dots$  und  $A'B'C'\dots$  zwei Linien beziehungsweise in  $F$  und  $F'$ , die vor und nach der Elementarbewegung, welche im Allgemeinen eine Schraubenbewegung um und längs einer gewissen Polaxe sein kann, zusammenfallen. Die einzige Linie aber, welche die Eigenschaft hat, vor und nach einer solchen

elementaren Schraubenbewegung mit einer ihr congruenten Linie zusammenfallen zu können, ist eine Normalschraubenlinie, d. i. eine cylindrische (auf einer Cylinderfläche gelegene) Schraubenlinie von gleichförmigem Steigungsverhältnisse, deren Axe die Polaxe und deren Steigungsverhältniss dem Verhältnisse von Schiebung und Drehung bei der elementaren Schraubenbewegung gleich ist. Die sich berührenden Flächen der Elemente eines zwangläufigen Umschlusspaares sind also geometrische Oerter von Normalschraubenlinien gleicher Steigung, die auf beliebig verschiedenen coaxialen Cylinderflächen liegen können, nur unbeschadet der Zwangläufigkeit nicht alle auf derselben Cylinderfläche. Diese Schraubenlinien in  $F$  und  $F'$  fallen dann nicht nur vor und nach einer unendlich kleinen gegenseitigen Bewegung, sondern beständig zusammen.

Das hiernach einzig mögliche zwangläufige Umschlusspaar — Schraube mit entsprechender Mutter — hat übrigens zwei so charakteristische Grenzformen, dass es sowohl mit Rücksicht auf deren Eigenthümlichkeiten, als auf den sprachlichen Begriff der Schraube, der jene Grenzfälle ausschliesst, nöthig ist, dieselben als besondere zwangläufige Umschlusspaare neben der Schraube mit Mutter gelten zu lassen. Sie entsprechen dem Uebergange des Steigungsverhältnisses der Schraube in die Grenze 0 oder  $\infty$  und ergeben beziehungsweise den nicht cylindrischen Drehkörper mit entsprechendem Hohlkörper und das nicht cylindrische Prisma mit entsprechendem Hohlprisma. Unbeschadet der Zwangläufigkeit kann zwar das Prisma (bei unbegrenzt wachsender Zahl und abnehmender Breite seiner Seitenflächen) in einen allgemeinen, nur nicht in einen im engeren Sinne sogenannten Cylinder übergehen; was den Drehkörper betrifft, so genügt es nicht, dass er nicht cylindrisch, d. h. dass die Meridianlinie seiner Oberfläche nicht eine mit der Axe parallele Gerade ist, sondern es muss auch diese Meridianlinie, wie im Folgenden immer stillschweigend vorausgesetzt wird, von zwei Geraden berührt werden können, die gegen die Axe in entgegengesetztem Sinne geneigt sind.

Die gefundenen 3 zwangläufigen Umschlusspaare sollen in der Folge einfach als Schraubenpaar, Drehkörperpaar und Prismenpaar bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter I. aufgeführten 3 Fällen. Die Axoide der Elemente des Schrauben- und des Drehkörperpaares sind zwei in der geometrischen Axe, die des Prismenpaares irgend zwei mit den Kanten parallele zusammenfallende Gerade; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in coaxialen Normalschraubenlinien gleicher Steigung, in coaxialen Kreisen und in parallelen Geraden.

Die besondere Gestaltung dieser und anderer Elementenpaare, inso- weit sie für den kinematischen Charakter derselben nicht wesentlich ist, wird vielfach bedingt durch andere Rücksichten, besonders auf möglichst vortheilhafte Verwerthung der Widerstandsfähigkeit des Materials gegen die einwirkenden Kräfte und auf die Leichtigkeit der praktischen Herstellung. So kann z. B. die Leichtigkeit der Herstellung eines Vollycylinders auf der Drehbank und der Bohrung eines cylindrischen Loches oft dazu veranlassen, ein so zunächst hergestelltes Cylinderpaar von zweifacher Beweglichkeit erst nachträglich in ein zwangläufiges Paar zu verwandeln: in ein Drehkörperpaar durch aufgeklebte Stellringe, zwischen denen der Hohlcyliner eben Platz findet, in ein Prismenpaar durch Feder und Nuth. Auch die als Wellzapfen besonders häufig vorkommenden Drehkörper pflegen wenigstens in der Hauptsache cylindrisch hergestellt und nur durch örtlich ringsum vortretende sogenannte Anläufe bei entsprechender Gestaltung der Hohlkörper (Lager) unverschieblich, also zwangläufig gemacht zu werden.

#### §. 6. Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit.

Während bei zwangläufigen Umschlusspaaren irgend ein Oberflächen- element des einen Körpers nur auf diejenigen Stellen der Oberfläche des anderen zu passen brauchte, an denen es bei der einzig möglichen gegen- seitigen Bewegung vorbeikommt, muss hier jedes Element der einen an jeder Stelle mit der anderen Fläche zur Deckung gebracht werden können. Dazu ist es nöthig, dass die Berührungsfläche der Paarelemente überall gleich gekrümmt ist, und zwar nicht nur in je zwei Punkten gleiches Pro- duct der Hauptkrümmungen, sondern einzeln gleiche Hauptkrümmungen hat, dass sie also entweder eine Kugelfläche, oder eine Cylinderfläche, oder (mit Rücksicht zugleich auf die Verhinderung der gegenseitigen Bewegung senkrecht zur Berührungsfläche) ein System von wenigstens zwei parallelen Ebenen ist, welche die Substanz jedes einzelnen Elementes von entgegen- gesetzten Seiten begrenzen. So ergeben sich auch 3 mögliche Umschluss- paare von zweifacher Beweglichkeit: die Kugel mit Hohlkugel, der Cylinder mit Hohlcyliner und die gleichförmig dicke ebene Platte mit entsprechen- dem Schlitz. Kürzer mögen sie als Kugelpaar, Cylinderpaar und Plattenpaar bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter II. aufgeführten 3 Fällen von umkehrbaren Körperpaaren. Die Axoide resp. Axoidensysteme sind beim Kugelpaar zwei concentrische räum-

liche Strahlenbüschel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen, beim Cylinderpaar zwei in der geometrischen Axe zusammenfallende Gerade mit gegenseitiger Drehbarkeit und Schiebbarkeit in beliebigem Verhältnisse, beim Plattenpaar zwei zusammenfallende zu den Berührungsebenen senkrechte Parallelstrahlenbündel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in concentrischen Kugelflächen, conaxialen Cylinderflächen und parallelen Ebenen. Das Kugelpaar und das Plattenpaar sind im Gegensatz zum Cylinderpaar dadurch ausgezeichnet, dass die Hauptkrümmungen der Berührungsfläche nicht nur in je zwei Punkten derselben gleich, sondern auch in jedem einzelnen Punkte unter sich gleich sind; die Folge davon ist, dass die beiden Elemente sich um jede gemeinschaftliche Normale der Berührungsfläche gegenseitig verdrehen lassen, die des Cylinderpaares aber nicht, womit es auch zusammenhängt, dass jedes der ersteren Paare mit 3, das Cylinderpaar aber nur mit 2 Freiheitsgraden verbunden ist.

Jedes der drei Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit kann durch eine offene Kette mit nur zwangsläufigen, und zwar so vielen Umschlusspaaren ersetzt werden, wie das betreffende Paar Freiheitsgrade besitzt, durch eine einfache offene kinematische Kette nämlich, deren (je ein Element enthaltende) Endglieder dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente des zu ersetzenden Paares. So kann das Cylinderpaar offenbar ersetzt werden durch ein Drehkörperpaar mit einem Prismenpaar, dessen Schubrichtung der Axe des ersteren parallel ist; das Kugelpaar durch drei Drehkörperpaare, deren Axen sich in einem Punkte scheiden und nicht in einer Ebene liegen; das Plattenpaar entweder durch zwei Prismenpaare mit gekreuzten Schubrichtungen in Verbindung mit einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder durch zwei Drehkörperpaare mit parallelen Axen in Verbindung mit einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu beiden Axen senkrechten Ebene liegt. Was nämlich die Alternative in diesem letzten Falle betrifft, so kann irgend ein Punkt der einen von zwei zusammenfallenden Ebenen der Elemente des Plattenpaares an jede Stelle der anderen entweder durch zwei verschieden gerichtete Schiebungen längs diesen Ebenen oder durch eine solche Schiebung in Verbindung mit Drehung der Schubrichtung in den Ebenen, also um eine dazu senkrechte Axe versetzt werden (entsprechend der Bestimmung eines Punktes in der Ebene durch Parallelkoordinaten oder durch Polarkoordinaten); mit Rücksicht auf die beliebige Drehbarkeit um irgend eine Normale der zusammenfallenden Ebenen ist dann aber in beiden Fällen

noch ein Drehkörperpaar mit einer zu den Ebenen senkrechten Axe nöthig.

Obschon der Maschinenbau in der Regel und mit Recht die zwangläufigen Elementenpaare, insbesondere Drehkörper- und Prismenpaare, zur Verbindung der Glieder eines Mechanismus verwendet, weil sie im Allgemeinen am einfachsten, am vollkommensten herstellbar, am wenigsten unter sonst gleichen Umständen angestrengt und am besten gegen Reibung und Abnutzung zu schützen sind, so kann doch zuweilen die Benutzung eines Elementenpaares von mehrfacher Beweglichkeit durch grössere Einfachheit des Mechanismus sich empfehlen und wenigstens dann vorzuziehen sein, wenn die in solchem Falle durch den Mechanismus selbst zu vermittelnde Zwangläufigkeit ohne gesteigerte Anstrengung seiner Glieder geschehen kann. So kann z. B. zur Verbindung von zwei um beliebige (im Allgemeinen windschiefe) Axen drehbaren Körpern eine Koppel (Kuppelungsstange) mit zwei Kugelgelenken vortheilhaft sein, die also mit theilweise (insoweit es die selbständige Geschlossenheit der Kugelpaare erfordert) ausgeführten Hohlkugeln die entsprechend kugelig ausgeführten Zapfen umschliesst, mit denen jene Körper in gewissen Abständen von ihren Drehungsaxen ausgestattet sind. Wenn man aber z. B. bei dem bekannten Schubkurbel-Mechanismus (bestehend aus Kurbel, Koppel, Schieber und einem festgestellten vierten, einerseits die Lager der Kurbelaxe, andererseits das Schiebergleise enthaltenden Gliede) das aus Schieber und Gleise bestehende Paar als Plattenpaar (Berührungsebenen parallel den Axen der ausserdem vorhandenen 3 Drehkörperpaare) statt als Prismenpaar ausführen wollte, so würde dadurch die Kette zwar nicht aufhören zwangläufig zu sein (die 3 Drehkörperpaare als selbständig geschlossen vorausgesetzt), aber es würde keine nennenswerthe Vereinfachung dadurch erzielt und ausserdem namentlich die Koppel in wesentlich höherem Grade angestrengt werden, besonders wenn der Schieber einer wenn auch nur kleinen seitlich einwirkenden äusseren Kraft ausgesetzt sein kann; hier wäre es grundlos, ja fehlerhaft, die Kette mit anderen als zwangläufigen Elementenpaaren zu bilden.

#### b. Beziehung zwischen gegenseitiger Stützungsweise und Beweglichkeit zweier Körper.

Die folgenden Untersuchungen setzen voraus, dass zwei starre Körper sich nicht in Flächen, wie die Elemente eines Umschlusspaares, sondern in

Linien oder Punkten — Stützlinsen resp. Stützpunkten — berühren; ihr Zweck ist die Ermittlung der unter gewissen Umständen erforderlichen Zahl und Gruppierung dieser Stützlinsen und Stützpunkte, um die gegenseitige Beweglichkeit der Körper in verlangter Weise einzuschränken und zu sichern. Die gemeinsame Normale der beiden Körperoberflächen in einem Stützpunkte resp. Punkte einer Stützlinsen heisse die Stütznormale für diesen Punkt und werde, wenn einer der beiden Körper als festgestellt, somit nur<sup>1</sup> der andere als beweglich betrachtet wird, gerichtet angenommen von dem letzteren gegen den ersteren, von dem gestützten gegen den stützenden Körper; diese Richtung der Stütznormale heisse die Stützrichtung für den betreffenden Punkt.

Die Uebersicht der Verhältnisse wird wesentlich erleichtert, wenn die Untersuchung, welche übrigens im Hinblick auf die zu Elementenpaaren vorzugsweise verwendeten einfacheren Körperformen eine erschöpfende Allgemeinheit nicht beabsichtigt, zunächst auf zwei Figuren  $F, F'$  beschränkt wird, die an eine gewisse Ebene gebunden sind und in derselben sich in Punkten berühren. Von diesen Figuren werde  $F'$  in der Ebene festliegend gedacht, und somit die relative Bewegung von  $F$  gegen  $F'$  kurzweg als Bewegung von  $F$  bezeichnet; die Stütznormale in einem Berührungspunkte beider Figuren, welche dabei als Grenzlinsen materieller ebener Flächen betrachtet werden, die sich gegenseitig ausschliessen, d. h. sich nirgend überdecken können, hat dann die Richtung von  $F$  gegen  $F'$ .

### §. 7. Stützung ebener Figuren gegen Schiebung.

1) Die beiden Figuren  $F, F'$  mögen sich zunächst in nur einem Punkte  $A$  berühren, für welchen  $TT$  ihre gemeinsame Tangente,  $AN$  die

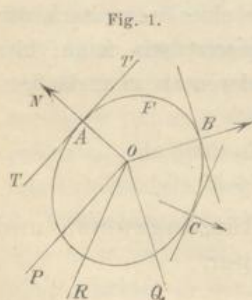


Fig. 1.

Stütznormale sei, deren Richtung hier und im Folgenden bei der Bezeichnung durch die Buchstabenfolge (hier  $A, N$ ), in der Figur durch eine Pfeilspitze (Fig. 1) angedeutet wird. Es ist dann jede Schiebung von  $F$  unmöglich, die eine Componente im Sinne  $AN$  hat, deren von  $A$  aus gezogene Richtung folglich in den gestreckten Winkel  $TNT$  fällt, jede andere Schiebung dagegen möglich. Der gestreckte Winkel  $TNT$  heisse deshalb das Stützungsfeld, der auf der anderen Seite von  $TT$  gelegene das Schiebungsfeld der Figur  $F$  für den

Stützpunkt  $A$ ; da es sich indessen hier nur um Richtungen handelt, so können auch unter dem Stützungs- und Schiebungsfelde die beiderseits irgend einer Senkrechten zur Stütznormale beziehungsweise im Sinne der Stützrichtung und im entgegengesetzten Sinne gelegenen gestreckten Winkel verstanden werden.

2) Hat die Figur 2 Stützpunkte  $A, B$ , so ist ihr Schiebungsfeld der den einzelnen Schiebungsfeldern für die Stützpunkte  $A, B$  gemeinsame Winkelraum, dessen Spitze (gemäss der vorstehenden Bemerkung über die Verlegbarkeit der einzelnen Schiebungsfelder) eine beliebige Lage haben, insbesondere im Schnittpunkte  $O$  der beiden Stütznormalen angenommen werden kann. In Fig. 1 z. B. ist das den Stützpunkten  $A$  und  $B$  zusammen entsprechende Schiebungsfeld von  $F$  der hohle Winkel  $POQ$ , dessen Schenkel den Tangenten von  $F$  in den Stützpunkten  $A, B$  parallel sind. — Sind die beiden Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist die Verschiebbarkeit der Figur nicht verschieden von derjenigen, die durch einen der beiden Stützpunkte vermittelt wird; sind sie parallel und entgegengesetzt gerichtet, so reducirt sich das Schiebungsfeld auf eine zu ihnen senkrechte Gerade, längs welcher nun aber Schiebung in beiderlei Sinn möglich ist. In keinem dieser beiden Specialfälle kann durch einen dritten Stützpunkt die Verschiebbarkeit der Figur ganz aufgehoben werden.

3) Kommt aber zu 2 Stützpunkten  $A, B$ , deren Stützrichtungen einen Winkel zwischen  $0$  und  $180^\circ$  bilden, noch ein dritter Stützpunkt  $C$ , so kann es der Fall sein, dass die ihm entsprechende, vom Schnittpunkte  $O$  der beiden ersten Stütznormalen  $OA, OB$  aus gezogene Stützrichtung, wenn sie mit keiner dieser beiden zusammenfällt, a) in dem hohlen Winkel  $AOB$  liegt, oder b) dass weder sie selbst noch ihre Verlängerung über  $O$  hinaus in diesem Winkel liegt, oder c) dass ihre Verlängerung darin liegt. Da immer das den 3 Stützpunkten zusammen entsprechende Schiebungsfeld der den einzelnen 3 Schiebungsfeldern gemeinsame Winkelraum ist, falls deren Grenzlilien durch denselben übrigens beliebigen Punkt gezogen werden, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass im ersten der obigen 3 möglichen Fälle der dritte Stützpunkt keine weitere Beschränkung der Verschiebbarkeit verursacht, dass im zweiten Falle das Schiebungsfeld auf einen kleineren Winkelraum dadurch beschränkt wird, z. B. in Fig. 1 auf den Winkel  $POR$ , wenn  $OR$  parallel der Tangente von  $F$  im Punkte  $C$  ist, dass aber endlich im dritten Falle die Verschiebbarkeit der Figur ganz beseitigt ist. —

Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung, d. h. zur Unverschiebbarkeit derselben, sind also



3 Stützpunkte nöthig und dann ausreichend, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen betreffenden Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 um diesen Punkt herum liegende hohle Winkelräume theilen. Sind zwei oder mehr Stütznormalen parallel, so sind zur Unverschiebbarkeit wenigstens 2 weitere Stützpunkte nöthig; um dazu ausreichend zu sein, müssen sie mit irgend einem der übrigen Stützpunkte zusammen schon ausreichen, falls alle Stütznormalen der letzteren gleich gerichtet sind, wogegen es anderenfalls genügt, dass die Stütznormalen der zwei weiteren Stützpunkte gegen die parallelen Tangenten in den übrigen entgegengesetzt geneigt sind, d. h. dass die eine Stütznormale mit der einen, die andere mit der entgegengesetzten Tangentenrichtung spitze Winkel bildet.

#### §. 8. Stützung ebener Figuren gegen Drehung.

1) Hat die Figur  $F$  einen Stützpunkt  $A$ , so ist sie um jeden so gelegenen Punkt der Ebene und in solchem Sinne drehbar, dass die entsprechende anfängliche Bewegungsrichtung des Punktes  $A$  von  $F$  in das Schiefungsfeld der Figur für diesen Punkt fällt. Mit Bezug auf einen die Ebene von einer gewissen Seite her Anblickenden ist hiernach offenbar Rechtsdrehung möglich um jeden Punkt und nur um einen solchen, der für den Beschauer, wenn er entgegengesetzt der Stützrichtung (im Sinne  $AA'$ , Fig. 2) längs der Stütznormale hinblickt, rechts von der letzteren gelegen ist, Linksdrehung um jeden und nur um einen solchen Punkt, der auf der anderen Seite liegt. Die beiden von der Stütznormale getrennten Theile der Ebene sollen hiernach beziehungsweise das Rechtsdrehungsfeld und das Linksdrehungsfeld der Figur für den Punkt  $A$  heissen. Um jeden Punkt  $P$  der Stütznormale selbst ist Rechts- und Linksdrehung zugleich möglich, die jedoch, wie leicht ersichtlich, nur dann von endlicher Grösse sein kann, wenn, unter  $M$  und  $M'$  die dem Punkte  $A$  entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von  $F$  und  $F'$  verstanden,  $M$  und  $P$  entweder zugleich in der Strecke  $AM'$  oder zugleich ausserhalb derselben liegen. — Bei mehreren Stützpunkten ist Rechts- oder Linksdrehung nur um solche Punkte möglich, die den Rechts- resp. Linksdrehungsfeldern für alle Stützpunkte gemeinsam sind.

2) Bei 2 Stützpunkten  $A, B$  sind von den 4 hohlen Winkeln, welche die Stütznormalen  $AA'$  und  $BB'$  miteinander bilden, diejenigen zwei Scheitelwinkel nicht Drehungsfelder, deren Schenkelrichtungen (vom Scheitel aus

genommen) mit den Stützrichtungen beide übereinstimmend oder beide nicht übereinstimmend sind, weil in diesen Winkelräumen ungleichnamige Drehungsfelder zusammenfallen; von den beiden anderen Scheitelwinkeln ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld, in Fig. 2 z. B.  $AOB'$  Rechts-,  $BOA'$  Linksdrehungsfeld. Um den Schnittpunkt  $O$  der beiden Stütznormalen ist Drehung in beiderlei Sinn möglich. — Sind die zwei Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist der zwischen ihnen liegende Flächenstreifen Stützungsfeld (worum hier der Gegensatz von Drehungsfeld verstanden wird) wegen Zusammenfallens ungleichnamiger Drehungsfelder; von den ausserhalb liegenden Flächenräumen ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld. Sind die zwei Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so ist Drehung nur um die Punkte des zwischen ihnen liegenden Flächenstreifens möglich, und zwar Rechts- oder Linksdrehung, jenachdem die Stütznormalen ihre rechten oder ihre linken Seiten sich zukehren (immer mit Bezug auf einen längs denselben entgegengesetzt den betreffenden Stützrichtungen hin Blickenden). Fallen die entgegengesetzt gerichteten Stütznormalen in einer Geraden zusammen, so ist die Figur nur um die Punkte dieser Geraden, übrigens dann in beiderlei Sinn drehbar.

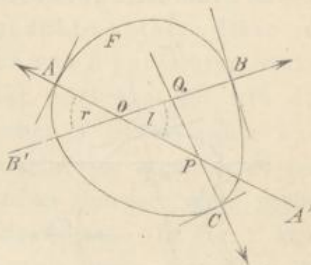
3) Bei 3 Stützpunkten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Bilden die zwei ersten Stützrichtungen einen Winkel zwischen  $0$  und  $180^\circ$ , so wird durch den dritten Stützpunkt  $C$  die Drehbarkeit der Figur am meisten eingeschränkt, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen 3 Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 hohle Winkel theilen, indem dann von den zwei Scheitelwinkeln, die den ersten Stützpunkten  $A, B$  als Drehungsfelder entsprechen ( $AOB'$  und  $BOA'$  in Fig. 2), der eine ganz, der andere bis auf ein Dreieck ( $OPQ$  in Fig. 2) in Stützungsfeld verwandelt wird; um alle Punkte dieses Dreiecks ist Rechts- oder Linksdrehung (in Fig. 2 Linksdrehung) möglich.

Wenn unter obiger Voraussetzung bezüglich ihrer Richtungen die 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden, so schrumpft das dreieckige Drehungsfeld in diesen Punkt zusammen, um den dann aber Rechts- und Linksdrehung stattfinden kann.

Entspricht die dritte Stützrichtung der obigen Voraussetzung (unter welcher nach vorigem §. die Figur unverschiebbar ist) nicht, und ist sie

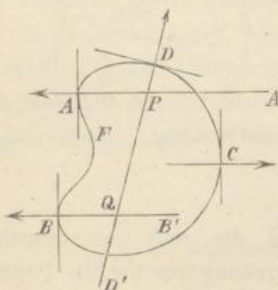
Fig. 2.



auch nicht einer der beiden ersten Stütznormalen parallel, so bleiben die Drehungsfelder je ein unendlich grosses Rechts- und Linksdrehungsfeld, wie ohne den dritten Stützpunkt, nur dass sie nicht mehr einen Punkt gemeinsam haben, ausser wenn alle 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden.

b) Sind die zwei ersten Stütznormalen  $AA'$ ,  $BB'$  parallel und gleich gerichtet, so werden durch eine sie

Fig. 3.



sie schneidende dritte ( $DD'$ , Fig. 3) die beiden ausserhalb jener liegenden ungleichnamigen Drehungsfelder auf einen Rechts- und einen Linksdrehungswinkelraum (beziehungsweise  $BQD'$  und  $DPA'$  in Fig. 3) reducirt.

Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel und gleich gerichtet, so ist die Drehbarkeit der Figur dieselbe, als ob die mittlere der 3 Stütznormalen gar nicht vorhanden wäre. Ist sie aber mit den

beiden ersten parallel und entgegengesetzt gerichtet, so sind 3 Fälle zu unterscheiden. Wenn sie  $\alpha$ ) ausserhalb jener in ihrem Rechts- oder Linksdrehungsfelde liegt, so reducirt sie das gesammte Drehungsfeld auf einen Rechts- resp. Linksdrehungsflächenstreifen zwischen ihr und der zunächst gelegenen von jenen. Wenn sie  $\beta$ ) mit einer von diesen zusammenfällt, so schrumpft der vorgenannte Flächenstreifen zu der Geraden zusammen, in der dieses Zusammenfallen stattfindet. Liegt endlich  $\gamma$ ) die dritte Stütznormale zwischen den beiden ersten, so ist die Drehbarkeit der Figur ganz aufgehoben: siehe Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte  $A, B, C$ .

c) Sind die zwei ersten Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so wird von einer sie schneidenden dritten der zwischen ihnen liegende beiderseits unendliche Rechts- oder Linksdrehungsflächenstreifen auf einen nur einerseits unendlichen eben solchen reducirt. — Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel, so können keine anderen Fälle stattfinden, als die unter b) und zwar unter  $\alpha, \beta, \gamma$ ) daselbst erwähnten.

d) Fallen zwei entgegengesetzt gerichtete Stütznormalen in einer Geraden zusammen, um deren sämtliche Punkte dann Rechts- und Linksdrehung möglich ist, so wird diese von einer sie schneidenden dritten Stütznormale in zwei Theile getheilt so, dass um die Punkte des einen Theils nur Rechts-, um die des anderen nur Linksdrehung, um den Schnittpunkt allein nach wie vor beiderlei Drehung möglich ist. — Ist die

dritte Stütznormale mit den in einer Geraden zusammenfallenden ersten auf der einen oder anderen Seite parallel, so bleibt nur Rechts- oder nur Linksdrehung um alle Punkte dieser Geraden möglich, entsprechend dem schon unter  $b, \beta$ ) erwähnten Falle. —

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Drehung, d. h. zur Undrehbarkeit derselben, wenigstens 3 Stützpunkte nöthig, diese indessen nur dann ausreichend sind, wenn von 3 parallelen Stütznormalen die mittlere entgegengesetzt gerichtet ist wie die beiden anderen. Im Allgemeinen reichen 4 Stützpunkte aus, d. h. es kann ein vierter Stützpunkt im Allgemeinen so angenommen werden, dass die ihm entsprechenden Drehungsfelder die noch übrig gebliebenen der 3 ersten Stützpunkte ungleichnamig decken. (In Fig. 2 kann ein solcher vierter Punkt in der Nähe derjenigen liegen, in welchen die Figur  $F$  von den Stütznormalen der Punkte  $A, B$  zum zweiten Mal geschnitten wird; in Fig. 3 giebt es unendlich viele Stützpunkte, deren jeder mit  $A, B, D$  zusammen die Figur  $F$  undrehbar macht, in dem von  $C$  an gegen  $D'$  hin gelegenen Theile der Figur.) Wenigstens 5 Stützpunkte sind nöthig, wenn 3 derselben noch irgend einen Punkt übrig lassen, um den die Figur in beiderlei Sinn drehbar ist, wenn also 3 Stütznormalen, von denen auch zwei entgegengesetzt gerichtete zusammenfallen können, sich in einem Punkte schneiden. Ein Kreis ist überhaupt nicht gegen Drehung stützbar, weil alle Normalen sich im Mittelpunkte schneiden.

§. 9. Vollkommene Stützung ebener Figuren gegen Schiebung und Drehung in möglichst wenig Punkten und mit möglichst kleinem Zwange.

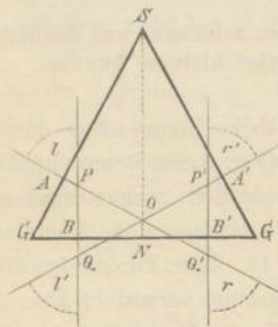
In dem einzigen Falle, in welchem eine ebene Figur schon durch 3 Stützpunkte undrehbar gemacht werden kann (Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte  $A, B, C$ ), erfordert ihre Unverschiebbarkeit noch wenigstens 2 weitere Stützpunkte, wohingegen in den Fällen, in denen die Figur in 4 Punkten vollkommen gegen Drehung stützbar ist, diese Punkte im Allgemeinen auch vollkommene Stützung gegen Schiebung vermitteln können (z. B. in Fig. 2 die Punkte  $A, B, C$ , in Fig. 3 die Punkte  $A, B, D$  je mit einem passend angenommenen vierten Stützpunkte). Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung und Drehung in ihrer Ebene sind also 4 Stützpunkte wenigstens nöthig und möglicherweise ausreichend, wenn nicht 3 Stütznormalen sich in

einem Punkte schneiden oder parallel sind, indem ersteren Falls mit Rücksicht auf Drehung, letzteren Falls mit Rücksicht auf Schiebung wenigstens noch 2, im Ganzen also wenigstens 5 Stützpunkte nöthig sind.

Wenn dabei die ebene Figur, wie es zwar in Fig. 1, 2 und 3 angenommen, indessen bisher nicht ausdrücklich vorausgesetzt wurde, eine geschlossene Figur und nur von aussen oder nur von innen zu stützen ist (jenachdem sie als äussere Grenzlinie einer, wie in Fig. 1, 2, 3, innerhalb liegenden, oder als innere Grenzlinie einer ausserhalb liegenden materiellen ebenen Fläche betrachtet wird), so ist es offenbar immer möglich, 3 Stützpunkte so anzunehmen, dass sie die Figur unverschiebbar machen, und nur ausnahmsweise nicht möglich, 4 Punkte so anzunehmen, dass sie die Figur gegen Schiebung und gegen Drehung zugleich vollkommen stützen. Sofern dann ausserdem die Wahl solcher Punkte auf unendlich mannigfache Weise möglich ist, kann sie noch an anderweitige Bedingungen geknüpft werden, insbesondere an die Forderung, dass eine auf Schiebung nach irgend einer Richtungslinie in der Ebene wirkende Kraft resp. ein auf Drehung um irgend eine zur Ebene senkrechte Axe wirkendes Kräftepaar durch möglichst kleine Widerstände, in den Stützpunkten angreifend und entgegengesetzt den Stützrichtungen wirkend, aufgehoben werde, dass also der grösste von den Widerständen dieser verschiedenen Stützpunkte möglichst klein sei, und somit die vollkommene Stützung der Figur mit möglichst kleinem Zwang erreicht werde.

So kann z. B. (Fig. 4) ein gleichschenkliges Dreieck  $SGG'$  ( $SG=SG'$ ) in 4 Punkten  $A, A', B, B'$  von symmetrischer Lage gegen die Höhenlinie  $SN$  von aussen vollkommen gegen Schiebung und Drehung gestützt werden. Die Stützpunkte  $A, A'$  reduciren die Drehbarkeit auf den Winkelraum  $AOQ$  als Rechtsdrehungsfeld und seinen Scheitelwinkel als Linksdrehungsfeld. Die Aufhebung der Rechtsdrehung durch den Stützpunkt  $B'$ , die der Linksdrehung durch den Stützpunkt  $B$  erfordert den grössten Widerstand in  $B'$  resp.  $B$ , wenn die Drehung um den der betreffenden Stütznormalen nächstgelegenen Punkt des

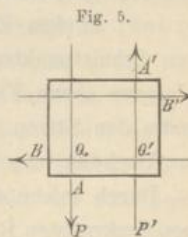
Fig. 4.



Drehungsfeldes, wenn sie also in beiden Fällen um den Punkt  $O$  stattfindet, und diese grössten Widerstände werden um so kleiner, je grösser die von  $O$  auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je weiter folglich  $B$  und  $B'$  nach  $G$  und  $G'$  hin gerückt werden. Die Stützpunkte  $B$  und  $B'$  allein

beschränken die Drehbarkeit auf ein Linksdrehungsfeld links von  $PBQ$  und ein Rechtsdrehungsfeld rechts von  $P'B'Q'$ ; durch den Stützpunkt  $A$  wird ersteres auf den in der Figur mit  $l$ , letzteres auf den mit  $r$  bezeichneten, durch den Stützpunkt  $A'$  ersteres auf den mit  $l'$ , letzteres auf den mit  $r'$  bezeichneten Winkelraum eingeschränkt, und die Beseitigung der Drehungsfelder  $l, r$  durch den Stützpunkt  $A'$ , die der Drehungsfelder  $l', r'$  durch den Stützpunkt  $A$  erfordert die grössten Widerstände in diesen Punkten, wenn die betreffenden Drehungen um  $P, Q'$  resp. um  $Q, P'$  stattfinden. Endlich aber sind wieder diese grössten Widerstände um so kleiner, je grösser die von den fraglichen Drehungspunkten auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je länger also die Strecken  $PQ'$  und  $QP'$  sind, je näher folglich  $B$  und  $B'$  bei  $G$  und  $G'$  liegen, während die Lagen von  $A$   $A'$  in  $SG$  und  $SG'$  nach wie vor gleichgültig bleiben. — Der Widerstand gegen Schiebung ist in jedem Stützpunkte dann am grössten, wenn die Richtungslinie der schiebenden Kraft mit der betreffenden Stütznormale zusammenfällt, und zwar gleich dieser Kraft, wo auch der betreffende Stützpunkt gelegen sein mag. Somit ergibt sich, dass die vollkommene Stützung des gleichschenkligen Dreiecks in 4 symmetrisch gelegenen Punkten dann mit kleinstem Zwange erfolgt, wenn die zwei Stützpunkte in der Grundlinie möglichst nahe an den Ecken liegen, wögegen die Lage der zwei anderen Stützpunkte in den gleichen Seiten in dieser Hinsicht einerlei ist.

Soll ein Rechteck in 4 Punkten gegen Schiebung und gegen Drehung vollkommen gestützt werden, so muss in jeder Seite ein Stützpunkt liegen, und wenn die Stützung noch an weitere Bedingungen von allgemeiner Art geknüpft wird, so sind, da je zwei gegenüberliegende Seiten ganz gleichwerthig sind, die Stützpunkte  $A$  und  $A'$ ,  $B$  und  $B'$  (Fig. 5) in ihnen einander diametral gegenüberliegend anzunehmen. Nun wird durch  $A, A'$  die Drehbarkeit auf solche Drehpunkte beschränkt, die in dem Flächenstreifen zwischen den Stütznormalen  $AP, A'P'$  liegen, welcher Streifen bei der Lage von  $A$  und  $A'$  in Fig. 5 ein Rechtsdrehungsfeld ist. Dasselbe wird durch den Stützpunkt  $B$  auf den Flächenstreifen  $PQQ'P'$  beschränkt, und die gänzliche Aufhebung der Drehbarkeit unter Einwirkung eines gewissen Kräftepaars durch den vierten Stützpunkt  $B'$  erfordert in diesem ungünstigsten Falles, nämlich bei Drehung um einen Punkt von  $QQ'$  eine um so kleinere Widerstandskraft, je mehr die Stütznormalen für die Punkte  $B, B'$  von einander, je weniger sie also



von den gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks entfernt sind. Von den Punkten  $A, A'$  gilt dasselbe, wie von  $B, B'$ , und es wird also ein Rechteck in seiner Ebene durch möglichst wenig, nämlich durch 4 Stützpunkte mit kleinstmöglichem Zwange vollkommen gestützt, wenn jene Punkte in den 4 Seiten dicht bei gegenüberliegenden Ecken liegen.

### §. 10. Stützung von Körpern in Linien oder Punkten.

Unter der Stützung eines Körpers gegen Schiebung nach gewissen Richtungen oder gegen Drehung um Axen von gewissen Richtungen wird eine solche Stützung verstanden, durch welche jene Schiebungen resp. diese Drehungen unmöglich gemacht werden. Hiernach kann Alles, was in den vorigen Paragraphen von der vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung oder Drehung in ihrer Ebene gesagt wurde, unmittelbar auf die Stützung eines prismatischen Körpers in geraden Linien, die mit den Kanten parallel sind, gegen Schiebung normal zu diesen Kanten resp. gegen Drehung um damit parallele Axen übertragen werden. An die Stelle der Stützpunkte, der Stütznormalen und Stützrichtungen dort treten dann nur hier die Stützlinien, die Stütznormalebene und deren Richtungen, normal zu den Stützlinien verstanden. Ein Prisma (oder auch ein allgemeiner Cylinder) kann also immer in 3 mit den Kanten parallelen Geraden gegen Schiebung nach jeder zu denselben senkrechten Richtung, und im Allgemeinen in 4 solchen Geraden zugleich gegen Drehung um jede damit parallele Axe gestützt werden; zu dem Ende sind diese Geraden nur so anzunehmen, dass in ihren Schnittpunkten mit einer Querschnittsebene des Prisma der als geschlossene ebene Figur sich ergebende betreffende Querschnitt desselben gemäss den Sätzen der vorigen Paragraphen vollkommen gegen Schiebung resp. Drehung in seiner Ebene gestützt wird.

Durch solche 4 Stützlinien  $a, b, c, d$ , welche das Prisma nach jeder zu ihnen senkrechten Richtung unverschiebbar und um jede mit ihnen parallele Axe undrehbar machen, wird offenbar auch seine Drehbarkeit um jede dazu senkrechte Axe aufgehoben, die Beweglichkeit also auf Verschiebbarkeit nach der Kantenrichtung beschränkt, entsprechend der gegenseitigen Beweglichkeit der Elemente eines Prismenpaares. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun aber die Stützlinien auch durch einzelne Stützpunkte in ihnen ersetzt werden. Bloss zur Verhinderung jeder Schiebung senkrecht

zu den Kanten und jeder Drehung um Axen, die mit den Kanten parallel sind, wäre je ein Stützpunkt  $A, B, C, D$  von beliebiger Lage in jeder der Stützlinien  $a, b, c, d$  ausreichend. Um aber das Prisma auch gegen Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zu sichern, ist es ausreichend, in einer der Geraden  $a, b, c, d$  zwei Stützpunkte anzunehmen, etwa  $A_1$  und  $A_2$  in der Geraden  $a$ , und zwar so, dass von den übrigen Punkten  $B, C, D$  in den Geraden  $b, c, d$  wenigstens zwei zwischen den durch die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  gehenden Querschnittsebenen liegen, etwa die Punkte  $B$  und  $C$ , sofern das Prisma weder von der Ebene  $ab$  in  $a$  oder  $b$ , noch von der Ebene  $ac$  in  $a$  oder  $c$  berührt wird, und somit die Stützrichtungen der Punkte  $A_1$  und  $A_2$  sowohl solche Componenten haben, die in der Ebene  $ab$  einer Componente der Stützrichtung in  $B$ , wie auch solche, die in der Ebene  $ac$  einer Componente der Stützrichtung in  $C$  entgegengesetzt sind. Nach §. 8 unter 3, b,  $\gamma$ ) ist dann nämlich keines der Linienpaare  $a, b$  und  $a, c$  in seiner Ebene, d. h. um irgend eine zu seiner Ebene senkrechte Axe drehbar, und in Drehungen um zwei solche Axen würde jede Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zerlegt werden können. Von den zusammenfallenden Oberflächen der Elemente eines Prismenpaares kann also (unbeschadet der demselben zukommenden Umkehrbarkeit und besonderen Art von Zwangläufigkeit) die eine auf 4 mit den Kanten parallele Stützlinien oder auf 5 Stützpunkte reducirt werden, die auf unendlich mannigfache Weise gemäss den vorhergehenden Bemerkungen gewählt werden können. Uebrigens sind dadurch nicht alle Möglichkeiten einer der Aufgabe entsprechenden Stützung erschöpft; in Linien könnte dieselbe noch auf mancherlei andere Weise, insbesondere z. B. in zwei geschlossenen Querschnittslinien des Prisma geschehen, oder in beliebigen Linien, die 5 so gelegene Punkte, wie die oben mit  $A_1, A_2, B, C, D$  bezeichneten, enthalten.

Die systematische Verallgemeinerung dieser Betrachtungen zur Aufsuchung aller Arten, wie die gegebene Beweglichkeit durch Stützung in Linien oder Punkten erzielt werden kann, sowie ihre Ausdehnung auf die Ermittlung der bei weniger einfachen Körperformen zu gewissen Einschränkungen der Beweglichkeit wenigstens nöthigen Zahl von Stützlinien oder Stützpunkten bei entsprechender Lage derselben, ist ohne erhebliches praktisches Interesse, da mit Rücksicht auf die Abnutzung gewöhnlich nicht sowohl die eingeschränkste, als vielmehr gerade umgekehrt die ausgedehnteste den Umständen nach zulässige Stützung vorzuziehen ist. In speciellen Fällen lässt auch meistens die unmittelbare Anschauung leicht erkennen, wie wenigstens unter anderen Möglichkeiten die Stützung reducirt ist, zu welchem Ende die Gesetze der Stützung einer ebenen Figur in ihrer



Ebene auch bei nicht prismatischen Körpern Dienste leisten können. Hier mögen nur noch (ohne eingehende Beweisführung) Angaben folgen über die Art, wie bei den übrigen Umschlusspaaren (ausser dem besprochenen Prismenpaare) unbeschadet ihres kinematischen Charakters die das eine Element berührende Oberfläche des andern auf Stützlinsen oder Stützpunkte reducirt werden kann.

Die Beweglichkeit eines Drehkörpers kann auf die dem Drehkörperpaare entsprechende Drehbarkeit um seine Axe beschränkt werden durch Stützung in zwei solchen Parallelkreisen  $k_1$  und  $k_2$ , dass die Stützrichtungen für die Punkte von  $k_1$  in entgegengesetztem Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stützrichtungen für die Punkte von  $k_2$ , d. h. dass die ersteren mit der einen, die letzteren mit der entgegengesetzten Axrichtung spitze Winkel bilden, die nicht beide = Null sein dürfen (widrigenfalls der Körper die Beweglichkeit eines Plattenpaar-Elementes hätte); oder auch durch Stützung in 3 solchen Meridianlinien  $a, b, c$ , dass in ihren Schnittpunkten mit irgend einem Parallelkreise der letztere (nach §. 7) in seiner Ebene gegen Schiebung vollkommen gestützt wird. Dieselbe Beschränkung der Beweglichkeit wird aber auch schon durch Stützung in den 6 Punkten  $A_1$  und  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  erreicht, in denen die Meridianlinien  $a, b, c$  von den Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  geschnitten werden, und schliesslich können von diesen 3 Punktepaaren zwei, etwa  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$ , noch durch einzelne Punkte  $B, C$  ersetzt werden, die in den Meridianlinien  $b, c$  so liegen, dass die von ihnen auf die Gerade  $A_1A_2$  gefällten Senkrechten  $BB'$  und  $CC'$  solche Punkte  $B'$  und  $C'$  dieser Geraden treffen, die zwischen  $A_1$  und  $A_2$  liegen, und dass ferner weder die Stütznormale eines der Punkte  $A_1, A_2, B$  rechtwinklig gegen  $BB'$ , noch die Stütznormale eines der Punkte  $A_1, A_2, C$  rechtwinklig gegen  $CC'$  gerichtet ist, und dass somit die Stützrichtungen der Punkte  $A_1$  und  $A_2$  Componenten nach den Richtungen  $BB'$  und  $CC'$ , die der Punkte  $B$  und  $C$  Componenten nach den entgegengesetzten Richtungen  $B'B$  resp.  $C'C$  haben. Unter diesen Umständen ist nach §. 8 unter 3, b,  $\gamma$ ) der Körper weder um eine zur Ebene  $A_1A_2B$  noch um eine zur Ebene  $A_1A_2C$  senkrechte Axe, also auch nicht um eine zur Geraden  $A_1A_2$  senkrechte Axe drehbar. Dann ist aber auch Drehung um jede zur geometrischen Axe des Körpers senkrechte Axe unmöglich, weil eine solche mit einer um diese geometrische Axe selbst ohnehin möglichen Drehung immer zu einer Drehung um eine zu  $A_1A_2$  senkrechte Axe zusammengesetzt werden könnte.\*

\* Dieser letzte Schluss, weil wesentlich durch die vorhandene Drehbarkeit um die geometrische Axe bedingt, wäre unthunlich bei einem Prisma, das man

Sind die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  gleich, so dass die Gerade  $A_1A_2$  parallel mit der Axe ist, so kommen die Bedingungen für die Wahl der 4 Stützpunkte  $A_1, A_2, B, C$  in den wie oben charakterisirten Parallelkreisen  $k_1, k_2$  und Meridianlinien  $a, b, c$  darauf hinaus, dass  $B$  und  $C$  zwischen den Ebenen von  $k_1$  und  $k_2$  liegen müssen und dass die Stütznormale für keinen der 4 Punkte parallel mit der Axe sein darf. Was schliesslich noch einmal die Stützung in Linien betrifft, so kann dieselbe natürlich auch in jedem anderen System von Linien geschehen, welche 4 so gelegene wie die hier mit  $A_1, A_2, B, C$  bezeichneten Punkte enthalten.

Eine Schraube kann als Element eines Schraubenpaares in den Durchschnittslinien  $a, b, c$  ihrer Oberfläche mit 3 solchen Ebenen gestützt werden, welche sich in der Axe unter hohlen Winkeln schneiden, die sich zu  $360^\circ$  ergänzen; oder in zwei solchen Schraubenlinien, dass die Stütznormalen für die Punkte der einen im entgegengesetzten Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stütznormalen für die Punkte der anderen; oder auch in den Schnittpunkten dieser Schraubenlinien mit den Linien  $a, b, c$ , die unter ähnlichen Voraussetzungen, wie beim Drehkörperpaare, wieder auf 4 Stützpunkte reducirbar sind. Schliesslich kann die Stützung auch in beliebigen anderen Systemen von Linien erfolgen, die eine dazu ausreichende Gruppe von Stützpunkten enthalten.

Ein Cylinder kann als Element eines Cylinderpaares in 4 Punkten  $A_1, A_2, B, C$  gestützt werden, falls die in einer geraden Meridianlinie  $a$  befindlichen Punkte  $A_1$  und  $A_2$  auf entgegengesetzten Seiten ausserhalb der Querschnittsebenen liegen, welche die in zwei anderen Meridianlinien  $b, c$  befindlichen Stützpunkte  $B, C$  enthalten, vorausgesetzt ferner, dass irgend ein Querschnitt von den Geraden  $a, b, c$  in den Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks geschnitten wird. Beliebige Linien in der Cylinderfläche, die solche 4 Punkte enthalten, können als Stützlilien dienen.

Eine Kugel kann gegen Schiebung nach jeder Richtung und somit als Element eines Kugelpaares in je 4 solchen Punkten gestützt werden, in denen sie von den Begrenzungsebenen eines sie umschliessenden Tetraeders berührt werden kann, selbstverständlich dann auch in jedem Liniensystem, das 4 solche Punkte enthält.

etwa als Element eines Prismenpaares statt in 5 auch in nur 4 Punkten  $A, B, C, D$  zu stützen vermeinen wollte, indem dieselben in den oben mit  $a, b, c, d$  bezeichneten Geraden des Prisma analog in gleicher Reihenfolge den hier mit  $A_1, B, C, A_2$  bezeichneten Punkten des Drehkörpers angenommen würden; aus der Undrehbarkeit um jede zur Geraden  $AD$  senkrechte Axe würde nicht auch Undrehbarkeit um jede zu den Prismenkanten senkrechte Axe folgen.

Endlich kann auch eine gleichförmig dicke ebene Platte als Element eines Plattenpaares in 4 Punkten  $A, B, C, D$  gestützt werden, von denen entweder zwei, etwa  $A$  und  $B$ , in der einen Begrenzungsebene  $E_1$  beliebig und die zwei anderen  $C, D$  in der anderen  $E_2$  so liegen, dass die Projection  $C'D'$  der Strecke  $CD$  auf die Ebene  $E_1$  und die Strecke  $AB$  in derselben sich ohne Verlängerung, d. h. in einem zwischen  $A$  und  $B$  sowie zwischen  $C'$  und  $D'$  liegenden Punkte schneiden, oder von denen 3, etwa  $A, B$  und  $C$ , in  $E_1$  beliebig liegen, dagegen der Punkt  $D$  in  $E_2$  so, dass seine Projection auf  $E_1$  in das Innere des Dreiecks  $ABC$  fällt. Stützlinien sind wieder alle solche Systeme von Linien in  $E_1$  und  $E_2$ , welche 4 Punkte von den angegebenen Lagen enthalten.

### c. Höhere Elementenpaare.

Während bei gegenseitiger Bewegung der Elemente eines niederen Paares stets dieselben Punkte der Oberfläche des einen Elementes in der Oberfläche des anderen bleiben, die eine Elementenfläche durch Linien der anderen beschrieben werden kann, die Elemente deshalb auch in einer Fläche sich berühren können, haben bei höheren Elementenpaaren die Berührungspunkte veränderliche Lagen in beiden Oberflächen, deren jede die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der relativen Bewegung des ihr zugehörigen Elementes gegen das der ersteren zugehörige einnimmt, und es berühren sich die Elemente nur in Linien oder Punkten. Während endlich die Axoide oder Axoidensysteme der beiden Elemente eines niederen Paares zwei zusammenfallende geradlinige Gebilde sind, und in Folge dessen die Umkehrung des Paares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, sind die Axoide oder Axoidensysteme höherer Elementenpaare verschiedene geradlinige Gebilde, und ist dann auch die Umkehrung des Paares mit einer Aenderung der Bewegung verbunden, d. h. wenn  $P$  und  $P'$  zwei solche Punkte beziehungsweise der Elemente  $E$  und  $E'$  sind, die bei einer gewissen gegenseitigen Lage von  $E$  und  $E'$  zusammenfallen, so ist die Bahn, überhaupt das Bewegungsgebiet von  $P$  bei Bewegung von  $E$  und Feststellung von  $E'$  nicht identisch mit der Bahn, überhaupt dem Bewegungsgebiete von  $P'$  bei Bewegung von  $E'$  und Feststellung von  $E$ . — Die folgenden Untersuchungen beschränken sich übrigens auf zwangsläufige höhere Elementenpaare, bei denen es sich um bestimmte Axoide und Punktbahnen, nicht um Axoidensysteme

und allgemeinere Bewegungsgebiete der Punkte handelt.\* Dergleichen höhere Paare sind einzutheilen mit Rücksicht auf den Charakter ihrer Axoide, welche cylindrische Flächen, conische Flächen, allgemeinere abwickelbare oder auch nicht abwickelbare geradlinige Flächen sein können; in den ersten Fällen ist die gegenseitige Bewegung der sich beständig berührenden Axoide beider Paarelemente eine nur rollende, im letzten Falle eine gleitend-rollende.

### 1. Höhere Elementenpaare mit cylindrischen Axoiden.

#### §. 11. Vorbemerkungen.

Unter einer cylindrischen Fläche soll eine allgemeine Cylinderfläche, unter einem cylindrischen Körper ein allgemeiner Cylinder verstanden werden im Gegensatze zu einer kurzweg so genannten Cylinderfläche beziehungsweise einem Cylinder (§. 1). Die Axoide von Paarelementen sind dann cylindrische Flächen, wenn die Elemente selbst cylindrische Körper sind, die sich in parallelen Geraden berühren, während sie behufs der vorausgesetzten Zwangläufigkeit durch vortretende Ränder oder auf andere Weise an einer Axialverschiebung verhindert werden. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, d. h. ihrer in Punkten sich berührenden Querschnittsfiguren, auf deren Betrachtung deshalb die folgende Untersuchung sich beschränken kann; jedes Profil ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere bei seiner Bewegung gegen jenes nach und nach einnimmt. Die diese Profile enthaltende Querschnittsebene schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in Querschnittslinien, welche die Pol-

\* Kinematische Ketten mit Elementenpaaren von mehrfacher Beweglichkeit können im Allgemeinen aus Ketten mit zwangläufigen Elementenpaaren durch Verminderung der Gliederzahl entstanden gedacht werden, wie es in Betreff der Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit schon in §. 6 angedeutet wurde und in Betreff anderer, insbesondere auch höherer Elementenpaare später an einigen Beispielen gezeigt werden wird. In der That ist ohne Weiteres begreiflich, dass, wenn ein Glied  $b$  einerseits mit dem Gliede  $a$  durch ein zwangläufiges Elementenpaar  $\alpha$ , andererseits mit dem Gliede  $c$  durch ein zwangläufiges Elementenpaar  $\gamma$  verbunden ist, bei Beseitigung dieses Gliedes  $b$  die Glieder  $a$  und  $c$ , um die frühere gegenseitige Beweglichkeit zu behalten, durch ein Elementenpaar zu verbinden sein werden, welches die Beweglichkeiten der Elementenpaare  $\alpha$  und  $\gamma$  in sich vereinigt.

bahnen der Elementenprofile heissen und sich beständig in einem Punkte, dem sogenannten Pol, berühren.

Die gegenseitige Bewegung der Elementenprofile in ihrer Ebene ist dadurch bestimmt, dass die mit ihnen verbundenen Polbahnen auf einander rollen, entsprechend einer stetigen Folge von elementaren Drehungen um ihren jeweiligen Berührungspunkt, den Pol. Diese Art von gegenseitiger Beweglichkeit der Elementenprofile erfordert eine beständige solche gegenseitige Stützung derselben, welche nur Drehung um einen Punkt in beiderlei Sinn zulässt, wozu es (§. 7 und 8) nöthig ist, dass die wenigstens 3 Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden. Uebrigens ist es nicht nöthig, die Erfüllung dieser Bedingung besonders nachzuweisen, wenn man erkannt hat, dass die Elementenprofile in stetig auf einander folgenden Lagen sich gegen Schiebung vollkommen stützen, indem sie dann von irgend einer dieser Lagen aus nur um einen einzigen Punkt  $P$  gegenseitig drehbar sein können; wäre nämlich ausserdem noch Drehung um einen zweiten Punkt  $P_1$  möglich, so könnte diese in eine gleiche Drehung um  $P$  und in Schiebung senkrecht zur Geraden  $PP_1$  zerlegt werden, entgegen der Voraussetzung vollkommener Stützung gegen Schiebung.

Die sich hier darbietenden Aufgaben betreffen vor Allem 1) die Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, 2) die Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen. Letztere bestimmen unmittelbar die Punktbahnen, d. h. die Bahnen aller mit dem einen Elementenprofil fest verbunden gedachter Punkte in Beziehung auf das andere. Umgekehrt wird die Polbahn jedes Elementenprofils durch die Bahnen von zwei Punkten des anderen bestimmt, indem sie, wie die allgemeine Kinematik lehrt, der Ort der Schnittpunkte je zweier Normalen dieser Punktbahnen in entsprechenden Punkten derselben, d. h. in gleichzeitigen Oertern der beschreibenden Punkte ist.

Ausser jenen unter 1) und 2) bezeichneten Gruppen von Aufgaben kann es noch der Fall sein, dass die gegenseitige Beweglichkeit der cylindrischen Paarelemente weder durch die Elementenprofile, noch durch die Polbahnen gegeben, sondern an anderweitige Bedingungen geknüpft ist, denen entsprechend dann erst die betreffenden Polbahnen und event. die Profile bestimmt werden sollen. In dieser Hinsicht soll im Folgenden insbesondere der Fall behandelt werden, dass die Elemente des Paares um parallele Axen von unveränderlichem Abstände und von unveränderlichen Lagen gegen die Elemente in gegebener Weise drehbar sind, also die Aufgabe, betreffend 3) die Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte

ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen. Nachdem die Polbahnen gefunden sind, gehört die Bestimmung der Elementenprofile zu der unter 2) genannten Gruppe von Aufgaben.

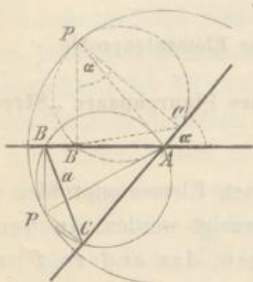
*α.* Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile.

§. 12. Die Cardanischen Kreise als Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel“.

Die Ermittlung der Polbahnen zu gegebenen Elementenprofilen soll im Folgenden beispielsweise für solche Fälle gezeigt werden, in denen das eine Elementenprofil  $F$  aus Kreisbögen, das andere  $F'$  aus geraden Linien besteht, da solche Profile auch abgesehen von ihrer leichten Herstellbarkeit von besonderem Interesse sind. In allen solchen Fällen kann die Aufgabe auf eine andere von elementarem Charakter zurückgeführt werden, auf die auch später wiederholt Bezug zu nehmen sein wird, und welche deshalb hier zunächst einer gesonderten Betrachtung unterworfen werden soll. Sind nämlich  $b'$  und  $c'$  zwei nicht parallele Seiten der geradlinigen Figur  $F'$ , mit denen bei einer gewissen Bewegung von  $F$  gegen  $F'$  zwei Bogenseiten von  $F$  in Berührung bleiben, und sind  $B, C$  die Mittelpunkte,  $b, c$  die Halbmesser der Kreise, zu denen diese Bogenseiten von  $F$  gehören, so bewegen sich die Punkte  $B, C$  von  $F$  in geraden Linien, die beziehungsweise in den Entfernungen  $b, c$  mit den geraden Linien  $b', c'$  der Figur  $F'$  parallel sind. Die gegenseitige Bewegung der beiden Figuren ist also dadurch bestimmt, dass die Endpunkte einer gewissen Strecke  $BC = a$  der aus Kreisbögen bestehenden Figur  $F$  in den Schenkeln eines gewissen Winkels  $BAC = \alpha$  der geradlinigen Figur  $F'$  gleiten resp. diese Winkelschenkel von  $F'$  durch jene zwei Punkte von  $F$  hindurch gleiten. Die Polbahnen eines solchen elementaren Figurenpaars „Strecke und Winkel“ (Fig. 6), auf dessen gegenseitige Bewegung die der Elementenprofile  $F, F'$  in ihren einzelnen Theilen (entsprechend den verschiedenen Combinationen, in denen zwei Bogenseiten des einen mit zwei geraden Seiten des anderen Profils zur Berührung kommen können) immer zurückführbar ist, ergeben sich folgendermaassen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die hier als Winkel bezeichnete Figur ein System von zwei sich schneidenden Geraden ist, die also im gewöhnlichen Sinne eigentlich 4 Winkel bilden, von denen je 2 entweder Neben- oder Scheitelwinkel sind, und von denen jeder die Strecke in sich aufnehmen kann, wenn die Figuren ihre sämtlichen gegenseitigen Lagen stetig durchlaufen.

Die Polbahn des Winkels ist der Ort der Punkte (Pole)  $P$ , um welche bei fester Lage des Winkels die Strecke sich nach und nach dreht.

Fig. 6.



Für irgend eine Lage  $BC$  (Fig. 6) der letzteren ergibt sich dieser Pol im Durchschnitte der Normalen in den Punkten  $B, C$  der betreffenden Bahnen  $AB, AC$  dieser Punkte. Er liegt in der Peripherie des Kreises, der durch  $A, B, C$  geht, und zwar so, dass  $AP = R = \frac{a}{\sin \alpha}$  ein

Durchmesser dieses Kreises ist. Die Polbahn des Winkels ist also der aus seinem Scheitelpunkte  $A$  mit dem Radius  $R = \frac{a}{\sin \alpha}$  beschriebene Kreis.

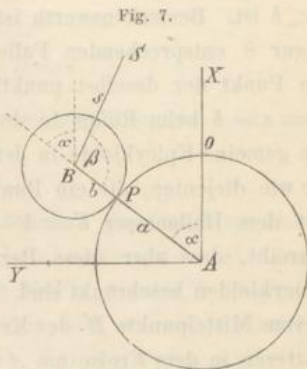
Die Polbahn der Strecke ist der Ort aller relativen Lagen des Pols  $P$  gegen  $BC$ , d. i. der Ort der Durchschnittspunkte aller Geraden, welche, durch  $B$  und  $C$  gehend, sich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $180^\circ - \alpha$  schneiden, also der die Strecke  $BC$  als Sehne enthaltende Kreis mit dem

$$\text{Radius } r = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Die Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel“ sind also zwei Kreise vom Halbmesserverhältnisse 1:2, von denen der kleinere (in der Folge kurz der Kreis  $r$  genannt) im grösseren (dem Kreise  $R$ ), resp. der grössere um den kleineren rollt. Mit Reuleaux mögen dieselben die Cardanischen Kreise genannt werden nach dem Mathematiker Cardano, der sich im 16. Jahrhundert zuerst mit dem Problem beschäftigt zu haben scheint. Die mit der Strecke verbundenen Punkte beschreiben also relative Bahnen gegen den Winkel, die zur Classe der Hypocykloiden gehören, hier aber, wie sogleich gezeigt werden soll, in Ellipsen übergegangen sind; die mit dem Winkel verbundenen Punkte beschreiben relative Bahnen gegen die Strecke, die zur Classe der Epicykloiden gehören, im vorliegenden Falle aber Cardioiden heissen. Die Gleichungen dieser Curven (zunächst auf Grund allgemeinerer Voraussetzungen) ergeben sich wie folgt.

Auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt  $A$  und Halbmesser  $a$  (Fig. 7) rolle ein anderer mit dem Mittelpunkt  $B$  und Halbmesser  $b$ , mit welchem ein Punkt  $S$  in der Entfernung  $s$  von  $B$  verbunden ist. Für  $A$  als Anfangspunkt werde die positive  $x$ -Axe so angenommen, dass sie den Berührungspunkt der beiden Kreise in derjenigen Lage  $O$  enthält, bei welcher  $BO$  und  $BS$  einerlei Richtung haben, die positive  $y$ -Axe senkrecht zur

$x$ -Axe so, dass der Berührungspunkt  $P$  sich auf dem Kreise um  $A$  im Sinne von der positiven  $x$ -Axe durch den rechten Winkel  $XAY$  zur positiven  $y$ -Axe bewegt;  $\alpha$  und  $\beta$  seien die Mittelpunktswinkel  $OAP$  und  $SBP$  der Bögen beider Kreise, die sich seit ihrer Berührung im Punkte  $O$  von einander abgewälzt haben. Wenn sich nun die Kreise von aussen berühren, so dass in der Anfangslage die Richtungen  $BO$  und  $BS$  der Richtung  $AO$  entgegengesetzt sind, so ergeben sich aus Fig. 7 sofort die folgenden Ausdrücke der Coordinaten  $x, y$  des beschreibenden Punktes  $S$ :



$$x = (a + b) \cos \alpha - s \cos (\alpha + \beta)$$

$$y = (a + b) \sin \alpha - s \sin (\alpha + \beta)$$

oder wegen  $a\alpha = b\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + b) \cos \alpha - s \cos \frac{a + b}{b} \alpha \\ y &= (a + b) \sin \alpha - s \sin \frac{a + b}{b} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Berühren sich aber die Kreise von innen, so dass in der Anfangslage (Fig. 8 und Fig. 9) die Richtungen  $BO$  und  $BS$  mit der Richtung  $AO$  übereinstimmen, so sind in Gl. (1) nur  $b$  und  $s$  entgegengesetzt zu nehmen, wodurch sich ergibt:

Fig. 8.

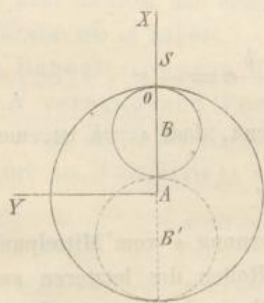
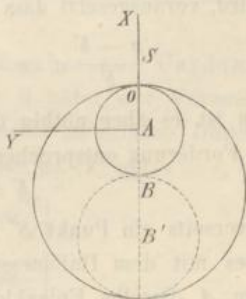


Fig. 9.



$$\left. \begin{aligned} x &= (a - b) \cos \alpha + s \cos \frac{a - b}{b} \alpha \\ y &= (a - b) \sin \alpha - s \sin \frac{a - b}{b} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$



Die Bahnen der Punkte  $S$  sind in Fig. 7 und Fig. 9 Epicykloiden, in Fig. 8 Hypocykloiden, und zwar sogenannte gemeine, wenn  $s=b$  ist, verlängerte oder verschlungene, wenn  $s>b$ , verkürzte oder gedehnte, wenn  $s<b$  ist. Bemerkenswerth ist, dass die gemeine Hypocykloide in dem der Figur 8 entsprechenden Falle nicht verschieden ist von derjenigen, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um  $B'$  mit dem Halbmesser  $b'=a-b$  beim Rollen in dem Kreise um  $A$  beschreibt, und dass ebenso die gemeine Epicykloide in dem der Figur 9 entsprechenden Falle dieselbe ist wie diejenige, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um  $B'$  mit dem Halbmesser  $b'=b-a$  beim Rollen auf dem Kreise um  $A$  beschreibt, dass aber diese Beziehungen auf gemeine Hypocykloiden und Epicykloiden beschränkt sind. Soll nämlich ein Punkt  $S'$  in der Entfernung  $s'$  vom Mittelpunkte  $B'$  des Kreises mit dem Halbmesser  $b'$  beim Rollen des letzteren in dem Kreise um  $A$  mit dem Halbmesser  $a>b'$  dieselbe Hypocykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um  $B$  verbundene Punkt  $S$  (Fig. 8) im gleichen Falle, so muss nach Gl. (2) für alle Werthe von  $\alpha$

$$(a-b') \cos \alpha' + s' \cos \frac{a-b'}{b'} \alpha' = (a-b) \cos \alpha + s \cos \frac{a-b}{b} \alpha$$

$$(a-b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a-b'}{b'} \alpha' = (a-b) \sin \alpha - s \sin \frac{a-b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = a - s; \quad s' = a - b; \quad \alpha' = -\frac{a-b}{b} \alpha$$

gesetzt wird, vorausgesetzt dass dann auch

$$\frac{a-b'}{b'} \alpha' = -\frac{s}{a-s} \frac{a-b}{b} \alpha = -\alpha$$

ist. Dazu ist es aber nöthig und ausreichend, dass  $s=b$  ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = a - b = s'.$$

Soll andererseits ein Punkt  $S'$  in der Entfernung  $s'$  vom Mittelpunkte  $B'$  des Kreises mit dem Halbmesser  $b'$  beim Rollen des letzteren auf dem Kreise um  $A$  dieselbe Epicykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um  $B$  verbundene Punkt  $S$  (Fig. 9), so muss nach Gl. (1) und (2) für alle Werthe von  $\alpha$

$$(a+b') \cos \alpha' - s' \cos \frac{a+b'}{b'} \alpha' = (a-b) \cos \alpha + s \cos \frac{a-b}{b} \alpha$$

$$(a+b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a+b'}{b'} \alpha' = (a-b) \sin \alpha - s \sin \frac{a-b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = s - a; s' = b - a; \alpha' = \frac{b - a}{b} \alpha$$

gesetzt wird, falls dann auch

$$\frac{a + b'}{b'} \alpha' = \frac{s}{s - a} \frac{b - a}{b} \alpha = \alpha$$

ist. Dazu ist es aber wieder nöthig und ausreichend, dass  $s = b$  ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = b - a = s'. \quad -$$

Was nun den hier vorliegenden besonderen Fall der Cardanischen Kreise betrifft, so ergeben sich die Bahngleichungen der mit dem kleineren Kreise  $r$  verbundenen Punkte  $S$  (Fig. 8 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um  $B$  als Kreis  $r$  einen halb so grossen Durchmesser hat, wie der um  $A$  als Kreis  $R$ ) aus Gl. (2) mit  $a = 2r, b = r$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= (r + s) \cos \alpha \\ y &= (r - s) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \frac{x^2}{(r + s)^2} + \frac{y^2}{(r - s)^2} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

Für  $s = 0$  ist diese Bahn ein Kreis um  $A$  mit dem Halbmesser  $r$ . Wächst  $s$ , so wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen  $r + s, r - s$ , die innerhalb des Kreises  $R$  liegt und, indem sie sich im Sinne der  $x$ -Axe mehr und mehr streckt, im Sinne der  $y$ -Axe zusammenzieht, für  $s = r$  in den mit der  $x$ -Axe zusammenfallenden Durchmesser des Kreises  $R$  übergeht. Für  $s > r$  wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen  $s + r, s - r$ , die zunächst den Kreis  $R$  in 4 Punkten schneidet, bei  $s = 3r$  ihn in der  $y$ -Axe berührt, dann ihn ganz umgiebt und sich mit weiter wachsendem  $s$  einem unendlich grossen Kreise um  $A$  nähert.

Die Bahngleichungen der mit dem grösseren Cardanischen Kreise  $R$  verbundenen Punkte  $S$  (Fig. 9 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um  $B$  als Kreis  $R$  einen doppelt so grossen Durchmesser hat, wie der um  $A$  als Kreis  $r$ ), ergeben sich aus Gl. (2) mit  $a = r, b = 2r$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= -r \cos \alpha + s \cos \frac{\alpha}{2} \\ y &= -r \sin \alpha + s \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

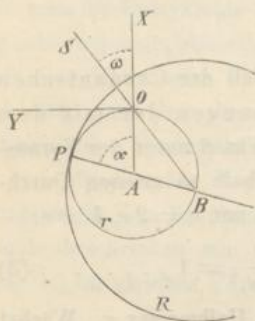
Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten von  $A$  nach  $O$  verlegt wird, so gehen diese Bahngleichungen (4), worin dann  $x + r$  statt  $x$  zu setzen ist, über in

$$\begin{aligned} x &= s \cos \frac{\alpha}{2} - r(1 + \cos \alpha) = \left( s - 2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \\ y &= \left( s - 2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder } x = \rho \cos \omega; y = \rho \sin \omega \\ \text{mit } \rho = s - 2r \cos \omega; \omega = \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Daraus folgt (Fig. 10), dass die Gerade, welche den Mittelpunkt  $B$  des Kreises  $R$  mit dem beschreibenden Punkte  $S$  verbindet, beständig durch denselben Punkt  $O$  des Kreises  $r$  geht, und dass die Bahn von  $S$  erhalten wird, indem man eine durch  $O$  gehende Gerade um diesen Punkt sich drehen lässt und von ihrem zweiten Durchschnittspunkte  $B$  mit dem Kreise  $r$  aus die Strecke  $BS = s$  stets in gleichem Sinne darauf abträgt. Dieser stets gleiche Sinn ist, wenn er anfangs von  $B$  gegen  $O$  gerichtet war, nach dem Durchgange des Punktes  $B$  durch den Punkt  $O$  von  $O$  gegen  $B$  gerichtet und umgekehrt.

Fig. 10.



Für  $s = 0$  ist die Bahn der Kreis  $r$  selbst. Mit wachsender Grösse  $s$  geht sie in zwei Schleifen, die eine innerhalb, die andere ausserhalb des Kreises  $r$  mit dem Knotenpunkte  $O$  über (verschlungene Cardioide); die innere Schleife wird immer kleiner, die äussere grösser, bis erstere mit  $s = 2r$  ganz verschwindet und die Bahn bei  $O$  eine Spitze bildet (gemeine Cardioide). Mit weiter wachsendem  $s$  flacht sich diese Spitze, indem sie sich vom Kreise  $r$  entfernt, mehr und mehr ab (gedehnte Cardioide), und nähert sich die Bahn wieder einem unendlich grossen Kreise um  $A$ .

### §. 13. Gleichseitiges Bogenzweieck im gleichseitigen Dreieck.

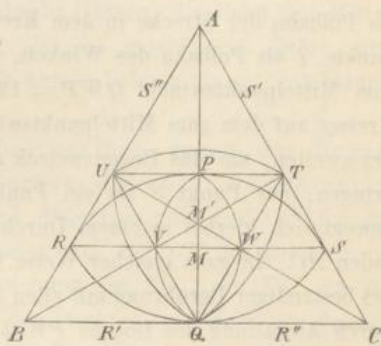
Als einfachster Fall von Elementenprofilen, deren eines aus Kreisbögen und anderes aus geraden Linien besteht, werde jenes als ein Bogenzweieck vorausgesetzt, gebildet von zwei Kreisbögen  $RQS$  und  $RPS$  (Fig. 11), die aus den Endpunkten einer Strecke  $PQ = a$  mit derselben als Halbmesser beschrieben sind, dieses als ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe  $= 2a$  ist. Um diese Figuren als zulässige Profile eines zwangläufigen höheren Elementenpaares nachzuweisen, ist nach §. 11 zu zeigen, dass sie sich in stetig aufeinander folgenden Lagen gegen Schiebung vollkommen stützen, was aber nach §. 7 der Fall ist, wenn das Bogenzweieck bei stetiger Drehung im Dreieck beständig von allen 3 Seiten des letzteren berührt werden kann.

Zunächst ergibt sich eine dieser Bedingung entsprechende Anfangslage durch folgende Erwägung. Zieht man (Fig. 11) die Gerade  $BC$  durch  $Q$  senkrecht zu  $PQ$ , also tangential an den Bogen  $RQS$ , verlängert  $PQ$  um  $PA = PQ$  und zieht die Geraden  $ARB$ ,  $ASC$ , so ist  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe  $AQ = 2a$ , von dem also nur noch zu zeigen bleibt, dass es gleichseitig, somit  $\angle BAQ = \angle CAQ = 30^\circ$  ist, und dass seine Seiten  $AB$ ,  $AC$  den Bogen  $RPS$  in  $R$ ,  $S$  berühren, somit  $\angle ARQ = \angle ASQ = 90^\circ$  ist. Beides folgt aber daraus, dass den Voraussetzungen zufolge

$$\begin{aligned} \angle RQP &= \angle RPQ = 2 \cdot \angle RAP = 60^\circ, \\ \angle SQP &= \angle SPQ = 2 \cdot \angle SAP = 60^\circ \text{ ist.} \end{aligned}$$

Um nun zu zeigen, dass von dieser Anfangslage aus das Bogenzweieck stetig so gedreht werden kann, dass es beständig alle Seiten des Dreiecks  $ABC$  berührt, und um zugleich die Polbahnen beider Profile zu erkennen, werde die Gerade  $TU$  durch  $P$  parallel  $RS$  und  $BC$  gezogen und  $Q$  mit  $T$ ,  $U$  durch die Geraden  $QT$ ,  $QU$  verbunden, die von der Geraden  $RS$  in den Punkten  $W$ ,  $V$  geschnitten werden, so dass dann  $Q$ ,  $T$ ,  $U$  die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks  $ABC$  und  $P$ ,  $V$ ,  $W$  die Mittelpunkte der Seiten des gleichfalls gleichseitigen Dreiecks  $QTU$  sind; ferner werde aus den Eckpunkten dieses letzteren Dreiecks mit seinen Seitenlängen als Halbmessern das Bogendreieck  $QTU$  verzeichnet, und über der Strecke  $VW$  als kleiner Axe das gleichseitige Bogenzweieck mit der grossen Axe  $PQ$ , dessen aus  $V$  und  $W$  als Mittelpunkten beschriebene Bogenseiten  $PWQ$ ,  $PVQ$  zu halb so grossen Kreisen gehören wie die Bogenseiten des Bogendreiecks  $QTU$ . Nun kann das Bogenzweieck  $RS$  durch Drehung um  $60^\circ$  links herum, während der Bogen  $RP$  beständig von der Geraden  $AB$ , der Bogen  $QR$  beständig von der Geraden  $BC$  berührt wird, in eine solche Lage  $R'S'$  gebracht werden, in der es gegen  $AB$  ebenso liegt wie in der Figur gegen  $BC$ , und es fragt sich nur, ob bei dieser Bewegung der Punkt  $S$  des Bogenzweiecks  $RS$  beständig in der Geraden  $AC$  bleibe? Indem aber der Punkt  $P$  des Bogenzweiecks  $RS$  als Mittelpunkt des Kreisbogens  $QR$  in der Geraden  $PQ$  parallel  $BC$ , und der Punkt  $Q$  als Mittelpunkt des Kreisbogens  $RP$  in der Geraden  $QU$  parallel  $AB$  sich bewegen muss, ist die fragliche

Fig. 11.



Bewegung dieselbe wie die der Strecke  $PQ = a$  im Winkel  $UTQ = 60^\circ$ , entsprechend nach vorigem §. dem Rollen des Kreises mit der Sehne  $PQ$  und dem Durchmesser  $R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = TQ = VS$ , also dem Mittelpunkte  $W$ , als Polbahn der Strecke in dem Kreise mit dem Halbmesser  $R$  und Mittelpunkte  $T$  als Polbahn des Winkels, und zwar bedarf es der Abwälzung des zum Mittelpunktswinkel  $QWP = 120^\circ$  gehörigen Bogens  $QVP$  des ersten Kreises auf dem zum Mittelpunktswinkel  $QTU = 60^\circ$  gehörigen Bogen  $QU$  des zweiten, um das Bogenzweieck aus der Lage  $RS$  in die Lage  $R'S'$  zu bringen; der Punkt  $S$  als ein Punkt des kleineren Cardanischen Kreises bewegt sich hierbei in einem Durchmesser des grösseren, d. h. in der Geraden  $AC$ . In ganz gleicher Weise kann dann weiter das Bogenzweieck  $RS$  bei beständiger Berührung mit allen 3 Seiten des umliegenden Dreiecks  $ABC$  durch Abwälzung des Bogens  $PWQ$  auf dem Bogen  $UT$  aus der Lage  $R'S'$  in die Lage  $R''S''$ ; endlich durch Abwälzung des Bogens  $QVP$  auf dem Bogen  $TQ$  in die der ursprünglichen Lage  $RS$  gerade entgegengesetzte gelangen. Die Polbahn des Bogenzweiecks ist also ein ihm ähnliches Bogenzweieck, dessen grosse Axe die kleine des gegebenen ist; die Polbahn des Dreiecks ist ein Bogendreieck, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des gegebenen Dreiecks liegen. Einer vollen Umdrehung des Bogenzweiecks im Dreieck entspricht eine dreimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Dreiecks, die dabei 2 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird; einer vollen Umdrehung des Dreiecks um das Bogenzweieck entspricht eine zweimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Bogenzweiecks, die dabei 3 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird.

Hieraus und mit Rücksicht auf die im vorigen §. angestellte Untersuchung der Bahnen, die von den mit den Cardanischen Kreisen verbundenen Punkten gegenseitig beschrieben werden, ergibt sich, dass die Punkte des Bogenzweiecks gegen das Dreieck in sich zurücklaufende Curven beschreiben, die aus je 6 Ellipsenbögen (in besonderen Fällen in Kreisbögen oder gerade Linien übergehend) bestehen. Von denselben sind besonders bemerkenswerth die Bahnen von Punkten, die in der kleinen oder grossen Axe  $PQ$  resp.  $RS$  des Bogenzweiecks oder in den Verlängerungen derselben liegen; sie sind symmetrisch gegen die Mittellinien  $AQ$ ,  $BT$ ,  $CU$  des Dreiecks  $ABC$ . Die Grundfigur der Bahnen solcher Punkte, die in der Geraden  $PQ$  des Bogenzweiecks liegen, ist das gleichseitige Dreieck  $QTU$ , von den Punkten  $P$  und  $Q$  selbst beschrieben; die Grundfigur der Bahnen von Punkten in  $RS$  ist die von den Punkten  $R$

und  $S$  selbst beschriebene Bahn  $SS'S''RR'R''S$ , bestehend aus 3 geradlinigen Strecken  $SS'$ ,  $S''R$ ,  $R'R''$ , die durch 3 (in Fig. 11 nicht gezeichnete) Ellipsenbögen  $S'S''$ ,  $RR'$ ,  $R''S$  verbunden werden. Alle Punkte im Innern der geschlossenen Polbahn  $PVQWP$  durchlaufen verschlungene (sich selbst schneidende), je 3 Schleifen bildende Curven; die Bahn des Mittelpunktes  $M$  erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber zweimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.

Die Punkte des Dreiecks beschreiben gegen das Bogenzweieck in sich zurücklaufende Curven, die aus je 6 Cardioidenbögen bestehen. Von denselben sind diejenigen, die von Punkten der (beliebig verlängert gedachten) Mittellinien  $AQ$ ,  $BI$ ,  $CU$  des Dreiecks beschrieben werden, symmetrisch in Beziehung auf die Axen  $PQ$ ,  $RS$  des Bogenzweiecks; und diejenigen, welche von Punkten im Innern der Polbahn  $QTU$  des Dreiecks beschrieben werden, sind verschlungene, je 2 Schleifen bildende Curven. Die Bahn des Mittelpunktes  $M'$  erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber dreimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.\* —

Ebenso hier, wie auch in anderen Fällen, in denen die Polbahnen Mittelpunkte haben (dieselben, wie  $M$  und  $M'$  in Fig. 11, als Durchschnittspunkte von Mittellinien der Polbahnen verstanden), sind von den unendlich vielen Punktbahnen, die von Punkten der beweglichen Figur gegen die ruhende beschrieben werden, besonders folgende (mit ihren Reuleaux'schen Benennungen) bemerkenswerth:

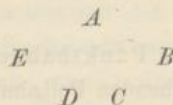
- 1) die gemeine Form der Punktbahnen, d. i. die Bahn irgend eines Punktes der beweglichen Polbahn selbst;
- 2) die concentrirte Form, d. i. die Bahn des Mittelpunktes der beweglichen Polbahn;
- 3) die homocentrischen Punktbahnen, nämlich diejenigen, welche durch den Mittelpunkt der ruhenden Polbahn hindurch gehen, und welche von den Punkten der concentrirten Bahnform des umgekehrten, d. h. des Profilpaares beschrieben werden, bei dem das vorher ruhende zum beweglichen Profil gemacht ist.

\* Auf Tafel I zu Reuleaux's „theoretischer Kinematik“ sind verschiedene solcher Punktbahnen des Bogenzweiecks und des Dreiecks verzeichnet.

## §. 14. Figuren von constanter Breite als Elementenprofile.

Von grösserer Wichtigkeit als Profile von Elementen zwangläufiger höherer Paare sind Figuren von constanter Breite, d. h. Figuren, die bei beliebiger Drehung zwischen zwei in bestimmtem Abstände parallelen Geraden beständig von denselben in einer stetigen Folge von je zwei Punkten berührt werden können. Eine solche Figur kann auch von allen Seiten eines Rhombus in einer stetigen Folge von je 4 Punkten beständig berührt werden, und indem dabei der letztere und die fragliche Figur einander stets gegen Schiebung stützen, müssen (nach §. 11) die Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden, je zwei derselben also, den Berührungspunkten der gegenüber liegenden Seiten des Rhombus zugehörig, zusammenfallen; die fragliche Figur und der sie einschliessende Rhombus können als Profile eines zwangläufigen Elementenpaares dienen.

Figuren von constanter Breite  $b$  sind u. A. aus Kreisbögen von einerlei Halbmesser  $b$  zu bilden so, dass von je zwei die Figur berührend zwischen sich fassenden parallelen Geraden stets die eine einen solchen Kreisbogen berührt und die andere durch den eine Ecke der Figur bildenden Mittelpunkt des zugehörigen Kreises geht; die Entfernung dieser Geraden ist dann immer  $= b$ , und die beiden Stütznormalen fallen zusammen. Diesen Bedingungen entspricht insbesondere ein reguläres Bogen-neck von ungerader Seitenzahl, d. h. eine Figur, welche von Kreisbögen gebildet wird, die aus den Ecken eines regulären necks ungerader Seitenzahl als Mittelpunkten über den gegenüber liegenden Seiten als Sehnen beschrieben sind. Wenn z. B. bei dem regulären Bogenfünfeck

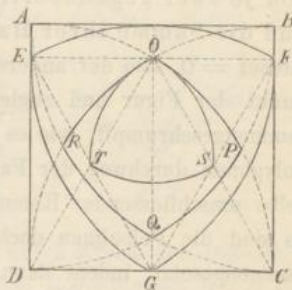


die eine der beiden parallelen Geraden den aus  $C$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogen  $EA$  in  $A$  berührt, so berührt die andere den aus  $A$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebene Bogen  $CD$  in  $C$ ; wird die erste um  $A$  rechts herum gedreht bis sie den aus  $D$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogen  $AB$  in  $A$  berührt, so wälzt sich die andere auf dem Bogen  $CD$  ab bis zur Berührung in  $D$ ; einer Wälzung der ersten auf dem Bogen  $AB$  entspricht dann eine Drehung der zweiten um  $D$  bis zur Berührung des aus  $B$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogens  $DE$  u. s. f.

Als Beispiel werde der einfachste Fall näher betrachtet, dass das Bogen-neck ein Bogendreieck und der Rhombus ein Quadrat ist, also das Elementenprofilpaar:

Gleichseitiges Bogendreieck im Quadrat. Die Seite des Quadrats  $ABCD$  (Fig. 12) ist  $=$  dem Halbmesser  $b$  der Seiten des Bogendreiecks  $EFG$   $=$  der Seitenlänge des Sehnendreiecks  $EFG$  des letzteren. In der gezeichneten Lage beider Figuren, bei welcher eine Seite  $EF$  des Sehnendreiecks mit zwei Seiten  $AB, CD$  des Quadrats parallel ist und die gegenüberliegende Ecke  $G$  des Dreiecks im Mittelpunkte der einen  $CD$  dieser Quadratseiten liegt, ist der Mittelpunkt  $O$  von  $EF$  der Durchschnittspunkt der 4 Stütznormalen, also der Pol. Wird das Bogendreieck bei beständiger Umschliessung durch das Quadrat etwa links herum gedreht, bis  $FG$  gegen  $BC$  so liegt wie in der Figur  $EF$  gegen  $AB$  und somit auch  $E$  mit dem Mittelpunkte von  $AD$  zusammenfällt, was eine Drehung um den Winkel  $GFC = 30^\circ$  erfordert, so bewegt sich  $E$  auf  $AD$ ,  $G$  auf  $DC$ , also die Strecke  $EG$  im rechten Winkel  $ADC$ , und es ist also (§. 12) die Bewegung identisch mit dem Rollen eines Kreises vom Durchmesser  $EG = DO = b$  als Polbahn der Strecke oder des Bogendreiecks in einem Kreise vom Halbmesser  $b$  als Polbahn des Winkels oder des Quadrats, ersterer (von welchem  $OS$  in Fig. 12 ein Bogen ist) aus dem Mittelpunkte  $T$  von  $EG$ , letzterer (von welchem  $OP$  in Fig. 12 ein Bogen ist) aus  $D$  als Mittelpunkt beschrieben. Aus der neuen Lage kann dann das Bogendreieck in gleichem Sinne weiter gedreht werden bis (abermals nach einer Drehung von  $30^\circ$ )  $EG$  gegen  $DC$  so liegt wie in der Figur  $EF$  gegen  $AB$  u. s. f. So ergibt sich schliesslich, dass die Polbahn des Bogendreiecks ein auch gleichseitiges Bogendreieck  $OST$  ist, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des dem gegebenen Bogendreieck zugehörigen Sehnendreiecks liegen, und dass die Polbahn des Quadrats ein gleichseitiges Bogenviereck  $OPQR$  ist, beschrieben aus den Ecken des gegebenen Quadrats als Mittelpunkten mit seiner Seitenlänge als Halbmesser. Um bei stetiger Bewegung die ursprüngliche gegenseitige Lage beider Figuren wieder herbeizuführen, ist die  $\frac{360}{30} = 12$ malige Abwälzung einer Seite der einen auf einer Seite der anderen Polbahn erforderlich; der Berührungspunkt beider muss also die

Fig. 12.





3seitige Polbahn des Bogendreiecks 4mal, die 4seitige des Quadrats 3mal durchlaufen. Die Punktbahnen sind wieder aus Ellipsenbögen resp. aus Cardioidenbögen zusammengesetzt.\* —

Figuren von constanter Breite  $b$  können allgemeiner aus Kreisbögen so gebildet werden, dass die Mittelpunktswinkel von je zwei gegenüberliegenden derselben Scheitelwinkel sind, und die Summe ihrer Halbmesser  $= b$  ist. Wenn einer dieser Halbmesser  $= 0$ , also der andere  $= b$  ist, so ist der eine Bogen zu einem Eckpunkt der Figur und zugleich zum Mittelpunkt des anderen Bogens zusammengeschrumpft, wie es bei den zuvor besprochenen regulären Bogenpolygonen der Fall ist. Werden eine solche Figur und ein dieselbe umschliessender Rhombus als Profile eines Elementenpaares benutzt, so sind die Polbahnen nach wie vor aus Bögen Cardanischer Kreise zusammengesetzt, indem dann, wie schon im §. 12 allgemein nachgewiesen wurde, die gegenseitige Bewegung in ihren einzelnen Theilen immer auf die einer gewissen Strecke der einen in einem gewissen Winkel der anderen Figur zurückgeführt werden kann. Beispielsweise können dergleichen Figuren von constanter Breite aus einem gleichschenkligen Dreieck  $GSG'$  (Fig. 13—15) auf verschiedene Art hervorgehen wie folgt.

Sind die gleichen Seiten  $SG, SG'$  kleiner, als die dritte Seite  $GG'$  (Fig. 13), so entspricht der Forderung das Bogenviereck, welches gebildet

Fig. 13.

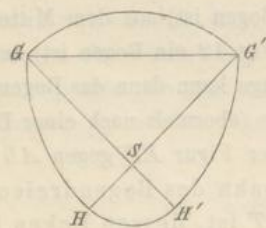
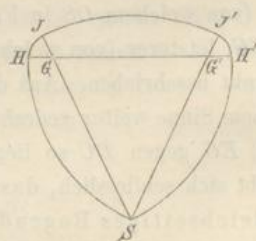


Fig. 14.



wird von den Kreisbögen  $GH$  aus  $G'$ ,  $G'H'$  aus  $G$ ,  $GG'$  und  $HH'$  aus  $S$  beschrieben:  $b = GG' = GH' = G'H$ .

Sind die gleichen Seiten  $SG, SG'$  grösser, als die dritte Seite (Fig. 14), so kann ein Bogenfünfeck von constanter Breite  $b$  gebildet werden durch die Kreisbögen  $SH$  aus  $G'$ ,  $SH'$  aus  $G$ ,  $HJ$  aus  $G$ ,  $H'J'$  aus  $G'$ ,  $JJ'$  aus  $S$  beschrieben, und ist dann  $b = HH' = SJ = SJ'$ . — Oder auch, wenn

\* Siehe Reuleaux's „theoretische Kinematik“, Tafel II.

$GOG'$  (Fig. 15) ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen gleiche Seiten  $OG, OG'$  halb so lang wie die des Dreiecks  $GSG'$  sind, kann ein der Aufgabe entsprechendes Bogenfünfeck gebildet werden durch die Bögen  $SH$  aus  $G'$ ,  $SH'$  aus  $G$ ,  $GG'$  aus  $S$ , und endlich, da hiernach  $OG = OG' = OH = OH'$  ist, durch die aus  $O$  beschriebenen Bögen  $GH$  und  $G'H'$ ; es ist dann  $b = SG = SG' = GH' = G'H$ .

Endlich kann die solcher Weise erhaltene Figur von constanter Breite  $b$  in eine Figur von constanter Breite  $= b + 2x$  transformirt werden dadurch, dass bei unveränderten Mittelpunkten die Halbmesser aller Kreisbögen um  $x$  vergrößert, etwaige Eckpunkte also überhaupt durch Kreisbögen vom Halbmesser  $x$  ersetzt werden. So geht z. B. aus dem Bogenfünfeck  $GG'H'SH$  von constanter Breite  $b$  in Fig. 15 das daselbst punktirte Bogenachteck  $gg'\gamma'h's'sh\gamma$  von constanter Breite  $= b + 2x$  hervor, wenn  $Gg = G'g' = G\gamma = \gamma' = \dots = G\gamma = x$  ist.



$\beta$ . Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen.

### §. 15. Allgemeine Hilfssätze und Vorbemerkungen.

Während die in den vorigen Paragraphen unter  $\alpha$ . behandelte Aufgabe, betreffend die Ermittlung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, insofern eine ganz bestimmte war, als die gegebenen Elemente eines selbständig geschlossenen zwangläufigen Paares eine bestimmte gegenseitige Beweglichkeit derselben bedingen, kann umgekehrt eine gewisse gegenseitige Beweglichkeit der Elemente eines Paares im Allgemeinen durch unendlich viele verschiedene Formen derselben bewirkt werden, und wird deshalb auch die hier unter  $\beta$ . jetzt vorliegende Aufgabe zu einer bestimmten erst durch gewisse willkürliche Annahmen oder durch Bedingungen, denen die gesuchten Elementenprofile ausser ihrer Zugehörigkeit zu gegebenen Polbahnen genügen sollen. Damit sind dann auch verschiedene zum Ziele führende Methoden zu unterscheiden, die aber alle auf dem einen oder anderen der folgenden aus dem Vorhergehenden bekannten, die Elementenprofile charakterisirenden Sätze beruhen:

1) Jedes der beiden Profile ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere nach und nach einnimmt, wenn die mit

ihm verbundene Polbahn auf der mit ersterem verbundenen Polbahn rollt.

2) Die gemeinschaftliche Normale der beiden Profile in einem Berührungspunkt derselben geht durch den Pol, d. h. durch den Berührungspunkt der beiden Polbahnen.

Die Elementenprofile werden hier nur mit Rücksicht auf einen einzigen Berührungspunkt betrachtet, abgesehen von den übrigen oder von sonstigen Hilfsmitteln, die nöthig sind, um das betreffende Elementenpaar zu einem zwangsläufig geschlossenen zu machen. Entsprechende Punkte der beiden Profile oder der beiden Polbahnen sollen solche Punkte derselben heissen, mit denen sie bei ihrer gegenseitigen Bewegung zur Berührung kommen.

Zur Vermeidung wiederholter Erklärungen werden in den folgenden Paragraphen die Polbahnen stets mit  $B$  und  $B'$ , ihr augenblicklicher Berührungspunkt (der Pol) mit  $P$ , die zu  $B$  und  $B'$  gehörigen Profile beziehungsweise mit  $F$  und  $F'$ , ihr augenblicklicher Berührungspunkt mit  $p$  bezeichnet. Entsprechende Punkte der beiden Profile seien  $a$  und  $a'$ ,  $b$  und  $b'$ ,  $c$  und  $c'$  . . . ., entsprechende Punkte der Polbahnen seien  $\alpha$  und  $\alpha'$ ,  $\beta$  und  $\beta'$ ,  $\gamma$  und  $\gamma'$  . . .; und zwar seien  $a$  und  $a'$  die Punkte, mit denen sich  $F$  und  $F'$  dann berühren, wenn  $B$  und  $B'$  sich mit den Punkten  $\alpha$  und  $\alpha'$  berühren,  $b$  und  $b'$  die entsprechenden Punkte von  $F$ ,  $F'$ , die in gleicher Weise den entsprechenden Punkten  $\beta$  und  $\beta'$  von  $B$ ,  $B'$  entsprechen u. s. f. Indem nun nach obigem Satze unter 2), wenn sich die Profile mit entsprechenden Punkten  $a$ ,  $a'$  berühren, ihre Normalen für diese Punkte, die entsprechende Normalen heissen sollen, zusammenfallend durch den Pol gehen, in welchem dann zugleich die entsprechenden Punkte  $\alpha$ ,  $\alpha'$  der Polbahnen liegen und letztere eine gemeinsame Tangente haben, also von jenen zusammenfallenden Normalen unter gleichen Winkeln geschnitten werden, ergibt sich der allgemeine Satz:

3) Entsprechende Normalen der Profile schneiden die zugehörigen Polbahnen in entsprechenden Punkten derselben unter gleichen Winkeln, und es sind die zwischen den Profilen und ihren Polbahnen enthaltenen Strecken dieser entsprechenden Normalen gleich lang. —

Sollten die Elementenprofile eine rein rollende Bewegung gegen einander haben, so müsste ihr Berührungspunkt  $p$  immer mit dem Pol  $P$  zusammenfallen, die Elementenprofile müssten also mit den Polbahnen, die Oberflächen der Elemente mit ihren Axoiden identisch sein. Letztere, materiell ausgeführt, wären zu dem Ende durch eine hinlänglich grosse Kraft

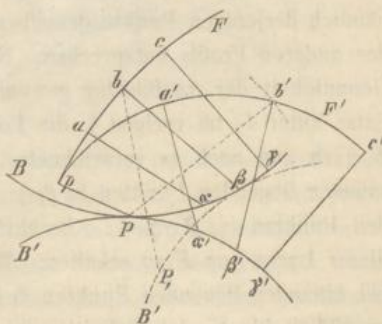
gegen einander zu pressen, um durch die entsprechende Reibung das Gleiten zu hindern; ein Specialfall, der bei sogenannten Reibungsrädern verwirklicht ist.

Von praktischem Interesse ist die Bestimmung der Elementenprofile für gegebene Polbahnen besonders hinsichtlich der Zahnprofile von Zahnrädern, deren gegebene Polbahnen, hier sogenannte Theilrisse, um feste Punkte in ihrer gemeinsamen Ebene drehbar sind. Die Willkürlichkeit der Annahmen, durch welche, wie oben bemerkt, die Aufgabe erst bestimmt und welche in allen Fällen praktisch beschränkt wird durch die Forderung, dass keins der Profile eine Spitze oder gar Schleife bilden oder das andere in irgend einer Lage ausser der Berührung zugleich schneiden darf, wird im Falle der Zahnprofile noch durch weitere praktische Rücksichten eingeschränkt, oder es werden wenigstens die benutzbaren Profiltheile dadurch beschränkt, z. B. durch die Forderung eines nach Grösse und Richtung nur wenig veränderlichen Drucks der Zähne aufeinander, einer nur mässig grossen Differenz der miteinander in Berührung kommenden Bogenlängen beider Profile (dem Betrag ihrer gegenseitigen Gleitung entsprechend) u. s. f. Die Berücksichtigung dieser und anderer Nebenbedingungen gehört theils in das Gebiet des Maschinenbaues, theils in andere Abschnitte dieses Buches.

§. 16. Bestimmung des einen Profils zu dem gegebenen anderen.

Wenn das Profil  $F'$  bezüglich auf seine Gestalt und Lage gegen die Polbahn  $B$  gegeben ist, und das der anderen Polbahn  $B'$  zugehörige Profil  $F'$  in der Lage gezeichnet werden soll, in der sich  $B$  und  $B'$  im Punkte  $P$  berühren (Fig. 16), so ist ein Punkt des Profils  $F'$ , nämlich sein Berührungspunkt mit  $F$ , der Fusspunkt  $p$  des von  $P$  auf  $F$  gefällten Perpendikels gemäss dem Satze unter 2) im vorigen §. Um aber den einem beliebigen Punkte  $b$  von  $F$  entsprechenden Punkt  $b'$  von  $F'$  zu finden, werde  $b\beta$  normal zu  $F$  gezogen bis zum Schnittpunkte  $\beta$  mit  $B$ , und der Bogen  $P\beta'$  von  $B'$  dem Bogen  $P\beta$  von  $B$  gleich gemacht (durch Abtragung hinlänglich kleiner Sehnen); dem vorigen §. unter 3) zufolge muss dann  $b'$  in dem

Fig. 16.



Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte  $\beta'$  mit dem Halbmesser  $\beta b$  beschrieben wird. Zeichnet man ferner die Polbahn  $B'$  in der Lage  $B'$ , in der sie mit ihrem Punkte  $\beta'$  die Polbahn  $B$  im Punkte  $\beta$  derselben berührt, so ist, wenn der Bogen  $\beta P$ , von  $B'$  = dem Bogen  $\beta' P$  von  $B'$  ist,  $P$ , der Ort des Punktes  $P$  von  $B'$ , der dem Orte  $b$  des Punktes  $\beta'$  entspricht, und muss folglich für die Lage, in der sich die Polbahnen in  $P$  berühren, der Punkt  $b'$  auch in dem Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte  $P$  mit dem Halbmesser  $Pb$  beschrieben wird. Auf solche Weise können beliebig viele, gewissen Punkten  $a, b, c \dots$  von  $F$  entsprechende Punkte  $a', b', c' \dots$  von  $F'$  als Schnittpunkte von je zwei Kreisen erhalten werden, von denen die einen aus gewissen durch  $a, b, c \dots$  bestimmten Punkten  $a', \beta', \gamma' \dots$  von  $B'$ , die anderen aus dem Punkte  $P$ , und zwar mit Halbmessern beschrieben werden, die in der dargelegten Weise gleichfalls durch die Punkte  $a, b, c \dots$  bestimmt sind.

Nach dem Satze 3) im vorigen §. können auch, nachdem die Normalen  $aa, b\beta \dots$  von  $F$  gezogen und die Bögen  $Pa', a'\beta' \dots$  von  $B'$  den Bögen  $Pa, a\beta \dots$  von  $B$  gleich gemacht sind, von  $a', \beta' \dots$  aus die Geraden  $a'a', \beta'b' \dots$  so gezogen werden, dass sie die Polbahn  $B'$  unter denselben Winkeln schneiden, unter denen die Polbahn  $B$  beziehungsweise von  $aa, \beta b \dots$  geschnitten wird, wonach dann nur  $a'a' = aa, \beta'b' = \beta b \dots$  zu machen ist, um die Punkte  $a', b' \dots$  von  $F'$  als die entsprechenden der Punkte  $a, b \dots$  von  $F$  zu erhalten.

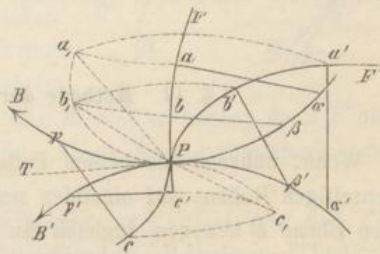
Diese beiden Verfahrungsweisen, welche das Profil  $F'$  als Punktecurve (Ort gewisser Punkte) bestimmen, sind indessen zeitraubend und lästig, besonders im allgemeinen Falle beliebiger (nicht kreisförmiger) Polbahnen. Leichter kann es als Umhüllungscurve mit beliebiger Annäherung gefunden werden, wenn, wie gewöhnlich, nicht zugleich die Ermittlung bestimmter, nämlich derjenigen Punkte desselben bezweckt wird, die gewissen Punkten des anderen Profils entsprechen. Nichts wäre freilich an Leichtigkeit und Genauigkeit der Ausführung gewonnen, wenn man gemäss dem allgemeinen Satze unter 1) im vorigen §. die Polbahn  $B$  sammt dem zugehörigen Profil  $F$  nach und nach so verzeichnete, dass sie mit verschiedenen, nahe zusammen liegenden Punkten  $a, \beta, \gamma \dots$  die Polbahn  $B'$  in den entsprechenden Punkten  $a', \beta', \gamma' \dots$  berührt, um so  $F'$  als Umhüllungslineie aller dieser Lagen von  $F$  zu erhalten. Wesentlich einfacher ist es aber, in nahe bei einander liegenden Punkten  $a, b, c \dots$  (Fig. 16) die Normalen von  $F$  zu ziehen bis zu den Schnittpunkten  $a, \beta, \gamma \dots$  mit  $B$ , dann die Bögen  $Pa', a'\beta', \beta'\gamma' \dots$  von  $B'$  den Bögen  $Pa, a\beta, \beta\gamma \dots$  von  $B$  gleich zu machen, aus  $a', \beta', \gamma' \dots$  als Mittelpunkten mit den Halbmessern  $aa, \beta b,$

$\gamma e \dots$  Kreisbögen zu beschreiben und deren Umhüllungscurve zu zeichnen. Letztere ist das gesuchte Profil  $F'$  mit einer Annäherung, die derjenigen entspricht, mit welcher  $F$  als Umhüllungsline der aus  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  mit den Halbmessern  $\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma \dots$  beschriebenen Kreise sich verzeichnen lässt, und die somit durch Vervielfältigung der angenommenen Punkte  $a, b, c \dots$  beliebig gesteigert werden kann. —

Von sogenannten Zahnprofilen  $F, F'$ , deren Polbahnen (Theilrisse)  $B, B'$  um feste Punkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  drehbar sind, kann das eine  $F'$  durch die Punkte  $a', b', c' \dots$  desselben, die gewissen Punkten  $a, b, c \dots$  des gegebenen anderen entsprechen, sehr zweckmässig auch durch Vermittelung der entsprechenden Eingriffspunkte, d. h. derjenigen Punkte  $a, b, c, \dots$  der Ebene  $E$  gefunden werden, in denen sich die Punkte  $a, b, c \dots$  des gegebenen Profils  $F$  befinden, wenn es in ihnen von dem gesuchten Profil  $F'$  berührt wird. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, dass die Theilrisse, auch wenn sie nicht kreisförmig sind, sich beständig in der Geraden  $AA'$  berühren, weil ihre gegenseitige Rollung in einer Folge von elementaren Drehungen um ihre jeweiligen Berührungspunkte  $P$  besteht, diese aber nur dann die Resultirenden elementarer Drehungen um  $A$  und  $A'$  sein können, wenn jedes  $P$  in der Geraden  $AA'$  liegt. Wenn sich nun  $F$  und  $F'$  mit den entsprechenden Punkten  $a, a'$  im

Punkte  $a$ , (Fig. 17) der Ebene  $E$  berühren,  $B$  und  $B'$  also mit den entsprechenden Punkten  $a, a'$  im Pol  $P$ , der gefunden wird durch Abtragung der Strecke  $AP = Aa$  auf der Geraden  $AA'$ , so sind die entsprechenden Normalen  $aa$  und  $a'a'$  von  $F$  und  $F'$  in die Lage  $a, P$  gekommen; es ist also  $a$ , der Durchschnittspunkt des aus  $A$  mit dem Halbmesser  $Aa$  und des aus  $P$  mit dem Halbmesser  $Pa$  beschriebenen Kreises, so dass, wenn hiernach  $a$ , construiert ist, dann auch  $a'$  als Durchschnittspunkt des aus  $A'$  mit dem Halbmesser  $A'a'$ , und des aus  $a$  mit dem Halbmesser  $aa$  beschriebenen Kreises gefunden werden kann. Ebenso sind in Fig. 17, worin die Theilrisse  $B, B'$  als Kreise (Theilkreise) angenommen sind, so dass  $P$  eine unveränderliche Lage in  $AA'$  hat, die den Punkten  $b, c$  von  $F$  entsprechenden Punkte  $b', c'$  der Eingriffslinie (d. i. des Ortes der Eingriffspunkte)  $a, b, P, c$ , und damit die entsprechenden Punkte  $b', c'$  des Profils  $F'$  construiert worden.

Fig. 17.



Die Eingriffslinie lässt erkennen, wie sich die Richtung des Zahndrucks nach und nach ändert: in Fig. 17, wenn  $F$  das getriebene,  $F'$  das treibende Zahnprofil und  $PT$  gemeinsame Tangente der hier kreisförmigen Theilrisse ist, von  $c, P$  durch  $PT$  und  $Pb$ , bis  $Pa$ , während der Angriffspunkt (Berührungspunkt) sich längs  $F$  von  $c$  bis  $a$ , längs  $F'$  von  $c'$  bis  $a'$  bewegt. Die gegenseitige Bewegung der Profile ist (wie immer bei Ausschluss der im vorigen §. erwähnten Reibungsräder) eine theils rollende, theils gleitende; der Betrag des Gleitens ist auf der einen Seite von  $AA' = Pc - Pc'$ , auf der anderen  $= Pa' - Pa$ . —

Aus dem Satze unter 3) im vorigen §. folgt, dass, wenn das gegebene Profil seine Polbahn schneidet, auch das andere seine Polbahn und zwar unter demselben Winkel schneidet. Die betreffenden Durchschnittspunkte sind entsprechende Punkte der beiden Profile und zugleich der beiden Polbahnen, indem die einen und die anderen sich in diesen Punkten berühren, während letztere mit dem Pol zusammenfallen: siehe Fig. 17, woselbst die Profile, wie bei Zahnprofilen üblich, ihre Polbahnen rechtwinklig schneiden.

Ist die Polbahn  $B$  selbst als das eine Profil  $F$  gegeben, so ist die andere Polbahn  $B'$  das zugehörige Profil  $F'$ .

Ist das Profil  $F$  als ein Punkt gegeben, so ist  $F'$  die Bahn dieses Punktes beim Rollen von  $B$  auf  $B'$ . Bei Zahnradern entspricht diesem Specialfalle die sogenannte Punktverzahnung.

### §. 17. Methode der Hülfpolbahnen.

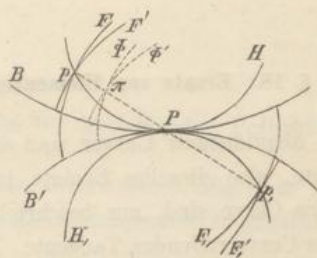
Wenn, während die beiden Polbahnen  $B$  und  $B'$  vorbehaltlich ihres gegenseitigen Rollens auf einander sich übrigens beliebig in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  bewegen, zugleich ein Punkt  $p$  in dieser Ebene sich so bewegt, dass die entsprechenden Elemente seiner relativen Bahnen gegen  $B$  und gegen  $B'$  stets senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Berührungspunkte  $P$  von  $B$  und  $B'$  gerichtet sind, dass also stets seine elementare Bewegung gegen  $B$  in der Drehung um einen gewissen Punkt  $m$ , gegen  $B'$  in der Drehung um einen gewissen Punkt  $m'$  der Geraden  $Pp$  besteht, so sind die relativen Bahnen von  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  entsprechende Profile  $F$  und  $F'$  gemäss dem die letzteren charakterisirenden Satze unter 2) in §. 15. Hierauf beruht das Verfahren der Verzeichnung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen vermittels sogenannter Hülfpolbahnen, und zwar entspricht dasselbe dem besonderen Falle, dass die Pole  $m, m'$  für die

relativen Bewegungen des beschreibenden Punktes  $p$  gegen die Polbahnen  $B$  und  $B'$  beständig mit dem Pol  $P$  für die gegenseitige Bewegung der letzteren zusammenfallen. Unter einer Hülfspolbahn wird nämlich eine Linie  $H$  verstanden, welche, während die beiden gegebenen Polbahnen  $B, B'$  auf einander rollen, in solcher Weise mitrollt, dass sie  $B$  und  $B'$  beständig in ihrem Berührungspunkte, dem Pol  $P$ , berührt. Die elementaren relativen Bewegungen irgend eines mit einer solchen Linie  $H$  fest verbundenen Punktes  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  sind elementare Drehungen verschiedener Grösse um den Pol  $P$ , so dass die relativen Bahnen  $F$  und  $F'$  von  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  als zugehörige Elementenprofile dienen können.

Liegt  $H$  ausserhalb  $B$  und  $B'$  auf der Seite von  $B$ , d. h.  $B$  zwischen  $B'$  und  $H$  (Fig. 18), und liegt  $p$  in  $H$  selbst oder jenseits  $H$  ( $H$  zwischen  $B$  und  $p$ ), so liegen  $F$  und  $F'$  ganz auf denselben Seiten von  $B$  und  $B'$ , so dass auf den Gegenseiten Raum für weitere Profile  $F$ , (mit  $B$  verbunden) und  $F'$ , (mit  $B'$  verbunden) bleibt, die vermittels einer zweiten Hülfspolbahn  $H$ , und eines damit verbundenen Punktes  $p$ , unter solchen Umständen beschrieben werden, dass  $H$ , auf dieser anderen Seite ausserhalb  $B$  und  $B'$  (Fig. 18) und der Punkt  $p$ , entweder in  $H$ , selbst oder jenseits  $H$ , ( $H$ , zwischen  $B'$  und  $p$ ), liegt. Wenn insbesondere, wie in Fig. 18,  $p$  in  $H$ ,  $p$ , in  $H$ , selbst liegt, so erreichen die Profile  $F$  und  $F'$ , die Polbahn  $B$  von entgegengesetzten Seiten unter rechten Winkeln, ebenso  $F'$  und  $F''$ , die Polbahn  $B'$ , und es können dann  $F$  und  $F''$ ,  $F'$  und  $F''$  je zu einem einzigen stetig (ohne Knick) zusammenhängenden Profil vereinigt werden.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur Profilierung der Zähne gewöhnlicher Zahnräder mit kreisförmigen Polbahnen (Theilkreisen) benutzt man auch Kreise, die sogenannten Radkreise, als Hülfspolbahnen, so dass die Profile, von je einem Punkte dieser Radkreise selbst beschrieben, auf den einen Seiten der Theilkreise Epicykloiden, auf den anderen Seiten Hypocykloiden sind. Wenn solcher Weise die Zähne von mehr als zwei Rädern mit Hilfe derselben Radkreise (allgemein vermittels derselben Hülfspolbahnen) profilirt werden, so bilden dieselben eine Gruppe, einen sogenannten Satz, wovon je zwei zu einem Elementenpaar combinirt werden können. Solche Räder heissen deshalb Satzräder. Sollte nur eins derselben,  $R$ , mit jedem der übrigen  $R', R'' \dots$  zu richtigem Eingriff ge-

Fig. 18.





bracht werden können, so dürften die beiden Hilfskreise  $H, H'$ , verschieden sein, wenn nur mit Hilfe desselben Kreises  $H$  die Zähne von  $R$  innerhalb, die Zähne aller übrigen Räder ausserhalb des Theilkreises, und ebenso mit demselben Kreise  $H'$ , die Zähne von  $R$  ausserhalb, die aller übrigen innerhalb des Theilkreises profilirt werden. Sollen aber je zwei dieser Räder zu einem Elementenpaar combinirt werden können, so müssen die Hilfskreise  $H, H'$ , einander gleich sein.

Wenn die Hülfsbahn zu einem einzelnen Punkt zusammenschrumpft, mit dem der beschreibende Punkt  $p$  zusammenfällt, so beschreibt dieser die Polbahnen  $B$  und  $B'$  selbst als zusammengehörige Profile.

Fällt die Hülfsbahn  $H$  mit  $B$  zusammen, so reducirt sich  $F$  auf einen Punkt  $p$ , während  $F'$  die Bahn dieses Punktes beim Rollen von  $B$  auf  $B'$  ist. Ebenso wenn  $H'$ , mit  $B'$  zusammenfällt, reducirt sich  $F'$  auf einen Punkt  $p'$ , während  $F$ , die Bahn des letzteren beim Rollen von  $B'$  auf  $B$  ist. Bei Zahnradern entsteht so wieder die schon im vorigen §. erwähnte Punktverzahnung.

#### §. 18. Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

Äquidistante Curven sind solche, welche dieselben Krümmungsmittelpunkte, also dieselbe Evolute haben, oder welche Evolventen derselben dritten Curve sind, nur beschrieben von verschiedenen Punkten einer auf dieser Curve rollenden Tangente. Die Entfernung der beschreibenden Punkte ist die Entfernung der äquidistanten Curven, und gleichzeitige Oerter jener Punkte heissen entsprechende Punkte dieser Curven.

Sind nun zwei Profile  $F, F'$  für die Polbahnen  $B, B'$  nach irgend einem Verfahren gefunden, so können zwei Curven  $\Phi$  und  $\Phi'$  (Fig. 18) auch als Profile dienen, wenn  $\Phi$  mit  $F$ ,  $\Phi'$  mit  $F'$  der Art äquidistant ist, dass für entsprechende Punkte  $p, \pi$  die Krümmungshalbmesser von  $F$  und  $\Phi$  dieselbe constante Differenz haben wie die Krümmungshalbmesser von  $F'$  und  $\Phi'$ , und zwar in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, jenachdem  $F$  und  $F'$  in den entsprechenden Punkten, mit denen sie sich in  $p$  berühren, in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, d. h. auf derselben oder auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente liegen. Denn da die Normalen äquidistanter Curven für entsprechende Punkte zusammenfallen, so ist die gemeinsame Normale  $pP$  von  $F, F'$  stets auch gemeinsame Normale von  $\Phi, \Phi'$ , geht also auch letztere beständig durch den Pol  $P$ .

Die Ersetzung von Elementenprofilen durch Aequidistante geschieht bei Verzahnungen besonders dann, wenn das eine Profil ein Punkt ist; die Aequidistanten desselben sind concentrische Kreise um ihn als Mittelpunkt. Aus der Punktverzahnung geht so die Triebstockverzahnung hervor. Zu dem kreisförmigen Querschnitte eines solchen Triebstocks als Elementenprofil  $F$  der Polbahn  $B$  gehört als entsprechendes Profil  $F'$  der anderen Polbahn  $B'$  eine der beiden Umhüllungslinien aller Lagen, die der Kreis beim Rollen von  $B$  auf  $B'$  nach und nach einnimmt, und welche mit der dabei vom Mittelpunkte jenes Kreises beschriebenen Curve beiderseits in Entfernungen = dem Halbmesser des Kreises äquidistant sind.

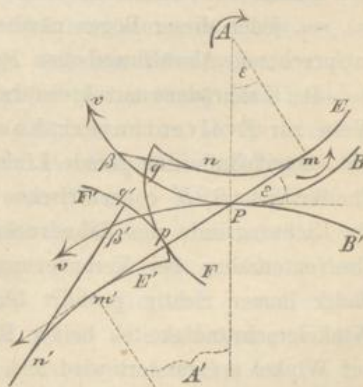
Von demselben Princip war auch schon in §. 14 Gebrauch gemacht worden, um aus dem Elementenprofil  $GG'H'SH$  (Fig. 15) ein anderes zu erhalten, bei dem die Ecken  $G, G', S$  durch Kreisbögen  $g\gamma, g'\gamma', ss'$  ersetzt sind. — Allgemein wird eine Curve  $\Phi$  als Aequidistante einer Curve  $F$  erhalten, indem sie als Umhüllungslinie von Kreisen gezeichnet wird, die aus den Punkten von  $F$  als Mittelpunkten mit gleichen Halbmessern beschrieben werden.

### §. 19. Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Ausser den in den vorigen Paragraphen besprochenen allgemein gültigen Verfahrungsweisen der Bestimmung von Elementenprofilen zu gegebenen Polbahnen können in besonderen Fällen noch andere Methoden dazu dienen, von denen namentlich bei kreisförmigen Polbahnen eine bemerkenswerth ist, die auf folgender Erwägung beruht.

Es seien  $F, F'$  zwei Elementenprofile, die den (vorläufig beliebigen) Polbahnen  $B, B'$  entsprechen, und es sei  $E$  die Evolute von  $F, E'$  die Evolute von  $F'$  (Fig. 19). Wenn  $B'$  (mit  $F'$  und  $E'$ ) auf  $B$  rollt, so ist die durch den Pol  $P$  gehende Stütznormale (gemeinsame Normale von  $F$  und  $F'$  in ihrem Berührungspunkte) beständig zugleich gemeinsame Tangente von  $E$  und  $E'$ , und indem ein gewisser Punkt  $p$  derselben gegen  $B$  die Curve  $F$ , gegen  $B'$  die Curve  $F'$  beschreibt, bewegt

Fig. 19.



sie sich wie ein die Evoluten  $E, E'$  verbindender gespannter Faden, der von der einen sich ab- und auf die andere sich aufwickelt, etwa längs den Bögen  $mn$  von  $E$  und  $m'n'$  von  $E'$ , während die Polbahnen  $B, B'$  mit den gleichen Bögen  $P\beta, P\beta'$  auf einander rollen und der Berührungspunkt der Profile  $F, F'$  in  $F$  den Bogen  $pq$ , in  $F'$  den Bogen  $p'q'$  durchläuft. Wenn sich also umgekehrt zwei Curven  $E, E'$  so verzeichnen liessen, dass beim Rollen von  $B, B'$  auf einander

1) ihre gemeinsame Tangente  $mm', nn'$  . . . stets durch den Pol geht, und dass

2) immer  $nn' = mm' \pm (\text{arc. } m'n' - \text{arc. } mn)$  ist, so würden als Elementenprofile irgend zwei Evoluten der Curven  $E, E'$  dienen können, die von demselben Punkte  $p$  ihrer gemeinsamen Tangente beschrieben werden.

Nun kann man der Bedingung 1) zwar immer leicht Genüge leisten, indem man durch je zwei entsprechende Punkte  $\beta, \beta'$  von  $B, B'$  gerade Linien von gleicher Neigung gegen  $B$  resp.  $B'$  zieht und  $E$  als Umhüllungslinie der durch die Punkte  $\beta, E'$  als Umhüllungslinie der durch die Punkte  $\beta', E$  gezogenen Geraden verzeichnet. Indessen lässt sich nicht allgemein behaupten, dass diese Curven  $E, E'$  auch der Bedingung 2) entsprechen. Offenbar ist es aber dann der Fall, wenn die Polbahnen  $B, B'$  kreisförmig sind und von den durch je zwei ihrer entsprechenden Punkte  $\beta, \beta'$  gezogenen Geraden unter denselben gleichen Winkeln  $\varepsilon$  geschnitten werden, so dass die Umhüllungslinien  $E, E'$  der letzteren Kreise werden, die mit den Kreisen  $B, B'$  concentrisch sind und deren Halbmesser sich ebenso wie die der Kreise  $B, B'$  zu einander verhalten, indem sie beide im Verhältnisse  $\cos \varepsilon$  kleiner sind; denn es ist dann offenbar immer  $nn' = mm'$  und  $\text{arc. } m'n' = \text{arc. } mn$ , jeder dieser Bögen nämlich im Verhältnisse  $\cos \varepsilon$  kleiner, als der entsprechende Abwälzungsbogen  $P\beta = P\beta'$  der Polbahnen.

Bei Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen gelangt man auf solche Weise zur Evolventenverzahnung, die dadurch ausgezeichnet ist, dass die Eingriffslinie eine gerade Linie (die gemeinsame Tangente der mit den Theilkreisen  $B, B'$  concentrischen Hilfskreise  $E, E'$ ) und folglich immer die Richtungslinie des Zahndrucks ist, sowie auch dadurch, dass solche Evolventenzähne bei Veränderung der Axenentfernung der betreffenden Räder immer richtig profilirt bleiben (stets demselben Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten beider Räder entsprechend), indem dadurch nur der Winkel  $\varepsilon$  verändert wird und beide Theilkreise in demselben Verhältnisse, wie  $\sec \varepsilon$ , grösser oder kleiner werden. Satzräder sind in diesem Falle solche, deren Zähne für gegebene Axenentfernungen demselben Winkel  $\varepsilon$  entsprechend profilirt sind.

Während die Theilkreise  $B, B'$  um ihre festen Mittelpunkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene sich drehen, so dass der in dieser Ebene unbewegliche Pol  $P$  in den beiden Theilkreisen mit derselben Geschwindigkeit  $v$  fortrückt, können die Profile  $F, F'$  auch als die relativen Bahnen betrachtet werden, die dabei beziehungsweise gegen  $B$  und  $B'$  ein Punkt  $p$  durchläuft, der in der ruhenden Ebene mit der Geschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  in einer Geraden  $mPm'$  beweglich ist, die im Pol  $P$  die gemeinsame Tangente der Theilkreise unter dem Winkel  $\varepsilon$  schneidet. Die Fusspunkte  $m, m'$  der von den Mittelpunkten  $A, A'$  auf diese Gerade gefällten Perpendikel (die Berührungspunkte der Geraden mit den Hilfskreisen  $E, E'$ ) sind dabei beständig die Pole für die relativen Bewegungen des Punktes  $p$  beziehungsweise gegen  $B$  und  $B'$ , sie haben also dieselben Bedeutungen wie die ebenso bezeichneten Punkte zu Anfang von §. 17. Wenn z. B.  $b$  und  $e$  die Halbmesser der Kreise  $B$  und  $E$  sind, so kann die geradlinige Bewegung des Punktes  $p$  mit der Geschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  im Sinne  $mm'$  (Fig. 19) durch ein Paar von Drehungen ersetzt werden, die mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{v \cos \varepsilon}{e} = \frac{v}{b}$$

um  $m$  und  $A$  im Sinne der in Fig. 19 beigezeichneten Pfeile stattfinden, und da diese Drehung um  $A$  eben diejenige ist, welche der eigenen Bewegung des Theilkreises  $B$  in der festen Ebene zukommt, so entspricht die Drehung um  $m$  der relativen Bewegung von  $p$  gegen  $B$ . — Statt als Punktcurven durch die Bewegung eines Punktes  $p$  kann man die Profile  $F, F'$  auch als Umhüllungscurven durch die Bewegung einer Geraden entstanden denken, die mit der Normalgeschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  in der festen Ebene sich so bewegt, dass sie gegen die Centrale  $AA'$  beständig unter dem Winkel  $\varepsilon$  geneigt, d. h. zu der Geraden  $mm'$  senkrecht bleibt. —

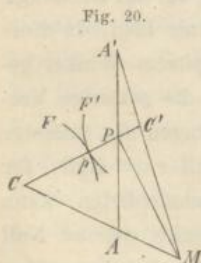
Die in ihren Durchschnittspunkten mit den Evolutenkreisen  $E, E'$  endigenden Evolventen  $F, F'$  können sich bei der Drehung der Theilkreise  $B, B'$  um ihre Mittelpunkte  $A, A'$  nur so lange berühren, als der Drehungs- oder Eingriffspunkt  $p$  in der Strecke  $mm'$  der Eingriffslinie liegt, da diese über  $m$  hinaus von  $F$ , über  $m'$  hinaus von  $F'$  unter spitzem Winkel geschnitten wird. Dadurch wird bei gegebenem Winkel  $\varepsilon$  die zulässige Verlängerung der Profile  $F, F'$  oder bei gegebenen Profillängen die zulässige Verkleinerung des Winkels  $\varepsilon$  begrenzt. Der Grenzfall  $\varepsilon = \text{Null}$ , für welchen  $E$  und  $E'$  beziehungsweise mit  $B$  und  $B'$  zusammenfielen, kann deshalb nicht verwirklicht werden, weil dabei die Strecke  $mm' = \text{Null}$  würde und die Profile  $F, F'$  auf Punkte der Theilkreise beschränkt werden müssten. Dem entgegengesetzten Grenzfall  $\varepsilon = 90^\circ$ , in dem die Kreise  $E, E'$  sich auf ihre Mittelpunkte  $A, A'$  reduciren und die Profile  $F, F'$  in

die Theilkreise  $B, B'$  selbst übergehen, entsprechen wieder die sogenannten Reibungsräder (§. 15) als allgemeiner Grenzfall aller Profilierungsmethoden.

§. 20. Kreisbögen als angenäherte Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Im Falle von Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen, oder überhaupt im Falle von zwei Körpern, die als Elemente eines Elementenpaares um parallele Axen mit constantem Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse sich drehen sollen, entsprechend kreisförmigen Querschnitten ihrer cylindrischen Axoide als Polbahnen, während zwei dazu dienende Profile  $F, F'$  jene Drehungen nur für kleine Drehungswinkel zu vermitteln und deshalb nur kleine Längen zu erhalten brauchen, können dieselben annäherungsweise durch Kreisbögen ersetzt werden. Eine bemerkenswerthe dazu dienende, von Willis angegebene Methode beruht auf folgender Erwägung.

Es seien  $A, A'$  (Fig. 20) die festen Mittelpunkte der kreisförmigen Polbahnen,  $P$  ihr Berührungspunkt (der Pol), und in einer gewissen Lage  $C, C'$  die Mittelpunkte der als Profile  $F, F'$  zu benutzenden Kreisbögen. Diese wären genau richtige Profile, wenn ihre Centrale  $CC'$  als Stütznormale beständig durch  $P$  ginge; sie sind aber wenigstens näherungsweise richtig, wenn in einer gewissen Lage  $CC'$  durch  $P$  geht und sich zugleich so bewegt, dass dasselbe auch noch für eine unendlich wenig von jener verschiedene Lage der Fall ist. Dazu muss die fragliche Bewegung von  $CC'$  in der festen Ebene eine Drehung um irgend einen Punkt der in  $P$  auf  $CC'$  errichteten Senkrechten sein. Da sich aber thatsächlich  $CC'$  um den Schnittpunkt der Geraden dreht, die in  $C$  und  $C'$  auf den Bahnen dieser Punkte senkrecht sind, d. h. um den Schnittpunkt  $M$  der Geraden  $AC$  und  $A'C'$ , so ergibt sich die folgende Construction: Fig. 20.



entspricht dem nach §. 18 immer zulässigen Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

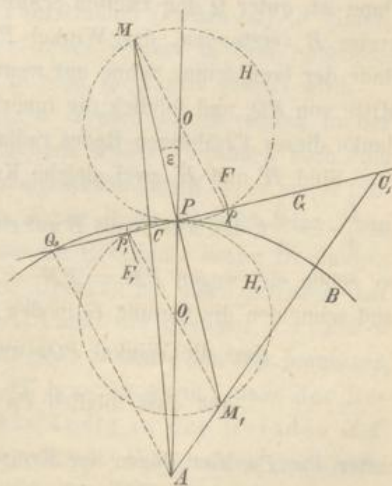
Von dem angenommenen Mittelpunkte  $C$  des einen Profils  $F$  ziehe  $CP$ , dann durch  $P$  die Gerade  $PM$  senkrecht zu  $CP$  bis zum Schnittpunkte  $M$  mit  $AC$ , endlich die Gerade  $MA'$ ; diese schneidet die Gerade  $CP$  im Mittelpunkte  $C'$  des anderen Profils  $F'$ . Die Radien der um  $C$  und  $C'$  zu beschreibenden Kreisbögen  $F, F'$  können beliebig, wenn nur so angenommen werden, dass letztere sich berühren; diese Willkür

Bei der Anwendung dieses Profilierungsverfahrens auf Zahnräder, welche Satzräder sein sollen, ist zu bemerken, dass mit dem Rade, dessen Theilkreis den Mittelpunkt  $A'$  und den Halbmesser  $A'P$ , und dessen kreisförmiges Zahnprofil  $F'$  den Mittelpunkt  $C'$  und den Halbmesser  $C'p$  hat (Fig. 20), jedes Rad zusammenarbeiten kann, dessen Theilkreis-mittelpunkt  $A$  in  $A'P$ , und dessen Profilmittelpunkt  $C$  (bei Berührung beider Profile in  $p$ ) in der Geraden  $C'Pp$  so liegt, dass die Gerade  $CA$  durch  $M$  geht. Somit werden angenähert richtige Satzräder erhalten, wenn bei ihrer Profilierung nach dem so eben erklärten Verfahren der Winkel  $APC$  und die zu einander senkrechten Strecken  $PM$ ,  $Pp$  bei allen Rädern gleich angenommen werden.

Wird  $PM$  unendlich gross angenommen, so werden  $CA$  und  $C'A'$  senkrecht zu  $CPC'$ , und  $F, F'$  werden die Krümmungskreise im Berührungspunkte  $p$  der beiden Kreisevolventen, die von diesem Punkte der Geraden  $CC'$  beschrieben werden, jenachdem sie auf dem einen oder dem anderen zweier Kreise  $E, E'$  rollt, deren Mittelpunkte  $A, A'$  und deren Halbmesser  $AC, A'C'$  sind. Die Kreisverzahnung ist dann eine Annäherung an die Evolventenverzahnung für die Eingriffslinie  $CPC'$ . Sofern es dabei am angemessensten ist, die Grenzlagen des Eingriffspunktes  $p$  auf entgegengesetzten Seiten von  $P$  anzunehmen (die Zähne vor und hinter der Centrale  $AA'$  auf einander wirken zu lassen), ist mit Willis  $Pp = 0$  anzunehmen.

Sollen die Zähne ausserhalb und innerhalb des Theilkreises nach verschiedenen Kreisbögen so profilirt werden, dass die einen auf der einen, die anderen auf der anderen Seite der Centrale  $AA'$  zur Wirkung kommen (als Annäherung an die Cycloidalverzahnung mit Epicykloiden ausserhalb, Hypocykloiden innerhalb des Theilkreises), und wird verlangt, dass der äussere resp. innere Kreisbogen das richtige Zahnprofil eines Satzrades sei, wenn der Eingriffspunkt  $p$  resp.  $p_1$  um  $\frac{1}{n}$  resp.  $\frac{1}{n_1}$  der gemeinschaftlichen Theilung  $t$  aller Satzräder vom Pol  $P$  entfernt ist, so ist wieder durch  $P$  die Gerade  $G$  (Fig. 21) unter dem angenommenen Winkel  $\varepsilon$  gegen die Tangente

Fig. 21.



im Punkte  $P$  des Theilkreises geneigt zu ziehen, darauf  $Pp = \frac{1}{n}t$  und  $Pp_1 = \frac{1}{n_1}t$  abzutragen,  $PM = PM$ , senkrecht zu  $G$  zu ziehen, endlich der Mittelpunkt  $A$  des Theilkreises mit  $M$  und  $M$ , durch gerade Linien zu verbinden. In den Schnittpunkten  $C, C$ , dieser Geraden mit der Geraden  $G$  erhält man die Mittelpunkte, dann in den Strecken  $Cp, Cp_1$ , die Halbmesser beziehungsweise des äusseren und des inneren Kreisbogens, welche letzteren dann nur noch durch Zusammenrückung ihrer Anfangspunkte in denselben Punkt des Theilkreises zum vollen Zahnprofil zu vereinigen sind. — Die Länge  $PM = PM$ , ist von der kleinsten Zahnzahl  $= z$  irgend eines der Satzräder abhängig zu machen, oder von dem entsprechenden Theilrisshalbmesser

$$r = \frac{zt}{2\pi}$$

desselben. Wenn insbesondere für dieses kleinste Rad der innere Theil  $F$ , des Zahnprofils eine gerade Linie werden soll, so muss dabei  $C$ , im Unendlichen liegen, also der Winkel  $PM, A = 90^\circ$  sein, und somit

$$PM = PM, = r \cos \varepsilon.$$

Willis nimmt  $n = n_1 = 2$ , somit  $Pp = Pp_1 = \frac{1}{2}t$ ;

$$z = 12, \text{ somit } r = \frac{6}{\pi}t; \varepsilon = 15^\circ.$$

Dann ist, unter  $Q$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $G$  mit dem Theilkreise  $B$  verstanden, der Winkel  $PAQ = 30^\circ$ , also bei dem 12zähligen Rade der (von seiner Sehne nur wenig verschiedene) Bogen  $PQ = t, p$ , die Mitte von  $PQ$ , und folglich die innerhalb des Theilkreises geradlinige Zahnflanke dieses 12zähligen Rades radial gerichtet. —

Sind  $H$  und  $H$ , zwei gleiche Kreise mit den Halbmessern  $PO = PO$ ,  $= \frac{1}{2}r = \frac{3}{\pi}t$ , den Theilkreis  $B$  auf entgegengesetzten Seiten in  $P$  berührend, so gehen sie (wegen  $PM = PM, = r \cos \varepsilon$ ) beziehungsweise durch  $M, M$ , und schneiden die Gerade  $G$  in den Punkten  $p, p$ , so,

dass die Winkel  $POp$  und  $PO,p, = 2\varepsilon = 30^\circ$  sind,

$$\text{und dass folglich } Pp = Pp, = \frac{r\pi}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}t \text{ ist,}$$

unter  $Pp, Pp$ , hier Bögen der Kreise  $H, H$ , verstanden, die aber von ihren in der Geraden  $G$  liegenden Sehnen nur sehr wenig verschieden sind. Daraus ergibt sich folgende von Reuleaux angegebene Construction, bei der nur

$\frac{7}{8}t$  für  $\frac{3}{\pi}t$  gesetzt ist. Man zeichnet die Hilfskreise  $H, H$ , mit dem Halbmesser  $\frac{7}{8}t$  in Berührung mit dem Theilkreise  $B$  im Punkte  $P$ , macht die Winkel  $POp = PO,p = 30^\circ$ , zieht  $pp$ , und durch die den Punkten  $p, p$ , diametral gegenüber liegenden Punkte  $M, M$ , der Hilfskreise die Geraden  $AM, AM$ . Letztere bestimmen in ihren Durchschnittspunkten  $C, C$ , mit der Geraden  $pp$ , die Mittelpunkte der mit den Halbmessern  $Cp, Cp$ , zu beschreibenden Profilkreisbögen.

$\gamma$ . Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen.

### §. 21. Allgemeine Regeln.

Es seien  $B$  und  $B'$  die Polbahnen (die sogenannten Theilrisse im Falle von Zahnrädern),  $A$  und  $A'$  die Punkte, um welche sie in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  mit den (im Allgemeinen veränderlichen) Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  und  $\omega'$  drehbar sein sollen;  $Q$  und  $Q'$ ,  $R$  und  $R'$  . . . entsprechende, d. h. solche Punkte der Polbahnen, mit denen sie im jeweiligen Pol  $P$  zu gegenseitiger Berührung kommen,  $r$  und  $r'$  entsprechende Fahrstrahlen der Polbahnen, wie  $AQ$  und  $A'Q'$ ,  $AR$  und  $A'R'$  . . .,  $\varphi$  und  $\varphi'$  die Winkel (Polarwinkel), welche irgend zwei entsprechende Fahrstrahlen mit zwei bestimmten entsprechenden Fahrstrahlen (Polaraxen) so bilden, dass von letzteren aus gerechnet jeder dieser Winkel in dem entgegengesetzten Sinne wächst, als in welchem  $\omega$  resp.  $\omega'$  positiv gesetzt wird.

Die relative Bewegung von  $B'$  gegen  $B$  wird als Bewegung in der Ebene  $E$  erhalten, indem zu den Bewegungen beider Polbahnen noch eine gemeinschaftliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $A$  hinzugefügt und dadurch  $B$  in der Ebene  $E$  zur Ruhe gebracht wird. Die relative Bewegung von  $B'$  gegen  $B$  ist also die Resultante zweier Drehungen beziehungsweise um  $A$  und  $A'$ , somit eine Drehung um einen gewissen (mit  $\omega$  und  $\omega'$  im Allgemeinen veränderlichen) Punkt der Geraden  $AA'$ ; indem sie aber auch als Rollen von  $B'$  auf  $B$  in einer Drehung um den jeweiligen Pol  $P$  besteht, so folgt (wie schon im §. 16 bemerkt wurde), dass der Berührungspunkt  $P$  der Polbahnen beständig in der Geraden  $AA'$  liegen muss. Hiernach fallen auch entsprechende Fahrstrahlen gleichzeitig in die Gerade  $AA'$ , und werden die zugehörigen Polbahnen unter gleichen Winkeln von ihnen geschnitten; entsprechende Polarwinkel  $\varphi, \varphi'$  der letzteren



sind entsprechende (gleichzeitige) Drehungswinkel derselben, und wenn insbesondere  $\varphi, \varphi'$  die Polarwinkel der nach dem Pol  $P$  gehenden Fahrstrahlen  $r, r'$  und  $d\varphi, d\varphi'$  ihre entsprechenden elementaren Aenderungen, also entsprechende elementare Drehungswinkel sind, so ist das Verhältniss der entsprechenden (gleichzeitigen) Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \dots \dots \dots (1).$$

Ist ferner  $\psi$  der Winkel, unter dem die Polbahnen von ihren entsprechenden Fahrstrahlen geschnitten werden, und ist  $ds$  das Bogenelement, mit dem sie bei den entsprechenden Drehungen  $d\varphi, d\varphi'$  auf einander rollen, so ist

$$r d\varphi = r' d\varphi' = ds \cdot \sin \psi,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$r\omega = r'\omega' \dots \dots \dots (2).$$

Auch ist, unter  $e$  die Strecke  $AA'$  verstanden,

$$r \pm r' = \pm e \dots \dots \dots (3),$$

welche Gleichung die folgenden 3 Fälle umfasst:

$$r + r' = e; \quad r - r' = e; \quad r - r' = -e$$

entsprechend den Lagen

$$APA'; \quad AA'P; \quad PAA'$$

der betreffenden 3 Punkte. Aus Gl. (2) und (3) folgt:

$$r = \pm e \frac{\omega'}{\omega' \pm \omega}; \quad r' = \pm e \frac{\omega}{\omega' \pm \omega} \dots \dots \dots (4),$$

wo wieder die doppelten Vorzeichen auf dreierlei Art zusammengehören können analog Gl. (3).

Ist nun das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten = einer Constanten gegeben, so bestimmen die Gleichungen (4) die Halbmesser der dann kreisförmigen Polbahnen. Ist aber

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi),$$

so folgt:

$$r = \pm e \frac{f(\varphi)}{f(\varphi) \pm 1}; \quad r' = \pm e \frac{1}{f(\varphi) \pm 1} \dots \dots \dots (5).$$

Die Gleichung für  $r$  ist die Polargleichung der Curve  $B$  und gestattet unmittelbar die Zeichnung derselben; die Polargleichung von  $B'$  ergibt sich durch Elimination von  $\varphi$  zwischen der Gleichung für  $r'$  und der aus Gl. (1) folgenden Gleichung

$$\varphi' = \int_0^{\varphi} \frac{\omega'}{\omega} d\varphi = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi) \dots \dots \dots (6).$$

Hiernach würde die Bestimmung der Polbahnen keine weitere Schwierigkeit darbieten, wenn die Function  $f(\varphi)$ , d. h. das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss derselben als Function des Drehungswinkels einer von ihnen gegeben wäre, was indessen ohne Einschränkung nur dann zulässig ist, wenn die Polbahnen nicht geschlossene Curven zu sein brauchen, wie es dann in der That nicht nöthig ist, wenn ihre Bewegungen um  $A, A'$  schwingende Drehungen sein sollen, die weniger als  $360^\circ$  umfassen.

Wenn aber die Drehungen von  $B, B'$  um  $A, A'$  in unveränderlichem Sinne stattfinden sollen (in welchem Falle die keine Zeichenwechsel erfahrenden Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  beide positiv gesetzt werden können), so ist die Wahl der Function  $f(\varphi)$  an die Bedingung zu knüpfen, dass jede Polbahn eine geschlossene, ihren zugehörigen Drehungspunkt umschliessende Curve sein muss. Wenn dann ferner verlangt wird, dass dasselbe Aenderungsgesetz von  $\frac{\omega'}{\omega}$  nach je  $\frac{1}{n}$  Umdrehung von  $B$  und nach je  $\frac{1}{n'}$  Umdrehung von  $B'$  sich wiederholen solle, so muss die von  $B$  umgrenzte Fläche  $F$  durch von  $A$  aus gezogene Fahrstrahlen in  $n$  congruente Sektoren, ebenso die von  $B'$  umgrenzte Fläche  $F'$  durch von  $A'$  aus gezogene Fahrstrahlen in  $n'$  congruente Sektoren theilbar sein, und müssen die den Sektoren von  $F$  zugehörigen Bögen von  $B$  ebenso lang sein wie die den Sektoren von  $F'$  zugehörigen Bögen von  $B'$ , die ganzen Längen von  $B$  und  $B'$  also  $= n:n'$  sich verhalten. Um diesen Forderungen zu genügen, muss die Function  $f(\varphi)$  für alle Werthe von  $\varphi$  einen endlichen Werth  $> 0$  haben und wenigstens 2 Parameter enthalten, die durch die Gleichungen

$$f(0) = f\left(\frac{2\pi}{n}\right); \quad \frac{2\pi}{n'} = F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots \dots \dots (7)$$

mit Rücksicht auf die Beziehung (6) zwischen den Functionen  $f$  und  $F$  bestimmt sind. Ein dritter Parameter kann der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der grösste Werth von  $\frac{\omega'}{\omega}$  ein gegebenes Vielfache des kleinsten Werthes dieses Verhältnisses, also

$$\frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\max f(\varphi)}{\min f(\varphi)} = m \dots \dots \dots (8)$$

= einer gegebenen Zahl sei u. s. f.



Von anderen Forderungen, denen im Allgemeinen nicht sowohl durch die Werthe gewisser Parameter, als vielmehr durch die Form der Function  $f(\varphi)$  zu genügen ist, sind die folgenden erwähnenswerth, bei deren Erörterung die Fahrstrahlen, von denen aus die Polarwinkel  $\varphi$ ,  $\varphi'$  gemessen werden, als kleinste oder grösste Fahrstrahlen  $r$ ,  $r'$  von  $B, B'$  vorausgesetzt werden. (Jenachdem der Pol  $P$  in der Strecke  $AA' = \epsilon$  oder ausserhalb derselben liegt, jenachdem also die Drehungen von  $B, B'$  in entgegengesetztem oder in gleichem Sinne stattfinden, ist, wenn  $r$  ein Minimum ist, das entsprechende  $r'$  ein Maximum oder auch ein Minimum, wenn dagegen  $r$  ein Maximum ist, das entsprechende  $r'$  ein Minimum oder auch ein Maximum.)

1) Wenn jede Polbahn von jeder durch ihren Drehungspunkt gehenden Geraden in nur zwei Punkten geschnitten werden soll, so müssen die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\varphi} \text{ und } \frac{dr'}{d\varphi'} = \frac{1}{f(\varphi)} \frac{dr'}{d\varphi}$$

für alle Werthe von  $\varphi$  endliche Werthe haben, muss also gemäss den Gleichungen (5) die Function  $f(\varphi)$  so beschaffen sein, dass

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = f'(\varphi)$$

nicht unendlich wird.

2) Sollen die Polbahnen keinen Knick haben, so müssen die kleinsten oder grössten Fahrstrahlen, von denen die  $n$  resp.  $n'$  Sektoren der Flächen  $F, F'$  begrenzt werden, nicht blos constructive, aus dem Abbrechen der Curven hervorgehende, sondern analytische Minima resp. Maxima sein, muss also die ihnen entsprechende elementare Aenderung von  $f(\varphi)$  gemäss Gl. (5) = 0, d. h.

$$f'(0) = f'\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

sein mit Benutzung der so eben unter 1) erklärten Functionsbezeichnung  $f'$ .

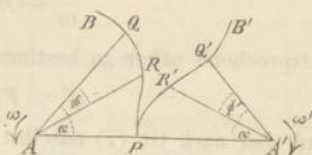
3) Sollen die periodische Zunahme und Abnahme von  $\frac{\omega'}{\omega}$  in gleicher Weise stattfinden, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$f(\varphi) = f\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \dots\dots\dots (10).$$

Die  $n$  resp.  $n'$  Sektoren der Flächen  $F$  und  $F'$  sind dann symmetrisch in Bezug auf die Halbirungslinien ihrer Winkel =  $\frac{2\pi}{n}$  resp.  $\frac{2\pi}{n'}$ .

4) Congruente Polbahnen  $B, B'$ , welche gleich liegend, d. h. durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene zur Deckung zu bringen sind, können nur dem Falle entsprechen, dass ihre Drehungen um  $A, A'$  in entgegengesetztem Sinne stattfinden, und dass somit der Pol  $P$  zwischen  $A$  und  $A'$  liegt, ferner dem Falle  $n = n'$ . Befinden sich nun die Polbahnen in solcher Lage (Fig. 22), dass ein kleinster Fahrstrahl  $AP$  von  $B$  und

Fig. 22.



folglich ein grösster  $A'P$  von  $B'$  in der Geraden  $AA'$  liegt, und ist  $AQ$  der im Sinne von  $\omega$  nächstfolgende grösste,  $A'Q'$  der im Sinne von  $\omega'$  nächstfolgende kleinste Fahrstrahl beziehungsweise von  $B$  und  $B'$ , so sind auch  $AQ$  und  $A'Q'$  entsprechende Fahrstrahlen, und es stehen die von ihnen aus gerechneten Polarwinkel  $QAR = \varphi$  und  $Q'A'R' = \varphi'$  von irgend zwei anderen entsprechenden Fahrstrahlen  $AR, A'R'$  in der Beziehung:  $\varphi' = F(\varphi)$  gemäss Gl. (6). Bei Congruenz der Polbahnen sind aber die Winkel  $QAP$  und  $P'A'Q'$  einander gleich, etwa  $= \alpha$ , und muss der Winkel  $P'A'R' = \alpha - \varphi'$  zu dem Winkel  $P'AR = \alpha - \varphi$  in derselben Beziehung stehen wie  $\varphi$  zu  $\varphi'$  (entsprechend der Vertauschung von  $AQ$  mit  $A'P, A'Q'$  mit  $AP$ ), d. h. es muss

$$\alpha - \varphi = F(\alpha - \varphi') \Rightarrow F(\alpha - F(\varphi)) \dots \dots \dots (11)$$

sein, unter  $\alpha$  den Winkel verstanden, welcher, entsprechend Gl. (11) mit  $\varphi = \varphi' = 0$ , durch die Gleichung

$$\alpha = F(\alpha) \dots \dots \dots (11, a)$$

bestimmt ist. Durch Differentiation ergibt sich diese für congruente Polbahnen charakteristische Gleichung (11) auch in der Form:

$$-1 = f[\alpha - F(\varphi)] \cdot [-f(\varphi)]$$

oder  $f(\varphi) \cdot f[\alpha - F(\varphi)] = 1 \dots \dots \dots (12)$

mit  $f(0) \cdot f(\alpha) = 1 \dots \dots \dots (12, a)$

als Bestimmungsgleichung für  $\alpha$ . Ist zugleich die vorige Bedingung unter

3) erfüllt, so ist  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .

Congruente, um feste Punkte  $A, A'$  drehbare Polbahnen von symmetrischer Lage werden im folgenden §. besprochen.

## §. 22. Beispiele.

1) Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$ , mit denen die Polbahnen  $B, B'$  um die festen Punkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene rotiren, sei einem Ausdrucke von der Form

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = a + bk \cos(k\varphi)$$

entsprechend näher zu bestimmen. Nach Gl. (6) im vorigen §. ist dann

$$\varphi' = F(\varphi) = a\varphi + b \sin(k\varphi)$$

und sind nach Gl. (7) daselbst zwei der Parameter  $a, b, k$  bestimmt durch die Gleichungen:

$$a + bk = a + bk \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right)$$

und

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n} + b \sin\left(k \frac{2\pi}{n}\right).$$

Aus der ersten folgt:

$$\cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) = 1, \text{ also } k = n,$$

sofern  $\frac{2\pi}{n}$  nicht nur irgend ein, sondern der kleinste Werth von  $\varphi$  sein soll, für welchen  $\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi)$  wieder ebenso gross wird wie für  $\varphi = 0$ . Aus der zweiten Gleichung folgt dann

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n}; \quad a = \frac{n}{n'}$$

und somit vorläufig

$$f(\varphi) = \frac{n}{n'} + bn \cos(n\varphi).$$

Indem danach

$$\max f(\varphi) = f(0) = \frac{n}{n'} + bn,$$

$$\min f(\varphi) = f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{n'} - bn$$

ist, ergibt sich, wenn nach Gl. (8) im vorigen §. das Verhältniss

$$\frac{\max f(\varphi)}{\min f(\varphi)} = \frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\frac{n}{n'} + bn}{\frac{n}{n'} - bn} = m$$

gesetzt wird,  $b = \frac{1}{n'} \frac{m-1}{m+1}$  und somit schliesslich:

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[ 1 + \frac{m-1}{m+1} \cos(n\varphi) \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\varphi' = F(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[ \varphi + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) \right] \dots \dots \dots (2)$$

Wegen  $f(0) = \max f(\varphi)$  entsprechen den Polarwinkeln  $\varphi = 0$ ,  $\varphi' = 0$  Maximal- oder Minimalwerthe von  $r$ ,  $r'$ , und da

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{n}{n'} \frac{m-1}{m+1} n \sin(n\varphi)$$

ist, erkennt man, dass die Bedingungen unter 1) und 2) im vorigen §. durch Gl. (1) erfüllt sind. Auch der Bedingung unter 3) daselbst wird entsprochen wegen

$$\cos \left[ n \left( \frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \right] = \cos(2\pi - n\varphi) = \cos(n\varphi).$$

Sollten aber die Polbahnen congruent sein, so müsste  $n = n'$  und wegen  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  nach Gl. (11) im vorigen §. mit Rücksicht auf obige Gl. (2):

$$\frac{\pi}{n} - \varphi = F \left( \frac{\pi}{n} - \varphi' \right) = \frac{\pi}{n} - \varphi' + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(\pi - n\varphi'),$$

also 
$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi')$$

oder  $\varphi' = \varphi$ ,  $m = 1$  sein, entsprechend  $\omega' = \omega$ , also kreisförmigen Polbahnen.

Nimmt man mit Ausschluss dieses letzteren Specialfalles beispielsweise

$$n = n' = 1, m = 4,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) &= 1 + \frac{3}{5} \cos \varphi \\ \varphi' = F(\varphi) &= \varphi + \frac{3}{5} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3);$$

mit  $n = n' = 4$ ,  $m = 2$  ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) &= 1 + \frac{1}{3} \cos(4\varphi) \\ \varphi' = F(\varphi) &= \varphi + \frac{1}{12} \sin(4\varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

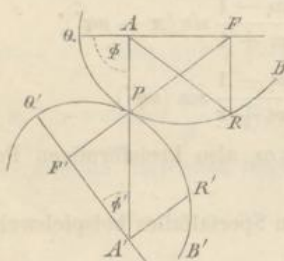
Sollen dabei die Polbahnen in entgegengesetztem Sinne rotiren, so sind ihre entsprechenden Fahrstrahlen nach Gl. (5) im vorigen §.

$$r = e \frac{f(\varphi)}{f(\varphi) + 1}; r' = e \frac{1}{f(\varphi) + 1} \dots \dots \dots (5),$$

und können sie selbst hiernach leicht verzeichnet werden.\*

2) Die Polbahnen seien congruent und symmetrisch liegend, d. h. so, dass sie erst dann durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene *E* zur Deckung gebracht werden können, nachdem eine von ihnen um irgend eine Gerade in *E* um 180° gedreht wurde. Wenn solche Polbahnen *B, B'* von einer Lage aus, in der sie sich berühren und in Bezug auf die gemeinsame Tangente symmetrisch liegen, auf einander rollen, so bleibt ihre gemeinsame Tangente immer Symmetrieaxe; wenn dabei ein gewisser mit *B* fest verbundener Punkt *A* von einem gewissen mit *B'* fest verbundenen Punkte *A'* eine unveränderliche Entfernung = *e* behielte und die Gerade *AA'* beständig durch den Berührungspunkt *P* von *B, B'* ginge, so würden diese Curven *B, B'* unbeschadet ihrer gegenseitigen Rollung auf einander, d. h. unbeschadet ihres Charakters als Polbahnen, um diese Punkte *A, A'* als feste Punkte der Ebene *E* sich drehen können. Gäbe es aber ein Paar solcher Punkte *A, A'*, so müsste es auch noch ein zweites Paar *F, F'* geben, so dass in Bezug auf die gemeinsame Tangente beständig *A* und *F', F* und *A'* (Fig. 23) symmetrisch liegen, also

Fig. 23.



beständig *A* und *F', F* und *A'* (Fig. 23) symmetrisch liegen, also

$$PA = PF', PF = PA'$$

ist. Mit der Forderung, dass die Strecke *AA'* constant sein und dass die Gerade *AA'* stets den Berührungspunkt *P* enthalten, dass also auch (jenachdem *P* in der Strecke *AA'* oder ausserhalb derselben liegt) die Summe oder Differenz von *PA* und *PA'* constant sein soll, sind die Gleichungen *PA = PF', PF = PA'*

dann, aber nur dann verträglich, wenn die Summe oder Differenz von *PA* und *PF*, also auch von *PA'* und *PF'* constant ist, d. h. wenn die Polbahnen congruente Ellipsen oder Hyperbeln mit den Brennpunkten *A* und *F, A'* und *F'*, und mit grossen Axen = *AA'* sind. Hier kommen nur erstere als geschlossene Polbahnen in Betracht, d. h. zwei congruente Ellipsen, die um je einen *A* resp. *A'* ihrer Brennpunkte in entgegengesetztem Sinne rotiren und deren grosse Axen der Strecke *AA'*

\* Zeichnungen der Polbahnen für diese zwei Beispiele (als Theilrisse verzahnter Räder) finden sich in Redtenbacher's „Maschinenbau“, Band I, Tafel XIX, Fig. 16 und Tafel XX, Fig. 1.

gleich sind. Sie entsprechen mit  $n = n' = 1$  den Gleichungen (7) des vorigen §. und allen unter 1) bis 4) daselbst angeführten Bedingungen, der letzten insofern, als zwei congruente Figuren, die je eine Symmetrieaxe haben, zu gleicher Zeit gleich und symmetrisch liegend sind.

Ist  $a$  die grosse,  $b$  die kleine Halbaxe der Ellipse,  $p = \frac{b^2}{a}$  die Hälfte der durch den Brennpunkt gehenden zur grossen Axe senkrechten Sehne,  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  die Excentricität ( $\epsilon a$  die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte), und wird (Fig. 23) der Polarwinkel  $\varphi$  der Ellipse  $B$  von dem nach dem nächsten Scheitelpunkte  $Q$  gehenden Fahrstrahle, der Polarwinkel  $\varphi'$  der anderen  $B'$  von dem entsprechenden, also von dem nach dem entferntesten Scheitelpunkte  $Q'$  gehenden Fahrstrahle aus gerechnet, so sind die Polargleichungen derselben:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{und} \quad r' = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \dots \dots \dots (6),$$

und kann aus der Gleichung

$$r + r' = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} + \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} = 2a \dots \dots \dots (7)$$

$$\varphi' = F(\varphi); \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

entwickelt werden. Doch ist das Aenderungsgesetz von  $\frac{\omega'}{\omega}$  hauptsächlich nur mit Rücksicht auf das sich unmittelbar ergebende Verhältniss

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{a + \epsilon a}{a - \epsilon a} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \\ \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{a - \epsilon a}{a + \epsilon a} \end{aligned}$$

von praktischem Interesse; ist dasselbe  $= m$  gegeben, so folgt

$$\epsilon = \frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1}; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \dots \dots \dots (8).$$

Sind  $R$  und  $R'$  (Fig. 23) solche zwei entsprechende Punkte der Ellipsen  $B, B'$ , deren Projectionen auf die grossen Axen in den Brennpunkten  $F, A'$  liegen, also  $FR = A'R' = p$ , so dreht sich  $B'$  um je einen rechten Winkel, wenn sich  $B$  um den stumpfen Winkel  $QAR$  oder um den spitzen Winkel  $RAF$  dreht; und wenn sich  $B$  mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht, so ist das Verhältniss dieser Winkel  $QAR, RAF =$  dem Verhältnisse der Zeiten, welche  $B'$  zu den beiden halben Umdrehungen



gebraucht, in deren Mittellagen  $A'F'$  beziehungsweise die Richtung  $A'A$  und die entgegengesetzte Richtung hat. Dasselbe ist das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen von  $B'$ ; ist es  $= n$  gegeben, so ist also

$$n = \frac{\pi - \operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p}}; \operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p} = \frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{p}{2a-p} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2a - \frac{b^2}{a}} = \frac{1}{2\frac{a^2}{b^2} - 1} = \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2 \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}{1 + \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}} \dots \dots \dots (9).$$

Als Function von  $n$  ausgedrückt ist hiernach auch

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}{1 + \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}} =$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{n-1}{n+1} \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots (10)$$

und wegen  $\varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}}$

$$m = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \dots \dots \dots (11).$$

So findet man z. B. für

$n = 2$	3	4	5
$\frac{b}{a} = 0,9634$	0,9102	0,8604	0,8165
$\varepsilon = 0,2679$	0,4142	0,5095	0,5773
$m = 3$	5,83	9,47	13,93

2. Höhere Elementenpaare mit nicht cylindrischen Axoiden.

§. 23. Elementenpaare mit conischen Axoiden.

Die Axoide von Paarelementen sind concentrische conische Flächen (allgemeine Kegelflächen), wenn die Elemente selbst von conischen Flächen begrenzt werden und mit denselben (in Folge entsprechenden Zwanges durch geeignete Stützung) sich in Geraden so berühren, dass sie beständig concentrisch bleiben. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, worunter hier ihre in Punkten sich berührenden Durchschnitfiguren mit irgend einer mit den Elementenflächen concentrischen Kugelfläche zu verstehen sind. Dieselbe Kugelfläche schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in sphärischen Linien, die analog den Bezeichnungen bei cylindrischen Axoiden die Polbahnen der Elementenprofile heissen mögen, und welche sich beständig in einem Punkte, dem Pol, berühren. Hiernach können analoge Aufgaben, wie die im Vorhergehenden für cylindrische Elemente und Axoide behandelten, auf analoge Weise im vorliegenden Falle behandelt werden bei Ersetzung aller ebenen durch entsprechende sphärische Figuren.

Besondere Erwähnung verdient der bei conischen Rädern vorliegende Fall, dass die Elemente um Axen  $OA, OA'$  von unveränderlichen Lagen in ihnen drehbar sind, die einen unveränderlichen Winkel  $AOA' = \varepsilon$  mit einander bilden. Die Axoide sind dann conische Flächen, deren Berührungslinie (Polaxe)  $OP$  beständig in der Ebene  $AOA'$  liegt, die Profile sind sphärische Figuren in einer Kugelfläche  $K$  mit dem Mittelpunkte  $O$ , etwa mit dem Halbmesser  $OP$ , deren Berührungspunkt (Pol)  $P$  beständig in dem grössten Kreise  $AA'$  liegt, in welchem die Kugelfläche von der Ebene  $AOA'$  geschnitten wird. Sind dann  $\omega, \omega'$  die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten der Elemente um  $OA, OA'$ , ferner  $\varphi, \varphi'$  entsprechende Drehungswinkel, und ist analog §. 21

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi), \text{ entsprechend } \varphi' = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi)$$

gegeben, so findet man die Winkel  $AOP = \alpha$  und  $A'OP = \alpha'$ , die hier als Functionen von  $\varphi$  resp.  $\varphi'$  die Axoide bestimmen, aus den Gleichungen:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \text{ und } \alpha + \alpha' = \pm \varepsilon \dots \dots \dots (1),$$

von denen die letzte eine der folgenden 3 Formen haben kann:

$$\alpha + \alpha' = \varepsilon; \alpha - \alpha' = \varepsilon; \alpha - \alpha' = -\varepsilon$$

entsprechend den Fällen, dass sich die Axoide von aussen oder von innen berühren und letzteren Falles entweder das Axoid um  $OA'$  oder das um  $OA$  das innere ist. Dabei sind  $\alpha$  und  $\alpha'$  spitze Winkel, so dass  $\varepsilon$  bei Berührung von innen auch spitz, bei Berührung von aussen aber spitz oder stumpf ist. Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega'} \sin \alpha &= \sin(+\alpha') = \sin(+\varepsilon - \alpha) \\ &= \sin(+\varepsilon) \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(+\varepsilon)}{\frac{\omega}{\omega'} + \cos \varepsilon},$$

woraus  $\operatorname{tg}(+\alpha')$  durch Vertauschung von  $\omega$  mit  $\omega'$  erhalten wird. Somit ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{+\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\omega}{\omega'}}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{+\sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} + \cos \varepsilon} \dots \dots \dots (2),$$

wobei das Vorzeichen von  $\sin \varepsilon$  im Zähler übereinstimmend mit dem von  $\varepsilon$  in Gl. (1), das Vorzeichen im Nenner aber mit dem von  $\alpha'$  in Gl. (1) übereinstimmend zu nehmen ist. Diese Gleichungen (2) gehen in die Gleichungen (4) von §. 21 über, wenn man nach ihrer Multiplication mit dem Kugelhalmmesser  $OP$  diesen letzteren unendlich wachsen und zugleich  $\varepsilon$  in die Grenze Null übergehen lässt.

Die Zahnprofile conischer Räder, deren Axoide gegeben oder auf die so eben erklärte Weise bestimmt worden sind, können nun analog den in §. 16—20 besprochenen Methoden gefunden werden, z. B. nach der Methode der Halbspolbahnen (§. 17) als die Bahnen eines mit einer sphärischen Curve  $H$  in der Kugelfläche  $K$  verbundenen Punktes  $p$  beim Rollen von  $H$  in der Kugelfläche auf den sphärischen Polbahnen  $B, B'$ , im Falle von Kegeln (mit im engeren Sinne so genannten Kegelflächen als Axoiden) auch nach der Methode der Evolventenverzahnung (§. 19) als die Spuren, die ein Punkt  $p$  eines durch den Pol  $P$  gelegten grössten Kreises von  $K$  hinterlässt, wenn derselbe auf zwei ihn berührenden kleineren Kugeln, deren Mittelpunkte beziehungsweise in  $OA$  und  $OA'$  liegen, rollt. Sofern aber von den so zu erhaltenden Curven nur kleine Stücke nahe den Polbahnen  $B, B'$  als Zahnprofile benutzt werden, kann die betreffende Construction statt in der Kugelfläche selbst ohne erheblichen Fehler auch in zwei abwickelbaren Flächen  $G, G'$  ausgeführt werden, welche die Kugelfläche beziehungsweise längs  $B, B'$  berühren, wodurch der Vortheil erlangt wird, dass sie thatsächlich in einer Ebene  $E$  auszuführen und dann erst

nachträglich durch Aufwicklung der letzteren auf die Flächen  $G, G'$  zu übertragen ist. Insbesondere bei runden oder im engeren Sinne sogenannten Kegelrädern sind jene Flächen  $G, G'$  selbst Kegelflächen, von denen die mit ihnen conaxialen kegelflächigen Axoide rechtwinklig geschnitten werden; die Abwickelungen der kreisförmigen Polbahnen  $B, B'$  mit jenen Kegelflächen  $G, G'$  in einer Ebene  $E$  sind zwei sich berührende Kreisbögen

$$\begin{aligned} &\text{mit den Halbmessern } OP \operatorname{tg} \alpha, OP \operatorname{tg} \alpha', \\ &\text{und den Längen } 2\pi \cdot OP \sin \alpha, 2\pi \cdot OP \sin \alpha', \end{aligned}$$

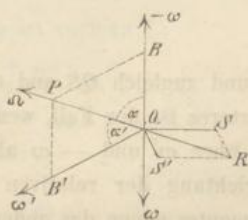
also den Mittelpunktswinkeln  $2\pi \cos \alpha, 2\pi \cos \alpha'$ , zu denen als Polbahnen die Zahnprofile nach den betreffenden Methoden gezeichnet werden können, um dann auf die Kegelflächen  $G, G'$ , z. B. als Begrenzungsflächen anzufertigen der Radmodelle, durch Aufwicklung übertragen und schliesslich nach gegen  $O$  convergirenden conischen Flächen zu Zähnen ausgearbeitet zu werden.

§. 24. Axoide von Paarelementen, die um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage drehbar sind.

Von Fällen, denen als Axoide der Elemente eines Paares im Allgemeinen weder cylindrische noch conische Flächen entsprechen, sollen hier solche näher betrachtet werden, in denen eine gewisse Gerade  $OA$  des einen Elementes gegen eine gewisse Gerade  $O'A'$  des anderen bei der gegenseitigen Bewegung beider stets dieselbe und zwar im Allgemeinen windschiefe Lage behält, so dass beide Gerade stets denselben Winkel  $\varepsilon$  mit einander bilden und dieselbe kürzeste Entfernung  $OO' = e$  mit denselben Fusspunkten  $O, O'$  behalten. Die Elemente sind dann um diese Geraden  $OA, O'A'$  als feste Axen drehbar.

Die Bestimmung der Axoide für ein gewisses Gesetz der sich entsprechenden (gleichzeitigen) Drehungen der Elemente um diese Axen erfordert die Bestimmung der Polaxe für irgend eine gegenseitige Lage der Elemente, bei der sie sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  resp. um  $OA, O'A'$  drehen, d. h. die Bestimmung einer so gelegenen Geraden, dass die betreffende elementare gegenseitige Bewegung der Elemente als Combination einer Drehung und Schiebung um resp. längs dieser Geraden zu betrachten ist. Zu dem Ende sei  $Q$  ein Punkt der Geraden  $OO'$  in den Entfernungen  $OQ = r$  und  $O'Q = r'$  von  $O$  und  $O'$ ,  $QB$  parallel

Fig. 24.



$OA, QB'$  parallel  $O'A'$ : siehe Fig. 24, wo  $Q$  zwischen  $O$  und  $O'$ ,  $OA$  vor,  $O'A'$  hinter der Ebene  $BQB'$  liegend gedacht ist, während die Pfeilspitzen bei  $\omega$  und  $\omega'$  die Axrichtungen der betreffenden Drehungen, d. h. ihren Drehungssinn in der üblichen Weise andeuten sollen, dass sie einem der Pfeilrichtung entgegen Blickenden rechtläufig (wie die Bewegung der Gestirne gegen die Erde einem von Nord nach Süd blickenden Beobachter) erscheinen. Wenn nun zu den vorausgesetzten Drehungen der Elemente um ihre Axen  $OA, O'A'$  noch eine gemeinschaftliche Drehung beider mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $OA$  hinzugefügt und dadurch das um  $OA$  drehbare erste Element in Ruhe versetzt wird, so ist die jetzt absolute Bewegung des zweiten seine relative Bewegung gegen das erste, die also aus den Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $-\omega$  und  $\omega'$  um  $OA$  und  $O'A'$  zusammengesetzt ist. Von diesen kann die erstere durch eine gleiche mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $QB$  und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit  $r\omega$  nach der Richtung  $QS$  senkrecht zur Ebene  $OQB$ , die andere durch eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  um  $QB'$  und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit  $r'\omega'$  nach der Richtung  $QS'$  senkrecht zur Ebene  $O'QB'$  ersetzt werden, und können dann die Drehungen um  $QB$  und  $QB'$  zu einer resultirenden Drehung um eine gewisse Axe  $QP$  in der zu  $OO'$  senkrechten, also mit den gegebenen Drehungsaxen  $OA, O'A'$  parallelen Ebene  $BQB'$  zusammengesetzt werden, deren Lage in dieser Ebene durch die Gleichung

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \dots \dots \dots (1)$$

bestimmt ist, unter  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Winkel  $BQP$  und  $B'QP$  verstanden. Diese Gerade  $QP$  ist die Polaxe, wenn die zwei Schiebungen nach  $QS$  und  $QS'$  eine in  $QP$  fallende resultirende Schiebung  $QR$  ergeben, wenn also,  $\alpha$  und  $\alpha'$  als spitze Winkel vorausgesetzt,

$$r\omega \cos \alpha = r'\omega' \cos \alpha' \dots \dots \dots (2)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} \dots \dots \dots (3)$$

ist und zugleich  $QS$  und  $QS'$  auf entgegengesetzten Seiten von  $QP$  liegen. Letzteres ist der Fall, wenn, wie in Fig. 24 angenommen, die Diagonale  $Q$  des über  $\omega'$  und  $-\omega$  als Seiten construirten Parallelogramms (d. i. die Axrichtung der relativen Winkelgeschwindigkeit des um  $O'A'$  drehbaren Elementes gegen das andere) mit beiden Seiten des Parallelogramms spitze Winkel bildet und der Punkt  $Q$  zwischen  $O$  und  $O'$  liegt, wogegen die Lage einer

der Schubrichtungen  $QS$  und  $QS'$  gegen  $QP$  sich umkehren würde, wenn  $Q$  in der Geraden  $OO'$  ausserhalb der Strecke  $OO'$  läge oder wenn die Axrichtung von  $\Omega$  nur mit einer der Axrichtungen von  $\omega'$  und  $-\omega$  einen spitzen Winkel bildete. Letzteren Falls wird also die Gerade  $OO'$  von der Polaxe in einem solchen Punkte  $Q$  geschnitten, der ausserhalb der Strecke  $OO'$  liegt, und zwar auf der Seite von  $O'$  oder von  $O$ , jenachdem die Axrichtung von  $\Omega$  mit der von  $\omega'$  oder mit der von  $-\omega$  den spitzen Winkel bildet, also  $\omega \cos \alpha \leq \omega' \cos \alpha'$ , nach Gl. (2) somit  $r \geq r'$  ist: siehe die Figuren 25 und 26, deren Ebene  $BQB'$  beziehungsweise hinter und vor  $OO'$  liegend gedacht ist, den Punktfolgen  $OO'Q$  bei Fig. 25,  $QOO'$  bei Fig. 26 entsprechend.

Wenn nun, wie es in den Figuren 24—26 gesehen ist, mit  $QB$  und  $QB'$  allgemein solche Richtungen der mit den Drehungsaxen  $OA, O'A'$  parallel gezogenen betreffenden Geraden bezeichnet werden, die mit der im einen oder andern Sinne genommenen Polaxe  $QP$  die spitzen Winkel  $PQB = \alpha$  und  $PQB' = \alpha'$  bilden, und wenn  $\varepsilon$  den Winkel  $BQB'$  bezeichnet, der in den Fällen von Fig. 25 und Fig. 26 = dem Winkel  $(\omega, \omega')$  und jedenfalls spitz, im Falle von Fig. 24 dagegen = dem Winkel  $(-\omega, \omega')$  und spitz oder stumpf ist, so entsprechen den unterschiedenen 3 Fällen die Beziehungen:

Fig. 24.	Fig. 25.	Fig. 26.
$\alpha + \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = -\varepsilon$
$r + r' = e$	$r - r' = e$	$r - r' = -e,$

welche zusammengefasst werden können in den Gleichungen:

$$\alpha \pm \alpha' = \pm \varepsilon; \quad r \pm r' = \pm e \dots \dots \dots (4)$$

Aus der ersten und aus Gl. (1) folgt ebenso wie im vorigen §.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \pm \frac{\omega}{\omega'}}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} \pm \cos \varepsilon} \dots \dots \dots (5),$$

aus der zweiten und aus Gl. (3):

$$r = \pm e \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha'}; \quad r' = \pm e \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha'} \dots \dots \dots (6).$$

Fig. 25.

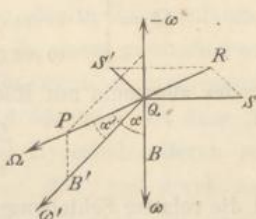
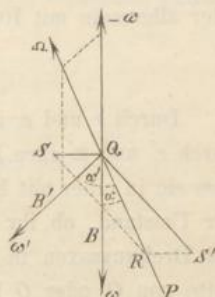


Fig. 26.



Die Ansicht der Figuren 24—26 lässt erkennen, dass die Winkelgeschwindigkeit der relativen Drehung um die Polaxe:

$$\Omega = \begin{cases} \omega \cos \alpha + \omega' \cos \alpha' & \text{für } e = r + r' \text{ (Fig. 24)} \\ -\omega \cos \alpha + \omega' \cos \alpha' & \text{,, } e = r - r' \text{ (Fig. 25)} \\ \omega \cos \alpha - \omega' \cos \alpha' & \text{,, } e = r' - r \text{ (Fig. 26)} \end{cases}$$

ist, oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos \alpha}{r} = \frac{\omega' \cos \alpha'}{r'} \dots \dots \dots (7),$$

und die relative Schiebungsgeschwindigkeit längs der Polaxe ( $QR$  in Fig. 24 bis 26),

$$v = \begin{cases} r \omega \sin \alpha + r' \omega' \sin \alpha' & \text{für } e = r + r' \\ r \omega \sin \alpha - r' \omega' \sin \alpha' & \text{,, } e = r - r' \\ -r \omega \sin \alpha + r' \omega' \sin \alpha' & \text{,, } e = r' - r \end{cases}$$

oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{v}{e} = \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \dots \dots \dots (8).$$

Durch  $r$  und  $\alpha$  ist die Lage der Polaxe gegen die Drehungsaxe  $OA$ , durch  $r'$  und  $\alpha'$  ihre Lage gegen  $O'A'$  bestimmt, da man ausserdem weiss, dass sie in einer mit beiden Drehungsaxen parallelen Ebene liegt, und auch der Umstand, ob ihr Schnittpunkt  $Q$  mit der gemeinsamen Normale  $OO'$  der Drehungsaxen in der Strecke  $OO'$  oder ausserhalb derselben auf der Seite von  $O'$  oder  $O$  liegt, dadurch entschieden wird, dass die Diagonale des über  $\omega'$  und  $-\omega$  (mit Berücksichtigung der betreffenden Axrichtungen) construirten Parallelogramms beziehungsweise mit beiden Seiten, oder nur mit der Seite  $\omega'$ , oder nur mit der Seite  $-\omega$  einen spitzen Winkel bildet. Ist diese Entscheidung getroffen, so sind dadurch auch der Winkel  $\varepsilon$  (als Winkel der Axrichtungen  $\omega'$  und  $-\omega$  im ersten,  $\omega'$  und  $\omega$  im zweiten und dritten Falle) und die Vorzeichen in den Gleichungen (5) und (6) bestimmt, so dass  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\operatorname{tg} \alpha'$  nach Gl. (5), dann  $r$  und  $r'$  nach Gl. (6) unzweideutig berechnet werden können.

Sind  $\varphi$  und  $\varphi'$  entsprechende Drehungswinkel der beiden Elemente, und ist

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

gegeben, so sind durch die Gleichungen (5) und (6) die Grössen  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $r$ ,  $\operatorname{tg} \alpha'$  und  $r'$  als Functionen von  $\varphi$ , letztere dann auch als Functionen von

$$\varphi' = \int_v^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi)$$

bestimmt und somit die Gestalten beider Axoide. Wenn insbesondere das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  constant ist, so sind die Axoide sogenannte hyperbolische oder einschalige Rotationshyperboloide um  $OA$  und  $O'A'$  als Axen, nämlich Flächen, welche eine in ihrer Anfangslage die gemeinsame Normale  $OO'$  von  $OA$  und  $O'A'$  in einem gewissen Punkte  $Q$  rechtwinklig schneidende Gerade  $QP$  beschreibt, wenn sie in unveränderlichen relativen Lagen beziehungsweise gegen  $OA$  oder  $O'A'$  um diese Axen rotirt. Die Meridianlinien dieser Flächen sind Hyperbeln, deren reelle Halbachsen beziehungsweise  $OQ=r$  und  $O'Q'=r'$  sind, und deren Asymptoten unter den Winkeln  $\alpha$  resp.  $\alpha'$  gegen  $OA$  resp.  $O'A'$  als imaginäre Hauptachsen geneigt sind. Ist nämlich, was z. B. die Fläche um  $OA$  als Axe betrifft, die Strecke  $QP=p$ , und ist  $P'$  die Projection des Punktes  $P$  auf die durch  $OO'$  gehende Normalebene zur Axe  $OA$  (die Ebene des kleinsten Parallelkreises oder sogenannten Kehlkreises der in Rede stehenden Fläche), so ergibt sich aus

$$OP' = x = \sqrt{OQ^2 + QP'^2} = \sqrt{r^2 + p^2 \sin^2 \alpha}$$

und  $PP' = y = p \cos \alpha$

die Gleichung der Meridianlinie durch Elimination von  $p$ :

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{(r \cotg \alpha)^2} = 1.$$

#### §. 25. Bestimmung von Elementenflächen für gegebene Axoide.

Wenn die Axoide von Paarelementen gegeben oder (für ein gegebenes Gesetz ihrer gleichzeitigen Drehungen um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage) nach vorigem §. bestimmt worden sind, so können entsprechende Elementenflächen, d. h. sich berührende und deshalb kinematisch allein in Betracht kommende Oberflächentheile der Elemente nach Methoden gefunden werden, die den früher für den Fall cylindrischer Axoide besprochenen analog sind. Zu dem Ende ist zunächst der allgemein für die Oberflächen höherer Elementenpaare gültige (dem ersten der in §. 15 für den Fall cylindrischer Axoide angeführten Hilfssätze entsprechende) Satz zur Verfügung, dass jede der beiden Elementenflächen die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der gleitend-rollenden Bewegung des mit ihr verbundenen Axoids gegen das mit jener verbundene Axoid nach und nach einnimmt. Er kann unmittelbar dazu dienen, eine Elementenfläche  $F'$  zu der gegebenen anderen  $F$  zu bestimmen oder



auch praktisch herzustellen, indem ein Werkzeug mit schneidigen Kanten, die nahe neben einander in einer der gegebenen Fläche  $F$  congruenten Fläche liegen, gegen einen Körper, aus dem das andere Element oder ein Modell desselben gebildet werden soll, unter allmählicher Annäherung in eine solche relative Bewegung versetzt wird, die der gegebenen relativen Bewegung beider Elemente gleich ist oder wenigstens vollkommen gleich wird, wenn die Annäherung des Werkzeugs an den zu bearbeitenden Körper einen gewissen Grad erreicht hat. Dieses Verfahren ist besonders dann brauchbar, wenn die Fläche  $F$  durch mechanische Hilfsmittel leicht herstellbar, wenn sie z. B. eine Schraubenfläche, d. h. eine Fläche ist, die von irgend einer Linie bei gleichzeitiger Drehung und Schiebung um resp. längs einer Axe mit constantem Verhältnisse der elementaren Drehungen und Schiebungen erzeugt wird, insbesondere z. B. zur Herstellung des Schraubenrades als des einen Elementes zu einer gegebenen Schraube als dem anderen Elemente eines Paares. — In allen diesen Fällen berühren sich die Elemente in Linien, nämlich in den Durchschnittslinien der auf einander folgenden Lagen der einen Elementenfläche gegen das andere Element.

Die Sätze unter 2) und 3) in §. 15 lassen sich nicht ebenso unmittelbar auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen, und somit auch nicht die darauf beruhenden Bestimmungsmethoden entsprechender Elementenflächen  $F, F'$ . Ist nämlich  $B$  ein Berührungspunkt von  $F, F'$  und  $BP = p$  das Perpendikel auf die Polaxe  $PQ$ , so braucht die gemeinsame Normale von  $F$  und  $F'$  im Punkte  $B$  nicht etwa mit  $BP$  zusammen zu fallen noch überhaupt eine ganz bestimmte Lage gegen  $BP$  oder gegen die Polaxe  $PQ$  zu haben. Ist  $\Omega$  die relative Winkelgeschwindigkeit,  $v$  die relative Schiebungsgeschwindigkeit der Elemente um resp. längs der Polaxe, so bewegt sich der Punkt  $B$  des einen Elementes gegen das andere nach der Richtung  $BB'$ , welche senkrecht zu  $BP$  ist und mit  $PQ$  den Winkel

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{p\Omega}{v} \dots \dots \dots (1)$$

bildet, und damit diese Bewegung unbeschadet andauernder Berührung möglich sei, ist nur nöthig, dass die gemeinsame Berührungsebene von  $F$  und  $F'$  im Punkte  $B$  durch die Gerade  $BB'$  hindurch gehe, dass also die gemeinsame Normale  $BN$  in der Ebene liege, die zu  $BB'$  senkrecht ist, also in der Ebene, die durch  $BP$  geht und mit der Polaxe den Winkel  $\nu = 90^\circ - \tau$  bildet. Bei cylindrischen Axoiden ist  $v = 0$ , also  $\tau = 90^\circ$ ,  $\nu = 0$ ;  $BN$  muss die Polaxe schneiden, und zwar rechtwinklig schneiden, entsprechend dem Satze 2) in §. 15, sofern dann die Elemente selbst cylindrisch und ihre erzeugenden Geraden mit denen der Axoide parallel sind-

Durch eine bewegliche Linie  $L$  können entsprechende Elementenflächen, die sich beständig in der Linie berühren (analog der in §. 17 erklärten Methode der Hülfspolbahnen), als die von der Linie gegen das eine und andere Element beschriebenen Flächen  $F, F'$  erhalten werden, wenn ihre Bewegung so geregelt wird, dass die entsprechenden relativen Bewegungsrichtungen jedes Punktes  $B$  von  $L$  gegen das eine und andere Element stets mit der durch Gl. (1) bestimmten Richtung  $BB'$  übereinstimmen. Das ist der Fall, wenn die elementare relative Bewegung von  $L$  gegen das eine und folglich dann auch gegen das andere Element stets eine elementare Schraubenbewegung um die Polaxe von solcher Art ist, dass die betreffenden relativen Winkelgeschwindigkeiten und Schiebungsgeschwindigkeiten  $\Omega', v'$  resp.  $\Omega'', v''$  dieselben Verhältnisse zu einander haben wie die entsprechenden Grössen  $\Omega, v$  für die relative Bewegung der Elemente gegen einander:

$$\frac{p\Omega}{v} = \frac{p\Omega'}{v'}, \text{ also auch } = \frac{p(\Omega + \Omega')}{v + v'} = \frac{\Omega''}{v''} \dots \dots (2).$$

Mechanisch können so entsprechende Elementenflächen hergestellt werden, indem als Linie  $L$  die schneidige Kante eines Werkzeugs benutzt und dieses relativ gegen die zu bearbeitenden Körper gemäss der Bedingung (2) bewegt wird.

Insbesondere ist diese Bedingung dann erfüllt, wenn die Linie  $L$  mit dem einen der gegebenen Axoide fest verbunden ( $\Omega' = 0, v' = 0$ , also  $\Omega'' = \Omega, v'' = v$ ), z. B. mit einer Geraden dieses Axoids zusammenfallend angenommen wird. Bei Zahnrädern entsteht so eine Verzahnungsart, die analog der Punktverzahnung bei cylindrischen Rädern (die eigentlich auch eine Linienverzahnung ist, da den Punkten der Zahnprofile gerade Linien der Zahnflächen entsprechen) als Linienverzahnung bezeichnet werden kann, ebenso wie dort aber praktisch durch eine Triebstockverzahnung ersetzbar ist, indem die Elementenflächen durch äquidistante Flächen (analog dem Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven nach §. 18), insbesondere also gerade Linien als Elementenflächen durch conaxiale Cylinderflächen ersetzt werden.

Liesse man die Linie  $L$  sich so bewegen, dass sie beständig mit der Polaxe zusammenfällt, wodurch wegen  $p = 0$  der Bedingung (2) unabhängig von  $\Omega'$  und  $v'$  genügt wird, so beschriebe sie die gegebenen Axoide selbst als zusammengehörige Elementenflächen. Eine rein rollende gegenseitige Bewegung der letzteren würde selbst diesem durch allgemeinere Reibungsräder zu realisirenden Falle nur dann zukommen, wenn die zugleich als Axoide und als Elementenflächen wirksamen Oberflächen derselben cylindrisch oder conisch wären. —

Beschränkt man sich auf die weniger weit gehende Forderung, dass sich die Elementenflächen stets nur in wenigstens einem Punkte berühren sollen, so können dergleichen noch allgemeiner durch eine bewegliche Fläche  $H$  erhalten werden als die Umhüllungsflächen  $F, F'$  aller Lagen derselben beziehungsweise gegen das eine und das andere Element, ohne dass die Bewegung dieser Fläche an irgend eine Bedingung geknüpft wäre. Indem dieselbe in jeder Lage sowohl  $F$  wie  $F'$  in je einer Linie  $L$  resp.  $L'$  berührt (in der Durchschnittslinie dieser und einer unendlich nahe benachbarten Lage von  $H$  gegen das betreffende Element), ist es, um principiell, d. h. abgesehen von Rücksichten der Ausführbarkeit und der praktischen Zweckmässigkeit, die Flächen  $F, F'$  als Elementenflächen benutzen zu können, nur nöthig, dass die Linien  $L, L'$  in der Fläche  $H$  sich schneiden, so dass der Schnittpunkt, in dem sich dann  $F, F'$  gegenseitig berühren, in jeder dieser Flächen eine gewisse Bahn durchläuft, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird. Sofern nämlich die Bedingung, dass  $F, F'$  in ihrem Berührungspunkte  $B$  eine gemeinsame Tangente von gewisser durch Gl. (1) bestimmter Richtung  $BB'$  haben müssen, in Beziehung auf jede der beiden Flächen die Erfüllung nur einer Gleichung erfordert, kann ihr im Allgemeinen durch eine stetige Folge zusammengehöriger Werthe der zwei Coordinaten entsprochen werden, wodurch die Lage des Punktes  $B$  in  $F$  oder  $F'$  bestimmt ist. Beschränkt wird aber die zulässige Bewegung und die Gestalt der Hilfsfläche  $H$  durch weitere Forderungen, z. B. durch die, dass die Berührungslinien  $L, L'$  von  $F$  und  $F'$  mit  $H$  nicht nur einen, sondern alle Punkte gemein haben, d. h. sich nicht schneiden, sondern zusammenfallen sollen in einer Linie, in der sich dann  $F$  und  $F'$  gegenseitig berühren, ferner durch die Forderung, dass diese Berührungslinie eine Gerade sein soll u. s. f. Im folgenden §. werden diese Forderungen für einen speciellen Fall näher in Betracht gezogen.

§. 26. Evolventenflächen von Schraubelinien als Elementenflächen für Umdrehungshyperboloide als Axoide.

Wenn die Elemente  $R, R'$  eines Paares um windschiefe Axen  $A, A'$  von unveränderlicher gegenseitiger Lage mit Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  von unveränderlichem Grössenverhältnisse drehbar, ihre Axoide folglich nach §. 24 einschalige Rotationshyperboloide sind, so giebt es gewisse Elementenflächen  $F, F'$ , die den in §. 19 besprochenen Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Pol-

bahnen analog und ihrer Eigenschaften wegen von besonderem Interesse sind, namentlich als Zahnflächen von Rädern, die dann mit Rücksicht auf die Gestalt ihrer Axoide Hyperboloidräder genannt werden können, während ihre fragliche Verzahnungsart als allgemeine Evolventenverzahnung\*) zu bezeichnen ist.

Nach §. 19 konnte die Kreisevolvente als Zahnprofil von Cylinder-rädern vermittle einer Geraden entstanden gedacht werden, die in der gemeinsamen Ebene der kreisförmigen Polbahnen sich so bewegt, dass sie einer festen Geraden in derselben parallel bleibt und von ihr mit einer der gemeinsamen Peripheriegeschwindigkeit, also auch den Winkelgeschwindigkeiten der Polbahnen proportionalen Geschwindigkeit sich entfernt, indem dann die fraglichen Profile als Umhüllungscurven der relativen Lagen dieser Geraden gegen die eine und die andere Polbahn sich ergaben. Analog werde hier angenommen, dass, während die Elemente  $R, R'$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  um ihre festen Axen  $A, A'$  sich drehen, eine Ebene  $E$  sich so bewegt, dass sie einer festen Ebene  $E_0$  parallel bleibt und von derselben mit einer den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  proportionalen Geschwindigkeit  $u$  sich entfernt. Die Umhüllungsfläche  $F$  aller relativen Lagen von  $E$  gegen  $R$  ist der Ort der geraden Durchschnittslinien  $G$  von je zwei auf einander folgenden relativen Lagen dieser Ebene  $E$ , und da je zwei auf einander folgende dieser Geraden  $G$  in einer Ebene liegen (in der mittleren von 3 auf einander folgenden Lagen der Ebene  $E$ ), so muss  $F$  eine abwickelbare Fläche sein, also eine Wendecurve (Umhüllungscurve ihrer Geraden) haben, die mit  $S$  bezeichnet sei. Ebenso seien  $G'$  die Geraden und sei  $S'$  die Wendecurve der abwickelbaren Fläche  $F'$ , die von den relativen Lagen der Ebene  $E$  gegen das Element  $R'$  umhüllt wird. Sind insbesondere  $G, G'$  zwei entsprechende, d. h. solche Gerade, in denen die Flächen  $F, F'$  gleichzeitig von der Hülfebene  $E$  berührt werden, so schneiden sich diese Geraden im Allgemeinen in einem gewissen Punkte  $B$ , in dem dann  $F, F'$  die gemeinsame Berührungsebene  $E$  haben, somit sich gegenseitig berühren, so dass sie principiell als Elementenflächen dienen können. Die 3 Grössen, welche die Bewegung der Ebene  $E$  bestimmen, nämlich die Geschwindigkeit  $u$  und die spitzen Winkel  $\varphi, \varphi'$ , unter denen sie von den Axen  $A, A'$  geschnitten werden mag, können dabei einstweilen beliebig gewählt werden.

\* Auch spiraloïdische Verzahnung genannt: siehe J. Pützer, über den spiraloïdischen Zahneingriff; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1860, S. 234.

Jede der Flächen  $F, F'$  kann als geradlinige Fläche auch von einer Geraden beschrieben werden; um aber die relative Bewegung zu erkennen, die zu dem Ende diese Gerade beziehungsweise gegen  $R$  und  $R'$  haben muss, sind die Flächen  $F, F'$  näher zu bestimmen. Zunächst kann man bemerken, dass die relative Bewegung der Ebene  $E$  gegen  $R$ , wobei sie  $F$  als Umhüllungsfläche erzeugt, zusammengesetzt ist aus einer Drehung um  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegengesetzt der Drehung von  $R$  um  $A$  und aus einer Schiebung senkrecht zur festen Ebene  $E_0$  mit der Geschwindigkeit  $u$ . Letztere kann zerlegt werden in eine Schiebung mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{u}{\sin \varphi}$$

im Sinne der Axe  $A$  und eine Schiebung im Sinne der Ebene  $E$  selbst, die aber gleichgültig ist für die Gerade  $G$ , in welcher  $E$  von einer nächstfolgenden Lage geschnitten wird, so dass auch  $F$  bezeichnet werden kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer Ebene, die mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegengesetzt dem Drehungssinne von  $R$  um  $A$  gedreht und mit der Geschwindigkeit  $a$  längs  $A$  verschoben wird. Denkt man sich nun um  $A$  als Axe eine Cylinderfläche mit dem Radius  $\rho$  und in derselben eine Schraubenlinie, deren Tangenten unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $A$  geneigt sind, so stimmt jene Bewegung von  $E$  überein mit der Bewegung einer Normalebene der Cylinderfläche  $C$ , die nach und nach durch alle Tangenten  $G$  der Schraubenlinie hindurchgeht, wenn nur  $\rho$  so gewählt wird, dass die Winkel- und die Schiebungsgeschwindigkeit um resp. längs  $A$  sich wie  $\omega : a$  zu einander verhalten, d. h. wenn

$$\rho \omega = a \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (1)$$

gemacht wird. Hieraus ergibt sich, dass  $F$  die Tangenten- oder Evolventenfläche einer Schraubenlinie ist, die auf der mit  $A$  conaxialen Cylinderfläche  $C$  zum Radius  $\rho$  liegt, und deren Tangenten unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $A$  geneigt sind; die Schraubenlinie selbst ist die Wendecurve  $S$  der Fläche  $F$ . Ebenso ist  $F'$  die Evolventenfläche einer unter dem Winkel  $\varphi'$  gegen ihre Axe  $A'$  geneigten Schraubenlinie  $S'$  auf einer Cylinderfläche um  $A'$  als Axe, deren Radius  $\rho'$  der Gleichung entspricht:

$$\rho' \omega' = a' \operatorname{tg} \varphi' = \frac{u}{\cos \varphi'} \dots \dots \dots (2),$$

unter  $a'$  die Geschwindigkeit verstanden, mit welcher der Schnittpunkt von  $E$  und  $A'$  in dieser Axe sich bewegt.

Die Elementenfläche  $F$ , z. B. als Zahnfläche eines Rades  $R$ , kann hier nach praktisch hergestellt werden, indem eine gerade Meisselkante, unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Axe  $A$  geneigt und mit einem kürzesten Abstände  $\rho$  von derselben, nach der Richtung von  $A$  mit einer Geschwindigkeit  $a$  bewegt wird, die zu der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , mit welcher gleichzeitig der zu bearbeitende Radkörper  $R$  um  $A$  gedreht wird, das Verhältniss  $\rho \cotg \varphi$  hat. In gleicher Weise ist die Fläche  $F'$  herzustellen bei Substitution von  $\varphi', \rho', a', \omega'$  für  $\varphi, \rho, a, \omega$ . Dabei können die 4 Grössen  $\varphi, \rho, \varphi', \rho'$ , durch welche  $a$  und  $a'$  bei gegebenen Werthen von  $\omega$  und  $\omega'$  bestimmt sind, beliebig so gewählt werden, dass sie nur der einen aus Gl. (1) und (2) folgenden Bedingung genügen:

$$\rho \omega \cos \varphi = \rho' \omega' \cos \varphi' \dots \dots \dots (3).$$

Diese an eine Bedingungsgleichung geknüpfte Wahl der 4 Grössen  $\varphi, \rho, \varphi', \rho'$  lässt der Ebene  $E$  dieselbe Bewegungsfreiheit wie die bedingungslose Wahl der ihre Bewegung ursprünglich bestimmenden 3 Grössen  $\varphi, \varphi', u$ .

Jede Berührungsebene  $T$  der Cylinderfläche  $C$  schneidet die Fläche  $F$  in einer Geraden  $G$  und zwar rechtwinklig, da sie normal zu der die Fläche  $F$  in dieser Geraden  $G$  berührenden Normalebene  $E$  von  $C$  ist; jede Normale von  $F$ , weil in einer solchen Normalebene  $T$  von  $F$  liegend, berührt also die Cylinderfläche  $C$ . Ebenso wird  $C'$  von jeder Normale der Fläche  $F'$  berührt. Die gemeinsame Normale von  $F, F'$  im Schnittpunkte  $B$  von zwei entsprechenden Geraden  $G, G'$  berührt also beide Cylinderflächen  $C, C'$ , etwa in den Punkten  $M, M'$ , während sie unter den Winkeln  $90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  beziehungsweise gegen die Axen  $A$  und  $A'$  geneigt ist, so dass, wenn  $N$  den Normaldruck zwischen  $F$  und  $F'$  im Berührungspunkte  $B$  bedeutet, die durch ihn übertragene Arbeitstärke

$$= N \rho \omega \cos \varphi = N \rho' \omega' \cos \varphi'$$

ist, die nach Gl. (3) einander gleichen Producte also der pro Einheit des Normaldrucks übertragenen Arbeitstärke gleich sind. In der Geraden  $MM'$  als sogenannter Eingriffslinie im Falle von Zahnrädern  $R, R'$  bewegt sich der Eingriffspunkt  $B$  mit der Geschwindigkeit  $u$  im Sinne der Bewegung von  $E$ .

Nun giebt es aber 4 gerade Linien  $MM'$ , welche die Cylinderflächen  $C, C'$  berühren und mit  $A, A'$  gegebene Winkel  $= 90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  bilden; sie liegen gegen einander wie parallele Kanten eines Parallelepipedum, je zwei auf entgegengesetzten Seiten von  $C$  und von  $C'$ , und es fragt sich, welche von ihnen als Eingriffslinie zu benutzen sei, wenn ausserdem gefordert wird, dass die Flächen  $F, F'$  sich in ihrem Berührungspunkte  $B$  ihre convexen Seiten zuehren sollen, um (bei Beschränkung auf hin-

länglich kleine Flächentheile) sicher zu sein, dass sie nicht etwa an einer Stelle sich schneiden und somit als Zahnflächen unbrauchbar werden. Zur Beantwortung dieser Frage kann man bemerken, dass, ebenso wie jede Gerade  $G$  durch ihren Berührungspunkt mit der Wendecurve  $S$ , so die vollständige Fläche  $F$  durch die Wendecurve selbst in zwei Theile getheilt wird, die in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, indem der eine Theil mit dem andern dadurch zur Deckung gebracht werden kann, dass er mit seiner Axe  $A$  in die entgegengesetzte Lage der letzteren umgewendet und die ihn begrenzende Schraubenlinie  $S$  mit der den anderen Theil begrenzenden nämlichen Schraubenlinie  $S$  zur Deckung gebracht wird. Von der Seite der Axe  $A$  aus gesehen, nach welcher bei Beschreibung der Fläche  $F$  durch die Gerade  $G$  die Schiebungsgeschwindigkeit  $a$  dieser letzteren gerichtet ist, erscheint derjenige Theil von  $F$  convex, welcher hierbei von dem Theil der Geraden  $G$  beschrieben wird, der sich von der Schraubenlinie  $S$  abwickelt. Von derselben Seite der Axe  $A$  aus gesehen muss sich das Rad  $R$  mit der Cylinderfläche  $C$  und der darauf liegenden Schraubenlinie  $S$  in solchem Sinne um  $A$  drehen, als ob letztere als Schraubenspindel in eine Mutter hineingeschraubt werden sollte, wenn der genannte Theil von  $F$  mit vorausgekehrter convexer Seite als treibende Zahnfläche dienen soll, wobei sich  $B$  im Sinne von  $M$  gegen  $M'$  bewegt, diese Gerade  $MM'$  also, wenn sie in ihrer eigenen Richtung mit der Geschwindigkeit  $u$  gleitend (der Punkt  $B$  in ihr fest) gedacht wird, sich bei  $M$  von einer Schraubenlinie  $L$  abwickelt, die, auf der Cylinderfläche  $C$  liegend, die Schraubenlinie  $S$  rechtwinklig schneidet. Umgekehrt muss dabei, wenn die getriebene Zahnfläche  $F'$  ihre convexe Seite hinterwärts, der treibenden Zahnfläche  $F$  zukehren soll, dieselbe Gerade  $MM'$  sich bei  $M'$  auf eine Schraubenlinie  $L'$  aufwickeln, die in der Cylinderfläche  $C'$  die Schraubenlinie  $S'$  rechtwinklig schneidet. Diesen Bedingungen (analog dem Verhalten der Eingriffslinie  $mm'$  in Fig. 19, §. 19 für die Evolventenverzahnung von Cyllinderrädern bezüglich auf die den Schraubenlinien  $L$  und  $L'$  entsprechenden, dort mit  $E$  und  $E'$  bezeichneten Hilfskreise) entspricht aber nur eine jener 4 Geraden  $MM'$ , die unter den Winkeln  $90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  beziehungsweise gegen  $A$  und  $A'$  geneigt die Cylinderflächen  $C$  und  $C'$  berühren; diese ist dann die zu benutzende Eingriffslinie und bedingt die Stellen, wo die Räder  $R, R'$  auf den Axen  $A, A'$  zu befestigen sind. Auch ist der Eingriff durch Beschränkung der Zahnlangen so zu begrenzen, dass der Berührungspunkt  $B$  beständig zwischen  $M$  und  $M'$  (ebenso wie in Fig. 19 der Eingriffspunkt  $p$  beständig zwischen  $m$  und  $m'$ ) liegt. Wegen jener Abhängigkeit der Eingriffslinie vom Drehungssinne der Räder sind

für den umgekehrten Drehungssinn (wobei das vorher treibende zum getriebenen Rade wird) die anderen Seiten der Zähne im Allgemeinen nicht als Zahnflächen zu gebrauchen, ist vielmehr ein eigenes Räderpaar an solchen anderen Stellen der Axen nöthig, dass diejenige jener 4 Geraden  $MM'$  jetzt als Eingriffslinie zur Geltung kommt, welche der vorher benutzten diagonal gegenüber, d. h. auf der anderen Seite sowohl von  $C$  wie von  $C'$  liegt. —

Von besonderem Interesse ist die Frage, welchen Bedingungen die Grössen  $\varphi, \rho, \varphi', \rho'$  ausser der Gleichung (3) genügen müssen, wenn die Flächen  $F, F'$  sich beständig in einer Geraden berühren sollen. In dieser müssen dann zwei entsprechende Gerade  $G, G'$ , also auch zwei Berührungsebenen  $T, T'$  der Cylinderflächen  $C, C'$  als gemeinsame Normalebene von  $F, F'$  zusammenfallen. Eine gemeinsame Berührungsebene  $T$  haben aber die Cylinderflächen  $C, C'$ , sofern ihre Axen  $A, A'$  nicht parallel sind, nur dann, wenn sie sich selbst in einem gewissen Punkte  $D$  berühren, der dann in der Geraden liegt, welche die Axen  $A, A'$  in gewissen Punkten  $O, O'$  rechtwinklig schneidet, so dass, wenn wieder  $e$  den kürzesten Abstand  $OO'$  dieser Axen bedeutet,

$$\rho + \rho' = \pm e \dots \dots \dots (4)$$

sein muss, nämlich

$$\rho + \rho' = e, \rho - \rho' = e \text{ oder } \rho - \rho' = -e,$$

jenachdem  $D$  in der Strecke  $OO'$  oder ausserhalb derselben auf der Seite von  $O'$  oder von  $O$  liegt. Indem ferner die Berührungsebene  $T$  der Cylinderflächen  $C, C'$  mit den Axen  $A, A'$  parallel, also senkrecht zu  $OO'$ , die zur Ebene  $T$  senkrechte Ebene  $E$  folglich parallel mit  $OO'$  ist, müssen ihre spitzen Winkel  $\varphi, \varphi'$  mit den Axen  $A, A'$  der Bedingung

$$\varphi + \varphi' = \pm \varepsilon \dots \dots \dots (5)$$

entsprechen, unter  $\varepsilon$  den Winkel verstanden, den zwei von irgend einem Punkte  $q$  der Ebene  $E$  aus parallel mit den Axen  $A, A'$  so gezogene Richtungen  $qb, qb'$  mit einander bilden, dass sie gegen die in gewissem Sinne  $qp$  genommene Durchschnittslinie der Ebenen  $E$  und  $bqb'$  unter den spitzen Winkeln  $\varphi, \varphi'$  geneigt sind. Dabei hat Gl. (5) die erste, zweite oder dritte der Formen:

$$\varphi + \varphi' = \varepsilon; \varphi - \varphi' = \varepsilon; \varphi - \varphi' = -\varepsilon,$$

jenachdem  $qp, qb'$  oder  $qb$  die mittlere der fraglichen 3 Richtungen ist, entsprechend den Figuren 24, 25 und 26 (§. 24) bei Ersetzung der Buchstaben  $Q, P, B, B', a, a'$  durch  $q, p, b, b', \varphi, \varphi'$ .



Durch die Gleichungen (3), (4) und (5) sind die 4 Grössen  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $\rho'$  immer noch nicht vollständig als Functionen der gegebenen Grössen  $e$ ,  $\varepsilon$  und  $\frac{\omega'}{\omega}$  bestimmt; es giebt also unendlich viele selbst solche Verzahnungs-

arten von Hyperboloidrädern, bei denen sich die Zähne in geraden Linien berühren. Sind durch die Annahme einer vierten Beziehung zwischen den gegebenen und den die Flächen  $F$ ,  $F'$  charakterisirenden Grössen  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $\rho'$  die Zahnformen bestimmt worden, so wird durch nachträgliche Aenderung von  $e$  oder  $\varepsilon$  die Erfüllung von Gl. (4) oder (5) zwar gestört, die von Gl. (3) aber nicht: der Eingriff dieser Zähne bleibt ein dem gegebenen constanten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  entsprechender richtiger Eingriff, nur geht die Linienberührung in Punktberührung über.

Würde als vierte Beziehung die Gleichung

$$\omega \sin \varphi = \omega' \sin \varphi'$$

angenommen, so wären sie und die Gleichungen (3), (4), (5) mit den Gleichungen (1), (2) und (4) in §. 24 identisch, wenn  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi' = \alpha'$ ,  $\rho = r$ ,  $\rho' = r'$  gesetzt wird: statt der Zahnflächen ergäben sich die Axoide selbst als Oberflächen hyperboloidischer Reibungsräder.

Wird als vierte Beziehung die Gleichung

$$\rho \omega = \rho' \omega' \dots \dots \dots (6)$$

angenommen, so ergeben sich hieraus und aus Gl. (4) die Halbmesser  $\rho$ ,  $\rho'$  der Cylinderflächen  $C$ ,  $C'$  ebenso wie nach §. 21, Gl. (4) die Theilkreis-

halbmesser von Cyllinderrädern, deren Axenentfernung  $= e$  und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss  $= \frac{\omega}{\omega'}$  ist. Aus Gl. (3) und (5) folgt dann

$$\varphi = \varphi' = \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (7).$$

Lässt man  $\varphi$  in die Grenze Null übergehen, so geht die von der Eingriffslinie  $MM'$  berührte Schraubenlinie  $L$  auf  $C$  in das kreisförmige Profil dieser Cylinderfläche mit dem Halbmesser  $\rho$  über, die Zahnfläche  $F$  (beschrieben von einer Geraden, welche  $C$  berührt und  $MM'$  rechtwinklig schneidet, bei der Abwälzung dieser Geraden  $MM'$  auf  $L$ ) in die cylindrische Fläche, deren Profil die Evolvente des Kreises  $L$  ist; das Rad  $R$  ist dann ein Cyllinderrad mit Evolventenverzahnung (§. 19). Mit Punktberührung ist der Eingriff auch eines solchen Rades mit einem Hyperboloidrade auf unendlich mannigfache Weise möglich, indem die Grössen  $\rho$ ,  $\rho'$  und  $\varphi$  nur der einen Bedingung

$$\rho \omega = \rho' \omega' \cos \varphi' \dots \dots \dots (8)$$

entsprechend anzunehmen sind, in welche die Gl. (3) für diesen Fall übergeht. Für Linienberührung kommen aber nach Gl. (4) und (5) noch die weiteren Bedingungen

$$\rho \pm \rho' = \pm e; \varphi' = \varepsilon. \dots \dots \dots (9)$$

hinzu, woraus dann für  $\rho$  und  $\rho'$  sich dieselben Ausdrücke ergeben wie für die Theilkreishalbmesser von Cylinderrädern, deren Axenentfernung =  $e$

und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss =  $\frac{\omega}{\omega' \cos \varepsilon}$  ist. Dieser (von

Olivier in seiner *théorie géométrique des engrenages* für sich erörterte) Eingriff ist übrigens an die Voraussetzung  $\varepsilon < 90^\circ$  gebunden.

Sind endlich beide Räder Cylinderräder mit Evolventenverzahnung, d. h.  $\varphi = 0$  und  $\varphi' = 0$ , so geht die Bedingung (3), der die Halbmesser  $\rho, \rho'$  ihrer Hilfskreise (Hülfscylinder) zu entsprechen haben, in die Form (6) über. Sollen sich die Zähne in geraden Linien berühren, so müssen die Axen  $A, A'$  parallel sein, entsprechend  $\varepsilon = 0$  nach Gl. (5), während dann Gl. (4) als Bedingung dafür, dass die Cylinderflächen  $C, C'$  eine gemeinsame Berührungsebene haben, fortfällt. Bei geänderter Entfernung  $e$  der parallelen Axen findet deshalb ein solcher Eingriff nach wie vor mit Linienberührung in richtiger Weise, einem gegebenen Verhältnisse  $\frac{\omega}{\omega'}$ , entsprechend, statt, während er durch gleichzeitige oder alleinige Aenderung von  $\varepsilon$  in einen richtigen Eingriff mit Punktberührung übergeht.

## II. Unselbständige Elementenpaare und kinematische Ketten.

Wenn der im §. 1 aufgestellte Begriff einer Maschine allgemein zutreffend sein soll, wenn also jede Maschine als eine zwangläufig geschlossene kinematische Kette mit einem festgestellten Gliede soll betrachtet werden können, so ist nun eine nachträgliche Erweiterung der Voraussetzungen nöthig, die dem Begriffe einer zwangläufig geschlossenen Kette bisher zu Grunde lagen; insbesondere gilt das in Betreff der seitherigen Voraussetzungen, dass die Elemente eines Paares und die Glieder einer Kette durchaus starre Körper seien, sowie dass die Geschlossenheit eines Paares oder einer Kette eine selbständige, d. h. durch die Gestalt der Elemente resp. durch die Verbindungsweise der Glieder allein vermittelte sei.

.02

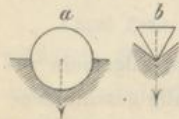
## a. Unselbständige Elementenpaare.

## §. 27. Kraftschlüssige Elementenpaare.

Während die selbständige Geschlossenheit eines Elementenpaares darin besteht, dass jede mit dem kinematischen Charakter des Paares unverträgliche gegenseitige Bewegung seiner Elemente durch deren Starrheit und Gestalt verhindert wird, heisst ein Elementenpaar nach Reuleaux kraftschlüssig, wenn bei materiell nur unvollständig ausgeführter gegenseitiger Stützung der Elemente dieselbe in einem gewissen Sinne nicht sowohl durch den Widerstand vermittelt wird, den die Elemente selbständig vermöge ihrer Gestalt und Starrheit ihrer relativen Bewegung in diesem Sinne entgegenzusetzen, sondern durch eine anderweitige Kraft, die sogenannte Schliessungskraft. Dabei können zwei Fälle stattfinden, indem die Schliessungskraft entweder nur die Aufgabe hat, die beiden Elemente und somit ihre Axoide in Berührung zu erhalten, oder zugleich dazu dienen soll, eine bestimmte gegenseitige Bewegung dieser Axoide zu erzwingen, insbesondere z. B. dieselben, wenn sie abwickelbare Flächen sind, zu relativer Rollung zu nöthigen unter Ausschluss jeder relativ gleitenden Bewegung.

Erstere Function der Schliessungskraft genügt zur Sicherung des kinematischen Charakters eines Elementenpaares, dessen Axoide zusammenfallen, also eines niederen Paares. So können ein Cylinder mit horizontaler Axe und ein nur im unteren Theile seiner Oberfläche ihn berührender, theilweise (höchstens halb) ausgeführter Hohlcyliner (z. B. das offene, deckellose Lager einer horizontalen Welle, Fig. 27, a) durch die

Fig. 27.



Wirkung der Schwerkraft als Schliessungskraft zu einem kraftschlüssigen Cylinderpaare werden resp. zu einem kraftschlüssigen Drehkörperpaare, wenn die axiale Gleitbarkeit auf bekannte Weise verhindert ist. — Unter Umständen ist die Wahl eines unselbständigen kraftschlüssigen anstatt eines selbständig geschlossenen Paares nicht nur zur Vereinfachung zulässig, sondern durch anderweitige Rücksichten bedingt. So kann ein Cylinderpaar als Umschlusspaar nicht so ausgeführt werden, dass die Axoide (zwei in der geometrischen Axe zusammenfallende Gerade) in den Oberflächen liegen, die Elemente sich also mit ihren Axoiden selbst materiell berühren und somit ohne Gleitung und entsprechende Reibung nur aufeinander rollen, wogegen dies dadurch möglich ist, dass das Paar als Keilschneide mit zugehöriger Pfanne (Fig. 27, b) aus-

geführt wird, wie es zu möglichstem Ausschluss von Reibung bei Waagen üblich ist und dann nothwendig einen unselbständigen Kraftschluss erfordert.

Wenn aber bei höheren Elementenpaaren ihre abwickelbaren Axoide durch die Schliessungskraft nicht nur in Berührung erhalten, sondern auch zu reiner Rollung genöthigt werden sollen, so kann das diese Kraft nicht unmittelbar, sondern nur vermittels der ihr entsprechenden Reibung, wie es insbesondere bei Reibungsrädern (§. 15), z. B. bei den Rädern von Fuhrwerken der Fall ist. Ein solches Rad bildet mit der Fahrbahn, die als Stück eines Rades von unendlich grossem Halbmesser betrachtet werden kann, ein kraftschlüssiges höheres Elementenpaar mit cylindrischen Axoiden, wobei wieder die Schwerkraft als Schliessungskraft dient, während die ihr entsprechende Reibung bei hinlänglicher Grösse das Gleiten des Rades auf der Fahrbahn verhindert.

#### §. 28. Bildsame Körper als Paarelemente.

Wenn auch streng genommen alle, selbst festen Körper unter der Einwirkung äusserer Kräfte einer gewissen Deformation unterworfen sind, so erhalten doch die aus ihnen bestehenden Maschinentheile im Allgemeinen solche Dimensionen, dass sie durch die wirksamen Kräfte kaum merklich deformirt werden, und sie deshalb als Paarelemente ohne in Betracht kommenden Fehler als starr betrachtet werden können. Unter bildsamen Körpern dagegen, um die es sich hier handelt, sollen solche verstanden werden, die in Folge ihrer inneren Beschaffenheit oder ihrer Gestalt in hohem Grade und schon durch mässige Kräfte deformirt werden können. Dass auch solche Körper zur Elementenbildung u. U. geeignet sind, ist die Folge der im vorigen §. besprochenen Zulässigkeit des Kraftschlusses unselbständiger Paare, sofern nur die fraglichen Körper sich gegen Kräfte, die als Schliessungskräfte in gewissem Sinne auf sie wirken, in ähnlichem Grade widerstandsfähig verhalten wie jene bei genügenden Dimensionen als starr betrachteten festen Körper allseitig widerstandsfähig sind.

Bildsame Körper von (innerhalb praktischer Grenzen) beliebig zu steigernder Widerstandsfähigkeit gegen Zugkräfte, von Reuleaux deshalb Zugkraftorgane genannt, sind insbesondere Seile (aus Faserstoffen oder Draht), Bänder (aus Geweben, aus Metallen oder — als Riemen — aus Leder) und Ketten (Gliedketten, Gelenkketten). Sie können mit abgerundeten starren Körpern, längs denen sie gleiten, oder mit Trommeln, auf die sie sich auf- oder von denen sie sich abwickeln, oder mit Rollen bei

gleichzeitig an verschiedenen Stellen stattfindender Auf- und Abwicklung gepaart werden, indem solche an und für sich unselbständige Paare durch Kräfte, die am Seil, Band oder an der Kette ziehend wirken, geschlossen werden. Bei der Rolle mit gleichzeitig sich auf- und abwickelndem Zugkraftorgan haben die Schliessungskräfte nicht nur, wie in den übrigen Fällen, die Berührung beider Theile, sondern auch (durch Reibung) die Verhinderung des Gleitens zu vermitteln. Indem übrigens das jeweils ohne Gleiten auf der Rolle liegende Stück des Zugkraftorgans kinematisch als mit der Rolle fest verbunden, d. h. als ein Theil derselben zu betrachten ist, müssen das auflaufende und das ablaufende Stück des Zugkraftorgans als besondere Elemente betrachtet werden, die mit der als Verbindung von zwei gleichen Elementen zu betrachtenden Rolle kraftschlüssig gepaart sind, gleich als ob letztere eine conaxiale feste Verbindung von zwei gleichen Rollen wäre, auf deren eine ein Zugkraftorgan sich aufwickelt, während ein gleich langes Stück eines anderen von der anderen Rolle sich abwickelt.

Bildsame Körper, die nur gegen Druckkräfte eine gewisse Widerstandsfähigkeit haben und deshalb mit Reuleaux als Druckkraftorgane bezeichnet werden mögen, sind namentlich Flüssigkeiten verschiedener Art. Sie können mit Hohlkörpern (Gefässen, Röhren) gepaart werden, indem die Schliessung solcher an und für sich unselbständiger Elementenpaare durch Kräfte, die auf die Flüssigkeit drückend wirken, vermittelt wird. Während das Zugkraftorgan durch die Zugkräfte in beständiger Berührung mit der Aussenfläche des zugehörigen starren Elementes erhalten wird, wird das Druckkraftorgan durch die Druckkräfte in Berührung mit der Innenfläche des zugehörigen starren Hohlkörpers erhalten, und so in beiden Fällen die das Elementenpaar charakterisirende gegenseitige Stützung beider Elemente bewirkt.

Solche bildsame Körper, denen das durch diese Bezeichnung ausgedrückte Verhalten nur vermöge ihrer Gestalt, nicht vermöge ihrer inneren Beschaffenheit zukommt, können unter Umständen als Zugkraft- oder als Druckkraftorgane auftreten je nach der Art, wie sie mit einem starren Körper gepaart werden. So hat ein Metallband die Function eines Zugkraftorgans, wenn es in Berührung mit der (äusseren) Oberfläche eines Cylinders an beiden Enden von tangentialen Zugkräften, dagegen die Function eines Druckkraftorgans, wenn es in Berührung mit der (inneren) Oberfläche eines Hohlcyllinders beiderseits von tangentialen Druckkräften angegriffen wird; in beiden Fällen kann es z. B. als Bremsband dienen.

Ausser den Zug- und Druckkraftorganen sind endlich noch Federn als solche bildsame Körper zu erwähnen, die im Gegensatz zu jenen für

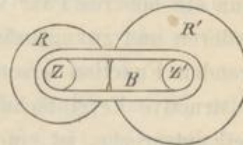
beliebige Angriffsweisen äusserer Kräfte der Art durch entsprechende Gestaltung widerstandsfähig gemacht werden können, dass sie als Elementekraftschlüssiger Paare geeignet werden, immer aber unter Einschränkung auf eine einzige Angriffsweise in jedem besonderen Falle. Namentlich finden sie in Verbindung mit starren Körpern als Paarelemente Verwendung, um unselbständige Elementenpaare durch Federkraft zu schliessen, so bei Kolbendichtungen, Sperrklinken etc.

### §. 29. Kettenschlüssige Elementenpaare.

Ebenso wie nach einer schon im §. 1 gemachten Bemerkung eine kinematische Kette zwangläufig geschlossen sein kann, ohne dass alle ihre einzelnen Elementenpaare zwangläufig sind, kann sie es auch sein, ohne dass ihre sämtlichen Elementenpaare selbständig geschlossen oder kraftschlüssig, nämlich durch äussere, von der Kette selbst unabhängige Kräfte geschlossen zu sein brauchen, indem vielmehr solche Elementenpaare als kettenschlüssige eben durch die kinematische Verkettung ihrer Elemente geschlossen werden.

So können z. B. zwei Cyklerräder  $R, R'$  zwar so verzahnt werden, dass ihre Profile nach Richtung der gemeinsamen Tangente beider Theilkreise in beiderlei Sinn, sowie auch nach der Centrale gegen Annäherung sich stützen. Sie bleiben aber noch ungestützt nach Richtung der Centrale bezüglich auf Entfernung von einander, bilden also ein an und für sich ungeschlossenes oder unselbständiges Paar. Um dasselbe zu schliessen, können die Räder mit centralen Zapfen (Drehkörpern)  $Z$  resp.  $Z'$  versehen und diese durch einen sie gemeinschaftlich umschliessenden Bügel  $B$  verbunden werden: Fig. 28. Auf solche Weise entsteht eine zwangläufig geschlossene Kette von 3 Gliedern  $RZ, B, Z'R'$ , in der nun auch die beiden Räder eine vollständige Stützung erhalten haben ohne Beschränkung der ihren Axoiden entsprechenden gegenseitigen Beweglichkeit, und zwar enthält diese Kette Elementenpaare, die sogar alle 3 unselbständig sind.

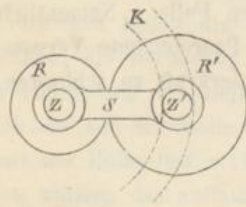
Fig. 28.



Ist aber, wie gewöhnlich, ein Spielraum zwischen den Zahnscheiteln jedes Rades und dem Grunde der Zahnluken des anderen vorhanden, so dass beide sich nur im Sinne der gemeinsamen Theilkreistangente stützen, so wird die Schliessung der Kette und damit des Räderpaares  $R, R'$  herbeigeführt, indem die beiden unselbständigen Drehkörperpaare  $Z, B$  und  $Z', B$

durch selbständige  $Z, S$  und  $Z', S$  (Fig. 28) ersetzt werden, nämlich der die beiden Zapfen gemeinschaftlich umfassende Bügel  $B$  durch einen Steg  $S$

Fig. 29.



ersetzt wird, der die Zapfen mit entsprechenden Hohlformen einzeln rings umschliesst, wobei im Uebrigen die Gestaltung dieses Steges kinematisch gleichgültig ist, derselbe insbesondere auch, wie es gewöhnlich der Fall ist, aus je zwei Zapfenlagern bestehen kann, von denen die je zwei Zapfen der beiden Radwellen umschlossen, und welche durch eine Lagerplatte oder anderweitig

durch den festen Boden anstatt des Steges unter sich verbunden werden.

Uebrigens könnte das in Rede stehende, aus den gezahnten Rädern  $R, R'$  bestehende, unselbständige Elementenpaar auch schon durch eine zweigliedrige Kette geschlossen werden, indem etwa statt des Steges  $S$  und des einen Zapfens  $Z$  das zu letzterem gehörige Rad  $R$  mit einer Scheibe fest verbunden, und diese mit einer (in Fig. 29 punktirt angedeuteten) mit  $R$  concentrischen kreisförmigen Rinne  $K$  versehen würde, deren mittlerer Halbmesser = der Axenentfernung von  $R$  und  $R'$ , und deren Querschnitt (Meridianschnitt) dem Meridianschnitt des Zapfens  $Z'$  congruent, deren Oberfläche nämlich, insoweit sie hier als Berührungsfäche mit dem Zapfen  $Z'$  in Betracht kommt, die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die Oberfläche (Umfläche) des letzteren bei irgend einer der relativen Beweglichkeit des Paares  $R, R'$  entsprechenden Bewegung des Gliedes  $R'Z'$  gegen das Glied  $RK$  der Kette einnimmt. Die Elemente  $K$  und  $Z'$  bilden dann ein höheres Paar von zweifacher Beweglichkeit, wodurch die je zwei niederen und zwangläufigen Elementenpaare  $S, Z$  und  $S, Z'$  in ihrer resultirenden Function ersetzt werden. Ob solcher kinematischen auch eine constructive Vereinfachung der Kette und überhaupt ein praktischer Vortheil entspreche, ist eine andere Frage, auf die es hier zunächst nicht ankommt.

### b. Unselbständige kinematische Ketten.

Unter dieser Bezeichnung sollen solche kinematische Ketten verstanden werden, die entweder unbedingt, nämlich in allen gegenseitigen Lagen ihrer Glieder und unabhängig von ihrer besonderen Verwendungsart als Getriebe, oder nur bedingungsweise, nämlich in gewissen gegenseitigen Lagen ihrer Glieder bei gewissen Verwendungsarten als Getriebe besonderer Hülfsmittel zu ihrer zwangläufigen Schliessung bedürfen.

## §. 30. Kraft- und Kettenschluss offener Ketten.

Unbedingt unselbständig sind namentlich offene Ketten, die durch ähnliche Mittel, wie unselbständige Elementenpaare, nämlich durch äussere Kräfte oder durch weitere kinematische Verkettung zwangläufig geschlossen werden können. Ein Beispiel ist die dreigliedrige Kette, Fig. 29, welche aus den in Eingriff befindlichen Zahnrädern  $R, R'$  und aus dem ihre Zapfen  $Z$  und  $Z'$  mit entsprechenden Hohlformen umschliessenden Stege  $S$  besteht, falls zwischen den Zahnflanken ein gewisser Spielraum vorhanden, die Zahndicke jedes Rades nämlich kleiner, als die Weite der Zahnluken des anderen ist; die Schliessung erfolgt hier durch die Theilrisskraft, wodurch bei stetiger Drehung in gewissem Sinne die Zähne des einen mit denen des anderen Rades in Berührung erhalten werden.

Eine unselbständige Kette mit Zugkraftorgan ist beispielsweise eine drehbar gelagerte Rolle mit einem darüber hingeführten gespannten

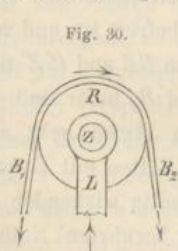


Fig. 30.

Riemen: Fig. 30. Sie besteht aus den 4 Gliedern: auflaufendes Riemenstück  $B_1$ , ablaufendes Riemenstück  $B_2$ , Rolle  $R$  mit Zapfen  $Z$ , Lagerkörper  $L$ ; sie wird geschlossen durch Zugkräfte an den Riemen  $B_1$  und  $B_2$  nebst einer Gegenkraft am Lager  $L$ . Von ihren 4 Gliedern ist  $RZ$  ternär, durch  $R$  kraftschlüssig mit  $B_1$  und mit  $B_2$ , durch  $Z$  selbständig mit  $L$  gepaart; die übrigen 3 Glieder sind einfache Elemente.

Eine viergliedrige unselbständige Kette mit Druckkraftorgan ist z. B. ein mit Wasser  $W$  gefülltes geschlossenes Gefäss  $G$ , in welches durch prismatische Oeffnungen zwei entsprechende Kolben  $K_1$  und  $K_2$  eintreten; die Schliessung der Kette erfolgt durch Druckkräfte an  $K_1$  und  $K_2$  nebst einer Gegenkraft an  $G$ . Die beiden Glieder  $G$  und  $W$  sind ternär (enthalten je 3 Elemente), indem  $G$  selbständig mit  $K_1$  und  $K_2$  und ausserdem kraftschlüssig mit  $W$ , das Wasser  $W$  aber ausser mit  $G$  auch mit  $K_1$  und  $K_2$  kraftschlüssig gepaart ist;  $K_1$  und  $K_2$  sind binäre Glieder. — Die Vergleichung dieser Kette mit der vorerwähnten (Fig. 30) lässt  $K_1$  und  $B_1$ ,  $K_2$  und  $B_2$ ,  $W$  und  $RZ$ ,  $G$  und  $L$  als entsprechende Glieder erkennen.  $W$  und  $RZ$  sind beide ternär; die zwei Elemente, von denen das eine zu  $K_1$  im Vergleich mit  $B_1$ , das andere zu  $K_2$  im Vergleich mit  $B_2$  hier hinzugekommen ist, sind gepaart mit den zwei Elementen, die  $G$  hier mehr enthält, als  $L$  dort.

Bei allen diesen Beispielen wurde die unselbständige Kette durch



äußere Kräfte geschlossen. Die Ersetzung dieses Kraftschlusses durch Kettenschluss kann namentlich bei den zwei letzten Beispielen durch Verdoppelung geschehen, nämlich durch Verbindung von zwei gleichartigen kraftschlüssigen Ketten in solcher Weise, dass die Schliessungskräfte der einen denen der anderen entgegengesetzt gleich sind und deshalb durch innere Kräfte der vereinigten betreffenden Glieder ersetzt werden können. So geht aus zweien der besprochenen viergliedrigen kraftschlüssigen Ketten mit Zugkraftorgan (Riemen) durch Verbindung der zwei einzelnen zu einem endlosen Riemen und der zwei Lagerkörper durch einen Steg, eine gemein-

Fig. 31.

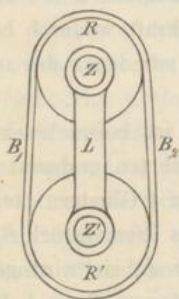
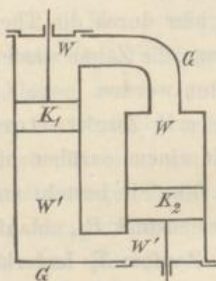


Fig. 32.



same Lagerplatte oder dergl. das bekannte Riemengetriebe (Fig. 31) hervor, d. i. eine fünfgliedrige zwangläufig geschlossene Kette, die nun als solche (d. h. als Kette, nicht bezüglich ihrer einzelnen Elemente) vom Kraftschluss befreit ist, und von deren Gliedern  $RZ$  und  $R'Z'$  ternär,  $L$ ,  $B_1$  und  $B_2$  binär sind. — Auf ähnliche Weise geht aus zweien der besprochenen viergliedrigen kraftschlüssigen Ketten mit Druckkraftorgan (Wasser) durch Verbindung von je zwei einseitig wirkenden zu einem zweiseitig wirkenden (d. h. beiderseitig von Wasser berührten) Kolben und der zwei Gefäße zu einem zusammenhängenden Gefäße (durch Leitungsröhren verbundene Hohlzylinder darstellend) das doppelt wirkende Wassergestänge (Fig. 32) hervor, gleichfalls eine fünfgliedrige zwangläufig geschlossene, als solche vom Kraftschluss befreite Kette, bestehend aus den unter sich getrennten Wassermassen  $W$  und  $W'$  als ternären Gliedern (den auch ternären Gliedern  $RZ$  und  $R'Z'$  von Fig. 31 entsprechend), ferner dem Gefäße  $G$  als quaternärem Gliede (dem binären  $L$  in Fig. 31 entsprechend) und den zwei Kolben  $K_1$  und  $K_2$  als ternären Gliedern (den binären  $B_1$  und  $B_2$  in Fig. 31 entsprechend). — Durch verschiedene Durchmesser der Rollen oder der Kolben können dort die Winkelgeschwindigkeiten, hier die Translationsgeschwindigkeiten derselben in beliebige Verhältnisse gesetzt werden, die dadurch bedingt sind, dass ebenso wie bei Fig. 31 die Riemen  $B_1$  und  $B_2$  stets gleiche Weglängen, so bei Fig. 32 die ihnen entsprechenden Kolben  $K_1$  und  $K_2$  stets gleiche Räume durchlaufen.

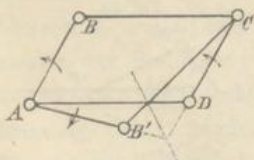
als  
rul  
ges  
nis  
äu  
sor  
ges  
ang  
die  
änd  
nur  
der  
bis  
hin  
auf  
Gli  
ein  
dur  
das  
Sol  
sein  
hat  
Zw  
  
beg  
lag  
dar  
nur  
trie  
gew  
Se  
tet,  
den  
and  
Ku



paare, deren parallele Axen beziehungsweise mit  $A, B, C$  bezeichnet seien, verbunden, Schieber und Steg durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen  $A, B$  und  $C$  gerichtet und mit der Ebene  $AC$  parallel ist. Dieser Mechanismus liefert ein unbedingt selbständiges Getriebe, wenn die Kurbel durch die treibende Kraft unmittelbar gedreht wird (Kurbelschubgetriebe), dagegen hat das Getriebe, welches aus demselben Mechanismus dadurch hervorgeht, dass der Schieber durch die treibende Kraft hin und her bewegt wird (Schubkurbelgetriebe), zwei Todlagen, den Grenzlagen des Schiebers entsprechend. In diesen Lagen wird die den Schieber angreifende Kraft ohne Zerlegung und Richtungsänderung durch die Koppel und die Kurbel auf den festen Steg übertragen, indem ihre Richtungslinie, die jetzt in einer Ebene liegenden Axen  $A, B, C$  rechtwinklig schneidend, durch die Stützpunkte hindurchgeht, in denen sich die Elemente der den Schieber mit der Koppel, diese mit der Kurbel, diese mit dem Stege verbindenden Paare berühren; Kurbel und Koppel sind dann je von entgegengesetzt gleichen Kräften angegriffen, die sich an ihnen Gleichgewicht halten, während durch anders gerichtete, z. B. die Kurbel in fraglicher Lage angreifende Kräfte sie selbst und die Koppel im einen oder anderen Sinne aus jener Lage herausbewegt werden können unbeschadet der in beiden Fällen gleichen Bewegung des Schiebers.

In Betreff dieses den Todlagen eines Getriebes eigenthümlichen Umstandes, dass von ihnen aus ein Theil der Kettenglieder in beiderlei Sinn bewegt werden kann, unbeschadet des stets gleichen Bewegungssinnes der übrigen, verdient der Fall besonders hervorgehoben zu werden, dass bei jenen entgegengesetzten Bewegungen des einen Theils der Kettenglieder der kinematische Charakter des Getriebes ein anderer wird, einen Wechsel erfährt, in welchem Falle mit Reuleaux die betreffende Todlage eine Wechsellage des Getriebes genannt werden möge. Die Todlagen des oben besprochenen Schubkurbelgetriebes (Fig. 33) haben diesen Charakter nicht; denn wenn dasselbe von einer solchen Lage aus mit dem einen

Fig. 34.



oder anderen Drehungssinne der Kurbel in die zweite Todlage übergeht, so sind die aufeinander folgenden Configurationen der Kette in beiden Fällen einander symmetrisch gleich, und gleichen Wegen des Schiebers entsprechen in beiden Fällen gleich grosse Drehungswinkel der Kurbel. Handelt es sich aber z. B. um einen Zwillings-

kurbelmechanismus (Fig. 34), bestehend aus zwei (von Axe zu Axe gerechnet) gleich langen Kurbeln  $AB$  und  $CD$ , die einerseits durch eine

Kopp  
verm  
sind  
aus d  
Zusan  
aber  
einer  
in gl  
Kurb  
Mal  
ständ  
die S  
Viere  
treibe  
ander  
rakte  
trisc

durch  
Kette  
lagen  
schlie

nur z  
kung  
wird  
dem  
rende  
kurbe  
insbes  
überh  
mit n  
schritt  
dern  
I  
Kraft

Koppel  $BC$ , andererseits durch einen ebenso langen festgestellten Steg  $AD$  mittels 4 Drehkörperpaare mit parallelen Axen  $A, B, C, D$  verbunden sind, so hat das durch primäre Drehung der einen oder anderen Kurbel aus diesem Mechanismus hervorgehende Getriebe auch zwei Todlagen, dem Zusammenfallen der Ebene  $BC$  mit der festen Ebene  $AD$  entsprechend, die aber hier in der That Wechsellagen sind. Denn wenn das Getriebe aus einer dieser Lagen in die andere, während die treibende Kurbel  $CD$  stets in gleichem Sinne rotirt, das eine Mal so übergeht, dass die getriebene Kurbel ( $AB$  in Fig. 34) der treibenden beständig parallel bleibt, das andere Mal so, dass die getriebene Kurbel ( $AB'$  in Fig. 34) der treibenden beständig symmetrisch gegenüber liegt in Beziehung auf die Gerade, welche die Schnittpunkte der gleichen Gegenseiten  $AB', CD$  und  $B'C, DA$  des Vierecks  $AB'CD$  verbindet, so entsprechen gleichen Drehungswinkeln der treibenden Kurbel nicht auch in beiden Fällen gleiche Drehungswinkel der anderen. Die Getriebe beider Fälle haben verschiedene kinematische Charaktere und sind etwa als Parallelkurbelgetriebe und als symmetrisches Zwillingenkurbelgetriebe ausdrücklich zu unterscheiden.

### §. 32. Zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen.

Die einem Getriebe in seinen Todlagen fehlende Zwangläufigkeit kann durch verschiedene Mittel herbeigeführt werden: durch Kraftschluss, durch Kettenschluss, oder durch Elementenpaare, die nur in der Nähe der Todlagen zu gegenseitiger Stützung gelangen und dadurch die Kette zwangläufig schliessen.

Der Kraftschluss kann zuweilen durch Kräfte bewirkt werden, die nur zeitweise bei der Annäherung des Getriebes an eine Todlage zur Wirkung kommen, z. B. durch Gewichte, denen die Unterstützung entzogen wird. Häufiger wird er aber mittelbar durch die lebendige Kraft einer mit dem Getriebe in beständiger Bewegung befindlichen, besonders einer rotirenden Masse, eines sogenannten Schwungrades bewirkt (bei dem Schubkurbelgetriebe z. B. durch ein Schwungrad auf der Kurbelwelle), und zwar insbesondere dann, wenn es darauf ankommt, dass die Todlagen nicht nur überhaupt mit bestimmtem Bewegungssinne jedes Gliedes, sondern zugleich mit möglichst unveränderlichen Geschwindigkeiten gewisser Glieder überschritten werden, eine Aufgabe, die indessen nicht bloß kinematischer, sondern zugleich mechanischer Natur ist.

Dieser Massenkraftschluss, wie er als ein durch die lebendige Kraft bewegter Massen vermittelter Kraftschluss näher bezeichnet werden

kann, ist für sich allein unzureichend, wenn das Getriebe von jeder, insbesondere also auch von einer Todlage aus erst in Bewegung soll gesetzt werden können. Der dann meistens angewendete Kettenschluss besteht in der Zuhülfenahme eines zweiten, dem ersten gleichen Getriebes, welches mit jenem so verbunden wird, dass niemals beide zugleich in Todlagen sich befinden. Sofern das auf unendlich mannigfache Weise geschehen kann, bleibt die nähere Bestimmung der besten Verbindungsweise beider Getriebe (ebenso wie beim Kraftschluss durch ein Schwungrad die Bestimmung der zweckdienlichsten Masse und Massenvertheilung desselben) ein vorwiegend mechanisches Problem, bedingt durch die Anforderungen, die an den Gang der betreffenden Maschine, an das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeiten gewisser Bestandtheile derselben gestellt werden. So können die Todlagen eines Schubkurbelgetriebes zwangläufig überschritten werden durch Verbindung von zwei gleichen solchen Getrieben mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle (z. B. bei sogenannten Zwillingdampfmaschinen), die dann behufs möglichst gleichförmiger Rotation dieser Welle so angeordnet zu werden pflegen, dass die Summe des spitzen Winkels  $\alpha$ , unter dem die beiden Kurbelrichtungen, und des spitzen Winkels  $\beta$ , unter dem die beiden Schubrichtungen gegen einander geneigt sind,  $= 90^\circ$  ist, dass insbesondere  $\alpha = 90^\circ$  (rechtwinklig versetzte Kurbeln) für  $\beta = 0$  (gleiche Schubrichtungen), oder  $\alpha = 0$  (gleich gerichtete Kurbeln, die dann auch zu einer beiden Getrieben gemeinschaftlichen vereinigt werden können) für  $\beta = 90^\circ$  (rechtwinklig sich kreuzende Schubrichtungen) ist.

Der hier zunächst erwähnte Kettenschluss, insofern er in der Zuhülfenahme eines zweiten Getriebes, also eines selbst durch eine äussere Kraft angegriffenen Mechanismus besteht, kann näher als Kraftkettenschluss bezeichnet und von einem reinen Kettenschluss unterschieden werden. Gewöhnlich ist er mit Massenkraftschluss combinirt, so bei Zwillingdampfmaschinen mit einem Schwungrade, das dann aber leichter sein darf, als unter sonst gleichen Umständen die Schwunräder der isolirten Maschinen zusammen. Auch bei Locomotiven (Zwillingdampfmaschinen, dem Falle  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 0$  entsprechend) ist zugleich Massenkraftschluss vorhanden, bewirkt durch die lebendige Kraft des ganzen Zuges unter Vermittelung der Reibung zwischen den Triebrädern und den Schienen.

Der reine Kettenschluss zur zwangläufigen Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes besteht in der Verbindung des letzteren mit einem anderen, dem seinigen gleichartigen Mechanismus, der nicht auch durch eine besondere äussere Kraft angegriffen wird, vielmehr nur dazu dient, die Uebertragung der Kraft und der Bewegung von dem unmittelbar an-

gegriffenen zu dem festgestellten Gliede des ursprünglichen Mechanismus unter diesem und dem hinzugefügten so zu vertheilen, dass sie in den Todlagen des ersteren von letzterem allein und zwar zwangläufig übernommen werden kann. So können die Todlagen des Parallelkurbelgetriebes  $ABCD$  (Fig. 34, §. 31) kettenschlüssig überschritten werden durch Verbindung mit einem Mechanismus gleicher Art, der mit jenem den Steg  $AD$  gemein hat, und dessen unter sich (nicht nothwendig auch mit  $AB$  und  $CD$ ) gleich lange Kurbeln  $AB'$  und  $C'D$  beziehungsweise mit den Kurbeln  $AB$  und  $CD$  durch die gemeinschaftlichen Axen  $A$  und  $D$  in solcher Weise fest verbunden sind, dass die gleichen Winkel  $BAB'$ ,  $CDC'$  von  $0$  und  $180^\circ$  verschieden, insbesondere etwa  $= 90^\circ$  sind (Locomotiven mit gekuppelten Axen); oder auch dadurch, dass eine dritte Kurbel  $A'B'$ , die (in einer Ebene mit den ebenso langen Kurbeln  $AB$  und  $CD$ ) um eine fest gelagerte, mit  $A$  und  $D$  parallele, aber nicht in derselben Ebene liegende Axe  $A'$  drehbar ist, mit den Kurbelzapfen  $B$  und  $C$  durch Koppeln von den Längen  $B'B = A'A$  und  $B'C = A'D$  verbunden wird, die dann auch mit der ersten Koppel  $BC$  zu einem dreieckigen Rahmen  $BCB'$  vereinigt werden können.

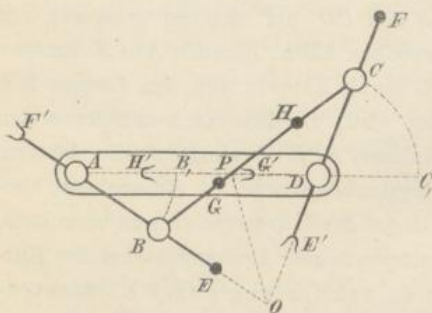
Bei dem symmetrischen Zwillingkurbelgetriebe ist ein analoges Verfahren, die Ueberschreitung der Todlagen durch Kettenschluss zu vermitteln, wegen des variablen Verhältnisses entsprechender Drehungswinkel der Kurbeln nicht ausführbar; dagegen führt die Schliessung durch Elementenpaare hier zum Ziele. Bei dieser Methode im Allgemeinen müssen von den Axoiden der aushülfsweise vorübergehend zu paarenden zwei Kettenglieder  $G$ ,  $G'$  (jedenfalls solcher, die nicht schon beständig gepaart sind, also nicht benachbarter Glieder) kleine Stücke beiderseits von ihrer Berührungslinie (Polaxe) in der Todlage des Getriebes bekannt sein, insbesondere im gewöhnlichen Falle cylindrischer Axoide kleine Stücke ihrer Querschnitte (Polbahnen)  $B$ ,  $B'$  beiderseits von ihrem der Todlage entsprechenden Berührungspunkte (Pol)  $P$ . Verzeichnet man in diesem Falle ein kleines Stück der Bahn  $F'$ , das der in der Todlage mit  $P$  zusammenfallende Punkt  $F$  der Polbahn  $B$  beiderseits von dieser Lage relativ gegen  $B'$  durchläuft (entsprechend dem Rollen von  $B$  auf  $B'$ ), so kann man nach den Methoden der Punktverzahnung und des Ersatzes von Elementenprofilen durch äquidistante Curven (§. 18) als das Profil des mit dem Gliede  $G$  zu verbindenden Elementes einen aus  $F$  als Mittelpunkt mit irgend einem kleinen Halbmesser  $\rho$  beschriebenen Kreis, und als das entsprechende Profil des anderen Elementes eine mit  $F'$  in der Entfernung  $\rho$  äquidistante Curve wählen. Das in der Todlage die Glieder  $G$ ,  $G'$  paarende und dadurch bei passender Wahl dieser Glieder die Kette zwangläufig schliessende Elementenpaar ist

dann ein triebstockförmiger einzelner Zahn mit einer gabelförmigen entsprechenden einzelnen Zahnücke.

Wenn nun z. B. das symmetrische Zwillingsskurbelgetriebe  $ABCD$  in seinen Todlagen durch Elementenpaarung zwangläufig gemacht werden soll, so kann das durch Paarung entweder der Kurbeln  $AB$  und  $CD$ , oder der Koppel  $BC$  mit dem Stege  $AD$  geschehen, und es ergeben sich die diesen beiden Gliederpaaren als Elementenpaare entsprechenden Polbahnen durch folgende Betrachtung.

Es sei  $ABCD$  (Fig. 35) irgend eine Lage des Getriebes, entsprechend den von der Todlage  $AB, C, D$  aus gerechneten, in entgegengesetztem Sinne beschriebenen Drehungswinkeln

Fig. 35.



$B, AB$  und  $C, DC$  der Kurbeln, deren Länge hier kleiner, als die von Steg und Koppel vorausgesetzt ist;  $P$  sei der Durchschnittspunkt der Geraden  $AD$  und  $BC$ ,  $O$  der Schnittpunkt von  $AB$  und  $CD$ . Wegen Gleichheit der Seiten sind die Dreiecke  $ABD$  und  $CDB$  congruent und symmetrisch liegend in Beziehung auf die Normale ihrer gemeinsamen Seite  $BD$  im

Mittelpunkte derselben, so dass sie durch Drehung um diese Symmetrieaxe zur Deckung gebracht werden können. Letztere enthält deshalb die Punkte  $O$ ,  $P$  und halbiert die Winkel  $AOC$ ,  $APC$  (ihre Normale in  $P$  die Scheitelwinkel  $APB$ ,  $CPD$ ), und es ist:

$$\begin{aligned} OA &= OC, & OB &= OD, \\ PA &= PC, & PB &= PD. \end{aligned}$$

Nun besteht die augenblickliche Bewegung von  $CD$  gegen  $AB$  in einer Drehung um  $P$  als Pol, nämlich als den Punkt, in dem sich die entsprechenden Halbmesser der von  $C$  um  $B$  und von  $D$  um  $A$  beschriebenen Kreise schneiden, und da

$$AP + BP = AD = DP + CP$$

ist, so folgt, dass die Polbahnen der Kurbeln  $AB$  und  $CD$  congruente Ellipsen sind mit den grossen Axen  $EF'$  und  $E'F = AD$  und mit den Brennpunkten  $A, B$  resp.  $C, D$ .\* Diese Ellipsen berühren

\* Die Beziehungen zwischen entsprechenden Drehungswinkeln von solchen um je einen ihrer Brennpunkte drehbaren congruenten elliptischen Polbahnen,

sich mit  $PO$  als gemeinsamer Tangente in einem wechselnden Punkte  $P$  von  $AD$ . In der einen Todlage  $AB, C, D$  fallen  $E$  und  $E'$  in der einen Grenzlage von  $P$ , in der anderen fallen  $F$  und  $F'$  in der anderen Grenzlage von  $P$  zusammen.  $E$  und  $E'$ ,  $F$  und  $F'$  sind deshalb an entsprechenden Verlängerungen der Kurbeln als Zähne  $E, F$  und Zahnlücken  $E', F'$  (Triebstöcke und Gabeln) zu gestalten, um die Kurbeln zusammen zu paaren.

Was die Paarung der Koppel mit dem Stege betrifft, so kann man bemerken, dass die augenblickliche Bewegung von  $BC$  gegen  $AD$  (Fig. 35) eine Drehung um  $O$ , und dass

$$OA - OD = AB$$

ist. Daraus folgt, dass die Polbahn des Steges  $AD$  eine Hyperbel mit den Brennpunkten  $A, D$  und mit der reellen Axe  $G'H' =$  der Kurbellänge ist, ebenso dann natürlich auch die Polbahn des (mit  $AD$  vertauschbaren) Gliedes  $BC$  die jener congruente Hyperbel mit den Brennpunkten  $B, C$  und der Axe  $GH = G'H'$ . Beide Hyperbeln berühren sich im Durchschnittspunkte  $O$  der Kurbelrichtungen (Mittellinien der Kurbeln) mit gemeinsamer Tangente  $OP$ . In den Todlagen des Getriebes fallen  $G, G'$  resp.  $H, H'$  mit dem Pol  $O$  zusammen, und es kann etwa die Koppel bei  $G$  und  $H$  mit Triebstöcken, der Steg bei  $G'$  und  $H'$  mit Gabeln als entsprechenden Zahnlücken versehen werden.

Ebenso wie durch Kettenschluss ist, übrigens auch durch Elementenpaare die Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes nicht immer ausführbar; denn es ist dazu nöthig, dass der Pol der zu paarenden Glieder in zugänglicher Entfernung und auch nicht in der Richtungslinie der treibenden Kraft liege. Bei dem Schubkurbelgetriebe (Fig. 33) ist es also nicht möglich, weil in den Todlagen der Pol sowohl für die relative Bewegung von Kurbel und Schieber (d. i. der mit  $A$  zusammenfallende Schnittpunkt von  $BC$  mit der in  $A$  auf  $AC$  errichteten Senkrechten) wie für die relative Bewegung von Koppel und Steg (d. i. der mit  $C$  zusammenfallende Schnittpunkt von  $AB$  mit der in  $C$  auf  $AC$  errichteten Senkrechten) in die Richtungslinie  $AC$  der den Schieber angreifenden Kraft fällt; bei dem Parallelkurbelgetriebe (Fig. 34) ist es deshalb unthunlich, weil der Pol sowohl für die relative Bewegung der Kurbeln (Schnittpunkt von Koppel und Steg) wie für die relative Bewegung von Koppel und Steg (Schnittpunkt der Kurbeln) im Unendlichen liegt.

die also auch für entsprechende Drehungswinkel der Kurbeln  $AB$  und  $CD$  des vorliegenden Getriebes gelten, wurden in §. 22 unter 2) einer näheren Betrachtung unterworfen.



### III. Elementare Mechanismen.

Die Kinematik ist insofern eine wesentliche Grundlage des Maschinenbaues, als sie Anleitung zur Bildung solcher elementarer Mechanismen geben soll, die zur Vermittelung gegebener, dem Zwecke gewisser Maschinen entsprechender Bewegungen geeignet sind, unter einem elementaren Mechanismus nach §. 1 einen solchen verstanden, dessen kinematische Kette einer Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist. Indessen ist es doch eben nur eine die unerlässliche Combinationsgabe des Constructeurs unterstützende Anleitung, die zu dem fraglichen Zweck von der Kinematik verlangt werden kann, da die umfassende Bezeichnung der zu irgend einem bestimmten Bewegungszwecke dienlichen Mechanismen theils unthunlich ist, weil derselbe Bewegungszweck im Allgemeinen auf viele verschiedene oder gar auf unzählig viele Arten durch Mechanismen erreicht werden kann, theils auch nur von geringem Werthe wäre, weil die Auswahl der praktisch brauchbaren und vortheilhaften unter den principiell möglichen Lösungen von Umständen abhängig bliebe, die, ausserhalb des Bereichs der Kinematik liegend, einer unendlichen Mannigfaltigkeit fähig, einer erschöpfenden Berücksichtigung im Voraus also unfähig sind. Ebenso ist es auch bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare und zusammengesetzter Ketten unmöglich, die kinematische Grundlegung des Maschinenbaues in erschöpfender Weise umgekehrt dadurch zu erzielen, dass systematisch alle möglichen Mechanismen ermittelt und ihre kinematischen Eigenschaften untersucht werden, um etwa so als Vorrath zur Auswahl für irgend einen zu realisirenden machinalen Bewegungszweck zu dienen; nur in beschränkter Weise ist diese Aufgabe lösbar, besonders bei Beschränkung auf einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren, die somit als Umschlusspaare ausgeführt werden können, wie sie namentlich mit Rücksicht auf die Leichtigkeit ihrer Herstellung und die Dauerhaftigkeit ihrer Form vorzugsweise verwendet werden. Diese und einige andere unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen mögliche Verbindungen von Elementenpaaren zu kinematischen Ketten und die Eigenschaften der daraus herstellbaren Mechanismen aufzusuchen, ist Zweck der folgenden Erörterungen.

#### a. Einfache Mechanismen.

Darunter werden solche Mechanismen verstanden, deren zwangläufig geschlossene kinematische Ketten einfach sind (§. 1). Die Glieder einer

solchen Kette enthalten je zwei Elemente, und seien in der Reihenfolge, in der sie durch die Elementenpaare

$A B C \dots N$  verbunden sind,

allgemein mit  $a b c \dots n$  bezeichnet,

so dass das Elementenpaar  $A$  die Glieder  $n$  und  $a$ ,

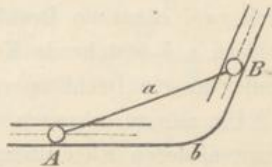
„ „ „  $B$  „ „  $a$  „  $b$ ,

„ „ „  $C$  „ „  $b$  „  $c$  etc.

verbindet. Die Zahl der Glieder ist so gross wie die der Elementenpaare und wenigstens = 2.

Eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette mit nur 2 Gliedern wird z. B. gebildet (Fig. 36) vom einem Stabe  $a$ , der mit zwei Zapfen (Drehkörpern mit parallelen Axen) in entsprechenden geradlinigen Schlitten einer Platte  $b$  so beweglich ist, dass eine relative Schiebung im Sinne der Zapfenaxen (infolge der Zapfenform) nicht stattfinden kann. Die Elementenpaare  $A, B$  sind hier höhere mit je zweifacher Beweglichkeit und je zwei Freiheitsgraden. Die relative Beweglichkeit der Glieder  $a$  und  $b$  ist dieselbe wie die des Figurenpaares „Strecke und Winkel“ (§. 12).

Fig. 36.



### 1. Einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren.

#### §. 33. Vorbemerkungen.

Einfache Mechanismen mit niederen Elementenpaaren kommen hier nur als wenigstens dreigliedrige Ketten in Betracht, weil sie, wenn zweigliedrig und zwangläufig beweglich, stets als einzelne zwangläufige niedere Elementenpaare betrachtet werden können. Wenn z. B. ein stabförmiger Körper, der am einen Ende cylinderförmig, am anderen plattenförmig und zwar so gestaltet ist, dass die parallelen Begrenzungsebenen dieses letzteren Stabendes mit der Cylinderaxe am anderen parallel sind, als das eine Glied  $a$  mit einem anderen Körper als zweitem Glied  $b$ , der mit entsprechender cylindrischer Bohrung und mit entsprechendem Schlitz versehen ist, einerseits durch ein Cylinderpaar  $A$ , andererseits durch ein Plattenpaar  $B$  verbunden wird, so entsteht zwar zunächst eine zweigliedrige Kette mit den zwei Elementenpaaren  $A$  und  $B$ , deren Glieder  $a, b$  aber dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente eines Prismenpaares, und in der That

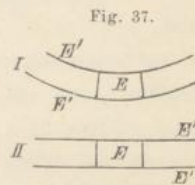
sind die Berührungsflächen beider Elementenpaare  $A, B$  zusammen als getrennte Theile einer prismatischen (durch Translationsbewegung einer Geraden zu erzeugenden) Fläche zu betrachten. Oder wenn ein Körper  $a$  mit einem Körper  $b$  zugleich durch ein Schraubenpaar  $A$  und durch ein damit conaxiales Cylinderpaar  $B$  verbunden wird, so ist die relative Beweglichkeit der Körper  $a, b$  dieselbe, als ob sie nur durch das Schraubenpaar  $A$  als Elemente desselben verbunden wären; in der That ist hier die Berührungsfläche des Cylinderpaares  $B$  als geometrischer Ort unendlich vieler congruenter Schraubenlinien von gleicher Steigung mit denen des Schraubenpaares  $A$ , und sind somit die Berührungsflächen beider Elementenpaare  $A, B$  als nur getrennte Theile derselben Schraubenfläche zu betrachten. Ebenso verhält es sich mit einer Welle  $a$ , die an beiden Enden mit Zapfen in entsprechenden Lagern eines Gestelles  $b$  drehbar, mit diesem nämlich durch zwei conaxiale Drehkörperpaare  $A, B$  verbunden ist; die aus den Gliedern  $a, b$  bestehende Kette ist dann als ein einzelnes Elementenpaar, nämlich als ein Drehkörperpaar zu betrachten.

Um nun zu erkennen, wie viele und welche Mechanismen sich mit gewissen niederen Elementenpaaren bei einer gewissen Art der Verbindung ihrer Glieder durch dieselben bilden lassen, sind zunächst die möglichen betreffenden kinematischen Ketten zu ermitteln, und ist zu dem Ende zu untersuchen, ob die Minimalzahl von 3 Elementenpaaren resp. Gliedern zur Beweglichkeit der Kette ausreicht, wie gross dazu anderenfalls diese Zahl wenigstens sein muss, ferner wie gross sie höchstens sein darf, um noch die relative Zwangläufigkeit von je zwei Kettengliedern zur Folge zu haben. Bei dieser Untersuchung werden im Folgenden alle Elementenpaare zunächst nicht nur als niedere, unbeschadet der Allgemeinheit als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende vorausgesetzt, sondern auch als zwangläufige, somit als Prismenpaare, Drehkörperpaare oder Schraubenpaare, und zwar sollen der Reihe nach betrachtet werden:

- 1) Prismenkettten, nämlich Ketten mit nur Prismenpaaren,
- 2) Drehkörperkettten, nämlich Ketten mit Drehkörperpaaren allein oder zugleich mit Prismenpaaren,
- 3) Schraubenkettten, nämlich Ketten mit Schraubenpaaren allein oder zugleich mit Prismen- resp. Drehkörperpaaren.

Diese Bezeichnungen und diese Aufeinanderfolge als dem Fortgange vom Speciellen zum Allgemeineren entsprechend sind dadurch begründet, dass das Prismen- und das Drehkörperpaar als Grenzformen des Schraubenpaares betrachtet werden können, das Prismenpaar aber auch als Grenzform des Drehkörperpaares. Ersteres ist schon in §. 5 bei der Herleitung

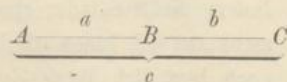
dieser 3 Paare als einzig möglicher zwangläufiger Umschlusspaare hervorgehoben worden. Was aber die Auffassung des Prismenpaares als Grenzfall des Drehkörperpaares betrifft, so werde letzteres in der Weise ausgeführt gedacht, dass ein ringförmiger Körper als das eine Element  $E$  in einer entsprechenden ringförmigen Höhlung des anderen Elementes  $E'$  mit diesem in Berührung ist, indem beide von je zwei conaxialen Umdrehungsflächen von solchen Lagen und mit so gestalteten (nicht concentrischen Kreisen als Bögen angehörigen) Meridianlinien begrenzt seien, dass irgend ein isolirtes Segmentstück des einen Elementes gegen das andere nicht anders beweglich, als um die gemeinsame Axe der beiden Umdrehungsflächen drehbar ist. Unter diesen Umständen kann unbeschadet des kinematischen Charakters dieses Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen Drehkörperpaares das eine der beiden Elemente auf ein solches Segmentstück reducirt werden, in Fig. 37, I z. B. das ursprünglich als voller Ring ausgeführte Element  $E$ . Lässt man dann die Axe weiter und weiter vorrücken (ohne Aenderung der Meridianlinien beider Umdrehungsflächen), so geht das Drehkörperpaar in der Grenze in ein Prismenpaar (Fig. 37, II) über, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe und zu der Richtung ist, nach welcher dieselbe ins Unendliche vorrückte. Diese vorgestellte Entstehungsweise des Prismenpaares wird im Folgenden mehrfach Dienste leisten, um die Verwandtschaft gewisser Gruppen von Mechanismen in ein helleres Licht zu setzen.



#### α. Mechanismen aus Prismenketten.

##### §. 34. Ebene Prismenkette.

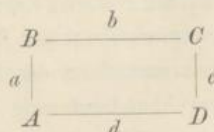
Eine Prismenkette heiße eben, wenn die Schubrichtungen ihrer Prismenpaare alle derselben Ebene  $II$  parallel sind. Eine solche, und zwar zwangläufig geschlossene einfache ebene Prismenkette bestehe (vorbehaltlich der zu erweisenden Möglichkeit) aus 3 Gliedern  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , die durch die Prismenpaare  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nach dem Schema



so verbunden sind, dass die Schubrichtung keines dieser Paare mit der eines anderen derselben parallel ist. Letzteres muss vorausgesetzt werden,

weil, wenn z. B. die Schubrichtungen der Paare  $A$  und  $B$  parallel wären, die ganze Kette nur ein Prismenpaar wäre, bestehend aus dem Gliede  $a$  als dem einen und den vereinigten Gliedern  $b, c$  als dem anderen Elemente. Zur zwangläufigen Beweglichkeit der Kette ist nun erforderlich und genügend, dass irgend ein Glied, z. B.  $a$ , gegen irgend ein anderes, z. B.  $c$ , überhaupt beweglich sei, weil dann die Zwangläufigkeit die nothwendige Folge derjenigen des diese Glieder  $a, c$  unmittelbar verbindenden Paares  $A$  ist; dass aber Beweglichkeit hier vorhanden ist, folgt daraus, dass die Verbindung von  $a$  mit  $c$  durch die Paare  $B$  und  $C$  mit sich schneidenden, der Ebene  $H$  parallelen Schubrichtungen jede Schiebung nach irgend einer Richtung in  $H$ , insbesondere also auch diejenige zulässt, die dem Paare  $A$  zukommt.

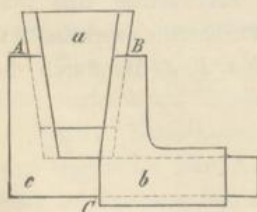
Besteht die ebene Prismenkette aus 4 Gliedern  $a, b, c, d$  nach dem Schema



so sind die Schubrichtungen von je zwei aufeinander folgenden Prismenpaaren verschieden vorauszusetzen, widrigenfalls sich die Kette auf ein einzelnes Paar reducirte. Sind aber die Schubrichtungen von  $A$  und  $B$ , desgleichen die von  $C$  und  $D$  verschieden, so ist  $b$  gegen  $d$  sowohl in Folge der Verbindung durch die Paare  $A$  und  $B$ , als in Folge der Verbindung durch die Paare  $C$  und  $D$ , somit überhaupt nach jeder Richtung in der Ebene  $H$  beweglich, die Zwangläufigkeit der Kette folglich nicht vorhanden.

Die ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur dreigliedrig sein mit verschiedenen Schubrichtungen ihrer 3 Prismenpaare. Eine solche ist z. B. die bekannte Keilkette (Fig. 38).<sup>\*</sup> Gewöhnlich ist sie kraftschlüssig; um selbständig

Fig. 38.



geschlossen zu sein, wären indessen nur die Federn, mit denen der Keil  $a$  in entsprechenden Nuthen der Glieder  $b$  und  $c$  eingreift, schwalbenschwanzförmig (mit trapezförmigem, auswärts sich verbreiterndem Querschnitte) zu gestalten. — Indem die 3 Glieder einer solchen ebenen Prismenkette sich kinematisch weder an und für sich, noch bezüglich ihres Zusammenhanges mit den übrigen unterscheiden, sind auch die 3 Mechanismen, die daraus durch Feststellung eines Gliedes gebildet werden können,

kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 3 Prismenpaare parallel ist, in 2 Componenten parallel den Schubrichtungen der anderen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 3 Prismenpaare sind den betreffenden Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer zwangläufigen ebenen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die mit ihr in derselben Ebene liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 2 ist und die Richtungen aller 3 Geschwindigkeiten verschieden sind.

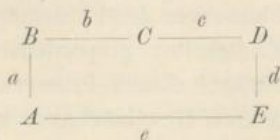
### §. 35. Allgemeine Prismenkette.

Eine nicht ebene einfache geschlossene Prismenkette muss, um beweglich zu sein, wenigstens 4 Paare enthalten; denn bei der dreigliedrigen Kette wären in diesem Falle irgend zwei Glieder, z. B.  $a$  und  $c$  unbeweglich gegen einander, indem die ihrer Verbindung durch das Paar  $A$  als einzig mögliche entsprechende Schiebung thatsächlich unmöglich, weil nicht parallel der Ebene wäre, längs welcher allein sich beide in Folge ihrer Verbindung durch die Paare  $B, C$  verschieben könnten.

Im Falle von 4 Gliedern  $a, b, c, d$  können von den Schubrichtungen der dieselben verbindenden Prismenpaare  $A, B, C, D$  schon je 3 nicht zugleich derselben Ebene parallel sein. Denn wenn z. B. die Schubrichtungen von  $B, C, D$  derselben Ebene parallel wären, mit der die Schubrichtung von  $A$  dann nicht parallel ist, so wäre damit  $a$  gegen  $d$  unbeweglich. Ist aber jene Bedingung erfüllt, dass schon die Schubrichtungen von je 3 Paaren nicht derselben Ebene parallel sind (in welchem Falle insbesondere auch nicht zwei Schubrichtungen parallel sein können), so ist zunächst ersichtlich, dass dann je zwei aufeinander folgende Glieder gegenseitig zwangläufig beweglich sind; denn das Glied  $a$  z. B. ist dann gegen  $d$  in Folge der Verbindung durch die Paare  $B, C, D$  nach jeder Richtung im Raume, insbesondere also auch nach derjenigen verschieblich, die seiner Verbindung mit  $d$  durch das Paar  $A$  als einzig mögliche entspricht. Was aber gegenüber liegende Glieder wie z. B.  $b$  und  $d$  betrifft, so ist das eine gegen das andere in Folge ihrer Verbindung durch die Paare  $A, B$  irgendwie längs einer gewissen Ebene, in Folge ihrer Verbindung durch die Paare  $C, D$  längs einer anderen Ebene, überhaupt also längs der Durchschnittslinie dieser Ebenen und nicht anders, somit zwangläufig verschiebbar. Die ganze Kette ist also

zwangläufig, da jedes ihrer Gliederpaare entweder durch  $a$ ,  $d$  oder durch  $b$ ,  $d$  repräsentirt werden kann.

Eine Prismenkette mit 5 Gliedern nach dem Schema



ist jedenfalls nicht zwangläufig. Denn die Schubrichtungen benachbarter Paare, wie  $A$  und  $B$ , müssten verschieden sein, widrigenfalls diese Paare sich auf eines reducirten; indem also das Glied  $b$  gegen das Glied  $e$  in Folge der Verbindung durch die Paare  $A, B$  beliebig längs einer gewissen Ebene verschieblich wäre, dürfte ihrer Verbindung durch die Paare  $C, D, E$  nur auch die Verschiebbarkeit längs einer gewissen anderen Ebene entsprechen, damit sie gegenseitig zwangläufig, nämlich nur längs der Durchschnittslinie beider Ebenen verschieblich seien. Die Schubrichtungen der Paare  $C, D, E$  müssten folglich derselben Ebene parallel sein, was dann aber, da dasselbe von je 3 aufeinander folgenden Paaren gilt, den Parallelismus der Schubrichtungen aller Paare mit derselben Ebene, somit nach vorigem §. die mehrfache Beweglichkeit der Kette zur Folge hätte.

Die nicht ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur viergliedrig sein der Art, dass die Schubrichtungen schon von je 3 ihrer 4 Prismenpaare nicht derselben Ebene parallel sind. Die 4 Mechanismen, die durch Feststellung eines Gliedes der Kette erhalten werden können, sind auch hier kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 4 Prismenpaare parallel ist, in 3 Componenten parallel den Schubrichtungen der übrigen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 4 Prismenpaare sind den betreffenden jener Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer allgemeineren zwangläufigen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die nicht in derselben Ebene mit ihr liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 3 ist und die Richtungen von je 3 Geschwindigkeiten nicht in derselben Ebene liegen. — Im Maschinenbau ist die viergliedrige Prismenkette nicht gebräuchlich. Sie könnte aber Anwendung finden sowohl dort wie auch z. B. bei Instrumenten zur mechanischen Ausführung von Rechnungsoperationen, denen die Beziehung zwischen den Kanten und den Diagonalen eines

Parallelepipedum zu Grunde liegt, wenn die Glieder mit Skalen versehen würden, an denen die relativen Schiebungen benachbarter Glieder, also der Paarelemente abzulesen sind.

### β. Mechanismen aus Drehkörperketten.

Drehkörperpaare sind die im Maschinenbau am häufigsten angewendeten Elementenpaare. Neben den Vorzügen, die sie mit den übrigen Umchlusspaaren gemein haben, empfehlen sie sich auch selbst diesen gegenüber durch die Leichtigkeit ihrer Herstellung und dadurch, dass sie zu größtmöglicher Verminderung von Reibungswiderständen, von Abnutzung und Arbeitsverlusten, sowie auch zu einfachster Vermittelung eines gleichförmigen Ganges der betreffenden Maschinen (durch rotirende Massen, Schwungräder) besonders geeignet sind. Die mit ihnen zu bildenden einfachen Mechanismen verdienen deshalb eine besonders eingehende Untersuchung, und zwar namentlich die ebenen, demnächst auch die sphärischen Drehkörpermechanismen, d. h. die beiden Fälle, in denen die Axen der Drehkörperpaare parallel sind oder sich in einem Punkte schneiden, die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied folglich in parallelen Ebenen oder in concentrischen Kugelflächen liegen.

### §. 36. Ebene Drehkörperkette.

In der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, seien  $a, b, c \dots$  die Glieder,  $A, B, C \dots$  die Drehkörperpaare derselben; unter Umständen seien mit  $A, B, C \dots$  auch die geometrischen Axen der gleichnamigen Paare oder auch die Punkte bezeichnet, in denen diese Axen von der dazu senkrechten Zeichnungsebene  $H$  (mit welcher die Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder parallel sind) geschnitten werden; bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben  $A, B, C \dots$  seien dann  $a = AB$ ,  $b = BC$ ,  $c = CD \dots$  zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass z. B.  $A$  und  $B$  als Axen (gerade Linien) verstanden sind, wenn von der Ebene  $AB$ , als Punkte, wenn von der Geraden oder der Strecke  $AB$  die Rede sein wird, dass ferner die Buchstaben  $a, b \dots$  als Längen verstanden sind, wenn sie in Gleichungen vorkommen oder wenn anderweitig von ihnen als von Grössen etwas ausgesagt wird u. s. f.



Im Falle der dreigliedrigen Kette  $a, b, c$  kann die Polaxe der relativen Bewegung irgend zweier Glieder, z. B.  $a$  und  $c$ , in Folge ihrer Verbindung durch die Paare  $B, C$  nur jede mit den Axen parallele Gerade in der Ebene  $BC$  sein; weil aber andererseits diese Polaxe nur die Axe  $A$  des die Glieder  $a, c$  unmittelbar verbindenden Paares sein kann, ist relative Bewegung nur möglich, wenn alle 3 Axen in derselben Ebene liegen. Liegen sie dabei im Endlichen, so tritt freilich schon in Folge einer unendlich kleinen Bewegung die bewegliche Axe aus der Ebene der mit dem festgestellten Gliede unbeweglichen zwei anderen Axen heraus, und wird damit die weitere Bewegung unmöglich. — Lässt man eine Axe, z. B.  $C$ , in der Ebene  $AB$  ins Unendliche rücken, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares  $C$  in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung senkrecht zur Ebene  $AB$  ist, so ist die Beweglichkeit nach wie vor nur unendlich klein. — Rücken zwei Axen, z. B.  $B$  und  $C$ , ins Unendliche, so müssen sie im Unendlichen zusammenfallen, um mit der Axe  $A$  in einer Ebene zu liegen (die Punkte  $B, C$  müssen in demselben Punkt der unendlich fernen Geraden der Ebene  $H$  liegen, um mit dem Punkt  $A$  in einer Geraden liegen zu können). Die Drehkörperpaare  $B, C$  sind dann in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen übergegangen; das Glied  $b$  ist zwar gegen  $a$  und  $c$  beliebig verschiebbar, aber  $a$  und  $c$  sind gegen einander unbeweglich resp. nur unendlich wenig beweglich geblieben: die ganze Kette ist ein Prismenpaar geworden, bestehend aus den Gliedern  $b$  und  $ac$ . — Liegen endlich alle 3 Axen im Unendlichen, so brauchen nicht mehr zwei zusammenzufallen, um mit der dritten in einer Ebene zu liegen (die Punkte  $A, B, C$  können verschiedene Punkte der unendlich fernen Geraden der Ebene  $H$  sein); die Kette geht damit in die schon besprochene ebene Prismenkette (§. 34) über. Hier kann es sich also nur noch um wenigstens viergliedrige Drehkörperketten mit ihren Derivaten handeln.

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette (Fig. 39) sei  $d$  das festgestellte Glied, also  $a$  eines der beiden ihm benachbarten,  $b$  das gegenüber liegende Glied. Das Glied  $a$  ist zwangläufig, wenn die Polaxe  $A$ , die seiner Verbindung mit  $d$  durch das Paar  $A$  entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit  $d$  durch die Paare  $B, C, D$  haben kann, was aber immer der Fall ist, ausser wenn die Axen  $B, C, D$  in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe  $A$  enthält. Das Glied  $b$  ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene  $AB$  von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene  $CD$  geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen  $AB$  und  $CD$  zusammenfallen.

Die viergliedrige ebene Drehkörperkette ist also zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen, sei es dass die vierte zugleich in dieser Ebene liegt oder nicht; diese Ausnahmefälle entsprechen übrigens, wenn nicht etwa ein Glied so lang wie die übrigen zusammen ist, nur Uebergangslagen des betreffenden Mechanismus. Ob letztere zugleich Todlagen (§. 31) sind oder ob in ihnen die den Mechanismus als Getriebe zu seiner Bewegung antreibende Kraft die Zwangläufigkeit vermittelt, hängt von der Art und Weise ab, wie der Mechanismus als Getriebe verwendet wird; jedenfalls sind es nur jene Uebergangslagen, in denen Todlagen stattfinden können.

Die fünfgliedrige Kette ist schon nicht mehr zwangläufig. Denn wenn das Glied  $b$  (Schema siehe §. 35) gegen das Glied  $e$  zwangläufig sein soll, so müssen die Axen  $C, D, E$  in einer Ebene liegen, die von der Ebene  $AB$  in der betreffenden Polaxe geschnitten wird. Es müssten also, wenn die Kette zwangläufig sein sollte, je 3 aufeinander folgende Paaraxen in einer Ebene liegen, die nicht die beiden anderen Axen enthielte, was unmöglich ist. —

Was die nun näher zu betrachtenden Mechanismen aus der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette betrifft, so sind dieselben durch die verhältnissmässigen Längen der Kettenglieder bedingt, wodurch allein sich letztere wesentlich unterscheiden können; von diesen Längenverhältnissen ist es dann auch abhängig, ob und inwiefern der Mechanismus von anderer Art ist, jenachdem er durch Feststellung des 1<sup>ten</sup>, 2<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup> oder 4<sup>ten</sup> Gliedes einer gegebenen viergliedrigen Drehkörperkette erhalten wird. Im Folgenden soll immer das festgestellte Glied, hier mit  $d$  bezeichnet, der Steg genannt werden; das ihm gegenüber liegende ist dann  $b$  (bei beständiger Festhaltung der alphabetischen Reihenfolge  $a, b, c \dots$  für die Bezeichnung der in der Kette aufeinander folgenden Glieder) und heisse die Koppel. Von den beiden anderen Gliedern  $a, c$  sei  $a$  das kürzere, sofern sie nicht gleich lang sind; sie sollen verschiedene Namen erhalten, jenachdem sie, wenn der Mechanismus alle möglichen Configurationen in stetiger Aufeinanderfolge durchläuft, dabei um ihre mit dem Stege festen Axen ( $A$  resp.  $D$ ) zwischen zwei Grenzlagen schwingen (sich hin und her drehen), oder in einem unveränderlichen Sinne rotiren (sich rings herum drehen), und zwar sollen sie im ersten Falle als Schwinge, im zweiten als Kurbel bezeichnet werden. Indem sich nun entweder jedes dieser Glieder als Schwinge, oder das eine als Schwinge, das andere als Kurbel, oder endlich jedes als Kurbel verhält, sind die folgenden 3 Arten von Mechanismen zu unterscheiden:

1. Doppelschwingmechanismus (Doppelschwinge),
2. Schwingkurbelmechanismus (Schwingkurbel oder Kurbelschwinge),

## 3. Doppelkurbelmechanismus (Doppelkurbel).

Sofern die Bewegung von einem der Glieder  $a$ ,  $c$  ausgeht (durch eine das Glied  $a$  oder  $c$  angreifende Kraft bewirkt wird), seien die betreffenden Getriebe bezeichnet als:

1. Doppelschwinggetriebe,
2. Schwingkurbelgetriebe oder Kurbelschwinggetriebe, jenachdem die Bewegung von der Schwinge oder von der Kurbel ausgeht,
3. Doppelkurbelgetriebe.

Bei der folgenden Uebersicht der Beziehungen zwischen den Längen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , die für die 1<sup>te</sup>, 2<sup>te</sup> oder 3<sup>te</sup> Mechanismenart charakteristisch sind, werden diese Längen einstweilen alle als endlich vorausgesetzt, auch die Specialfälle  $c = a$  und  $d = a$  vorläufig ausgeschlossen, so dass also

$$c > a; \quad d \geq a; \quad b < a + c + d$$

ist. Der um den Punkt  $A$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser  $AB = a$  beschriebene Kreis (Fig. 39—44) heisse der Kreis ( $B$ ), der um den Punkt  $D$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser  $DC = c$  beschriebene der Kreis ( $C$ ); von der Geraden  $AD$  werde ersterer in den Punkten  $B_0$ ,  $B_n$ , letzterer in den Punkten  $C_0$ ,  $C_n$  geschnitten, welche Punkte so bezeichnet sind, dass die Richtungen  $B_0B$ , und  $C_0C$ , mit der Richtung  $AD$  übereinstimmen.

Sind die Längen  $a$ ,  $c$ ,  $d$  gegeben, und lässt man die Koppellänge  $= b$  von der unteren Grenze  $= \text{Null}$  an zunehmen oder von der oberen Grenze  $= a + c + d$  an abnehmen, so nimmt die Beweglichkeit des Mechanismus in beiden Fällen allmählig zu, indem die Glieder  $a$  und  $c$  in von Null an zunehmenden Schwingungswinkeln beweglich werden, der Mechanismus also anfangs eine Doppelschwinge ist. Somit wird überhaupt der Mechanismus eine Doppelschwinge sein für alle Werthe von  $b < a + c + d$ , die kleiner sind, als die kleinste, oder grösser, als die grösste Koppellänge, welche bei gegebenen Werthe von  $a$ ,  $c$ ,  $d$  einer Schwingkurbel oder Doppelkurbel zukommt, so dass nur noch für diese letzteren Mechanismenarten die Existenzbedingungen festgestellt zu werden brauchen. Dieselben, abhängig von der relativen Lage der Punkte  $A$ ,  $B_0$ ,  $B_n$ ,  $C_0$ ,  $C_n$ ,  $D$ , sollen in zwei Gruppen betrachtet werden, jenachdem  $d > a$  oder  $d < a$  ist.

1) Wenn man im Falle  $d > a$  bei gegebenen Längen  $a$ ,  $c$  den Steg stetig kürzer werden lässt von einer solchen Länge  $d > a + c$  an gerechnet, bei der die Kreise ( $B$ ) und ( $C$ ) sich gegenseitig ausschliessen (Fig. 39), so werden sich endlich diese Kreise schneiden, zuerst so, dass  $C_0$  zwischen  $A$  und  $B$ , liegt (Fig. 40), dann so, dass  $C_0$  zwischen  $A$  und  $B_0$  liegt (Fig. 41), und wenn  $c$  nicht nur  $> a$ , sondern auch  $> 2a$  ist, so kann schliesslich der Kreis ( $C$ ) den Kreis ( $B$ ) ganz einschliessen (Fig. 42). In allen diesen

Specialfällen, also überhaupt im Falle  $d > a$  kann das Glied  $c$  nie Kurbel sein, wie lang auch die Koppel gewählt werden mag; denn zu dem Ende müsste der Punkt  $C$  in die Lagen  $C_0$  und  $C$ , kommen können, wozu bei Fig. 39 erforderlich wäre, dass

$$C_0B_0 > b > C_0B, \text{ und } C_0B_0 > b > C_0B,$$

also

$$C_0B_0 > b > C_0B,$$

ist, was wegen  $C_0C_0 > B_0B_0$ , nicht sein kann. Dieselbe unerfüllbare Bedingung für  $b$  ergibt sich bei Fig. 40, bei Fig. 41 und Fig. 42 aber die gleichfalls unerfüllbare Bedingung:

$$C_0B_0 > b > C_0B,$$

Ist  $d > a$ , so kann also der Mechanismus nicht Doppelkurbel, auch Schwingkurbel nur mit  $a$  als Kurbel, also mit  $c$  als Schwinge sein; die noch festzustellenden Bedingungen dieses letzteren Falles reduciren sich auf die Bedingungen für das Verhalten von  $a$  als Kurbel. Als diese ergeben sich bei Fig. 39 ( $d > a + c$ ) und Fig. 40 ( $a + c > d > c$ ):

$$B_0C_0 > b > B_0C_0,$$

Fig. 39.

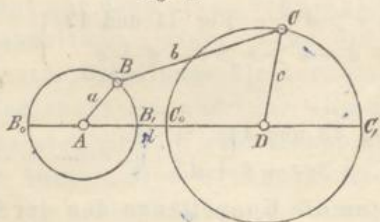
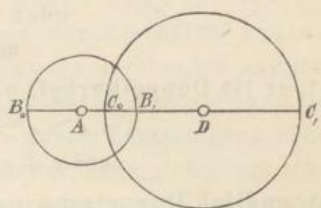


Fig. 40.



also überhaupt:

$$d + c - a > b > d - c + a$$

für  $d > c > a$ ;

Fig. 41.

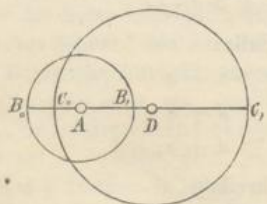
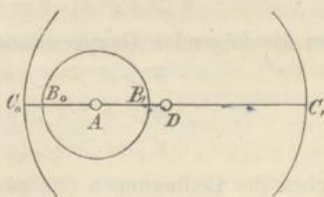


Fig. 42.



dagegen bei Fig. 41 ( $c > d > c - a$ ) und Fig. 42 ( $c - a > d > a$ ):

$$B_0C_0 > b > B_0C_0,$$

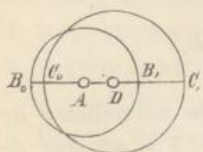
also überhaupt:

$$c + d - a > b > c - d + a$$

für  $c > d > a$ .

2) Im Falle  $d < a$  wird der Kreis (B) entweder vom Kreise (C) so geschnitten, dass  $C_0$  zwischen A und  $B_0$  liegt (Fig. 43), oder er wird von ihm eingeschlossen (Fig. 44). In beiden Fällen ist die Bedingung dafür, dass a Kurbel sei, dieselbe wie die für das Verfallen von c als Kurbel, nämlich

Fig. 43.

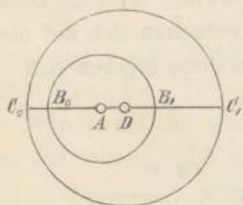


$$B, C_0 > b > B, C,$$

oder  $c + a - d > b > c - a + d.$

In diesem Falle sind also die Glieder a und c nur gleichzeitig Kurbeln, und kann der Mechanismus nicht Schwingkurbel sein.

Fig. 44.



Das Resultat der Untersuchung ist somit folgendes: der viergliedrige ebene Drehkörpermechanismus a, b, c, d mit dem Gliede d als Steg ist Schwingkurbel (a Kurbel, c Schwinge), wenn

$$\left. \begin{aligned} d > c > a \text{ (Fig. 39 und 40)} \\ \text{und } d + c - a > b > d - c + a \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{oder wenn } c > d > a \text{ (Fig. 41 und 42)} \\ \text{und } c + d - a > b > c - d + a \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ist; er ist Doppelkurbel, wenn

$$\left. \begin{aligned} c > a > d \text{ (Fig. 43 und 44)} \\ \text{und } c + a - d > b > c - a + d \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ist; endlich Doppelschwinge, wenn die Koppellänge den der betreffenden dieser 3 Grössenfolgen von a, c, d entsprechenden Bedingungen (1), (2), (3) nicht Genüge leistet, unbeschadet dessen, dass  $0 < b < a + c + d$  ist.

Die Bedingungen (1), die auch geschrieben werden können:

$$d > c > a; \quad c - a > b - d > a - c,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$b > d > c > a; \quad d + c > b + a$$

$$d > b > c > a; \quad b + c > d + a$$

$$d > c > b > a; \quad c + b > d + a;$$

desgleichen die Bedingungen (2), auch zu schreiben:

$$c > d > a; \quad d - a > b - c > a - d,$$

die folgenden Gruppen:

$$b > c > d > a; \quad c + d > b + a$$

$$c > b > d > a; \quad b + d > c + a$$

$$c > d > b > a; \quad d + b > c + a.$$

Daraus folgt, dass der in Rede stehende Mechanismus allemal dann, aber nur dann eine Schwingkurbel ist, wenn das kürzeste aller 4 Glieder (als Kurbel) dem festgestellten Gliede benachbart, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die Bedingungen (3), die auch geschrieben werden können:

$$c > a > d; \quad a - d > b - c > d - a,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$b > c > a > d; \quad c + a > b + d$$

$$c > b > a > d; \quad b + a > c + d$$

$$c > a > b > d; \quad a + b > c + d,$$

woraus ersichtlich, dass der in Rede stehende Mechanismus dann und nur dann eine Doppelkurbel ist, wenn das festgestellte Glied das kürzeste von allen, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die viergliedrige ebene Drehkörperkette kann also überhaupt nur dann einen Schwingkurbel- oder einen Doppelkurbelmechanismus liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kürzesten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kürzesten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingmechanismen aus der Kette hervor.\*

Von besonderen Fällen sind zunächst diejenigen hervorzuheben, in

\* Wenn Reuleaux, indem er mit  $a, b, c, d$  die aufeinander folgenden Glieder der Kette individuell, unabhängig von ihrer Beziehung zum festgestellten Gliede bezeichnet, den aus der Kette hervorgehenden Mechanismus als „rotirende Bogenschubkurbel“ (Schwingkurbel) oder als „rotirende Doppelkurbel“ (Doppelkurbel) oder als „oscillirende Doppelkurbel“ (Doppelschwinge) beansprucht und entsprechend bezeichnet, jenachdem die Kette „auf  $d$  resp.  $b$ , auf  $a$  oder auf  $c$  gestellt“, d. h. jenachdem das Glied  $d$  resp.  $b$ , das Glied  $a$  oder das Glied  $c$  festgestellt wird, so ist das obiger Untersuchung zufolge nur bedingungsweise zulässig. Insbesondere kann es der Fall sein, dass der Mechanismus eine „oscillirende Doppelkurbel“ ist, auf welches Glied die Kette auch „gestellt“ werden mag; zulässig ist jene Bezeichnung nur unter der Voraussetzung, dass  $a$  das kleinste Glied und dass die Summe aus seiner und aus der grössten Gliedlänge (die  $b, c$  oder  $d$  sein kann) kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

denen die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge der Summe der beiden anderen Gliedlängen gleich ist (als Grenzfall der Herstellbarkeit eines Schwingkurbel- oder eines Doppelkurbelmechanismus aus dieser Kette), sowie diejenigen, in denen zwei Glieder gleich lang sind; noch bemerkenswerther aber diejenigen, in denen das eine und das andere zugleich stattfindet, in denen es nämlich zwei gleiche kleinste und zwei gleiche grösste Glieder giebt, überhaupt also zwei mal zwei Glieder gleich lang sind. Diese letzteren Fälle werden in den folgenden Paragraphen näher besprochen, und zwar in §. 37 der Fall, dass die gleich langen Gliederpaare gegenüber liegende, in §. 38 der Fall, dass sie benachbarte Glieder sind.

#### §. 37. Zwillingskurbeln.

Wenn die gegenüber liegenden Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ( $a = c$ ,  $b = d$ ), so können bei Feststellung des Gliedes  $d$ , einerlei ob  $d$  und  $b$  die kürzeren oder die längeren Glieder sind, die beiden anderen  $a$  und  $c$  stets als Kurbeln um die Axen  $A$  und  $D$  in unveränderlichem Sinne rotiren, indem (mit den Bezeichnungen von Fig. 39 bis 44)  $BC$  in die Lagen  $B_0C_0$ - und  $B,C$ , kommen kann; weil sich aber nun die beiden Kurbeln durch nichts unterscheiden, werde der entsprechende Doppelkurbelmechanismus insbesondere als Zwillingskurbelmechanismus bezeichnet, das Doppelkurbelgetriebe als Zwillingskurbelgetriebe. Letzteres hat zwei Todlagen  $AB_0C_0D$  und  $AB,C,D$ , in denen die 4 Paaraxen  $A, B, C, D$  in einer Ebene liegen. Von diesen Lagen aus können sich die Kurbeln  $AB$  und  $CD$  entweder so drehen, dass sie parallel bleiben, oder so, dass sie symmetrisch bleiben in Beziehung auf die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden anderen gleichen Gegenseiten des Vierecks  $ABCD$  (Fig. 35, §. 32, wo  $OP$  die Symmetrieaxe ist); das Getriebe heisse im ersten Falle ein Parallelkurbelgetriebe, im zweiten ein symmetrisches Zwillingskurbelgetriebe (Antiparallelkurbelgetriebe nach Reuleaux's Bezeichnung). Die verschiedenen kinematischen Eigenschaften dieser zweierlei Getriebe charakterisiren die fraglichen Todlagen als sogenannte Wechsellagen (§. 31).

Bei dem Parallelkurbelgetriebe drehen sich die beiden Kurbeln in gleichem Sinn und gleichzeitig um gleiche Winkel; die Ueberschreitung der Todlagen kann durch Massenkraftschluss oder durch Kettenschluss vermittelt werden (§. 32).

Bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe drehen sich die Kurbeln in entgegengesetztem oder in gleichem Sinn, jenachdem sie

kürzer oder länger sind, als der Steg und die Koppel; das Drehungsgesetz, nämlich die Beziehung zwischen gleichzeitigen Drehungswinkeln der Kurbeln, ist aber in beiden Fällen (bei demselben Verhältnisse  $\frac{a=c}{b=d}$ ) dasselbe.

Bei Fig. 35 (§. 32) liegt der erste dieser beiden Fälle vor;  $B, AB$  und  $C, DC$  sind gleichzeitige Drehungswinkel der Kurbeln  $AB$  und  $DC$ , die durch entgegengesetzte Drehungen beschrieben werden. Würde aber das Glied  $AB$  festgestellt (zum Stege gemacht), so dass nun  $AD$  und  $BC$  die gleichen Kurbeln wären, so wären  $BAB$ , und  $OBC$  gleichzeitige Drehungswinkel derselben, die durch gleich gerichtete Drehungen beschrieben werden und den Winkeln  $B, AB$  und  $ODA = C, DC$  des vorigen Falles gleich sind. Das Aenderungsgesetz solcher entsprechender Drehungswinkel wurde schon im §. 22 unter 2) einer näheren Betrachtung unterworfen, indem es nach §. 32 identisch ist mit dem der entsprechenden Drehungswinkel congruenter elliptischer Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar sind. Die Ueberschreitung der Todlagen des symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes kann nach §. 32 durch Massenkraftschluss oder durch Paarschluss vermittelt werden, nämlich mit Bezug auf Fig. 35 daselbst für die Todlage  $AB, C, D$  durch das Elementenpaar  $E, E'$  oder  $G, G'$ , für die andere durch das Elementenpaar  $F, F'$  oder  $H, H'$ , und zwar sowohl im Falle des gegenläufigen wie in dem des gleichläufigen symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes, von denen übrigens das erstere in der Folge auch kürzer als gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe bezeichnet wird, da nur das gleichläufige ausdrücklich als symmetrisches von dem gleichfalls gleichläufigen Parallelkurbelgetriebe unterschieden zu werden braucht.

#### §. 38. Gleichschenklige Drehkörperkette.

Wenn zwei Paare benachbarter Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ( $DA = AB = a$ ,  $BC = CD = c$  in Fig. 45 oder  $AB = BC = a$ ,  $CD = DA = c$  in Fig. 46), so besteht das Viereck  $ABCD$  stets aus zwei gleichschenkligen Dreiecken ( $DAB$  und  $BCD$  in Fig. 45 resp.  $ABC$  und  $CDA$  in Fig. 46), und heiße deshalb (nach Reuleaux) die Kette selbst gleichschenklige. Aus ihr können zweierlei Mechanismen hervorgehen, jenachdem das festgestellte Glied  $AD$  eines der kürzeren Glieder  $= a$  (Fig. 45) oder eines der längeren Glieder  $= c$  (Fig. 46) ist; nach §. 36 ist der Mechanismus im ersten Falle eine Doppelkurbel, im zweiten eine Schwingkurbel (Kurbelschwinge), vorausgesetzt dass in den Uebergangslagen, in denen 3 von den 4 Paaraxen  $A, B, C, D$  in



einer Ebene liegen, und somit die Kette nicht selbständig geschlossen ist, die Schliessung durch besondere Hilfsmittel bewirkt wird, falls jene Uebergangslagen Todlagen sind, nämlich die Schliessung der Kette in ihnen nicht schon durch die Kraft vermittelt wird, die den Mechanismus bei seiner besonderen Verwendungsart als Getriebe in Bewegung setzt.

Der gleichschenklige Doppelkurbelmechanismus ist in Fig. 45 so gezeichnet, dass  $c < 2a$  ist; es könnte aber auch  $c = 2a$  oder  $c > 2a$

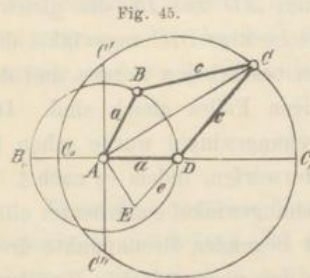


Fig. 45.

sein. (Für den Fall  $c = 2a$ , wobei die um  $A$  und  $D$  mit den Halbmessern  $a$  und  $c$  beschriebenen Kreise sich in den zusammenfallenden Punkten  $B_0, C_0$  berühren, ist der Mechanismus ursprünglich von Galloway angegeben worden.) Wenn von der Lage  $ADC, D$  aus (der in §. 36 mit  $B$ , bezeichnete Punkt fällt hier mit  $D$  zusammen) die kleine Kurbel sich um den Winkel

$DAB = \alpha$ , die grosse um den Winkel  $C, DC = \gamma$  dreht, so besteht zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln die Beziehung:

$$a \sin \frac{\alpha}{2} = c \sin \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right); \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{c \sin \gamma}{a + c \cos \gamma} \dots \dots \dots (1).$$

Daraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = c \cos \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \left( d\gamma - \frac{d\alpha}{2} \right)$$

und somit das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a, \omega_c$  der Kurbeln  $a, c$ :

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{c \cos \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right)}{\frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{c}{2} \cos \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{2c}{c + a \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right)}}$$

oder auch, wenn  $AE$  normal zu  $AC$  bis zum Durchschnitt  $E$  mit  $CD$  gezogen und  $DE = e$  gesetzt wird, indem dann

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \left( \gamma - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sin (DAE)}{\sin (DEA)} = \frac{e}{a} \dots \dots \dots (2)$$

ist, 
$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c + e} \dots \dots \dots (3).$$

Hierin ist  $e$  positiv oder negativ, jenachdem der Punkt  $E$  ausserhalb der Strecke  $CD$  oder in derselben liegt; ist die Gerade  $C'AC''$  normal zu  $AD$ , so ist

$$\begin{matrix} \text{in den Lagen } C, & C' & C_0 & C'' & C, & \text{des Punktes } C \\ e = & a & 0 & -a & 0 & a. \end{matrix}$$

Somit ergibt sich, dass

$$\begin{matrix} \text{der Lage } C, & C' & C_0 & C'' & C, & \text{des Punktes } C \\ \text{die Lage } D & B_0 & D & B_0 & D & \text{des Punktes } B \end{matrix}$$

mit  $\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c+a} \quad 2 \quad \frac{2c}{c-a} \quad 2 \quad \frac{2c}{c+a}$  entspricht.

Die kleine Kurbel macht 2 Umdrehungen, während die grosse nur eine macht; das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss, welches somit im Durchschnitt = 2 ist, schwankt zwischen den Grenzen:

$$\left. \begin{matrix} \max \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c-a} \\ \min \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c+a} \end{matrix} \right\} \text{ und ist } \frac{\max \frac{\omega_a}{\omega_c}}{\min \frac{\omega_a}{\omega_c}} = m = \frac{c+a}{c-a} \dots \dots (4).$$

Werden die Rotationen der kleinen Kurbel von der Lage  $AB_0$  aus gerechnet, so dreht sich während derselben die grosse Kurbel abwechselungsweise durch den erhabenen und durch den hohlen Winkel  $C'DC''$ ; oder wenn letztere gleichförmig rotirt, so ist das Verhältniss der Zeiten der aufeinander folgenden von der Lage  $AB_0$  aus gerechneten Rotationen der kleinen Kurbel = dem Verhältnisse der hohlen Winkel  $C'DC'$  und  $C'DC_0$ , und es ist dies das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier (d. h. zweier von irgend einer Anfangslage aus gerechneter) Rotationen der kleinen Kurbel, indem bei ihnen das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Kurbeln abwechselungsweise beständig grösser oder beständig kleiner, als der Mittelwerth 2 ist. Ist also dieses Zeitverhältniss =  $n$  gegeben, so ist

$$n = \frac{\pi - \arccos \frac{a}{c}}{\arccos \frac{a}{c}}; \quad \frac{a}{c} = \cos \frac{\pi}{n+1} \dots \dots \dots (5),$$

somit auch\* 
$$m = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos \frac{\pi}{n+1}} = \cotg^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \dots \dots \dots (6),$$

\* Diese Beziehung zwischen  $m$  und  $n$  ist dieselbe wie bei zwei congruenten elliptischen Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar

und findet man hiernach z. B. für

$n = 2$	3	4	5
$\frac{a}{c} = 0,5$	0,707	0,809	0,866
$m = 3$	5,83	9,47	13,93

Wenn bei dem in Rede stehenden Mechanismus die Bewegung von einer der Kurbeln ausgeht und somit der Fall eines gleichschenkligen Doppelkurbelgetriebes vorliegt, so sind die Uebergangslagen  $AB_0C'D$  und  $AB_0C''D$ , in denen nur die Axen  $D, A, B$  in einer Ebene liegen, nicht Todlagen; die beiden anderen  $ADC_0D$  und  $ADC_1D$ , in denen alle Axen in eine Ebene und zugleich die Axen  $B, D$  zusammenfallen, sind dagegen Todlagen, wenn die Bewegung von der grossen Kurbel ausgeht, und zwar sind sie Wechsellagen, weil ohne zwangläufige Ueberschreitung derselben von ihnen aus der Mechanismus von anderer Art werden, nämlich in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder  $c$  gegen die zum anderen Element vereinigten Glieder  $a$  um die zusammengefallenen Axen  $B, D$ . Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsellagen (§. 32) kann durch Massenkraftschluss (durch ein mit der kleinen Kurbel verbundenes Schwungrad) oder durch Elementenpaare vermittelt werden, nämlich durch Paarung eines der Glieder  $a$  mit dem gegenüber liegenden Gliede  $c$ ; von den Polbahnen der zu paarenden

sind (§. 22, Gl. 11), also auch dieselbe wie bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus (§. 37), indem dessen Kurbeln nach §. 32 sich ebenso drehen wie jene elliptischen Polbahnen, wenn die Excentricität  $\varepsilon$  der letzteren (Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte von einander zur grossen Axe) dem Verhältnisse der Kurbellänge  $AB = DC = a$  (Fig. 35, §. 32) zur Länge  $AD = BC = b$  von Steg und Koppel gleich ist. Die Längenverhältnisse  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{a}{c}$  der Kettenglieder, welche beziehungsweise bei jenem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus und bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus denselben Werthen von  $m$  und  $n$  entsprechen, stehen nach Gl. (11) in §. 22 und nach obiger Gl. (4) in der Beziehung:

$$\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 = \frac{c+a}{c-a}.$$

Bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus bedeutet zwar  $n$  das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier aufeinander folgender halber Umdrehungen der einen Kurbel bei gleichförmiger Rotation der anderen, doch liesse sich dieselbe Bedeutung auch bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus realisiren durch Uebertragung der Drehung der kleinen Kurbel im Verhältnisse 2:1.

Glieder sind dazu kleine Stücke beiderseits von ihren den Wechsellagen entsprechenden Berührungspunkten zu verzeichnen. Sollen z. B. die Glieder  $AB$  und  $CD$  (Fig. 45) gepaart werden, so findet man (gemäss der in §. 11 angeführten allgemeinen Regel) die Polbahn von  $CD$  als Ort aller Schnittpunkte der Geraden  $BC$  und  $DA$  bei Feststellung von  $CD$  und Bewegung von  $AB$ , die Polbahn von  $AB$  als Ort aller Schnittpunkte derselben Geraden bei Feststellung von  $AB$  und Bewegung von  $CD$ .\*

Bei dem gleichschenkligen Schwingkurbelmechanismus (Fig. 46) seien  $C', C''$  die Punkte des mit dem Halbmesser  $c$  um  $D$  beschriebenen Kreises, deren Entfernungen vom Punkte  $A = 2a$  sind, und  $B', B''$  die Punkte, in denen der um  $A$  mit dem Halbmesser  $a$  beschriebene Kreis von den Geraden  $AC', AC''$  geschnitten wird. Dann sind  $DC', DC''$  die Grenzlagen der Schwinge  $DC$ , deren Schwingungswinkel also

$$\angle C'DC'' = 4 \arcsin \frac{a}{c}$$

ist; und wenn die Kurbel im Sinne  $B'BB_0$  rotirt, so entsprechen

den Wegen  $B'B_0B', B'B, B'$  des Punktes  $B$   
die Wege  $C'AC'', C''AC'$  des Punktes  $C$ .

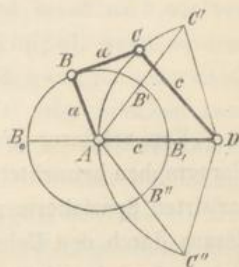
Den Bewegungen der Schwinge zwischen ihren Grenzlagen im einen und im anderen Sinne entsprechen also verschieden grosse Drehungen der Kurbel, oder bei gleichförmiger Rotation der letzteren verschiedene, nämlich solche Zeiten, die sich wie die hohlen Winkel  $B_0AB'$  und  $B'AB$ , verhalten. Ist dieses Zeitverhältniss  $= n$ , so ist

$$n = \frac{\pi - \arccos \frac{a}{c}}{\arccos \frac{a}{c}}; \quad \frac{a}{c} = \cos \frac{\pi}{n + 1} \dots \dots \dots (7)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (5). Geht die Bewegung von der Kurbel aus (gleichschenkliges Kurbelschwinggetriebe), so sind die Uebergangslagen  $AB_0AD$  und  $AB, AD$  Wechsellagen, indem von ihnen aus der Mechanismus in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder  $a$  gegen die zum anderen

\* Für den Fall  $c = 3a$  sind die Polbahnen in Reuleaux's „*theor. Kinematik*“, S. 192, gezeichnet.

Fig. 46.



Element vereinigten Glieder  $e$  um die zusammenfallenden Axen  $A, C$ . Geht die Bewegung von der Schwinge aus (gleichschenkliges Schwingkurbelgetriebe), so sind die Uebergangslagen  $AB'C'D$  und  $AB''C''D$  Todlagen, von denen aus die Bewegung der Kurbel in beiderlei Sinn erfolgen kann. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsel- resp. Todlagen kann wieder durch Massenkraftschluss oder durch Paarung gegenüber liegender Kettenglieder geschehen; letzteres würde insbesondere bei dem Kurbel-schwinggetriebe vorzuziehen sein, sofern ein Schwungrad im Allgemeinen nur mit einem in unveränderlichem Sinne fast gleichförmig rotirenden Körper zweckmässig zu verbinden ist.

### §. 39. Ebene Schubkurbelkette.

Von grösserer praktischer Wichtigkeit, als die in den beiden vorigen Paragraphen betrachteten, durch die Gleichheit gewisser Gliedlängen charakterisirten Specialformen der ebenen Drehkörperkette, sind diejenigen, die daraus durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen; inwiefern letztere als Grenzfälle der ersteren betrachtet und daraus hervorgehend vorgestellt werden können, wurde in §. 33 mit Beziehung auf Fig. 37 erläutert. Hier wird zunächst nur eines der 4 Drehkörperpaare in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt und die entsprechende Kette als Schubkurbelkette bezeichnet im Anschlusse an die Bezeichnung des am allgemeinsten angewendeten der daraus hervorgehenden Mechanismen.

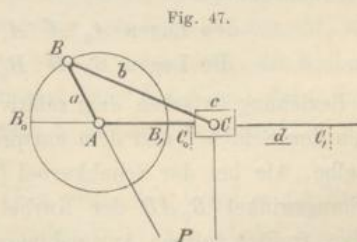
Indem jetzt die Kettenglieder sich insofern unterscheiden, als zwei von ihnen unter sich durch ein Prismenpaar verbunden sind, die beiden anderen aber, mit jenen durch Drehkörperpaare verbunden, auch unter sich durch ein Drehkörperpaar verbunden sind, können nun (was in §. 36 bei der ebenen Drehkörperkette im Allgemeinen nicht anging) die einzelnen Glieder der Kette an und für sich, d. h. unabhängig von ihrer Lage gegen das in einem Mechanismus jeweils festgestellte Glied, mit bestimmten Buchstaben bezeichnet werden, ohne die Allgemeinheit weiter zu beschränken. Diejenigen Kettenglieder, die sowohl unter sich wie mit den beiden anderen durch Drehkörperpaare verbunden sind, seien mit  $a$  und  $b$ , und zwar mit  $a$  das kleinere von ihnen bezeichnet (vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles  $a = b$ ); durch die stets beibehaltene Buchstabenfolge  $a, b, c, d$  für die in der Kette aufeinander folgenden Glieder sind dann auch die Bezeichnungen  $c, d$  der beiden anderen vollkommen bestimmt, und

es ist das Elementenpaar  $D$ , welches in ein Prismenpaar übergegangen ist, indem die betreffende Paaraxe jetzt im Unendlichen liegt. Die Schubrichtung des Prismenpaares  $D$  ist normal zu der Richtung, nach der diese Axe ins Unendliche fortrückte, in welcher Hinsicht der Fall von besonderer Wichtigkeit ist, dass diese letztere Richtung normal zur Ebene  $AC$ , und somit die Schubrichtung des Prismenpaares der Ebene  $AC$  parallel ist. Dieser Fall wird im Folgenden stets vorausgesetzt, wenn von der ebenen Schubkurbelkette schlechtweg die Rede ist; anderen Falls soll sie ausdrücklich als allgemeine Schubkurbelkette bezeichnet werden.

Die Benennung der Glieder bezieht sich auf die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen. Das festgestellte Glied heisst nach wie vor der Steg; ein bewegliches Glied  $a$  oder  $b$  heisst Koppel, wenn es dem Stege gegenüber liegt, anderen Falls Kurbel oder Schwinge, jenachdem es um eine feste Axe in stets gleichem Sinne rotirt oder zwischen zwei Grenzlagen schwingt; ein bewegliches Glied  $c$  oder  $d$  heisse eine Schleife, wenn es um eine feste Axe (rotirend oder schwingend) drehbar ist, bei anderer Bewegungsart ein Schieber. Die Benennungen der Mechanismen sollen, wie bei den aus der Drehkörperkette (§. 36) abgeleiteten, den Namen der beiden dem Stege benachbarten Glieder angepasst, beziehungsweise daraus zusammengesetzt werden. Ist eines dieser Glieder dasjenige, von dem die Bewegung ausgeht, so kann durch Voranstellung des Namens dieses treibenden Gliedes das entsprechende Getriebe von demjenigen unterschieden werden, bei dem die Bewegung vom anderen dieser beiden dem Mechanismus den Namen gebenden Glieder ausgeht; nur wenn das dem Stege gegenüber liegende Glied das treibende ist, bedarf es eines besonderen Zusatzes zur bestimmten Bezeichnung des Getriebes.

Hiernach sind es nun folgende 4 Mechanismen, die aus der ebenen Schubkurbelkette hervorgehen können, je nach der Wahl des festgestellten (in den folgenden Figuren durch Unterstreichung seiner Buchstabenbezeichnung angedeuteten) Gliedes.

1. Schubkurbel, aus der Kette hervorgehend durch Feststellung des Gliedes  $d$  (Fig. 47);  $a$  ist Kurbel,  $b$  Koppel,  $c$  Schieber. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers in einer Strecke  $C_0C_1 = B_0B_1 = 2a$ ; der veränderliche Pol  $P$ , um den sich dabei die Koppel jeweilig dreht, ist der

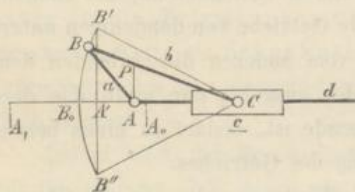


Schnittpunkt von  $AB$  und der Normalen zu  $AC$  im Punkte  $C$ . Dieser

Mechanismus ist der am meisten gebräuchliche zur Umsetzung einer rotierenden in eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung oder umgekehrt, jenachdem die Kurbel das treibende Glied ist (Kurbelschubgetriebe) oder der Schieber (Schubkurbelgetriebe). Im letzteren Falle sind die Uebergangslagen  $AB_0C_0$  und  $AB,C$ , Todlagen, von denen aus bei einerlei Bewegungssinn des Schiebers die Kurbel in beiderlei Sinn rotiren kann; die zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen mit stets demselben Drehungssinne der Kurbel pflegt (nach §. 32) durch Massenkraftschluss (durch ein Schwungrad auf der Kurbelwelle) oder durch Kraftkettenschluss (durch Verbindung von zwei gleichen Schubkurbelgetrieben mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle) oder durch beide Mittel zugleich bewirkt zu werden. Unter sich mögen die beiden Todlagen  $AB_0C_0$  und  $AB,C$ , in denen der Winkel  $ABC$  beziehungsweise  $= 0$  und  $180^\circ$  ist, als obere und untere Todlage, die Punkte  $B_0$  und  $B$ , als oberer und unterer Todpunkt unterschieden werden (analog der sogenannten oberen und unteren Conjunction eines innerhalb der Erdbahn umlaufenden Planeten  $B$  bezüglich auf  $A$  als Sonne und  $C$  als Erde).

2. Schubschwinge (Fig. 48), durch Feststellung des Gliedes  $c$  aus der Kette hervorgehend;  $d$  ist Schieber,  $a$  Koppel (mit dem jeweiligen

Fig. 48.



Schnittpunkte  $P$  von  $BC$  und der Normalen zu  $AC$  im Punkte  $A$  als Pol,  $b$  Schwinge. Der Schieber bewegt sich in einer Strecke  $A_0A, = 2a$  hin und her, während die Schwinge zwischen den Grenzlagen  $CB'$  und  $CB''$  schwingt, die dann erreicht werden, wenn  $A$  in  $A'$  liegt so, dass  $CA'B'$  und  $CA'B''$

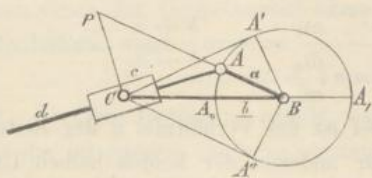
rechte Winkel sind; der Schwingungswinkel  $B'CB''$  ist also  $= 2 \arcsin \frac{a}{b}$ , und es entsprechen

den Lagen  $A_0 A' A, A' A_0$  des Punktes  $A$   
die Lagen  $B_0 B' B, B' B_0$  des Punktes  $B$ .

Die Beziehung zwischen dem relativen Drehungswinkel  $B_0AB$  der Koppel gegen den Schieber und dem entsprechenden Wege  $A_0A$  des letzteren ist dieselbe, wie bei der Schubkurbel (Fig. 47) die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel  $B_0AB$  der Kurbel und dem Wege  $C_0C$  des Schiebers. Einige, freilich seltene Anwendungen hat dieser Mechanismus als Getriebe besonders in der Weise gefunden, dass dabei die Bewegung von der Koppel ausgeht; Todlagen sind dann nicht vorhanden.

3. Schwingende Kurbelschleife (Fig. 49), entsprechend der Feststellung des Gliedes *b*; *c* ist Schleife, *d* Schieber, *a* Kurbel. Der Pol *P*,

Fig. 49.



um den sich der Schieber *d* jeweilig dreht, wird in dem Schnittpunkte von *AB* mit der Normalen zu *AC* im Punkte *C* gefunden (ebenso wie in Fig. 47 der Pol für die Bewegung von *b* gegen *d* gefunden würde). Während die Kurbel rotirt, schwingt die Schleife zwischen den Grenzlagen *CA'* und *CA''*

(Winkel  $CA'B = CA''B = 90^\circ$ ), und wenn jene gleichförmig rotirt, erfolgen die Schwingungen der Schleife im einen und im anderen Sinne in verschiedenen Zeiten, deren Verhältniss

$$n = \frac{\text{Winkel } A,BA'}{\text{Winkel } A'BA_0} = \frac{\pi - \text{arc cos } \frac{a}{b}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} \dots \dots \dots (1)$$

ist, in Uebereinstimmung mit Gl. (7), §. 38 für die gleichschenklige Kurbelschwinge (Fig. 46), wenn  $\frac{a}{c}$  dort =  $\frac{a}{b}$  hier ist; der Schwingungswinkel

$A'CA'' = 2 \text{ arc sin } \frac{a}{b}$  der Schleife ist dann aber nur halb so gross wie dort

derjenige der Schwinge. Diese Ungleichheit der Schwingungszeiten der Schleife im einen und im anderen Sinne bei gleichförmiger Rotation der Kurbel hat Veranlassung gegeben, den vorliegenden Mechanismus in der Weise als Getriebe zu verwenden, dass dabei die Bewegung von der Kurbel ausgeht, d. h. als schwingendes Kurbelschleifgetriebe, um von der Schleife aus ein Werkzeug (Schneid- oder Stosswerkzeug) zu bewegen, dessen Rückgang schneller als der Vorgang erfolgen soll; Todlagen sind dabei nicht vorhanden. Noch häufiger ist übrigens die Benutzung dieses Mechanismus als Getriebe in der Weise, dass die Bewegung vom Schieber ausgeht, wie bei oscillirenden Dampfmaschinen, wo der Cylinder die Schleife, die Kolbenstange mit Kolben der Schieber ist; dabei sind dann  $BA_0C$  und  $BAC$  Todlagen, die auf ähnliche Weise wie bei dem Schubkurbelgetriebe (Fig. 47) zwangläufig überschritten werden können.

4. Rotirende Kurbelschleife (Fig. 50); das Glied *a* ist Steg, *b* Kurbel, *c* Schieber, *d* Schleife; der jeweilige Pol von *c* ist der Schnittpunkt *P* von *BC* und der Normalen zu *AC* im Punkte *A* (ebenso wie in Fig. 48 der Pol von *a* bezüglich der relativen Bewegung gegen *c*). Schleife

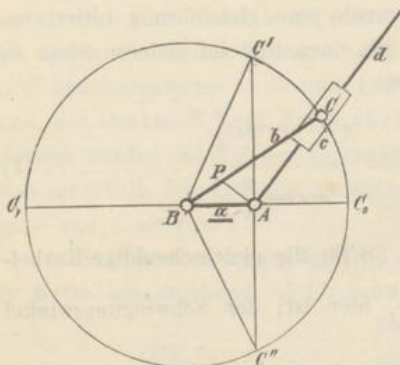


und Kurbel rotiren um ihre Axen  $A$  und  $B$  mit Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a$  resp.  $\omega_b$ , deren Verhältniss veränderlich, im Mittel = 1, am grössten in der Lage  $C_0$ , am kleinsten in der Lage  $C_1$  des Punktes  $C$  ist, und zwar

$$\left. \begin{array}{l} \max \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{b}{b-a} \\ \min \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{b}{b+a} \end{array} \right\} \text{somit } \frac{\max \frac{\omega_a}{\omega_b}}{\min \frac{\omega_a}{\omega_b}} = m = \frac{b+a}{b-a} \dots \dots \dots (2).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ist das Verhältniss  $n$  der Zeiten, welche die Schleife zur einen und zur anderen der beiden halben Umdrehungen gebraucht, deren Grenzlagen  $AC'$ ,  $AC''$  zu  $AB$  senkrecht sind, = dem Verhältnisse der hohlen Winkel  $C_1BC'$ ,  $C'BC_0$ , also

Fig. 50.



$n = \frac{\pi - \arccos \frac{a}{b}}{\arccos \frac{a}{b}}$ ;   
  $\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{n+1} \dots \dots (3).$

Diese Gleichungen (2) und (3) sind dieselben, wie die in §. 38 für die

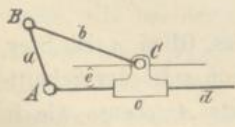
gleichschenklige Doppelkurbel aufgestellten Gleichungen (4) und (5) bei Vertauschung von  $c$  mit  $b$ ; sie ergeben also auch wie dort:

$$m = \cotg^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \dots \dots \dots (4),$$

und es ist ersichtlich, inwiefern diese rotirende Kurbelschleife jener gleichschenkligen Doppelkurbel ebenso entspricht wie die schwingende Kurbelschleife (Fig. 49) der gleichschenkligen Kurbelschwinge entsprechend gefunden wurde. Alle diese Mechanismen können (ebenso wie gegenläufige Zwillingskurbeln oder elliptische Räder) als Getriebe zur Hin- und Herbewegung von Werkzeugen mit schnellerem Rückwärts-, als Vorwärtsgang benutzt werden. —

Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette werden viel

Fig. 51.



seltener im Maschinenbau angewendet. Ist bei einer solchen (Fig. 51)  $e$  die Entfernung der parallelen geradlinigen relativen Bahnen, welche die Punkte  $C$ ,  $A$  als Punkte der Elemente  $c$  und  $d$  des Prismenpaares  $e$ ,  $d$  durchlaufen, so kann die

Kette aus einer viergliedrigen Drehkörperkette  $ABCD$  dadurch hervor-

gegangen gedacht werden, dass die Axe  $D$  ins Unendliche gerückt ist, während die Gliedlängen  $CD$  und  $AD$  sich um  $CD - AD = e$  unterscheiden. Indem somit  $AB = a$  die kleinste,  $CD$  die grösste Gliedlänge dieser Kette ist, kann sie nach der allgemeinen Entwicklung in §. 36 nur dann einen der Doppelkurbel oder der Schwingkurbel analogen Mechanismus liefern, wenn

$$a + CD < b + AD, \text{ also } a + e < b \dots \dots \dots (5)$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, was gemäss der Voraussetzung  $a < b$  nur bei der im engeren Sinne so genannten Schubkurbel ( $e = 0$ ) ohne Weiteres der Fall ist, so ergibt sich nach jener allgemeinen Entwicklung in §. 36 durch Feststellung des kürzesten Gliedes  $a$  die der Doppelkurbel analoge allgemeine rotirende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 50), durch Feststellung eines der beiden dem kürzesten benachbarten Glieder  $d$  oder  $b$  die der Schwingkurbel analoge allgemeine Schubkurbel (entsprechend Fig. 47) mit der Schublänge

$$s = \sqrt{(b + a)^2 - e^2} - \sqrt{(b - a)^2 - e^2} \dots \dots \dots (6)$$

des Schiebers  $e$  oder die allgemeine schwingende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 49), endlich durch Feststellung des dem kürzesten gegenüberliegenden Gliedes  $e$  die der Doppelschwinge analoge allgemeine Schubschwinge (entsprechend Fig. 48).

Mechanismen der letzten Art mit nur schwingender resp. geradlinig hin- und hergehender Bewegung beider dem festgestellten benachbarter Glieder ergeben sich aus der allgemeinen Schubkurbelkette immer, wenn die Bedingung (5) nicht erfüllt ist, einerlei welches das festgestellte Glied sein möge. Bei Feststellung von  $d$  erhält man dann statt der Schubkurbel eine Schubschwinge ebenso wie immer bei Feststellung von  $e$ , bei Feststellung von  $b$  oder  $a$  aber statt der schwingenden resp. rotirenden Kurbelschleife einen Mechanismus, der nur aus dieser allgemeinen Schubkurbelkette ( $e > 0$ ) hervorgeht, und welcher, indem dem festgestellten Gliede einerseits eine Schwinge, andererseits eine schwingende Schleife benachbart ist, als schleifende Doppelschwinge oder auch kürzer als Schleifschwinge bezeichnet werden kann.

Ein Anwendungsbeispiel der allgemeinen Schubschwinge und zwar derjenigen, in welche bei Feststellung des Gliedes  $d$  die allgemeine Schubkurbel wegen Nichterfüllung der Bedingung (5) übergeht, bietet der Schwartzkopff'sche Universalschraubenschlüssel dar. Bei demselben wird das Glied  $d$  (Fig. 51) dadurch festgestellt, dass eine damit verbundene zur Schubrichtung des Prismenpaares  $c, d$  senkrechte ebene Ansatzfläche gegen eine

Seitenfläche der festzudrehenden oder zu lösenden Schraubenmutter angelegt wird; eine damit parallele Ansatzfläche des Gliedes  $c$  wird dann gegen die entgegengesetzte Seitenfläche der Schraubenmutter dadurch angedrückt, dass die Schwinde  $a$  durch einen mit ihr verbundenen Handgriff in entsprechendem Sinne gedreht wird. Ist so die Mutter zwischen den beiden Ansatzflächen eingeklemmt, so bildet sie mit dem ganzen Mechanismus einen starren Körper, der nun vermittels des Handgriffes weiter gedreht werden kann. Als Getriebe kommt also der Mechanismus hier so zur Verwendung, dass er als allgemeines Schwingschubgetriebe zu bezeichnen ist.

#### §. 40. Bewegungsgesetze des Schubkurbelmechanismus.

Bei der ausgedehnten Anwendung, welche die Schubkurbel (Fig. 47 im vor. §.) im Maschinenbau findet, ist es von Interesse, das Bewegungsgesetz dieses Mechanismus näher festzustellen und in Formeln zu bringen, auf die im weiteren Verlauf dieses Werkes vielfach Bezug zu nehmen sein wird. Insbesondere handelt es sich dabei um die Beziehung zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte  $B$  und  $C$ , also des Kurbelzapfens und des Schiebers, indem die Bewegung jedes anderen Punktes der Koppel  $BC$  durch die ihrer Endpunkte  $B, C$  bestimmt ist.

Ist  $\gamma$  der Winkel  $ACB$ , der dem von der oberen Todlage aus gerechneten Drehungswinkel  $B_0AB = \alpha$  der Kurbel entspricht, so ergibt sich der entsprechende Weg des Schiebers:

$$s = C_0C = B_0C - b = a(1 - \cos \alpha) - b(1 - \cos \gamma)$$

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos \alpha - \frac{1 - \cos \gamma}{\lambda} \quad \text{mit } \lambda = \frac{a}{b} \dots \dots \dots (1)$$

oder wegen  $a \sin \alpha = b \sin \gamma$ , also  $\sin \gamma = \lambda \sin \alpha$  und mit Rücksicht darauf, dass  $\gamma$  ein (positiver oder negativer) spitzer Winkel,  $\cos \gamma$  folglich positiv ist,

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos \alpha - \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}}{\lambda} \dots \dots \dots (2).$$

Wäre  $\alpha$  ein von der unteren Todlage aus gerechneter Drehungswinkel der Kurbel und  $s$  der entsprechende Weg des Schiebers, so brauchte in dieser Gleichung nur  $\lambda$  entgegengesetzt genommen zu werden, und gilt dieselbe Bemerkung dann auch für alle aus der Gl. (2) abgeleiteten Gleichungen. Ist nämlich der Winkel  $B_1AB = \alpha'$ ,  $C_1C = s'$ , so ist nach Gl. (2)

$$\frac{2a - s'}{a} = 1 - \cos(\pi - \alpha') - \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\pi - \alpha')}}{\lambda}$$

$$\frac{s'}{a} = 1 - \cos \alpha' + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha'}}{\lambda},$$

wie auch aus Gl. (2) durch Vertauschung von  $s$  mit  $s'$ ,  $\alpha$  mit  $\alpha'$ ,  $\lambda$  mit  $-\lambda$  hervorgeht.

In der Regel ist  $\lambda$  ein hinlänglich kleiner Bruch, um, wenn die in Gl. (2) vorkommende Wurzelgrösse in die Reihe

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \alpha - \dots$$

entwickelt wird, auf die Berücksichtigung des Gliedes mit der niedrigsten Potenz von  $\lambda$  sich beschränken zu dürfen, entsprechend dann auch in der Gleichung für den Schieberweg:

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \lambda^3 \sin^4 \alpha - \dots \dots \dots (3).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges von der oberen zur unteren Todlage ( $\alpha = 90^\circ$ ) ergibt sich:

$$\frac{s}{a} = 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} = 1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{8} \lambda^3 - \dots \dots \dots (4)$$

und für die Mitte des Schieberweges ( $s = a$ ):

$$(\lambda \cos \alpha + 1)^2 = 1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha; \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2} \lambda \dots \dots \dots (5).$$

Aus dem Ausdrücke von  $\frac{s}{a}$  ergibt sich das Verhältniss entsprechender Wege des Schiebers und des Kurbelzapfens (der Punkte  $C$  und  $B$ ,

Fig. 47)  $= \frac{s}{a\alpha}$  und das Verhältniss ihrer gleichzeitigen Geschwindigkeiten

$\frac{w}{v} = \frac{1}{a} \frac{ds}{d\alpha}$ . Unmittelbarer erhält man dieses Geschwindigkeitsverhältniss von Schieber und Kurbelzapfen mit Rücksicht auf die Bedeutung des Pols  $P$  der Koppel  $BC$  aus dem Dreiecke  $PBC$ :

$$\frac{w}{v} = \frac{PC}{PB} = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} = \sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \dots \dots \dots (6)$$

oder wegen  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}}$

$$\frac{w}{v} = \sin \alpha \left( 1 - \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right) \dots \dots \dots (7)$$

$$= \sin \alpha \left[ 1 - \lambda \cos \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha + \dots \right) \right] \dots \dots \dots (8).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges ( $\alpha = 90^\circ$ ) ist

$$w = v \dots \dots \dots (9)$$

und für die Mitte des Schieberweges ( $s = a$ ) wegen  $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \lambda$  nach Gl. (5), also

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \lambda^2 \left( 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \right)} = \sqrt{1 - \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^4} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2$$

$$\frac{w}{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \lambda^2} \left( 1 + \frac{\frac{1}{2} \lambda^2}{1 - \frac{1}{2} \lambda^2} \right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \lambda^2}}{1 - \frac{1}{2} \lambda^2} \dots \dots (10).$$

$$= 1 + \frac{3}{8} \lambda^2 + \frac{23}{128} \lambda^4 + \dots$$

Für  $\alpha = 0$  und  $180^\circ$  ist das Geschwindigkeitsverhältniss  $\frac{w}{v} = 0$ ; beim Uebergange von einer zur anderen Todlage nimmt es also zuerst zu und dann ab, nachdem es ein Maximum erreicht hatte für den durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) = 0$$

bestimmten Werth von  $\alpha$ . Dieser Differentialquotient von  $\frac{w}{v}$  nach  $\alpha$  ergibt sich aus Gl. (6):

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) = \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma - \frac{\cos \alpha \, d\gamma}{\cos^2 \gamma \, d\alpha}$$

oder wegen  $\sin \gamma = \lambda \sin \alpha, \cos \gamma \, d\gamma = \lambda \cos \alpha \, d\alpha \dots \dots \dots (11)$

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) = \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma - \lambda \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \gamma} \dots \dots \dots (12)$$

$$= \cos \alpha + \lambda \frac{\sin^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \dots \dots \dots (13)$$

$$= \cos \alpha + \lambda [\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha (1 + \lambda^2 \sin^2 \alpha + \dots)] \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha + \dots \right)$$

$$= \cos \alpha + \lambda (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \lambda^3 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha) + \dots (14).$$

Unter der Voraussetzung, dass  $\lambda$  ein kleiner Bruch und dass der dem Maximum von  $\frac{w}{v}$  entsprechende Werth von  $\cos \alpha$  eine mit  $\lambda$  vergleichbare Grösse ist, muss dieser Werth nach Gl. (14) bei Vernachlässigung der Glieder von der Grössenordnung  $\lambda^5$  der folgenden Gleichung entsprechen:

$$\cos \alpha + \lambda(1 - 2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \lambda^3 = 0.$$

Als erster Näherungswerth folgt  $\cos \alpha = -\lambda$ , und wenn dieser in dem Gliede mit  $\lambda$  substituirt wird, als zweiter Näherungswerth:

$$\cos \alpha = -\lambda(1 - 2 \lambda^2) - \frac{1}{2} \lambda^3 = -\lambda + \frac{3}{2} \lambda^3 \dots \dots (15),$$

der bis auf Glieder von der Grössenordnung  $\lambda^5$  richtig und in der That, wie vorausgesetzt wurde, eine mit  $\lambda$  vergleichbare Grösse ist. Mit derselben Annäherung findet man hiermit nach Gl. (3) den entsprechenden Schieberweg:

$$\frac{s}{a} = 1 + \frac{1}{2} \lambda - \frac{9}{8} \lambda^3 \dots \dots \dots (16)$$

und nach Gl. (8) das grösste Geschwindigkeitsverhältniss  $\frac{w}{v}$  selbst:

$$\max \frac{w}{v} = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{8} \lambda^4 \dots \dots \dots (17).$$

Mit Hilfe des durch Gl. (6)—(8) bestimmten Geschwindigkeitsverhältnisses  $\frac{w}{v}$  und seines durch Gl. (12)—(14) bestimmten Differentialquotienten

$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right)$  ist schliesslich die Beziehung zwischen den Beschleunigungen

des Kurbelzapfens und des Schiebers auszudrücken. Indem nämlich, unter  $t$  die Zeit verstanden,  $\frac{d\alpha}{dt}$  die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel  $= \frac{v}{a}$

und somit

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{w}{v} \right) \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{v^2} \left( v \frac{dw}{dt} - w \frac{dv}{dt} \right) \frac{a}{v}$$

ist, ergibt sich zwischen der Beschleunigung des Schiebers  $= \frac{dw}{dt}$  und den

beiden Componenten der Beschleunigung des Kurbelzapfens (Tangentialbeschleunigung  $= \frac{dv}{dt}$  und Normalbeschleunigung  $= \frac{v^2}{a}$ ) die Beziehung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{w}{v} + \frac{v^2}{a} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) \dots \dots \dots (18).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel beschränkt sich die Beschleunigung des Kurbelzapfens  $B$  auf seine alsdann constante Normalbeschleunigung, und ist das Beschleunigungsverhältniss der Punkte  $C, B$ :

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) \dots \dots \dots (19),$$

insbesondere für die obere Todlage ( $\alpha = 0$ ) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = 1 - \lambda \dots \dots \dots (20),$$

für die Mitte des Kurbelweges ( $\alpha = 90^\circ$ ) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \lambda + \frac{1}{2} \lambda^3 + \dots \dots \dots (21),$$

für die Mitte des Schieberweges ( $s = a, \cos \alpha = -\frac{1}{2} \lambda$ ) näherungsweise nach Gl. (14):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = -\frac{1}{2} \lambda + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) + \frac{1}{2} \lambda^3 = \frac{1}{2} \lambda \dots \dots \dots (22),$$

endlich, nachdem es bei der durch Gl. (15) oder (16) näherungsweise bestimmten Lage der Kurbel resp. des Schiebers durch Null gegangen und negativ, d. h. dem Bewegungssinne entgegengesetzt geworden ist, für die untere Todlage ( $\alpha = 180^\circ$ ) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = -(1 + \lambda) \dots \dots \dots (23).$$

Die durch Gl. (20) und (23) bestimmten Absolutwerthe der Schieberbeschleunigung

$$= (1 - \lambda) \frac{v^2}{a} \text{ im Sinne } C_0 C, \text{ für die Lage } C_0$$

$$\text{und} \quad = (1 + \lambda) \frac{v^2}{a} \text{ im Sinne } C, C_0 \text{ für die Lage } C,$$

des Schiebers sind Maximalwerthe, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Lagen und Bewegungszustände des Mechanismus in Beziehung auf die Schieberbahn  $C_0 C$ , hervorgeht.

Vermittels der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte  $B, C$  kann schliesslich die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines beliebigen Punktes  $X$  der Koppel  $BC$  gefunden werden, und zwar am übersichtlichsten mit Hilfe des Pols  $P$  und des Beschleunigungscentrums  $Q$  (Fig. 52), nachdem zuvor die Winkelgeschwindigkeit  $= \omega$  um  $P$

und die Beschleunigung =  $\varphi$  im Abstände = 1 von  $Q$  bestimmt worden sind. Jene Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega = \frac{v}{PB} = \frac{w}{PC} = \frac{w \cdot \sin \alpha}{PA} = \frac{w \cdot \sin \alpha}{PB - a} = \frac{w \cdot \sin \alpha}{\frac{v}{\omega} - a},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (7) folgt:

$$v - a\omega = \frac{w}{\sin \alpha}; \quad \omega = \frac{1}{a} \left( v - \frac{w}{\sin \alpha} \right) = \frac{v}{a} \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (24)$$

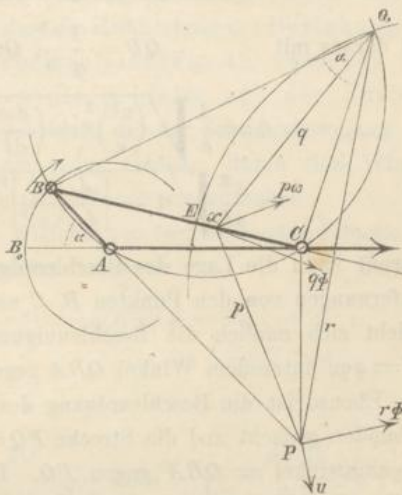
Hiermit kann die Lage des Pols  $P$  auch durch seine Entfernungen

$$PB = \frac{v}{\omega}, \quad PC = \frac{w}{\omega} \dots \dots \dots (25)$$

von den Punkten  $B, C$  bestimmt werden, und ergibt sich die Geschwindigkeit des beliebigen Punktes  $X$  von  $BC = p\omega$ , normal zu  $PX = p$  gerichtet.

Das Beschleunigungscentrum  $Q$  ist nach bekannten Gesetzen der allgemeinen Kinematik dadurch charakterisirt, dass die Beschleunigungen der verschiedenen Systempunkte den Entfernungen der letzteren von  $Q$  proportional und gegen ihre Verbindungslinien mit  $Q$  in gleichem Sinne gleich geneigt sind. Indem nun — bei Voraussetzung gleichförmiger Rotation der Kurbel — die Beschleunigung des Punktes  $B$  die Richtung  $BA$ , die von  $C$  die Richtung  $AC$  oder  $CA$  hat und somit unter dem Winkel  $\alpha$  oder  $180^\circ - \alpha$  gegen jene geneigt ist, müssen auch die Geraden  $BQ, CQ$  unter demselben Winkel gegen einander geneigt sein, muss also  $Q$  in dem Kreise liegen, der über  $BC$  als Sehne die Winkel  $\alpha$  und  $180^\circ - \alpha$  als Peripheriewinkel fasst, d. h. in dem Kreise, der durch die Punkte  $A, B, C$  geht. Da ferner der Ort aller Punkte  $Q$ , deren Entfernungen von zwei Punkten  $B, C$  ein constantes Verhältniss (hier = dem Verhältnisse der Beschleunigungen  $\frac{v^2}{a}$  und  $\frac{dw}{dt}$  dieser Punkte) haben, der Kreis ist, dessen Durchmesser  $EF$  in der Geraden  $BC$  so liegt, dass seine Endpunkte  $E, F$  (von denen in Fig. 52 nur der erste sicht-

Fig. 52.





bar ist) die Strecke  $BC$  in jenem Verhältnisse theilen, hier also so, dass

$$BE:CE = BF:CF = \frac{v^2}{a} : \frac{dw}{dt} = 1 : \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right)$$

ist, so ist das Beschleunigungscentrum  $Q$  einer der beiden Schnittpunkte jenes Kreises durch  $A, B, C$  mit diesem Kreise über dem Durchmesser  $EF$  und zwar derjenige von beiden, für welchen die Beschleunigungen von  $B$  und  $C$  in gleichem Sinne beziehungsweise gegen  $BQ$  und  $CQ$  geneigt sind. (Der in Fig. 52 mit  $Q$  bezeichnete Schnittpunkt ist das Beschleunigungscentrum insofern, als bei der betreffenden Lage des Mechanismus die Beschleunigung des Punktes  $C$  im Sinne  $AC$  gerichtet ist.) Mit Rücksicht auf das Dreieck  $QBC$ , dessen Winkel bei  $Q = \alpha$  ist, hat man nun:

$$b^2 = \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 - 2 \cdot QB \cdot QC \cdot \cos \alpha$$

und daraus mit  $QB = \frac{1}{q} \frac{v^2}{a}$ ,  $QC = \frac{1}{q} \frac{dw}{dt}$  . . . . . (26)

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{\left( \frac{v^2}{a} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - 2 \frac{v^2}{a} \frac{dw}{dt} \cos \alpha}$$

$$= \frac{v^2}{ab} \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) \right]^2 - 2 \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) \cdot \cos \alpha}$$

. . . . . (27).

Hiermit kann die Lage des Beschleunigungscentrums  $Q$  auch durch seine Entfernungen von den Punkten  $B, C$  nach Gl. (26) bestimmt werden, und ergibt sich endlich die Beschleunigung des beliebigen Punktes  $X$  von  $BC = q\varphi$ , unter dem Winkel  $QBA$  gegen  $XQ = q$  geneigt.

Ebenso ist die Beschleunigung des Punktes  $P$ , wenn er mit  $BC$  fest verbunden gedacht und die Strecke  $PQ = r$  gesetzt wird,  $= r\varphi$  mit einem Neigungswinkel  $= QBA$  gegen  $PQ$ . Den Sätzen der allgemeinen Kinematik zufolge ist aber diese Beschleunigung des Pols auch  $= u\omega$  und normal gegen die in  $P$  sich berührenden Polbahnen (des Steges und der Koppel) gerichtet, wenn  $u$  die Wechselgeschwindigkeit des Pols, d. h. die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher derselbe in der festen (mit dem Stege verbundenen) Polbahn sich bewegt. Diese Wechselgeschwindigkeit ist also:

$$u = \frac{r\varphi}{\omega}$$

und normal zur Beschleunigung  $r\varphi$  des Pols  $P$  gerichtet. Ihr in Fig. 52 angedeuteter Sinn entspricht dem Umstande, dass, wie bekannt, der Sinn der Polbeschleunigung durch rechtwinklige Drehung des Sinnes von  $u$  entgegen dem Drehungssinne von  $\omega$  erhalten wird. —

Indem die hier entwickelten Formeln namentlich insofern Anwendung finden, als es sich bei Dampfmaschinen um die Beziehung zwischen der Bewegung des Kolbens (als Schieber  $c$ ) im Cylinder (als Steg  $d$ ) und der Bewegung des Kurbelzapfens  $B$  resp. der Winkelbewegung der Kurbel  $a$  handelt, mag schliesslich darauf hingewiesen werden, dass sie nicht ohne Weiteres auch für oscillirende Dampfmaschinen gelten, bei denen nach Art der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49 im vor. §.) der Cylinder (als Schleife  $c$ ) um die Axe  $C$  schwingt und die Kurbel nicht um  $A$ , sondern um  $B$  rotirt. Die Bewegung des Kolbens im Cylinder ist dann zwar als relative Bewegung des Gliedes  $d$  gegen das Glied  $c$  die gerade umgekehrte wie im vorigen Falle als Relativbewegung von  $c$  gegen  $d$ , aber der vom unteren Todpunkte  $A_0$  aus gerechnete Drehungswinkel  $A_0BA$  der Kurbel entspricht jetzt in Fig. 47 nicht dem Drehungswinkel  $B_0AB = \alpha$ , sondern dem Winkel  $ABC = \beta = \alpha - \gamma$ , so dass die Ermittlung der Beziehungen, die bei der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49) zwischen der Bewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Kurbeldrehung stattfinden, darauf hinausläuft, die der Schieberbewegung bei der Schubkurbel (Fig. 47) entsprechenden Grössen durch den Winkel  $ABC = \beta$  anstatt durch den Winkel  $B_0AB = \alpha$  auszudrücken.

Um zu dem Ende die in obigen Gleichungen vorkommenden Functionen von  $\alpha$  durch solche von  $\beta$  auszudrücken, hat man

$$\lambda \sin \alpha = \sin \gamma = \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\text{daraus } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \lambda}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{1 - 2 \lambda \cos \beta + \lambda^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{(\cos \beta - \lambda)^2}{1 - 2 \lambda \cos \beta + \lambda^2}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2 \lambda \cos \beta + \lambda^2}}$$

Die Wurzelgrösse ist in diesem Ausdrucke von  $\cos \alpha$  absolut zu nehmen, weil  $\alpha$  und  $\beta$  gleichzeitig von 0 bis 180° wachsen, also  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  gleichzeitig positiv und deshalb, wie der Ausdruck von  $\operatorname{tg} \alpha$  erkennen lässt,  $\cos \alpha$  und  $\cos \beta - \lambda$  stets einerlei Zeichens sind. Die Substitution dieser Ausdrücke von  $\sin^2 \alpha$  und  $\cos \alpha$  in Gl. (2) liefert:

$$\frac{s}{a} = 1 - \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2 \lambda \cos \beta + \lambda^2}} - \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \beta}{1 - 2 \lambda \cos \beta + \lambda^2}} \right). \quad (28).$$

Durch Entwicklung in eine nach wachsenden Potenzen von  $\lambda$  fortschreitende Reihe findet man:

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos \beta + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \beta \cos \beta + \frac{1}{8} \lambda^3 \sin^2 \beta (4 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + \dots \dots \dots (29).$$

Rechnet man  $\beta$  von der oberen Todlage  $BA$ , (Fig. 49) der Kurbel und  $s$  vom entsprechenden anderen Ende des relativen Schieberweges, so hat man in Gl. (28) und (29) nur  $2a - s$  für  $s$ ,  $180^\circ - \beta$  für  $\beta$  zu setzen, wodurch sich Gleichungen ergeben, die aus Gl. (28) und (29) auch durch Vertauschung von  $\lambda$  mit  $-\lambda$  hervorgehen. Dieselbe Bemerkung, analog der oben in Beziehung auf Gl. (2) gemachten, gilt dann auch für alle abgeleiteten Gleichungen.

Beschränkt man sich unter der Voraussetzung, dass  $\lambda$  ein kleiner Bruch ist, auf die Berücksichtigung der Glieder mit der ersten Potenz von  $\lambda$ , so geht Gl. (29) aus Gl. (3) durch Vertauschung von  $\alpha$  mit  $\beta$ ,  $\lambda$  mit  $-\lambda$  hervor, woraus dann, unter  $v$  wieder die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, also hier des Punktes  $A$  (Fig. 49) verstanden, mit Rücksicht auf die so eben gemachte Bemerkung und darauf, dass ebenso

wie oben 
$$\frac{w}{v} = \frac{1}{a} \frac{ds}{d\alpha}, \quad \frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{w}{v} \right) \text{ war,}$$

so hier 
$$\frac{w}{v} = \frac{1}{a} \frac{ds}{d\beta}, \quad \frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\beta} \left( \frac{w}{v} \right) \text{ ist,}$$

folgt, dass in erster Annäherung die Beziehungen zwischen der Relativbewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Bewegung des Kurbelzapfens  $A$  bei der schwingenden Kurbelschleife dieselben sind wie die zwischen den Bewegungen des Schiebers und des Kurbelzapfens  $B$  bei der Schubkurbel, wenn nur die Bewegung des Kurbelzapfens in beiden Fällen vom oberen oder in beiden Fällen vom unteren Todpunkte aus gerechnet wird, d. h. von  $B_0$  in Fig. 47 und von  $A$ , in Fig. 49, oder von  $B$ , in Fig. 47 und von  $A_0$  in Fig. 49. Die genauere Entwicklung dieser Beziehungen ist für die schwingende Kurbelschleife weniger wichtig und zudem weniger einfach, als für die Schubkurbel.

§. 41. Gleichschenklige Schubkurbelkette.

Bei Besprechung der Mechanismen, die aus der (im engeren Sinne so genannten) ebenen Schubkurbelkette erhalten werden können, waren die Glieder  $AB = a$ ,  $BC = b$  verschieden lang ( $a < b$ ) vorausgesetzt worden,

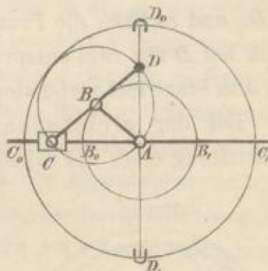
vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles  $a = b$ . In diesem letzteren, d. i. im Falle der gleichschenkligen Schubkurbelkette, sind die Glieder  $a, b$  und ebenso dann auch die Glieder  $c, d$  kinematisch nicht verschieden, womit zugleich der Unterschied der dort als Schubkurbel und als Schubschwinge (Fig. 47 und Fig. 48), desgleichen der Unterschied der als schwingende und als rotirende Kurbelschleife (Fig. 49 und Fig. 50) bezeichneten Mechanismen fortfällt. In der That kann die gleichschenklige Schubkurbelkette auch aus der gleichschenkligen Drehkörperkette (§. 38) und zwar dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass die längeren gleichen Glieder  $c$  unendlich lang, d. h. durch ein Prismenpaar verbunden werden, dessen Schubrichtung parallel der Axenebene der sie mit den anderen gleichen Gliedern  $= a$  verbindenden Drehkörperpaare ist; von den beiden Mechanismen aus der gleichschenkligen Drehkörperkette geht dann derjenige, welcher, entsprechend der Feststellung eines der Glieder  $c$ , dort als gleichschenklige Schwingkurbel (Fig. 46) bezeichnet wurde, in einen als gleichschenklige Schubkurbel zu bezeichnenden, und der dort bei Feststellung eines der Glieder  $a$  als gleichschenklige Doppelkurbel (Fig. 45) bezeichnete in einen als gleichschenklige Kurbelschleife zu bezeichnenden Mechanismus über.

Bei der gleichschenkligen Schubkurbel (Fig. 53) ist, während die Kurbel  $AB = a$  um  $A$  rotirt, der Schieber längs dem Stege in einer geradlinigen Bahn  $C_0AC, = 4a$  beweglich, deren Mitte  $A$  und die als Grenzfall der kreisbogenförmigen Bahn  $C'AC''$  (Fig. 46) des Punktes  $C$  bei der gleichschenkligen Schwingkurbel zu betrachten ist. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers, dem Drehungswinkel  $B_0AB = \alpha$  der ersteren der Weg

$$C_0C = s = 2a(1 - \cos \alpha)$$

des letzteren = dem von einem Todpunkte aus gerechneten Schieberwege eines Schubkurbelmechanismus, dessen Kurbellänge  $= 2a$  und verschwindend klein im Vergleich mit der Koppellänge ist. Ist der Schieber das treibende Glied (gleichschenkliges Schubkurbelgetriebe), so sind die Grenzlagen  $C_0$  und  $C$ , Todlagen und durch dieselben Mittel wie bei dem nicht gleichschenkligen Schubkurbelgetriebe zwangläufig zu überschreiten, insbesondere durch Verbindung der Kurbel mit einem Schwungrade. Geht aber die Bewegung von der Kurbel aus (gleichschenkliges Kurbel-

Fig. 53.



schubgetriebe), und ist letztere durch Drehung um  $90^\circ$  aus der Lage  $AB_0$  in die Richtung  $AD_0$  (Fig. 53) gekommen, der Schieber also von  $C_0$  nach  $A$ , so ist diese Lage des Getriebes eine Wechsellage, indem von ihr aus bei fortgesetzter Kurbeldrehung der Schieber nicht nothwendig auch weiter zu gehen braucht, vielmehr der Mechanismus in ein Drehkörperpaar sich verwandeln kann, entsprechend einer Drehung der mit der Kurbel vereinigten Koppel um die zusammenfallenden Axen  $A, C$ . Ist aber ersteres der Fall, d. h. geht der Schieber weiter über  $A$  hinaus, so gelangt das Getriebe in eine zweite Wechsellage, wenn die Kurbel bei fortgesetzter Drehung in die Richtung  $AD$ , und der Schieber bei seiner rückläufigen Bewegung von  $C$ , her wieder nach  $A$  gelangt ist. Die zwangsläufige Ueberschreitung dieser beiden Wechsellagen in der Weise, dass der Schieber zu beständiger Hin- und Herbewegung in der Strecke  $C_0C$ , genöthigt wird, kann durch Paarung gegenüber liegender Glieder, z. B. der Koppel  $BC$  mit dem Stege, entsprechend den Polbahnen dieser Glieder in der Nähe jener Lagen, vermittelt werden. Diese Polbahnen aber sind Cardanische Kreise um  $A$  und  $B$  mit den Halbmessern  $2a$  und  $a$ ; denn wenn  $CB$  über  $B$  hinaus um  $BD = BC = a$  verlängert wird, so liegen die Punkte  $A, C, D$  beständig in dem Kreise um den Mittelpunkt  $B$  mit dem Halbmesser  $a$ , ist also  $CAD$  ein rechter Winkel, und die Bewegung der Koppel gegen den Steg identisch mit der Bewegung der Strecke  $CD$  im rechten Winkel  $C_0AD_0$ . In den Wechsellagen berühren sich die Polbahnen mit den Punkten  $D, D_0$  oder  $D, D_1$ , und es kann die Paarung geschehen durch einen cylindrischen Triebstock bei  $D$  mit zwei entsprechenden Schlitzten bei  $D_0$  und  $D_1$ , die in einem mit dem Stege fest verbundenen Körper ihre Oeffnungen gegen  $A$  hin kehren.

Bei der gleichschenkligen Kurbelschleife, entsprechend der Feststellung eines der Glieder  $a$  vorliegender Kette, etwa des Gliedes  $AB$ ,

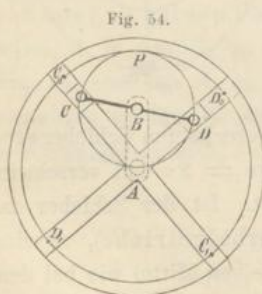


Fig. 54.

Fig. 54, können die Kurbel  $BC$  um die Axe  $B$  und die Schleife  $AC$  um die Axe  $A$  in gleichem Sinne rotiren mit einem constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse  $= 2$  als Grenzfall der gleichschenkligen Doppelkurbel (§. 38, Fig. 45), indem das dieser entsprechende veränderliche Winkelgeschwindigkeitsverhältniss nach Gl. (3) daselbst, dessen Mittelwerth nur  $= 2$  war, mit  $e = \infty$  in den constanten Werth  $2$  übergeht. Die Kreise um  $A$  und  $B$  mit den Halbmessern  $2a$  und  $a$  sind hier die Polbahnen beziehungsweise der Schleife und der Kurbel, und sie berühren sich in einem in der Verlängerung von  $AB$

fest liegenden Punkte  $P$  als Pol. Ist die Kurbel treibendes Glied (gleichschenkliges Kurbelschleifgetriebe), so sind Todlagen nicht vorhanden. Geht aber die Bewegung von der Schleife aus (gleichschenkliges Schleifkurbelgetriebe), so würde, wenn  $C$  mit  $A$  zusammenfällt, der Schieber mit der Schleife vereinigt um die zusammenfallenden Axen  $A, C$  gegen die mit dem Stege vereinigte Kurbel sich drehen können, wenn nicht eine zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen durch besondere Hilfsmittel herbeigeführt wird, z. B. wieder durch einen cylindrischen Triebstock  $D$  an der Verlängerung  $BD = BC$  der Kurbel nebst entsprechenden, mit der Schleife verbundenen Schlitzten bei  $D_0$  und  $D_1$ . Statt dessen kann auch, wie Fig. 54 andeutet, durch Verdoppelung der Kurbel und der Schleife die einfache in eine zusammengesetzte Kette verwandelt werden, bestehend aus den ternären Gliedern  $CBD$  und  $C_0D_0C_1D_1$ , die einerseits durch Drehkörperpaare mit dem binären Stege  $AB$ , andererseits mit den binären Schiebern  $C$  und  $D$ , und zwar die verdoppelte Kurbel durch Drehkörperpaare, die verdoppelte Schleife durch Prismenpaare verbunden sind. Dieselbe Bewegungsübertragung zwischen zwei in gleichem Sinne rotirenden Wellen mit den Axen  $A, B$  könnte auch durch Zahnräder mit innerem Eingriff bewirkt werden, denen aber der in Rede stehende Mechanismus besonders dann vorzuziehen sein kann, wenn die Entfernung  $AB$  der Axen klein ist. —

Indem der kinematische Charakter der hier besprochenen gleichschenkligen Schubkurbelkette wesentlich darauf beruht, dass in der ebenen Schubkurbelkette nicht nur die Glieder  $a, b$  gleich lang gemacht wurden, sondern auch die beiden anderen, unendlich langen Glieder  $c, d$  der ihr zu Grunde liegenden Drehkörperkette schon gleich lang waren, ist ihre Abstammung wesentlich auf die im engeren Sinne so genannte Schubkurbelkette beschränkt, und können analoge Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette (Fig. 51, §. 39) nicht erhalten werden, da deren Glieder  $c, d$ , obschon unendlich lang, doch nicht gleich, sondern um  $e$  verschieden lang sind, die Kette somit durch Specialisirung nur dadurch der allgemeineren gleichschenkligen Drehkörperkette subsumirt werden kann, dass gleichzeitig  $a = b$  und  $e = 0$  gemacht, d. h. der hier schon besprochene Fall vollständig hergestellt wird. Ist bei der allgemeinen Schubkurbelkette nur  $a = b$ , so ist damit die Bedingung (5) in §. 39 nicht erfüllt, so dass die Kette nur die dort schon erwähnten zweierlei Mechanismen, die allgemeine Schubschwinge bei Feststellung eines der Glieder  $c, d$  und die schleifende Doppelschwinge bei Feststellung eines der Glieder  $a, b$  liefert, ohne dass dieselben im Falle  $a = b$  bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten darböten.

## §. 42. Kreuzschieberkette.

In §. 39 ist die ebene Schubkurbelkette aus der ebenen Drehkörperkette dadurch abgeleitet worden, dass eines der 4 Drehkörperpaare  $A, B, C, D$  dieser letzteren als in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt wurde, entsprechend dem Fortrücken der Axe dieses Paares ins Unendliche, womit die beiden dadurch verbundenen Kettenglieder selbst unendlich lang wurden. Indem aber jetzt zwei der 4 Drehkörperpaare als in Prismenpaare übergegangen vorausgesetzt werden sollen, sind zwei Fälle zu unterscheiden, indem diese zwei Paare entweder benachbarte, wie  $C$  und  $D$ , oder gegenüber liegende, wie  $B$  und  $D$ , sein können; da ein Glied der ursprünglichen Drehkörperkette unendlich lang wird, indem die Axe eines der beiden Drehkörperpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbinden, ins Unendliche rückt, so sind im ersten Falle drei Glieder ( $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ) unendlich lang geworden, im zweiten Falle dagegen alle vier.

Hier wird zunächst der erste Fall vorausgesetzt, dass zwei benachbarte  $C, D$  der 4 Drehkörperpaare in Prismenpaare übergegangen sind. Das Glied  $AB = a$  ist dann von endlicher Länge geblieben und durch Drehkörperpaare mit den Gliedern  $b, d$  verbunden, die ihrerseits mit dem Gliede  $c$  durch Prismenpaare verbunden sind. Die Schubrichtungen der letzteren sind jedenfalls nicht parallel, sondern gekreuzt, weil sonst die ganze Kette in ein Prismenpaar überginge, bestehend aus  $c$  als dem einen und aus den (gegeneinander unbeweglich gewordenen) Gliedern  $d, a, b$  als dem anderen Elemente. Das Glied  $c$  kann deshalb, sofern es nicht Steg, d. h. festgestellt ist, ein Kreuzschieber genannt, und die ganze Kette danach als Kreuzschieberkette bezeichnet werden. Die Benennungen der übrigen Glieder sollen je nach ihrer Lage und nach der Art ihrer Beweglichkeit in den aus der Kette hervorgehenden Mechanismen, desgleichen auch die Benennungen dieser Mechanismen selbst je nach dem Verhalten ihrer dem Stege benachbarten Glieder gemäss denselben Principien gewählt werden wie bisher, und wie sie insbesondere mit Bezug auf die Schubkurbelkette in §. 39 näher angegeben sind. — Ist  $\alpha$  der Winkel, den die Schubrichtungen der beiden Prismenpaare mit einander bilden, so ist der Specialfall bemerkenswerth, dass  $\alpha = 90^\circ$ , in welchem die Kette als rechtwinklige im Gegensatz zu einer schiefwinkligen Kreuzschieberkette bezeichnet werde.

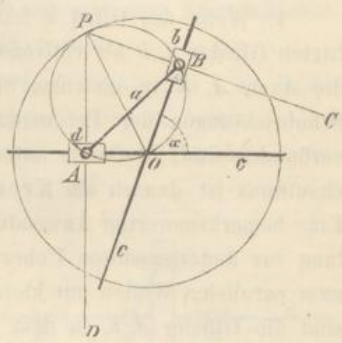
Ist  $O$ , Fig. 55, der Schnittpunkt der unter dem Winkel  $\alpha$  gegen einander geneigten (auf eine mit ihnen parallele Ebene projecirten) Bahnen

der Punkte  $A, B$  gegen den Kreuzschieber  $c$ , so ist die relative Bewegung der Glieder  $a, c$  identisch mit der des Figurenpaars „Strecke  $a$  in Winkel  $\alpha$ “ (§. 12); die Polbahnen dieser Glieder sind also Cardanische Kreise, und zwar ist der Durchmesser des zum Gliede  $a$  gehörigen (durch die Punkte  $A, B, O$  gehenden) kleineren Kreises = dem Halbmesser des (um  $O$  als Mittelpunkt) zum Gliede  $c$  gehörigen grösseren Kreises =  $\frac{a}{\sin \alpha}$ ; als

Berührungspunkt beider Kreise (der Pol  $P$ ) ist der Durchschnitt der Normalen zu  $AO$  und  $BO$  in den Punkten  $A$  und  $B$ . Die relative Bewegung der Glieder  $b, d$  ist eine nur gleitende; die Punkte des einen bewegen sich gegen das andere in congruenten Kreisen vom Halbmesser  $a$  in gleicher Weise (entsprechend dem unter III, b,  $\alpha$ ) in §. 3 aufgeführten Falle umkehrbarer Beweglichkeit), so dass entsprechende Normalen aller Punktbahnen beständig parallel sind, der Pol folglich stets im Unendlichen liegt.

Betrachtet man die Kette als Drehkörperkette  $ABCD$ , so dass  $C$  und  $D$  die unendlich fernen Punkte der Geraden  $PB$  und  $PA$  sind, so ist in dem unendlich grossen Dreiecke  $PCD$  jede Seite kleiner, als die Summe der beiden anderen, und zwar um eine unendlich grosse Strecke kleiner, so dass dieselbe Beziehung auch dann noch stattfindet, wenn die unendlich langen Dreiecksseiten um endliche Strecken verändert werden:  $PC$  um  $PB$  zur Darstellung der Gliedlänge  $BC = b$ ,  $PD$  um  $PA$  zur Darstellung der Gliedlänge  $AD = d$ . Indem dann endlich diese Beziehung auch dadurch nicht geändert wird, dass zu irgend einer der unendlich grossen Strecken  $b, c, d$  die endliche Strecke  $a$  hinzugefügt wird, so ist ersichtlich, dass die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen, und dass somit hier stets die Bedingung erfüllt ist, die nach §. 36 zur Folge hat, dass die Kette dreierlei Mechanismen liefert, welche, jenachdem das kürzeste Glied  $a$  oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder  $b, d$  oder das ihm gegenüberliegende Glied  $c$  festgestellt wird, den bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen beziehungsweise als Doppelkurbel, als Schwingkurbel und als Doppelschwinge bezeichneten Mechanismen analog sind, und von denen hier nicht, wie es bei der Schubkurbelkette (gemäss Fig. 47 und Fig. 49) der Fall

Fig. 55.





war, die beiden der Feststellung von  $b$  oder  $d$  entsprechenden, obschon beide der Schwingkurbel analogen Mechanismen doch verschiedenartig ausfallen, weil hier die dem kürzesten benachbarten Glieder  $b$ ,  $d$  kinematisch ganz gleich sind.

1. Wenn das Glied  $a$  festgestellt ist, so verhalten sich die benachbarten Glieder  $d$ ,  $b$  als rotirende Schleifen, und zwar drehen sie sich um die Axen  $A$ ,  $B$  in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel, indem die Schubrichtungen der Prismenpaare, wodurch sie mit dem Kreuzschieber verbunden sind, beständig unter dem Winkel  $\alpha$  gekreuzt bleiben; der Mechanismus ist danach als Kreuzschleifenmechanismus zu bezeichnen. Eine bemerkenswerthe Anwendung findet er in der Oldham'schen Kuppelung zur änderungslosen Uebertragung der rotirenden Bewegung zwischen zwei parallelen Wellen mit kleiner Axenentfernung  $AB = a$ . Diese Wellen sind die Glieder  $d$ ,  $b$ , in dem Lagergestelle  $a$  drehbar und mit Scheiben (Kuppelungsscheiben) endigend, in welche an ihren äusseren, in kleiner Entfernung  $= e$  einander zugekehrten und zu den Axen  $A$ ,  $B$  senkrechten ebenen Flächen je eine gerade Nuth eingearbeitet ist; der Kreuzschieber ist eine Scheibe von der Dicke  $e$ , die mit zwei geraden Federn, welche an ihren entgegengesetzten Flächen sich rechtwinklig kreuzend hervorragen, in die entsprechenden Nuthen der Kuppelungsscheiben eingreift. Sofern die Bewegung von einer der Wellen ausgeht, kommt somit der Mechanismus hier als rechtwinkliges Kreuzschleifengetriebe zur Verwendung.

Nach §. 12 beschreiben die Punkte von  $c$  gegen  $a$  Cardioiden, die Punkte von  $a$  gegen  $c$  Ellipsen. Letzteres wird benutzt in dem Ovalwerke von Leonardo da Vinci. Dabei ist  $\alpha = 90^\circ$ , also der Halbmesser des kleineren Cardanischen Kreises (in §. 12 mit  $r$  bezeichnet)  $= \frac{1}{2} a$  und  $AB$  (Fig. 55) ein Durchmesser dieses Kreises. Liegt der beschreibende Punkt  $S$  des festen Lagergestelles  $a$  in der Entfernung  $s$  vom Mittelpunkte der Strecke  $AB$ , so sind nach §. 12, Gl. (3),

$$\text{wenn } s < \frac{1}{2} a \text{ ist, } \frac{1}{2} a + s \text{ und } \frac{1}{2} a - s,$$

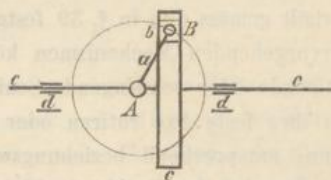
$$\text{wenn } s > \frac{1}{2} a \text{ ist, } s + \frac{1}{2} a \text{ und } s - \frac{1}{2} a$$

die Halbaxen der Ellipse, die der Punkt  $S$  gegen den als Planscheibe (mit auf einer Seite sich rechtwinklig kreuzenden schwalbenschwanzförmigen Nuthen) ausgeführten Kreuzschieber beschreibt, und wenn die Einrichtung getroffen ist, dass nicht nur  $s$ , sondern auch die Axenentfernung  $a$  allmählig

geändert werden kann, so sind die zu beschreibenden Ellipsen bezüglich auf Gestalt und Grösse innerhalb gewisser Grenzen stetig veränderlich. Wird der beschreibende Punkt durch die Spitze oder (mit den Axen  $A, B$  parallele) Schneide eines Werkzeugs ersetzt, das parallel mit den Axen verschiebbar ist, so kann auf solche Weise ein mit dem Kreuzschieber  $c$  fest verbundener Körper elliptisch abgedreht werden.

2. Bei Feststellung eines der Glieder  $b, d$  verhält sich  $a$  als Kurbel, und ist der Mechanismus als Kreuzschieberkurbel zu bezeichnen. Er findet besonders als rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) Anwendung anstatt einer Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), aus welcher er dadurch entstanden gedacht werden kann, dass die Axe  $C$  im Sinne der Schieberbahn  $AC$  ins Unendliche rückte und somit die Koppel  $b$  in einen Schieber überging, der mit dem zum rechtwinkligen Kreuzschieber gewordenen Schieber  $c$  durch ein Prismenpaar mit zu  $AC$  senkrechter Schubrichtung verbunden ist. Die Beziehungen zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Kurbelzapfens  $B$  und des Kreuzschiebers ergeben sich aus den Formeln in §. 40 mit  $\lambda = 0$ .

Fig. 56.



3. Bei Feststellung des Kreuzschiebers  $c$  verhalten sich die benachbarten Glieder  $b, d$  als Schieber mit gekreuzten Schubrichtungen, durch das Glied  $a$  als Koppel verbunden; der Mechanismus kann als Kreuzschiebermechanismus bezeichnet werden. Mit  $\alpha = 90^\circ$  findet er Anwendung bei einem bekannten Ellipsenzirkel, wobei sich der die Ellipsen verzeichnende Stift  $S$  an einer Verlängerung der als Lineal ausgeführten Koppel befindet; die Halbaxen dieser Ellipsen sind  $= s + \frac{1}{2} a$  und  $= s - \frac{1}{2} a$ , unter  $s$  die Entfernung des Stiftes  $S$  vom Mittelpunkte der Strecke  $AB$  verstanden. Sie sind durch Aenderung von  $a$  und  $s$  veränderlich, indem die der Koppel angehörig Elemente der Drehkörperpaare  $A, B$  sich an Hülsen befinden, die an verschiedenen Stellen des betreffenden Lineals festgeklemmt werden können. Das Instrument ist die Umkehrung des Leonardo'schen Ovalwerkes; während bei diesem die Ellipsen von einem Punkte des festen Gliedes  $a$  auf dem beweglichen Gliede  $c$  beschrieben werden, werden sie hier von einem Punkte des beweglichen Gliedes  $a$  auf dem festen Gliede  $c$  beschrieben.

## §. 43. Schieberschleifenkette.

Wenn von den 4 Drehkörperpaaren  $A, B, C, D$  einer ebenen Drehkörperkette zwei gegenüber liegende, etwa  $B$  und  $D$  in Prismenpaare übergehen, und somit alle 4 Gliedlängen  $a, b, c, d$  unendlich gross werden, so mag die entstehende Kette als Schieberschleifenkette bezeichnet werden, weil, welches Glied auch festgestellt werden mag, von den beiden ihm benachbarten Gliedern immer das eine in gerader Bahn verschiebbar, das andere um eine feste Axe drehbar, mit dem folgenden aber durch ein Prismenpaar verbunden ist, jenes somit als Schieber, dieses als Schleife sich verhält gemäss den in §. 39 festgesetzten Benennungen. Die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen könnten somit höchstens von zweierlei Art, rotirende oder schwingende Schieberschleifen sein, jenachdem die Schleife um ihre feste Axe rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, entsprechend beziehungsweise der Schwingkurbel und der Doppelschwinge bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen. Ob der erste dieser beiden Fälle (rotirende Schieberschleife) überhaupt möglich sei, kann vermittels des allgemeinen Kriteriums in §. 36 deshalb hier nicht unmittelbar festgestellt werden, weil sich nicht sagen lässt, welches die kleinste und welches die grösste der unendlich grossen Gliedlängen ist. Man kann nur sagen, dass der Unterschied der Gliedlängen  $AB = a$  und  $BC = b$  der Entfernung  $a'$  (Fig. 57) der relativen Bahnen  $AA$ , und  $CC'$  gleich sei, welche die Punkte  $A$  und  $C$  als Punkte der beiden Elemente des Prismenpaares  $a, b$  durchlaufen, und ebenso dass der Unterschied der Gliedlängen  $CD = c$  und  $DA = d$  gleich sei der Entfernung  $c'$  der relativen Bahnen  $AA'$  und  $CC'$ , derselben Punkte  $A$  und  $C$ , insofern sie den Elementen des Prismenpaares  $c, d$  angehören. Weil übrigens nach §. 36 die Bedingung für die Möglichkeit einer Schwingkurbel dieselbe wie die für die Möglichkeit einer Doppelkurbel ist (kleinste + grösste Gliedlänge < Summe der beiden anderen), hier aber ein der Doppelkurbel analoger Mechanismus nicht vorkommt, so ist zu schliessen, dass auch ein der Schwingkurbel analoger Mechanismus hier unmöglich ist, dass also die in Rede stehende Kette nur einen Schieberschleifenmechanismus mit schwingender Schleife liefern kann.

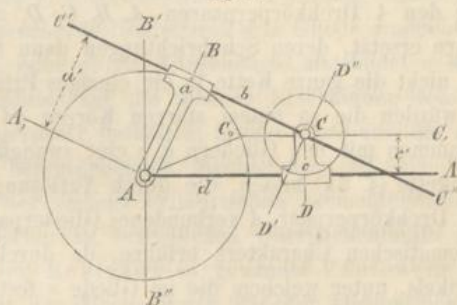
Dasselbe ergibt sich durch Betrachtung von Fig. 57, in welcher  $a' > c'$  angenommen ist. Befindet sich das Glied  $c$  im Sinne  $AA'$  unendlich weit von  $A$  entfernt, so hat  $AB$  (die von  $A$  auf  $CC'$  gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied  $a$ ) die zu  $AA'$  senkrechte Lage  $AB'$ . Bewegt sich dann  $c$  gegen  $A$  hin, so dreht sich  $a$  gegen  $d$  im Sinne  $B'AA'$

bis der Punkt  $C$  in den Schnittpunkt  $C_0$  seiner gegen das Glied  $d$  beschriebenen relativen Bahn mit dem um  $A$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser  $a'$  beschriebenen Kreise und  $AB$  in die Lage  $AC_0$  gekommen ist. Das Glied  $c$  kann jetzt nur wieder rückwärts längs  $d$  gleiten, während  $a$  sich weiter drehen kann bis  $AB$  in die Lage  $AB''$  gekommen ist, wenn  $c$  sich wieder in unendlicher Entfernung befindet. Bewegt sich aber jetzt  $c$  wieder gegen  $A$  hin, so muss sich  $a$  rückläufig gegen  $d$  drehen, da der um  $A$  mit dem Halbmesser  $a'$  beschriebene Kreis in seinem Durchschnittspunkte mit  $AB$  stets eine durch  $C$  gehende Tangente hat. Befindet sich andererseits das Glied  $a$  im Sinne  $CC'$  unendlich weit von  $C$  entfernt, so hat  $CD$  (die von  $C$  auf  $AA'$  gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied  $c$ ) die zu  $CC'$  senkrechte Lage  $CD'$ . Bewegt sich dann  $a$  gegen  $C$  hin und darüber hinaus, so dreht sich  $c$  gegen  $b$  im Sinne  $D'CC''$  so, dass  $CD$  die Lage  $CC''$  erreicht, wenn  $AB$  mit dem Gliede  $a$  um die Strecke  $c'$  über  $C$  hinaus gekommen; und endlich die Lage  $CD''$ , wenn  $a$  im Sinne  $CC''$  unendlich weit von  $C$  entfernt ist. Einer rückläufigen Gleitung von  $a$  längs  $b$  entspricht dann aber nothwendig auch eine rückläufige Drehung von  $c$  um die Axe  $C$ . Sofern in Wirklichkeit die relativen Gleitbahnen von  $a$  gegen  $b$  und von  $c$  gegen  $d$  auf Strecken von endlicher Grösse beschränkt sind, ist ersichtlich, dass die relativen Schwingungswinkel von  $a$  gegen  $d$  und von  $c$  gegen  $b$  jedenfalls  $< 180^\circ$  sein müssen.

Von Specialfällen sind nur die beiden zu erwähnen, dass  $c' = a'$  oder  $c' = 0$  ist. Im ersten Falle reducirt sich indessen die Kette auf ein Prismenpaar, bestehend aus den vereinigten Gliedern  $d, a$  als einem und den vereinigten Gliedern  $b, c$  als dem anderen Elemente. Im Falle  $c' = 0$  erhält man eine Kette, die sich zu der allgemeinen Schieberschleifenkette ähnlich verhält wie die im engeren Sinne so genannte zur allgemeinen Schubkurbelkette, ohne dass übrigens bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten mit diesem Specialfalle verbunden wären, in welchem insbesondere auch nur eine Mechanismenart aus der Kette hervorgehen kann: eine schwingende Schieberschleife. —

Die besonderen Ketten, die aus der ebenen Drehkörperkette dadurch

Fig. 57.



erhalten werden können, dass die Axen gewisser ihrer Drehkörperpaare ins Unendliche rücken, diese Paare also in Prismenpaare übergehen, sind mit den im Vorhergehenden besprochenen erschöpft. Würden nämlich 3 von den 4 Drehkörperpaaren  $A, B, C, D$ , etwa  $B, C, D$  durch Prismenpaare ersetzt, deren Schubrichtungen dann alle verschieden sein müssten, um nicht die ganze Kette in ein einziges Prismenpaar übergehen zu lassen, so würden die zu einem starren Körper  $ad$  vereinigten Glieder  $a$  und  $d$  zusammen mit den Gliedern  $b, c$  eine zwangsläufig geschlossene ebene Prismenkette (§. 34) bilden, die durch Auflösung des Gliedes  $ad$  in ein durch das Drehkörperpaar  $A$  verbundenes Gliederpaar  $a, d$  keine Aenderung ihres kinematischen Charakters erführe, da durch die Unveränderlichkeit des Winkels, unter welchem die im Gliede  $a$  feste Schubrichtung des Prismenpaares  $a, b$  gegen die im Gliede  $d$  feste Schubrichtung des Prismenpaares  $c, d$  geneigt ist, jede relative Drehung der Glieder  $a, d$  unmöglich gemacht würde, diese Glieder sich also in der Kette doch wie ein einziger starrer Körper verhielten.

#### §. 44. Zapfenerweiterung.

Die im Vorhergehenden betrachteten und ebenso die im Folgenden noch zu besprechenden Mechanismen kommen häufig in so eigenthümlichen und von den durch die schematischen Figuren angedeuteten so abweichenden Formen vor, bedingt theils durch die allgemeinen Anforderungen des Maschinenbaues, theils durch die besonderen Eigenthümlichkeiten der jeweils vorliegenden constructiven Aufgabe, dass dadurch ihr kinematischer Charakter verdeckt, die Erkenntniss desselben durch die erforderliche Abstraction von constructiv vielleicht sehr wesentlichen, kinematisch aber gleichgültigen Gestaltungen erschwert wird. Bei den Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren werden diese Unterschiede der Form bei demselben kinematischen Charakter besonders durch zwei Umstände bedingt: durch die Umkehrbarkeit der niederen Paare und durch die vom Gesichtspunkte der Kinematik aus gleichgültige Grösse des Durchmessers, mit welchem die zur Verbindung der Kettenglieder besonders häufig dienenden Drehkörperpaare (Zapfen mit entsprechenden Hohlkörpern) an den Oberflächentheilen, mit denen die Elemente sich berühren, ausgeführt werden.

Was den ersten Umstand, die Umkehrbarkeit der niederen Elementenpaare betrifft, so ist es z. B. kinematisch gleichgültig, ob bei der Schieber-  
schleifenkette (Fig. 57 im vorigen §.) von dem Drehkörperpaare  $A$  der

Vollkörper (Zapfen) dem Gliede  $a$  und der entsprechende Hohlkörper (Zapfenlager, Zapfenhülse) dem Gliede  $d$  angehört oder umgekehrt, desgleichen ob von dem die Glieder  $a, b$  verbindenden Prismenpaare das Vollprisma dem Gliede  $b$ , das entsprechende Hohlprisma dem Gliede  $a$  angehört, wie in Fig. 57 angedeutet ist, oder ob das Umgekehrte stattfindet u. s. f.

Von noch grösserem Einflusse auf die äussere Erscheinung solcher Mechanismen, welche Drehkörperpaare enthalten, insbesondere also der aus der ebenen Drehkörperkette hervorgehenden Mechanismen ist die Vergrösserung des Durchmessers der zumeist cylindrischen Elementenflächen, d. h. der mit einander in Berührung befindlichen Oberflächentheile der Elemente dieser Paare: die von Reuleaux so genannte Zapfenerweiterung, namentlich häufig bei den Mechanismen aus der ebenen Schubkurbelkette vorkommend. Sind bei einem solchen (Fig. 47—50, §. 39)  $a', b', c'$  die Halbmesser der Elementenflächen beziehungsweise der Drehkörperpaare  $A, B, C$ , die dabei (bis auf Vorsprünge zur Verhinderung der axialen Verschiebbarkeit der betreffenden Elemente) als cylindrisch vorausgesetzt werden, so können dieselben insbesondere solche Erweiterungen erfahren, dass

$$a' > a + b', \quad b' > a + a' \text{ oder } > b + c', \quad c' > b + b'$$

ist, dass sie also die Elementenfläche eines benachbarten Drehkörperpaares der Kette mit umfassen, ja es kann zugleich

$$a' > a + b' \text{ und } b' > b + c'$$

sein, so dass die Elementenfläche des Paares  $C$  innerhalb der des Paares  $B$  und mit dieser innerhalb der des Paares  $A$  liegt, oder zugleich

$$c' > b + b' \text{ und } b' > a + a',$$

so dass die Elementenfläche des Paares  $A$  innerhalb der des Paares  $B$  und mit dieser innerhalb der des Paares  $C$  liegt.

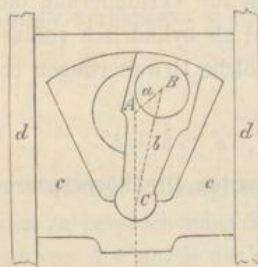
Von diesen Ausführungsformen der Schubkurbelkette ist namentlich die dem Falle  $b' > a + a'$  entsprechende sehr gebräuchlich, indem dabei der Zapfen des Drehkörperpaares  $B$  in eine excentrische Scheibe übergegangen ist, die im Falle des Schubkurbelmechanismus, d. h. bei Feststellung des Gliedes  $d$  (Fig. 47) zugleich als die Kurbel dient, von welcher bei Verwendung dieses Mechanismus als Kurbelschubgetriebe der Antrieb ausgeht, um den Schieber, z. B. bei Schiebersteuerungen, in eine geradlinige hin und her gehende Bewegung zu versetzen.

Auch findet sich nicht selten der Fall  $c' > b + b'$  und zwar in der schon in §. 33 mit Bezug auf Fig. 37 erklärten Weise verwirklicht, indem das Glied  $b$  (die Koppel im Falle eines Schubkurbelmechanismus) als ein

Bogenschieber ausgeführt ist, der von zwei zur Axe  $C$  conaxialen Umdrehungsflächen, die dann zusammen die dem Gliede  $b$  angehörige Elementenfläche des Drehkörperpaares  $b, c$  bilden, begrenzt wird und in einem entsprechenden kreisbogenförmigen Schlitz des Gliedes  $c$  (des Schiebers im Falle des Schubkurbelmechanismus) gleitet. Rückt die Axe  $C$  ins Unendliche, so wird dieser Schlitz geradlinig und geht die Kette in die rechtwinklige Kreuzschieberkette (§. 42), der Schubkurbelmechanismus in die rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) über u. s. f.

Weitere Modificationen können durch die verschiedene Art und Weise herbeigeführt werden, wie die Elementenfläche eines Drehkörperpaares aus getrennten Theilen verschiedener conaxialer Umdrehungsflächen gebildet wird. So entspricht schon in jenem Falle des Schubkurbelmechanismus, bei dem die Koppel  $b$  zu einem Bogenschieber degenerirt ist, von den beiden

Fig. 58.



conaxialen Umdrehungsflächen, die zusammen die Elementenfläche des Drehkörperpaares  $b, c$  ausmachen, nur die eine (äussere) der durch die Beziehung  $c' > b + b'$  charakterisirten Zapfenverweiterung; was die andere betrifft, die bei dem als Bogenschieber ausgeführten Gliede  $b$  einen concaven Oberflächentheil desselben bildet, so kann sie auch als ein Theil der convexen Oberfläche eines gewöhnlichen Zapfens ausgeführt werden, wobei sie dann behufs Erhaltung der selbstständigen Geschlossenheit des Paares  $b, c$  auf die andere Seite der Axe  $C$  gelegt werden muss, wie es bei Durchstossmaschinen gemäss Fig. 58 vorkommt u. s. f.

#### §. 45. Sphärische Drehkörperkette.

Unter diesem Namen wird hier eine einfache geschlossene kinematische Kette verstanden, deren Glieder nur durch Drehkörperpaare verbunden sind, so aber, dass die Axen dieser Paare jetzt nicht parallel sind, sondern sich in einem Punkte  $O$  schneiden, dass somit die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied irgend eines aus der Kette gebildeten Mechanismus in concentrischen Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkte  $O$  liegen. Die Umstände, unter denen eine solche Kette zwangläufig beweglich, also zur Bildung von Mechanismen geeignet ist, ergeben sich durch eine der allgemeinen Discussion ebener

Drehkörperketten (§. 36) ganz analoge Betrachtung, wobei wieder in der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, mit  $a, b, c \dots$  die Glieder derselben bezeichnet werden sollen, mit  $A, B, C \dots$  die sie verbindenden Drehkörperpaare, event. auch ihre Axen oder die Schnittpunkte dieser Axen mit einer (an die Stelle der Ebene  $H$  in §. 36 tretenden) Kugelfläche  $K$  um  $O$  als Mittelpunkt. Bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben  $A, B, C \dots$  seien  $a = AB, b = BC, c = CD \dots$  zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder, verstanden als Bogenlängen grösster Kugelnkreise für den Halbmesser der Kugel als Längeneinheit oder, was dasselbe ist, als die Winkel  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD \dots$ , unter denen die Axen der die betreffenden Glieder mit den benachbarten Gliedern verbindenden Drehkörperpaare gegen einander geneigt sind. Da diese Axen  $A, B, C \dots$  stets über  $O$  hinaus verlängert zu denken sind, so dass sie die Kugelfläche  $K$  in je 2 Punkten schneiden, so können diese Schnittpunkte immer so als die Punkte  $A, B, C \dots$  gewählt werden, dass  $(n - 1)$  Seiten des sphärischen  $n$ -Ecks  $ABC \dots MN$ , z. B.  $AB, BC, \dots MN$ , höchstens Quadranten, dass also alle Winkel  $a, b, c \dots$  ausser einem, dem Winkel  $\angle NOA$ , der dadurch bestimmt ist und auch stumpf ausfallen kann, höchstens rechte Winkel sind. Ist aber einer dieser Winkel ein rechter, so können unbeschadet der Allgemeinheit alle übrigen als höchstens rechte Winkel angenommen werden, indem die Axen  $A$  und  $N$  als die Schenkel jenes gegebenen rechten Winkels vorausgesetzt werden können und dann die das sphärische Polygon schliessende Bogenseite immer ein Quadrant wird, einerlei ob  $N$  der eine oder der andere Schnittpunkt der Axe  $N$  mit der Kugel  $K$  sein mag.

Wenn zunächst wieder die Kette als nur dreigliedrig angenommen wird, so kann die Polaxe irgend zweier ihrer Glieder  $a, b, c$ , z. B. der Glieder  $a$  und  $c$  in Folge ihrer Verbindung durch die Paare  $B, C$  nur jede durch  $O$  gehende Gerade in der Axenebene  $BC$  sein; weil aber andererseits diese Polaxe in der Axe  $A$  des die Glieder  $a$  und  $c$  unmittelbar verbindenden Paares gegeben ist, so müssen alle 3 Axen in derselben Ebene liegen, um relative Bewegung möglich zu machen, die freilich nur unendlich klein zu sein braucht, um die Erfüllung jener ihrer Möglichkeitsbedingung wieder aufzuheben. Zu relativer Beweglichkeit von endlicher Grösse ist eine wenigstens viergliedrige Kette nöthig.

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette sei  $d$  das festgestellte Glied. Irgend eines der beiden benachbarten Glieder, z. B.  $a$  ist dann zwangläufig, wenn die Polaxe  $A$ , die seiner Verbindung mit  $d$  durch das Paar  $A$  entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit  $d$  durch die Paare  $B, C, D$  haben kann, was aber



immer der Fall ist, ausser wenn die Axen  $B, C, D$  in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe  $A$  enthält. Das dem festgestellten gegenüber liegende Glied  $b$  ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene  $AB$  von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene  $CD$  geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen  $AB$  und  $CD$  zusammenfallen. Ebenso wie die ebene ist also auch die sphärische viergliedrige Drehkörperkette zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen.

Endlich ist ebenso wie bezüglich der ebenen (§. 36), so auch hier bezüglich der sphärischen Drehkörperkette zu erkennen, dass sie, um zwangläufig zu sein, höchstens viergliedrig sein darf. Nicht übertragbar sind indessen die Specialfälle, die dort aus dem Uebergange von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen konnten; denn ins Unendliche können die Axen  $A, B, C \dots$  nur zugleich mit dem Punkte  $O$  rücken, wodurch dann eben die sphärische in die ebene Drehkörperkette übergeht. —

Die Mechanismen aus der viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette können ebenso wie die aus der ebenen Kette zu erhaltenden (§. 36) von dreierlei Art sein und analoger Weise als 1) sphärische Doppelschwinge, 2) sphärische Schwingkurbel oder Kurbelschwinge, 3) sphärische Doppelkurbel bezeichnet werden unter Beibehaltung der Benennungen der einzelnen Glieder, wie sie je nach ihrer Lage und Beweglichkeit im Mechanismus in §. 36 für die ebene viergliedrige Drehkörperkette erklärt wurden. In Betreff der Umstände, unter welchen ein solcher sphärischer Drehkörpermechanismus von der 1<sup>ten</sup>, 2<sup>ten</sup> oder 3<sup>ten</sup> Art ist, kann eine ähnliche Untersuchung angestellt werden, wie es in §. 36 für die ebene Kette geschah, indem die Gliedlängen  $a, c, d$  als spitze Winkel vorausgesetzt werden,  $a < c$  und die Koppellänge  $b < a + c + d$  resp.  $< 2\pi - (a + c + d)$ , jenachdem  $a + c + d \leq \pi$  ist. Die geraden Linien der Figuren 39—44 werden dann nur Bögen grösster Kreise, die um  $A$  und  $D$  als Mittelpunkten mit den Halbmessern  $a$  und  $c$  beschriebenen Kreise jener Figuren werden kleinere Kreise der Kugel  $K$  mit den Axen  $OA, OD$  und den Halbmessern  $r \sin a, r \sin c$ , unter  $r$  den Halbmesser der Kugel verstanden. Das Resultat der bis auf diese Aenderungen fast wörtlich zu wiederholenden Discussion aller möglichen Fälle ist dasselbe wie dort: auch die viergliedrige sphärische Drehkörperkette kann nur dann eine Doppelkurbel oder eine Schwingkurbel liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen

ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kleinsten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kleinsten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingen aus der Kette hervor. Als die kürzeste Gliedlänge ist hierbei der kleinste spitze Winkel (er sei  $= a$ ) zu nehmen, den irgend zwei auf einander folgende Axen ( $A$  und  $B$ ) mit einander bilden, die beiden darauf folgenden Gliedlängen ( $b$  und  $c$ , oder  $d$  und  $e$ ) sind gleichfalls als spitze Winkel zu nehmen, während der vierte Winkel ( $d$  resp.  $b$ ) dadurch bestimmt ist und spitz oder stumpf sein kann.

#### §. 46. Besondere Fälle der sphärischen Drehkörperkette.

Specialfälle analog denjenigen, wie sie bei der ebenen Drehkörperkette in §. 37 und §. 38 als Zwillingskurbelkette und als gleichschenklige Drehkörperkette betrachtet wurden, charakterisirt durch die Gleichheit von 2 mal 2 gegenüber liegenden oder 2 mal 2 benachbarten Gliedern, können zwar auch hier vorkommen, bieten aber zu näherer Untersuchung kaum Veranlassung dar, indem ihre Bewegungsgesetze weniger einfach und schon deshalb weniger bemerkenswerth sind. So kann insbesondere aus der Kette, deren gegenüber liegende Glieder gleich lang sind ( $a = c$ ,  $b = d$ ), hier nicht ein Mechanismus hervorgehen, in welchem z. B. gegen das Glied  $d$  als Steg die beiden benachbarten Glieder  $a$  und  $c$  als Kurbeln sich in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel drehen, wie es bei dem Parallelkurbelmechanismus (§. 37) der Fall ist. Denn zu dem Ende müsste, wenn die Winkel  $DAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  des sphärischen Vierecks  $ABCD$  beziehungsweise mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  bezeichnet werden, beständig  $A = \pi - D$  sein können; weil aber mit den Gegenseiten dieses Vierecks auch die gegenüberliegenden Winkel gleich wären ( $A = C$ ,  $B = D$  als homologe Winkel von sphärischen Dreiecken  $DAB$  und  $BCD$ , resp.  $ABC$  und  $CDA$ , deren Seiten gleich sind), so würde aus

$$A = \pi - D \text{ auch } C = \pi - B, \text{ somit } A + B + C + D = 2\pi$$

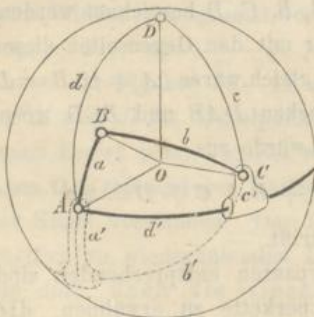
folgen, was nur bei einem ebenen Viereck zutrifft. —

Ausser den der Gleichheit von Gliederpaaren entsprechenden sind solche Specialfälle der sphärischen Drehkörperkette zu erwähnen, die durch den besonderen Werth  $\frac{\pi}{2}$  eines oder mehrerer Glieder charakterisirt werden; wie im vorigen §. bemerkt wurde, können dann

die übrigen Gliedlängen immer als spitzwinklig vorausgesetzt werden, ohne die Allgemeinheit dadurch weiter zu beschränken. Von solchen Fällen sind 4 zu unterscheiden, indem entweder nur ein Glied  $= \frac{\pi}{2}$  ist, oder zwei benachbarte oder zwei gegenüber liegende, oder endlich drei Glieder  $= \frac{\pi}{2}$  sind; wären alle vier  $= \frac{\pi}{2}$ , so fielen zwei der vier Axen  $A, B, C, D$  zusammen und ginge die Kette in ein einzelnes Drehkörperpaar über. Wesentliche Eigenthümlichkeiten kommen übrigens auch diesen Specialfällen im Allgemeinen nicht zu; wenn sie gewisse Analogien mit denjenigen darbieten, die aus der ebenen Drehkörperkette durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen, so beruhen dieselben doch mehr auf äusserlichen Ausführungsformen, entsprechend den bei der ebenen Kette gewohnten Formen, als auf analogen kinematischen Charakteren. Die ebene Kette kann betrachtet werden als eine sphärische, deren als Winkel verstandene Gliedlängen wegen des unendlich grossen Halbmessers der Kugel unendlich klein sind, wenn die absoluten Gliedlängen von endlicher Grösse sind; letztere werden unendlich, wenn die entsprechenden Winkel beliebige endliche Grössen erhalten, die insbesondere nicht  $= \frac{\pi}{2}$  zu sein brauchen.

So lässt sich schon die allgemeine sphärische Schubkurbelkette in einer an die ebene allgemeine Schubkurbelkette erinnernden Weise ausführen. Denkt man sich etwa zunächst die Kettenglieder  $a, b, c, d$  als stangenförmige Körper, die nach grössten Kreisen  $AB, BC, CD, DA$  (Fig. 59)

Fig. 59.



einer Kugel mit dem Mittelpunkte  $O$  gekrümmt und durch Charniere (Drehkörperpaare) verbunden sind, deren Axen  $A, B, C, D$  gegen  $O$  convergiren, so kann z. B. das Glied  $d$  auch als ein stangenförmiger Umdrehungskörper  $d'$  zur Achse  $D$ , das Glied  $c$  als entsprechender Hohlkörper  $c'$  (als Kreischieber, auf  $d'$  verschiebbar) ausgeführt werden, wenn nur jetzt  $d'$  und  $a$  durch das Drehkörperpaar mit der Achse  $A$ ,  $c'$  und  $b$  durch das Drehkörperpaar mit der Achse  $C$  verbunden werden. Die äusserliche Ana-

logie dieser Kette, bei der die dem Elementenpaare  $c', d'$  entsprechenden relativen Bewegungsgebiete der Axen  $A$  und  $C$  zwei conaxiale Kegelflächen

mit der Axe  $D$  sind, mit der ebenen allgemeinen Schubkurbelkette, Fig. 51, bei welcher die dem Prismenpaare  $c, d$  entsprechenden relativen Bewegungsgebiete jener Axen zwei parallele Ebenen sind, wird durch die (der Fig. 59 zu Grunde liegende) Voraussetzung  $d = \frac{\pi}{2}$  nur insofern erhöht, als dadurch jene die Axe  $A$  enthaltende Kegelfläche in eine Ebene übergeht, die freilich zur Axe  $D$  senkrecht ist, während die entsprechende Ebene bei Fig. 51 mit der unendlich fernen Axe  $D$  parallel ist. Ist  $a$  die kleinste Gliedlänge, so geht mit  $d = \frac{\pi}{2}$  die Bedingung dafür, dass die dreierlei im vorigen §. erwähnten Mechanismen aus der Kette erhalten werden können, über in:

$$a + \frac{\pi}{2} < b + c$$

$$\text{oder mit } c' = \frac{\pi}{2} - c \text{ in: } a + c' < b$$

analog Gl. (5) in §. 39 für die ebene allgemeine Schubkurbelkette, Fig. 51. Diese geht in die der Voraussetzung  $d = \frac{\pi}{2}$  entsprechende sphärische Drehkörperkette über, wenn ihre geradlinigen Glieder so nach grössten Kugelnkreisen gekrümmt werden, dass die vorher parallelen Axen  $A, B, C$  sich im Kugelmittelpunkte schneiden; das Prismenpaar  $c, d$  verwandelt sich dabei in ein Drehkörperpaar, das nur äusserlich als Kreisschieber mit entsprechender Führung (nach dem Princip der Zapfenverlängerung, §. 44) ausgeführt erscheint. Die so erhaltene Kette als allgemeine (oder nach Reuleaux als geschränkte) sphärische Schubkurbelkette zu bezeichnen, erscheint aber hier nicht passend, da vom Gesichtspunkte der Kinematik die Bezeichnungen nicht den äusserlichen Ausführungsformen, sondern den hiervon unabhängigen, allein durch die Arten relativer Beweglichkeit bedingten kinematischen Eigenschaften anzupassen sind.

Lässt man in Fig. 59 ausser  $d = \frac{\pi}{2}$  auch  $c = \frac{\pi}{2}$  werden, so werden die relativen Bewegungsgebiete der Axen  $A, C$ , welche dem Drehkörperpaare  $D$  oder dem in Fig. 59 dafür substituirt, kinematisch ihm gleichwerthigen Elementenpaare  $c', d'$  entsprechen, zwei zusammenfallende zur Axe  $D$  senkrechte Ebenen. Durch die in Fig. 59 vorausgesetzte Ausführung erscheint dann die Kette äusserlich der im engeren Sinne so genannten ebenen Schubkurbelkette analog, bei welcher indessen die Ebene, in der die dem Prismenpaare entsprechenden relativen Bewegungsgebiete

der Axen  $A, C$  zusammenfallen, mit der im Unendlichen liegenden Axe  $D$  parallel ist. Je nach der Wahl des festgestellten Gliedes kann diese sphärische Drehkörperkette mit zwei benachbarten rechtwinkligen Gliedern stets dreierlei Mechanismen liefern, denen dieselben Namen gebühren wie den aus der allgemeinen sphärischen Drehkörperkette hervorgehenden, und zwar wird die Kette eine sphärische Doppelkurbel bei Feststellung des kleinsten Gliedes  $a$ , eine sphärische Schwingkurbel bei Feststellung von  $b$  oder  $d'$ , eine sphärische Doppelschwinge bei Feststellung von  $c'$ .

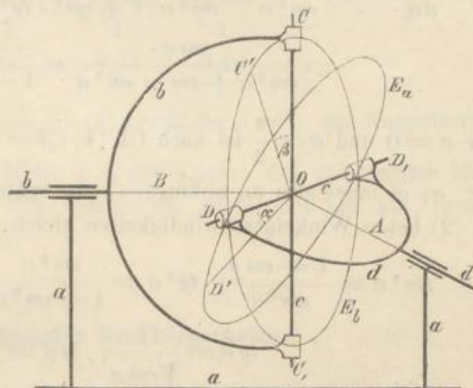
Sind zwei gegenüber liegende Glieder rechtwinklig, z. B.  $b = d = \frac{\pi}{2}$ , so kann die Kette der ebenen Schieberschleifenkette (Fig. 57, §. 43) dadurch ähnlich gemacht werden, dass nicht nur wieder die Glieder  $c$  und  $d$  der ursprünglich vorausgesetzten Kette durch die Glieder  $c'$  und  $d'$  in der oben erklärten Weise ersetzt werden, sondern auch, wie in Fig. 59 durch punktirte Linien angedeutet ist, das Glied  $b$  als ein mit dem Kreisschieber  $c'$  durch das Drehkörperpaar  $C$  verbundener stangenförmiger Umdrehungskörper  $b'$  zur Axe  $B$ , das Glied  $a$  als ein mit dem Gliede  $d'$  durch das Drehkörperpaar  $A$  verbundener entsprechender Kreisschieber  $a'$  ausgeführt wird. Dass aber diese Aehnlichkeit eine nur äusserliche ist, ergibt sich schon daraus, dass die ebene Schieberschleifenkette nur einerlei Mechanismus (eine Schieberschleife mit schwingender Schleife), die  $b = d = \frac{\pi}{2}$  entsprechende sphärische Drehkörperkette dagegen stets dreierlei Mechanismen liefern kann. Sie wird nämlich dem allgemein gültigen Kriterium zufolge, wenn  $a < c$ , also  $a' \left( = \frac{\pi}{2} - a \right) > c' \left( = \frac{\pi}{2} - c \right)$  ist, durch Feststellung von  $a'$  eine sphärische Doppelkurbel, durch Feststellung von  $b'$  oder  $d'$  eine sphärische Schwingkurbel mit  $a'$  als Kurbel, durch Feststellung von  $c'$  endlich eine sphärische Doppelschwinge. —

Am häufigsten wird die sphärische Drehkörperkette in dem Specialfalle von 3 rechtwinkligen Gliedern, etwa  $b = c = d = \frac{\pi}{2}$ , und zwar als sphärische Doppelkurbel mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln angewendet, als der Mechanismus nämlich, der aus dieser Kette durch Feststellung des allein noch spitzwinkligen Gliedes  $a$  hervorgeht. (Durch Feststellung eines der ihm benachbarten rechtwinkligen Glieder  $b, d$  oder des ihm gegenüber liegenden rechtwinkligen Gliedes  $c$  wird die Kette ein sphärischer Schwingkurbel- resp. Doppelschwinge-mechanismus.) Als eine solche sphärische Doppelkurbel oder noch specieller, da

von einer der Kurbeln die Bewegung ausgeht, als sphärisches Doppelkurbelgetriebe mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln ist nämlich das sogenannte Universalgelenk zu bezeichnen, angewendet zur Kuppelung von zwei Wellen, deren Axen  $A, B$  sich unter einem spitzen Winkel  $\alpha$  schneiden, der für dieselbe Kuppelung eine beliebige oder wenigstens nur insofern beschränkte Grösse haben kann, als, je grösser  $\alpha$ , desto mehr dann auch das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten beider Wellen periodisch veränderlich ist. Fig. 60 stellt das Universalgelenk schematisch dar.

$CDC, D$ , ist die kreuzförmig gestaltete Koppel  $c$  mit zwei Zapfenpaaren  $C, C$ , und  $D, D$ , deren Axen  $CC$ , und  $DD$ , sich im Schnittpunkte  $O$  der Axen  $A, B$  rechtwinklig schneiden und welche drehbar sind in Lagern der Bügel  $d, b$ , die sich an den Enden der beziehungsweise um die Axen  $A, B$  drehbaren Wellen  $d, b$  so angebracht be-

Fig. 60.



finden, dass  $\angle AOD$  und  $\angle BOC$  rechte Winkel sind. Wenn die Welle  $d$  um ihre Axe  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_a$  rotirt, so rotirt die Welle  $b$  um ihre Axe  $B$  mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$ , deren Verhältniss zu  $\omega_a$  variabel, im Mittel aber  $= 1$  ist, da einer ganzen Umdrehung von  $d$  auch eine solche von  $b$  entspricht. Die Axe  $DD$ , dreht sich dabei in einer zu  $A$  senkrechten Ebene  $E_a$ , die Axe  $CC$ , in einer zu  $B$  senkrechten Ebene  $E_b$ , und diese Ebenen schneiden sich in einer zur Ebene  $AB$  senkrechten Geraden unter dem Winkel  $\alpha$ . In Fig. 60 ist eine solche Lage des Getriebes vorausgesetzt, bei welcher  $DD$ , in der Durchschnittslinie der Ebenen  $E_a$  und  $E_b$ ,  $CC$ , folglich in der Ebene  $AB$  liegt; wenn von dieser Lage aus die Welle  $d$  und somit die Axe  $DD$ , sich um den Winkel  $\angle DOD' = \alpha$  dreht, so drehe sich  $b$  und somit  $CC$ , um den Winkel  $\angle COC' = \beta$ . Die Beziehungen zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln  $\alpha, \beta$  und den der beliebigen Lage  $D'OC'$  des Koppelkreuzes entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a, \omega_b$  der beiden Wellen sind für die Anwendungen von Interesse und ergeben sich folgendermassen.

Aus dem sphärischen Dreieck  $DD'C'$  mit den Seiten  $DD' = \alpha$ ,

$D'C' = \frac{\pi}{2}$ ,  $C'D = \frac{\pi}{2} - \beta$  und dem Winkel  $C'DD' = \pi - a$  ergibt sich:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) + \sin \alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos (\pi - a)$$

$$0 = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos a; \quad \text{tg } \beta = \cos a \text{ tg } \alpha \dots \dots (1).$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = \cos a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{d\beta}{d\alpha} = \cos a \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos a}{\cos^2 \alpha (1 + \cos^2 a \text{tg}^2 \alpha)}$$

$$= \frac{\cos a}{\cos^2 \alpha + \cos^2 a \sin^2 \alpha} = \frac{\cos a}{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha} \dots \dots (2).$$

Für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ist nach Gl. (1):  $\beta = \alpha$ , dazwischen aber beständig  $\beta < \alpha$ ; es muss also  $\omega_b$  anfangs  $< \omega_a$ , später  $> \omega_a$  sein, während nach Gl. (2) beide Winkelgeschwindigkeiten gleich sind für

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a}; \quad \text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a - 1 + \cos a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos a}}; \quad \text{tg } \beta = \sqrt{\cos a} \dots \dots (3).$$

Bei  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sind die Lagen der Axen  $CC$ , und  $DD$ , die umgekehrten wie bei  $\alpha = 0$ , d. h.  $DD$ , liegt in der Ebene  $AB$ ,  $CC$ , in der dazu senkrechten Durchschnittslinie der Ebenen  $E_a$  und  $E_b$ ; von  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  bis  $\alpha = \pi$  ändert sich deshalb das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss gerade umgekehrt wie zwischen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Mit  $\alpha = \pi$  findet eine abermalige Umkehrung, also Rückkehr zum ursprünglichen Aenderungsgesetze jenes Verhältnisses für  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  statt u. s. f.

Nach Gl. (2) ist  $\left. \begin{aligned} \omega_b &= \text{max} = \frac{1}{\cos a} \text{ für } \sin \alpha = +1, \\ \omega_a &= \text{min} = \cos a \text{ für } \sin \alpha = 0, \end{aligned} \right\}$

also  $m = \frac{\text{max } \omega_b}{\text{min } \omega_a} = \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \text{tg}^2 a \dots \dots (4).$

Rotirt die eine Welle, etwa  $d$  gleichförmig, so ist ihre constante Winkelgeschwindigkeit  $\omega_a$  zugleich der Mittelwerth der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  der anderen Welle  $b$ , und der Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  der Rotationsbewegung dieser letzteren, d. i. das Verhältniss des Unterschiedes zwischen ihrer grössten und kleinsten zu ihrer mittleren Winkelgeschwindigkeit:

$$\delta = \frac{\max \omega_b - \min \omega_b}{\omega_a} = \max \frac{\omega_b}{\omega_a} - \min \frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{\sin^2 a}{\cos a} \dots (5).$$

Z. B. für	$a = 10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$
findet man	$m = 1,031$	$1,132$	$1,333$
	$\delta = \frac{1}{32,67}$	$\frac{1}{8,03}$	$\frac{1}{3,46}$

Wäre  $a = \frac{\pi}{2}$ , so wäre nach Gl. (1) beständig  $\beta = 0$ ; das Koppelkreuz würde sich vereinigt mit der Welle  $d$  in den Lagern des unbeweglich bleibenden Bügels  $b$  drehen: die Kette ginge, wie schon oben erwähnt, in ein einzelnes Drehkörperpaar über.

#### §. 47. Allgemeine Drehkörperkette.

Nachdem sich im Vorhergehenden ergeben hat, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, deren Paaraxen sich in einem Punkte im Endlichen (sphärische Drehkörperkette) oder im Unendlichen (ebene Drehkörperkette) schneiden, aus 4 Gliedern bestehen muss, um zwangläufig beweglich zu sein (mit endlich grossen relativen Bahnen von Punkten irgend eines Gliedes gegen ein anderes), bleibt nun noch die zu zwangläufiger Beweglichkeit erforderliche und ausreichende Gliederzahl einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette für solche Fälle zu ermitteln, in denen die relativen Lagen der auf einander folgenden Paaraxen  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $C$ ... auf irgend eine andere Weise gegeben sind; im Allgemeinen können diese Axen windschief (geschränkt) sein mit gegebenen kürzesten Abständen und gegebenen Neigungswinkeln. Zur Vermeidung von Wiederholungen bei später noch zu besprechenden anderen Ketten werde übrigens die in Rede stehende Frage zunächst noch allgemeiner gestellt, nämlich mit Bezug auf eine einfache geschlossene kinematische Kette, deren Glieder durch zwangläufige Elementenpaare von übrigens beliebiger Art mit einander verbunden sind.

Bei dem Uebergange der als  $n$ -gliedrig vorausgesetzten Kette aus irgend



einer in eine unendlich wenig davon verschiedene Configuration seien die Relativbewegungen der Elemente ihrer  $n$  Paare

	$A$	$B$	$C$	$\dots$	$M$	$N$
beziehungsweise:	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\dots$	$\mu$	$\nu$ .

Dieselben sind im Allgemeinen unendlich kleine Schraubenbewegungen, deren Axen und Steigungsverhältnisse durch die kinematischen Charaktere der betreffenden zwangläufigen Elementenpaare und durch die augenblickliche Configuration der Kette bestimmt sind; was ihren Sinn betrifft, so seien sie verstanden als Relativbewegungen beziehungsweise des Gliedes  $AB$  gegen  $NA$ ,  $BC$  gegen  $AB$ ,  $CD$  gegen  $BC$  . . . .  $MN$  gegen  $LM$  und endlich  $NA$  gegen  $MN$ . Wird nun das beliebige Glied  $NA$  der Kette als festgestellt betrachtet, so dass die relative Bewegung irgend eines anderen Gliedes gegen  $NA$  kurzweg als Bewegung jenes Gliedes zu bezeichnen ist, so ist die Bewegung von  $BC$  bestimmt durch die relativen Elementarbewegungen  $\alpha, \beta$ , die Bewegung von  $CD$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  . . . ., die von  $MN$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  . . .  $\mu$  und endlich die Bewegung von  $NA$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  . . .  $\mu, \nu$ . Weil aber thatsächlich dieses Glied  $NA$  in Ruhe ist, so sind die  $n$  Grössen  $\alpha, \beta, \gamma$  . . .  $\mu, \nu$  durch so viel Gleichungen verbunden, als erforderlich und genügend sind, um das Gesamtergebnis der  $n$  Elementarbewegungen  $\alpha, \beta, \gamma$  . . .  $\mu, \nu$  desselben starren Körpers (hier des Gliedes  $NA$ ) als Bewegungslosigkeit zu kennzeichnen, d. h. durch  $m$  Gleichungen, wenn  $m$  die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen ist, auf die sich beliebige, vermöge der Beschaffenheit und augenblicklichen Configuration der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämtlichen Elementenpaare zusammen reduciren lassen, wenn sie als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers (des beliebigen Kettengliedes  $NA$ ) betrachtet werden. Unter diesen (höchstens 6) einfachen Elementarbewegungen sind Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 Axen verstanden, die in bestimmter Lage gegen das festgestellte Glied so angenommen werden, dass sie sich in einem Punkte schneiden und nicht in einer Ebene liegen. Sofern nun aber die Zwangläufigkeit der Kette dadurch charakterisirt ist, dass irgend eine der  $n$  Grössen  $\alpha, \beta, \gamma$  . . .  $\mu, \nu$  alle übrigen bestimmt, dass also diese  $n$  Grössen durch  $n - 1$  Gleichungen verbunden sind, so ist die Kette augenblicklich zwangläufig, wenn  $n - 1 = m$ , d. h. wenn  $n = m + 1$  ist, und sie ist schliesslich nicht nur augenblicklich, sondern bei einer stetigen Folge von unendlich vielen verschiedenen Configurationen beständig, d. h. schlechtweg zwangläufig, wenn dabei beständig  $n = m + 1$  ist. Somit ergibt sich, dass die Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig

beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), denen beliebige in Folge der Beschaffenheit der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämtlichen Elementenpaare zusammen, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, beständig äquivalent sind. Höchstens ist  $m = 6$ , also  $n = 7$ , d. h. die Gliederzahl einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren höchstens  $= 7$ . Mit einer kleineren, als der die zwangläufige Beweglichkeit bedingenden Gliederzahl ist eine solche Kette nicht beweglich, mit einer grösseren nicht zwangläufig, abgesehen von besonderen Lagen, in denen auch eine übrigens zwangläufig bewegliche Kette vorübergehend ihre Zwangläufigkeit verlieren oder eine Kette von kleinerer Gliederzahl eine unendlich kleine Beweglichkeit haben kann, sowie abgesehen von solchen Elementenpaaren, welche Glieder verbinden, die durch ihre Verkettung mit den übrigen Kettengliedern relativ unbeweglich und deshalb thatsächlich als einzelne Glieder zu betrachten sind.

Dasselbe gilt nun auch von der Drehkörperkette, und man kann bemerken, dass es nur ganz besondere Fälle sind, in denen dieselbe mit weniger als 7 Gliedern zwangläufig beweglich ist. Sollte sie es schon mit 3 Gliedern sein, so müssten beliebige Drehungen um die Axen der betreffenden 3 Drehkörperpaare beständig entweder 1) zwei Drehungen, oder 2) einer Drehung und einer Schiebung, oder 3) zwei Schiebungen um resp. längs gewissen zwei sich schneidenden Axen äquivalent sein. Das Erste resp. Zweite wäre der Fall, wenn die Paaraxen sich in einer Ebene liegend in einem Punkte schnitten, der ad 1) im Endlichen, ad 2) im Unendlichen (dem Parallelismus der Paaraxen entsprechend) liegt; allein solche Lagen der Axen in einer Ebene würden nur als Uebergangslagen vorkommen können und schon durch unendlich kleine relative Drehungen von Paarelementen gestört werden. Der Fall sub 3) dagegen, entsprechend 3 im Unendlichen liegenden parallelen Paaraxen, d. h. dem Ersatze aller Drehkörperpaare durch Prismenpaare, deren Schubrichtungen einer Ebene parallel sind, findet sich in der ebenen Prismenkette verwirklicht.

Soll die Kette mit  $n = 4$  Gliedern zwangläufig beweglich sein, so müssen, entsprechend  $m = 3$ , beliebige Drehungen um die 4 Paaraxen sich beständig entweder 1) durch drei Drehungen, oder 2) durch zwei Drehungen

und eine Schiebung, oder 3) durch eine Drehung und zwei Schiebungen, oder 4) durch drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Der erste Fall ist in der sphärischen, der dritte in der ebenen Drehkörperkette, der vierte in der allgemeinen Prismenkette verwirklicht. Der zweite Fall kann nur vorübergehend stattfinden, wenn nämlich zeitweise die Paaraxen in einer Ebene liegen ohne sich in einem Punkte zu schneiden; Beweglichkeit der Kette von endlicher Grösse kann nicht dadurch bedingt werden.

Mit 5 Gliedern würde eine Drehkörperkette nur dann zwangsläufig beweglich sein können, wenn die Axen der 5 Drehkörperpaare beständig solche relative Lagen hätten, dass beliebige Drehungen um dieselben sich entweder 1) durch drei Drehungen und eine Schiebung, oder 2) durch zwei Drehungen und zwei Schiebungen, oder 3) durch eine Drehung und drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen liessen. Dazu müssten ad 1) die Paaraxen sich zum Theil beständig in einem Punkte  $O$  schneiden, während die übrigen stets in einer durch  $O$  gehenden Ebene liegen, zu der dann die Richtung der Schiebung senkrecht wäre. Eine solche Lage dieser letzteren Axen könnte indessen nur vorübergehend stattfinden, ausser wenn ihrer nur eine wäre, die übrigen 4 Paaraxen folglich beständig durch den Punkt  $O$  gingen. Indem aber dann die betreffenden 4 Drehkörperpaare schon für sich eine zwangsläufig geschlossene Kette bestimmen würden, blieben die durch das fünfte Paar verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich, und wäre die Kette thatsächlich eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette. Ebenso kann auch der Fall unter 2) nur in Uebergangslagen stattfinden, wenn nämlich die Paaraxen mit einer Ebene  $H$  parallel sind und von einer Geraden  $G$  alle zugleich geschnitten werden; beliebige Drehungen um jene Axen sind dann zwei Drehungen um sich schneidende mit der Ebene  $H$  parallele Axen und zwei Schiebungen längs sich schneidenden und zur Geraden  $G$  senkrechten Axen äquivalent. Der Fall unter 3) dagegen kann dauernd stattfinden, wenn nämlich die Axen der Drehkörperpaare zum Theil parallel sind, zum Theil im Unendlichen liegen, entsprechend dem Ersatze dieser Paare durch Prismenpaare. Indem aber sowohl die eine wie die andere Gruppe höchstens 3 Elementenpaare umfassen kann, um nicht die Kette in eine viergliedrige Drehkörperkette oder in eine allgemeine viergliedrige Prismenkette übergehen zu lassen, auch von den Schubrichtungen der Prismenpaare weder drei derselben Ebene noch zwei unter sich parallel sein dürfen, um nicht die Kette auf eine ebene Prismenkette oder auf ein einzelnes Prismenpaar zu reduciren, so ist der fragliche Fall unter

3) nur so zu verwirklichen, dass die 5 Kettenglieder entweder durch 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 2 Prismenpaare verbunden werden, deren Schubrichtungen nicht parallel sind und von denen auch keine rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet ist, oder durch 2 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 3 Prismenpaare, deren Schubrichtungen nicht derselben Ebene parallel und von denen auch nicht zwei rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet sind.

Mit 6 Gliedern kann eine Drehkörperkette nur dann zwangläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige Drehungen um dieselben sich durch 3 Drehungen und 2 Schiebungen oder durch 2 Drehungen und 3 Schiebungen um resp. längs 3 in einem Punkte sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Ersteres erfordert, dass die Paaraxen in zwei Gruppen zerfallen so, dass beständig die der einen Gruppe durch einen Punkt  $O$ , die der anderen durch einen anderen Punkt  $O'$  gehen; beliebige Drehungen um letztere lassen sich dann durch solche um durch  $O$  gehende Axen und durch Schiebungen normal zur Geraden  $OO'$ , also durch je zwei Schiebungen nach gewissen zu  $OO'$  senkrechten Richtungen ersetzen. Zudem kann man bemerken, dass es drei und zwar auf einander folgende Paaraxen sein müssen, die im einen oder anderen der Punkte  $O, O'$  sich beständig schneiden, weil bei 4 oder mehr durch denselben Punkt gehenden Paaraxen die Kette eine zwangläufige oder nicht mehr zwangläufige sphärische Drehkörperkette würde, und weil es natürlich nur benachbarte Paaraxen sein können, denen dadurch, dass sie demselben Gliede angehören, ein bestimmter Schnittpunkt  $O$  resp.  $O'$  dauernd anzuweisen ist. Der Fall, dass die Elementarbewegungen aller Paare zusammen 2 Drehungen und 3 Schiebungen äquivalent sind, tritt im Allgemeinen vorübergehend dann ein, wenn alle Paaraxen mit einer Ebene parallel werden, findet aber dauernd statt, wenn die so eben mit  $O$  und  $O'$  bezeichneten Schnittpunkte von 2 mal 3 auf einander folgenden Paaraxen im Unendlichen liegen, d. h. wenn 2 mal 3 benachbarte Paaraxen parallel sind.

Somit ergibt sich, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, wenn ihre Paaraxen alle im Endlichen liegen, ihre Drehkörperpaare also nicht theilweise in Prismenpaare übergegangen sind, nur mit 4, 6 oder 7 Gliedern zwangläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann: mit 4 Gliedern, wenn alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden (wovon der Parallelismus nur ein specieller Fall ist), mit 6 Gliedern, wenn drei auf einander folgende Paaraxen sich in einem, die übrigen in

einem anderen Punkte schneiden, mit 7 Gliedern in jedem anderen Falle; dass aber bei theilweisem Ersatze von Drehkörperpaaren durch Prismenpaare auch fünfgliedrige Ketten zwangläufig sein können, wenn sie nämlich 2 oder 3 Prismenpaare mit gewissen Bedingungen entsprechenden Schubrichtungen enthalten, während die Axen der 3 resp. 2 Drehkörperpaare parallel sind. Da die viergliedrige Kette schon im Vorhergehenden eingehend besprochen wurde, jene fünfgliedrigen aber ebenso wie die allgemeinen siebengliedrigen in Ermangelung von vorliegenden oder in Aussicht zu nehmenden Anwendungen einstweilen zu weiterer Untersuchung bezüglich ihrer Eigenschaften und unterscheidbaren Arten keine Veranlassung bieten, so bleibt nur noch die sechsgliedrige Kette in nähere Betrachtung zu ziehen.

#### §. 48. Sechsgliedrige Drehkörperkette.

Eine sechsgliedrige Drehkörperkette kann aus zwei sphärischen, also viergliedrigen Drehkörperketten dadurch entstanden gedacht werden, dass jede der letzteren durch Aufhebung der unmittelbaren Verbindung von zwei benachbarten Gliedern, nämlich durch Beseitigung eines Drehkörperpaares in eine offene viergliedrige Kette mit nur 3 Drehkörperpaaren verwandelt, und dann von den beiden Endgliedern der ersten dieser Ketten das eine mit dem einen, das andere mit dem anderen der beiden Endglieder der zweiten Kette zu je einem einzigen Gliede verbunden wird. So entsteht z. B. aus der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte  $O$  sich schneidenden Paaraxen  $A, B, C, D$  und der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte  $O'$  sich schneidenden Paaraxen  $A', B', C', D'$  durch Beseitigung der Drehkörperpaare  $D, D'$  und durch Verbindung der Glieder  $AD$  und  $A'D'$  zu einem Gliede  $AA'$ , der Glieder  $CD$  und  $C'D'$  zu einem Gliede  $CC'$  die sechsgliedrige Drehkörperkette mit den Gliedern  $AB, BC, CC', C'B', B'A', A'A$ , verbunden durch Drehkörperpaare  $A, B, C, C', B', A'$ , von deren Axen sich die 3 ersten in  $O$ , die 3 letzten in  $O'$  schneiden.

Indem der Zweck eines Mechanismus meistens darin besteht, dass von einem der beiden dem Stege benachbarten Glieder die Bewegung in gewisser Weise auf das andere vermittelt der übrigen beweglichen Kettenglieder übertragen werden soll, haben von den verschiedenen Mechanismen, die aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette hervorgehen können, besonders diejenigen praktisches Interesse, die der Feststellung eines der beiden

Glieder  $AA'$ ,  $CC'$  entsprechen, also der Glieder, deren Axen  $A$  und  $A'$ , resp.  $C$  und  $C'$  sich im Allgemeinen nicht schneiden; denn zwischen Gliedern, die um sich schneidende Axen drehbar sind, kann die Bewegungsübertragung meistens durch einfachere Mittel in beabsichtigter Weise erzielt werden. Wenn dann ein solcher Mechanismus wieder je nach der Beweglichkeitsart der beiden dem Stege (d. i. dem festgestellten Gliede) benachbarten Glieder als Doppelschwinge, Schwingkurbel oder Doppelkurbel bezeichnet, jedes dieser Glieder nämlich eine Kurbel oder eine Schwinge genannt wird, jenachdem es um seine dem Stege angehörige Axe ringsum rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, so ist die Beurtheilung der Art eines solchen sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus in fraglicher Hinsicht zum Theil auf die von sphärischen Drehkörpermechanismen zurückführbar. Indem nämlich jedes der Glieder  $AA'$  und  $CC'$  nur um solche Axen drehbar ist, die mit  $A$  resp.  $C$  durch den Punkt  $O$  und mit  $A'$  resp.  $C'$  durch den Punkt  $O'$  gehen, d. h. nur drehbar ist um die durch beide Punkte  $O, O'$  gehende Gerade  $G$ , bildet letztere mit den Axen  $A, A', C, C'$  unveränderliche Winkel, und können also  $A, B, C, G$  ebenso wie  $A', B', C', G$  stets als die 4 Paaraxen von sphärischen Drehkörperketten betrachtet werden, denen die Glieder  $AB, BC, C'B', B'A'$  der sechsgliedrigen Drehkörperkette auch als Glieder angehören. Wenn also etwa das Glied  $AA'$  der sechsgliedrigen Kette festgestellt wird, in welchem Falle auch die Punkte  $O$  und  $O'$ , also die Gerade  $G$  und somit die Glieder  $AG$  und  $A'G$  der sphärischen Drehkörperketten  $ABCG$  und  $A'B'C'G$  unbeweglich sind, so können sich die dem Stege  $AA'$  des sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus benachbarten Glieder  $AB$  und  $A'B'$  nur dann als Kurbeln verhalten, wenn sie sich ebenso in den sphärischen Drehkörpermechanismen verhalten, die aus jenen sphärischen Ketten  $ABCG$  und  $A'B'C'G$  bei Feststellung des Gliedes  $AG$  resp.  $A'G$  hervorgehen, ein Verhalten, das nach der in §. 45 angeführten Regel zu beurtheilen ist; aber man kann nicht umgekehrt behaupten, dass in diesem Falle sich die Glieder  $AB$  und  $A'B'$  auch in dem sechsgliedrigen Mechanismus als Kurbeln verhalten müssen, weil die viergliedrigen Mechanismen durch ihre Verbindung in dem sechsgliedrigen zwischen verengerten Grenzen beweglich werden können, wenn die verbundenen Glieder  $CG$  und  $C'G$  nicht beide Kurbeln, also beliebig um  $G$  beziehungsweise gegen  $AG$  und  $A'G$  drehbar waren. Sind also in den viergliedrigen Mechanismen  $ABCG$  und  $A'B'C'G$  mit den Stegen  $AG$  und  $A'G$  die Glieder  $CG$  und  $C'G$  beide Kurbeln, so haben in dem sechsgliedrigen Mechanismus  $ABCC'B'A'$  mit dem Stege  $AA'$  die Glieder  $AB$  und  $A'B'$  dasselbe Verhalten be-

züglich ihrer Beweglichkeit als Kurbel oder als Schwinge wie in den viergliedrigen Mechanismen; in anderen Fällen sind sie Schwingen, wenn sie es in den viergliedrigen Mechanismen sind, können es aber auch sein, obgleich sie in den viergliedrigen Mechanismen sich als Kurbeln verhalten.

Anwendung findet der so eben besprochene Mechanismus namentlich als doppeltes Universalgelenk, das dazu dienen kann, zwei in festen Lagern drehbare Wellen so zu verketten, dass sie bei irgend einer gegenseitigen Lage ihrer Axen  $A, A'$  mit stets gleichen Winkelgeschwindigkeiten um dieselben rotiren; eine (übrigens frei schwebende) Zwischenwelle mit der Axe  $G$  ist zu dem Ende durch ein einfaches Universalgelenk (Fig. 60, §. 46) mit der um  $A$ , durch ein zweites mit der um  $A'$  drehbaren Welle verbunden. Der so entstehende Mechanismus kann zugleich mit Rücksicht auf seine vorliegende Verwendung als Getriebe bezeichnet werden als Doppelkurbelgetriebe mit dreifach gegliederter Koppel. Diese Koppel besteht nämlich aus der Zwischenwelle und den beiden Koppelkreuzen, die einerseits in Bügeln an den Enden der Zwischenwelle, andererseits in Bügeln an den Enden der um  $A$  und  $A'$  in festen Lagern rotirenden Wellen drehbar sind, und zwar sind hier die Winkel  $AB, BC, CG, GC', C'B', B'A'$  alle rechte, während  $A$  und  $A'$  mit  $G$  gleich grosse spitze Winkel bilden, der Winkel  $CC'$  aber = dem Neigungswinkel der Ebenen  $AG, A'G$  ist. Mit Rücksicht auf die Forderung nämlich, dass die Winkelgeschwindigkeiten der um  $A, A'$  drehbaren Wellen stets gleich sein sollen, wodurch allein die Substitution des doppelten für ein einfaches Universalgelenk motivirt wird, müssen gemäss der Untersuchung in §. 46 die Bügel an den Enden der Zwischenwelle offenbar so angeordnet, den Axen  $C, C'$  also solche Lagen gegeben werden, dass gleichzeitig  $C$  normal zur Ebene  $AG, C'$  normal zur Ebene  $A'G$  wird, während zugleich die Winkel  $AG$  und  $A'G$  beständig einander gleich sind. Wenn, was aber nicht nöthig ist, die Axen  $A, A'$  in einer Ebene liegen, so werden  $C, C'$  parallel, die spitzen Winkel  $AG, A'G$  = der Hälfte des Winkels  $AA'$ , und wird der ganze Mechanismus beständig symmetrisch in Beziehung auf die Normalebene der Axe  $G$  im Mittelpunkte ihrer Strecke  $OO'$ .

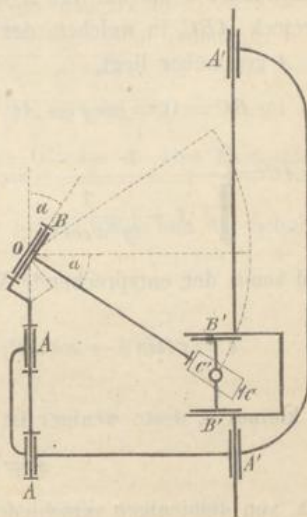
Ausser durch gewisse Grössen der Winkel zwischen den auf einander folgenden Paaraxen können Specialfälle der sechsgliedrigen Drehkörperkette dadurch herbeigeführt werden, dass einer der Punkte  $O, O'$  oder dass jeder von ihnen im Unendlichen liegt, dass also die Axen  $A, B, C$  oder die Axen  $A', B', C'$  oder die einen und die anderen zugleich unter sich parallel sind; ferner dadurch, dass gewisse von solchen auf einander folgenden

3 Axen ins Unendliche rücken, d. h. die betreffenden Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen.

Ein Mechanismus, der dem Falle entspricht, dass 3 Paaraxen parallel sind und zugleich zwei derselben im Unendlichen liegen, ist z. B. bei Dampfmaschinen angewendet worden, um die hin und her gehende Bewegung des Kolbens in die rotirende Bewegung einer Welle um ihre mit der Schubrichtung des Kolbens parallele Axe zu verwandeln, nach dem Schema der Fig. 61.

Hier sind  $A, B, C$  die 3 Paaraxen, die sich im Punkte  $O$  im Endlichen schneiden unter den Winkeln  $AB = \alpha$  und  $BC = 90^\circ$ . Die Axen  $A', B', C'$  sind parallel und senkrecht zur Axe  $A$ ; der Winkel  $AA'$  ist also  $= 90^\circ$ ,  $A'B' = B'C' = 0$ . Von diesen letzteren Axen liegen  $A'$  und  $B'$  im Unendlichen, d. h. die Paare  $A'$  und  $B'$  sind Prismenpaare, deren Schubrichtungen hier beziehungsweise parallel der Axe  $A$  und senkrecht dazu angenommen sind. Endlich sind die Drehkörperpaare  $C, C'$  so durch das Kettenglied  $CC'$  verbunden, dass ihre Axen sich rechtwinklig schneiden; die Axe  $C'$  ist in Folge dessen, weil sie auch senkrecht zur Axe  $A$  ist, senkrecht zur Ebene  $AC$ , die als Ebene der Fig. 61 angenommen wurde.  $AA'$  ist das festgestellte Glied, die Lager der um

Fig. 61.



$A$  rotirenden Kurbelwelle mit dem Dampfzylinder und den Führungen der Pleuellager fest verbindend; das Getriebe, als welches der Mechanismus hier verwendet wird, kann als Schubkurbelgetriebe mit dreifach gegliedertem Pleuellager bezeichnet werden. Was nämlich den Charakter des Mechanismus als Schubkurbelmechanismus betrifft, so ist zu bemerken, dass die oben mit  $G$  bezeichnete Gerade hier im Punkte  $O$  zur Zeichnungsebene  $AC$  senkrecht, und dass die Kette  $A'B'C'G$  bei Feststellung des Gliedes  $A'G$  eine rechtwinklige Pleuellagerkurbel (Fig. 56, §. 42) mit  $GC'$  als Pleuellager, die Kette  $ABCG$  dagegen dieselbe ist, welche im Pleuellagergelenk (Fig. 60, §. 46) als Pleuellager Pleuellager, hier aber bei Feststellung des Gliedes  $AG$  als Pleuellager Pleuellager mit  $AB$  als Pleuellager auftritt; da die Ebene der Pleuellager  $GC$  dieselbe ist wie die Ebene  $GC'$  der Pleuellager Pleuellagermechanismus, und somit die Pleuellager von  $GC$  als Pleuellager im einen Falle nur einen Theil der Pleuellager von  $GC'$  als Pleuellager im an-



deren Falle ausmacht, so bleibt das Glied  $AB$  auch in der sechsgliedrigen Kette eine Kurbel, und wird nur die Schublänge des Schiebers  $A'B'$  im Vergleich mit ihrer Grösse bei jener Kreuzschieberkurbel verkleinert. Ist  $r$  die Entfernung der parallelen Axen  $G, C'$  (= der Entfernung des Punktes  $O$  vom Schnittpunkte der Axen  $C, C'$ ) und  $a$  der Winkel  $AB$ , so ist die Schublänge des Schiebers  $A'B'$  (des Kolbens gegen den Cylinder) =  $2r \sin a$ , die Schublänge des Prismenpaares  $B' = r(1 - \cos a)$ . Wenn ferner von der in Fig. 61 angedeuteten Lage aus die Winkalebene  $AB$  (als Kurbel) sich um den Winkel  $\alpha$  um die Axe  $A$  dreht, so ist mit Rücksicht auf das sphärische Dreieck  $ABC$ , in welchem der rechtwinkligen Seite  $BC$  der Winkel  $\pi - \alpha$  an  $A$  gegenüber liegt,

$$\cos BC = 0 = \cos a \cos AC - \sin a \sin AC \cos \alpha; \cotg AC = \operatorname{tg} a \cos \alpha$$

$$\cos AC = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 a \cos^2 \alpha}}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}$$

und somit der entsprechende Weg des Kolbens:

$$s = r(\sin a - \cos AC) = r \sin a \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}\right).$$

Je kleiner  $a$ , desto weniger ist dieser Ausdruck von

$$s = r \sin a (1 - \cos \alpha),$$

d. h. von demjenigen verschieden, der nach §. 40, Gl. (3) dem Schieberwege eines ebenen Schubkurbelmechanismus zukommt, wenn  $\alpha$  der Drehungswinkel der Kurbel,  $r \sin a$  ihre Länge, die Koppel aber unendlich lang ( $\lambda = 0$ ) ist.

Der Fall endlich, dass die Axen der Drehkörperpaare  $A, B, C$  sowohl wie die der Paare  $A', B', C'$  parallel sind (ohne zugleich den anderen parallel zu sein), ist benutzt worden in der Sarrut'schen Geradföhrung und in einem Ringschützen-Aufzug von Redtenbacher. Die Möglichkeit (abgesehen von vortheilhafter Brauchbarkeit) jener Verwendung als Geradföhrung ergibt sich daraus, dass, wenn  $AA'$  das festgestellte Glied ist, die gemeinsame Normale der Axen  $C, C'$  beständig sowohl in der durch ihren Fusspunkt in  $C$  gehenden, zu den Axen  $A, B, C$  senkrechten Ebene, als auch in der durch ihren Fusspunkt in  $C'$  gehenden, zu den Axen  $A', B', C'$  senkrechten Ebene, folglich in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen bleiben muss. Sind  $e$  und  $e'$  die Entfernungen dieser gemeinsamen Normalen der Axen  $C, C'$  beziehungsweise von den Axen  $A$  und  $A'$ , und sind

die (als kürzeste Entfernungen der betreffenden Axen verstandenen) Gliedlängen

$$AB = a, BC = b, A'B' = a', B'C' = b', CC' = c, AA' = d,$$

so wird der durch Feststellung des Gliedes  $AA'$  entstehende Mechanismus, der im Allgemeinen eine Doppelschwinge (mit dreifach gegliederter Koppel) ist,

1) eine Doppelkurbel, wenn mit Rücksicht auf die Bedingung (5) in §. 39

$$a + c < b, \quad a' + c' < b'$$

und zugleich

$$p + q' = q + p' = d - c$$

ist mit

$$p = \sqrt{(b+a)^2 - c^2}, \quad q = \sqrt{(b-a)^2 - c^2}$$

$$p' = \sqrt{(b'+a')^2 - c'^2}, \quad q' = \sqrt{(b'-a')^2 - c'^2}.$$

Dabei ist  $p - q = p' - q'$  die Schublänge des Gliedes  $c$ . Der Mechanismus wird

2) eine Kurbelschwinge mit  $a$  als Kurbel,  $a'$  als Schwinge und der Schublänge  $= p - q$  des Gliedes  $c$ , wenn

$$a + c < b$$

ist und im Falle  $a' + c' < b'$ :

$$q + p' > d - c > p + q',$$

dagegen im Falle  $a' + c' > b'$ :

$$q + p' > d - c > p - p'.$$

#### γ. Mechanismen aus Schraubenketten.

Indem die relative Bewegung des einen gegen das andere Element eines Schraubenpaares aus Schiebung längs der Axe und aus Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, kann für einen längs der Schraubenaxe im Sinne der Schiebung hin Blickenden die Drehung rechts oder links herum stattfinden, d. h. entweder in demselben Sinne, in welchem sich für den Anblick von Norden nach Süden die Sonne um die Erde zu drehen scheint, oder im umgekehrten Sinne. Im ersten Falle heisst das Schraubenpaar sowie auch jedes seiner Elemente (die Schraube und die Schraubenmutter) rechts gewunden oder rechtsläufig, im zweiten Falle links gewunden oder linksläufig. Um diesen beiden Fällen in metrischen Relationen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen verschiedener Schraubenpaare auf die einfachste Weise Rechnung zu tragen, soll die Steigung eines Schraubenpaares (resp. einer Schraube oder Schraubenmutter), d. h. die einer Um-

drehung (Drehung von  $360^\circ$ ) entsprechende Schiebung algebraisch verstanden werden so, dass sie bei Rechtsläufigkeit positiv, bei Linksläufigkeit negativ ist.

#### §. 49. Conaxiale Schraubenkette.

Während mit Prismenpaaren, deren Schubrichtungen parallel sind, oder mit Drehkörperpaaren, deren Axen zusammenfallen, eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette nicht hergestellt werden konnte (abgesehen von zweigliedrigen Ketten, die aber von einzelnen Prismenpaaren resp. Drehkörperpaaren kinematisch nicht verschieden sind), können Schraubenpaare zu zwangläufiger kinematischer Verkettung schon in dem einfachsten Falle dienen, dass ihre Axen zusammenfallen. Sind nämlich  $a, b, c$  die Glieder einer solchen Kette, verbunden durch die Schraubenpaare  $A, B, C$  ( $c$  mit  $a$  durch das Paar  $A$ ,  $a$  mit  $b$  durch  $B$ ,  $b$  mit  $c$  durch  $C$ ), deren Steigungen beziehungsweise  $= x, y, z$  seien, so ist diese Kette zwangläufig beweglich, wenn irgend ein Glied, z. B.  $b$  gegen ein anderes, z. B.  $c$  zwangläufig beweglich ist, und das ist der Fall, wenn sich eine Drehung  $= \alpha$  von  $a$  gegen  $c$  und eine Drehung  $= \beta$  von  $b$  gegen  $a$  eindeutig so bestimmen lassen, dass die durch die entsprechenden Relativbewegungen der Schraubenpaare  $A$  und  $B$  zusammen verursachte Bewegung von  $b$  gegen  $c$  entgegengesetzt gleich ist derjenigen Bewegung von  $c$  gegen  $b$ , die einer gegebenen Verdrehung  $= \gamma$  von  $c$  gegen  $b$  gemäss der unmittelbaren Verbindung dieser Glieder durch das Schraubenpaar  $C$  entspricht. Indem dazu erforderlich und genügend ist, dass die betreffenden Drehungen und Schiebungen einzeln entgegengesetzt gleich sind, ergeben sich, wenn die Drehungen  $\alpha, \beta, \gamma$  (verstanden als ganze oder gebrochene Vielfache von  $360^\circ$ ) in demselben Sinne positiv, im umgekehrten dann negativ gesetzt werden, die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \dots \dots \dots (1),$$

wodurch  $\alpha$  und  $\beta$  bei gegebenen Werthen von  $x, y, z$  und  $\gamma$  eindeutig bestimmt sind. Bei mehr als 3 conaxialen Schraubenpaaren erhielte man auch nur zwei solche Bedingungsgleichungen, aber mit mehr als zwei Unbekannten, die dadurch nicht bestimmt wären. Die conaxiale Schraubenkette ist also mit 3 Gliedern und nicht anders zwangläufig beweglich. Dasselbe folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze in §. 47, dass die Gliederzahl  $n$  einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl  $m$  der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen

(Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), die beliebigen möglichen relativen Elementarbewegungen sämtlicher Paare der Kette zusammen beständig äquivalent sind; da nämlich beliebige conaxiale Schraubenbewegungen einer Drehung um die gemeinsame Axe und einer Schiebung längs derselben äquivalent sind, ist hier  $m = 2, n = 3$ .

Die aus dieser Kette dadurch zu bildenden Mechanismen, dass sie „auf  $a, b$  oder  $c$  gestellt“, d. h. dass das Glied  $a, b$  oder  $c$  festgestellt wird, können sich insofern unterscheiden, als die Drehungen und die Schiebungen der beiden beweglichen Glieder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne stattfinden können. Wird die Kette auf  $a = AB$  gestellt, so ergibt sich aus den Gleichungen (1) das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der beweglichen Glieder  $b, c$ :

$$\frac{\beta}{-\alpha} = \frac{x-z}{y-z}; \quad \frac{\beta y}{-\alpha x} = \frac{y x-z}{x y-z} \dots \dots \dots (2),$$

analog bei der Stellung auf  $b = BC$  das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder  $c, a$ :

$$\frac{\gamma}{-\beta} = \frac{y-x}{z-x}; \quad \frac{\gamma z}{-\beta y} = \frac{z y-x}{y z-x} \dots \dots \dots (3)$$

und bei der Stellung auf  $c = CA$  das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder  $a, b$ :

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \frac{z-y}{x-y}; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x z-y}{z x-y} \dots \dots \dots (4).$$

Sowohl das Product der 3 Drehungsverhältnisse wie das der 3 Schiebungsverhältnisse ist  $= -1$ , und ist also, da den Gleichungen (1) gemäss nicht jedes dieser je 3 Verhältnisse negativ sein kann, nur je eines derselben negativ, und zwar, wie leicht ersichtlich, das der Feststellung desjenigen Gliedes entsprechende, welches durch die Schraubenpaare von (algebraisch verstanden) grösster und kleinster Steigung mit den beiden anderen Gliedern verbunden ist. Sind die Steigungen  $x, y, z$  gleichen Zeichens, insbesondere z. B. positiv, d. h. alle 3 Schraubenpaare rechtsläufig, so hat jedes Schiebungsverhältniss dasselbe Zeichen wie das zugehörige Drehungsverhältniss; es gehen dann nur zweierlei Mechanismen aus der Kette hervor: bei Feststellung des Gliedes, das durch die Schraubenpaare von grösster und kleinster Steigung mit den anderen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen der beweglichen Glieder in entgegengesetztem Sinne statt, bei Feststellung eines der beiden anderen Glieder in gleichem Sinne. Sind aber die Steigungen  $x, y, z$  ungleichen

Zeichens, ist z. B. bei positiven Werthen von  $x$  und  $y$  die Steigung  $z$  negativ (das Schraubenpaar  $C$  linksläufig), so sind das Drehungs- und das Schiebungsverhältniss bei der Stellung auf  $a$  beide positiv, bei der Stellung auf  $b$  oder  $c$  aber entgegengesetzten Zeichens, und zwar bei der Stellung auf  $b$  in umgekehrter Weise wie bei der Stellung auf  $c$ ; die Kette liefert dann dreierlei Mechanismen: bei Feststellung des Gliedes  $a$ , das durch rechtsläufige Schraubenpaare mit den beweglichen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen dieser letzteren in gleichem Sinne statt, bei Feststellung des einen der Glieder  $b$ ,  $c$  dagegen (und zwar desjenigen, welches mit den beweglichen Gliedern durch das linksläufige und durch das rechtsläufige Schraubenpaar grösster Steigung verbunden ist), sind die Drehungen der beweglichen Glieder entgegengesetzt, ihre Schiebungen gleich gerichtet, bei Feststellung des anderen die Drehungen gleich und die Schiebungen entgegengesetzt gerichtet. Anwendungen scheinen von diesen Mechanismen bisher nicht gemacht worden zu sein.

Nicht selten werden aber Mechanismen angewendet, deren Kette aus der hier betrachteten Schraubenkette dadurch hervorgeht, dass von den Steigungen ihrer 3 Schraubenpaare 1) eine  $= \infty$ , oder 2) eine  $= 0$ , oder 3) eine  $= \infty$ , eine andere  $= 0$  ist, dass also von den Schraubenpaaren der Kette 1) eines durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung mit den Schraubenaxen parallel ist, oder 2) eines durch ein mit ihnen conaxiales Drehkörperpaar, oder 3) eines durch ein solches Prismenpaar, ein anderes durch ein solches Drehkörperpaar ersetzt wird. Andere als diese 3 Specialfälle können nicht vorkommen, weil, wenn zwei Paare in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen oder in conaxiale Drehkörperpaare übergangen, damit die ganze Kette zu einem Prismenpaare resp. Drehkörperpaare würde.

1) Die Kette, deren Glieder  $a = AB$ ,  $b = BC$ ,  $c = CA$  durch zwei conaxiale Schraubenpaare  $A$ ,  $B$  und durch ein Prismenpaar  $C$  verbunden sind, dessen Schubrichtung den Schraubenaxen parallel ist, wird namentlich als sogenannter Differentialschraubenmechanismus angewendet, entsprechend der Feststellung eines der beiden durch das Prismenpaar  $C$  verbundenen Glieder  $b$ ,  $c$ , z. B. in der Weise, dass eine längs zwei Strecken mit verschiedenen Schraubengewinden versehene Spindel  $a$  einerseits mit dem Gewinde von der Steigung  $x$  in einem entsprechenden Muttergewinde des festgestellten Gliedes  $c$ , andererseits mit dem Gewinde von der Steigung  $y$  gegen das mit entsprechendem Muttergewinde versehene Glied  $b$  beweglich ist, welches als Schieber längs dem festgestellten Gliede  $c$  gleiten kann, indem es damit durch das Prismenpaar  $C$  gepaart ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Drehkörperpaar  $c$ ,  $a$

durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Mit  $z = \infty$  gehen für diesen Fall die Gleichungen (4) über in:

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \infty; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x}{x-y},$$

d. h. einer Drehung  $= \alpha$  der Spindel  $a$  entspricht eine blossе Schiebung ( $\gamma = 0$ ) des Gliedes  $b$ , deren Grösse

$$-\gamma z = \alpha(x-y) \dots \dots \dots (5)$$

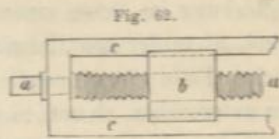
ist, und welche insbesondere beliebig klein gemacht werden kann durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen  $x$  und  $y$ .

2) Die Kette, deren Glieder  $a, b, c$  durch ein Drehkörperpaar  $A$  und zwei Schraubenpaare  $B, C$  conaxial verbunden sind, hat in solchen Mechanismen Anwendung gefunden, die der Feststellung eines der beiden durch das Drehkörperpaar verbundenen Glieder entsprechen, indem z. B. eine mit dem festgestellten Gliede  $c$  durch das Drehkörperpaar  $A$  verbundene Spindel  $a$  zugleich durch ein Schraubengewinde (Steigung  $= y$ ) mit einer entsprechenden Mutter  $b$  gepaart, und diese äusserlich selbst mit einem Schraubengewinde (Steigung  $= z$ ) in einem Muttergewinde des festgestellten Gliedes  $c$  beweglich ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Prismenpaar  $b, c$  durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Nach Gl. (4) sind dann mit  $x = 0$  die Drehung und die Schiebung des Gliedes  $b$  für eine gegebene Drehung  $= \alpha$  der Spindel:

$$-\gamma = \frac{y}{y-z} \alpha; \quad -\gamma z = \frac{yz}{y-z} \alpha \dots \dots \dots (6).$$

Beide können beliebig gross gemacht werden durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen  $y, z$ ; ebendadurch ist die Drehung der Spindel  $a$  beliebig zu verkleinern, wenn die Bewegung vom Gliede  $b$  ausgeht.

3) Am häufigsten angewendet findet sich die Kette, deren Glieder  $a, b, c$  durch ein Drehkörperpaar  $a, c = A$ , ein Schraubenpaar  $a, b = B$  und ein Prismenpaar  $b, c = C$  conaxial verbunden sind (Fig. 62), entsprechend dem allgemeinen Falle mit  $x = 0, z = \infty$ ; besonders gebräuchlich sind die daraus durch Feststellung eines der Glieder  $b, c$  hervorgehenden Mechanismen.



Einige der hier besprochenen Mechanismen kommen insbesondere auch so zur Verwendung, dass eines der Kettenglieder durch eine Flüssigkeit vertreten wird. So sind die Schraubenpumpe und der Schraubenventilator als Getriebe zu betrachten, die aus der Kette, Fig. 62, bei

Feststellung des Gliedes  $c$  erhalten werden, wenn das Glied  $b$  durch Wasser oder Luft ersetzt und die Schraube  $a$  durch eine äussere Kraft in Drehung gesetzt wird, sofern wenigstens dem Zwecke dieser Getriebe gemäss von den Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen nur diejenigen Componenten mit ihren mittleren Grössen in Betracht gezogen werden, die der Schraubenaxe parallel sind. Wenn wieder  $b$  durch Wasser ersetzt, dieses aber jetzt als unbeweglich betrachtet wird, während die Bewegung der anderen Glieder von der Schraube  $a$  ausgeht, so geht aus der Kette, Fig. 62, das Getriebe eines Schraubenschiffes hervor mit  $c$  als Schiff, sofern dessen hier allein in Betracht kommende Beweglichkeit gegen das Wasser im Sinne des Kiels einer Paarung durch ein Prismenpaar vergleichbar ist u. s. f.

#### §. 50. Uebersicht verschiedener Arten von Schraubenketten.

Nach den in §. 47 gemachten allgemeinen Bemerkungen über einfache geschlossene kinematische Ketten mit nur zwangläufigen Elementenpaaren ist eine Schraubenkette mit 7 Gliedern stets beweglich und im Allgemeinen auch zwangläufig; nur in besonderen Fällen ist sie schon mit weniger Gliedern zwangläufig beweglich, nämlich mit  $n = m + 1$  Gliedern, wenn beliebige mögliche Relativbewegungen ihrer sämtlichen Paare zusammen stets  $m$  von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen) äquivalent sind. Bei Ausschluss solcher Specialfälle, in denen alle Schraubenpaare in Drehkörperpaare oder in Prismenpaare übergegangen sind, und in denen die Kette nicht mehr eine Schraubenkette, sondern eine Drehkörper- oder Prismenkette heisst, befinden sich unter jenen einfachen Elementarbewegungen wenigstens eine Drehung oder eine Schiebung im Sinne einer Drehungsaxe. Der Fall, dass sie die einzigen sind, ist in der conaxialen Schraubenkette verwirklicht als dem einzig möglichen Falle einer dreigliedrigen Schraubenkette. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, ob und in welchen Fällen eine einfache geschlossene Schraubenkette mit 4, 5 oder 6 Gliedern zwangläufig beweglich sein kann.

Mit 4 Gliedern würde es der Fall sein, wenn sich beliebige Elementarbewegungen der Elementenpaare stets entweder durch zwei Drehungen und eine Schiebung, oder durch eine Drehung und zwei Schiebungen um resp. längs sich schneidenden Axen ersetzen liessen. Ersteres wäre nur möglich, wenn die Schraubenpaare theils conaxial, theils durch Drehkörperpaare ersetzt wären, deren Axen mit der Schraubenaxe in einer Ebene liegen und

sie in demselben Punkte schneiden. Weil aber die Kette durch 3 conaxiale Schraubenpaare zu einer dreigliedrigen Kette, durch 2 conaxiale Drehkörperpaare zu einem blossen Elementenpaare würde, so müsste die Zahl der Drehkörperpaare wenigstens  $= 2$  sein, und dürften ihre Axen weder unter sich noch mit der Schraubenaxe zusammenfallen; doch könnte es dann nur vorübergehend geschehen, dass alle Axen in einer Ebene liegend sich in einem Punkte schneiden, womit der in Rede stehende Fall überhaupt auf besondere Lagen der Kette beschränkt bleibt. Auf eine Drehung und zwei Schiebungen sind die Elementarbewegungen der Schraubenpaare vorübergehend reducirbar, wenn die Axen der letzteren parallel sind und bei gewissen Configurationen der Kette in einer Ebene liegen; indessen kann dieser Fall auch dauernd stattfinden, wenn nämlich die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare enthält (natürlich als benachbarte Elementenpaare, so dass die Beständigkeit des Zusammenfallens ihrer Axen durch deren unveränderliche Lagen in demselben Kettengliede vermittelt wird) und ausserdem entweder zwei Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind, oder noch zwei weitere conaxiale Schraubenpaare, deren Axe mit der anderen parallel ist.

Die zwangsläufige Beweglichkeit einer fünfgliedrigen Schraubenkette erfordert beständige Reducirbarkeit unendlich kleiner Bewegungen ihrer Elementenpaare auf 4 einfache Elementarbewegungen, also entweder 1) auf 3 Drehungen und eine Schiebung, oder 2) auf 2 Drehungen und 2 Schiebungen, oder 3) auf eine Drehung und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen. Der erste Fall kann bei Ketten vorkommen, die zwei conaxiale Schraubenpaare oder ein Schraubenpaar und ausserdem nur Drehkörperpaare enthalten, in solchen Lagen nämlich, in denen alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden; dass aber solche Lagen nicht dauernd stattfinden können, sofern nicht alle Schraubenpaare zu Drehkörperpaaren werden, ist einleuchtend. Der Fall unter 2), vorübergehend dann eintretend, wenn alle Schraubenaxen von einer Geraden rechtwinklig geschnitten werden, findet dauernd statt, wenn die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare) und ausserdem entweder 3 Drehkörperpaare enthält, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder noch zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare), deren Axe mit der anderen nicht parallel ist, nebst einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist ohne mit einer von ihnen parallel zu sein (widrigenfalls das Prismenpaar



mit den betreffenden conaxialen Schraubenpaaren eine dreigliedrige conaxiale Schraubenkette bilden würde). Der Fall unter 3) endlich wird verwirklicht durch eine fünfgliedrige Kette mit parallelen Axen ihrer Schraubenpaare, von denen auch zwei mal zwei conaxial sein können.

Mit 6 Gliedern kann die Schraubenkette nur dann zwangsläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige relative Bewegungen derselben entweder zu 3 Drehungen und 2 Schiebungen, oder zu 2 Drehungen und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen zusammengesetzt werden können. Das Erste kann vorübergehend vorkommen, wenn eine Kette mit Schraubenpaaren und Drehkörperpaaren (2 Schraubenpaaren, oder 3 Schraubenpaaren, von denen 2 conaxial sind, oder 4 Schraubenpaaren, von denen 2 mal 2 conaxial sind) sich in solcher Lage befindet, dass alle Paaraxen sich in einem Punkte  $O$  schneiden, oder dass sich die einen in einem Punkte  $O$ , die anderen in einem anderen Punkte  $O'$  schneiden, während zugleich die Gerade  $OO'$  rechtwinklig gegen die Schraubenaxen, nicht aber gegen alle übrigen Axen gerichtet ist. Der zweite Fall dagegen (Reducirbarkeit auf 2 Drehungen und 3 Schiebungen), immer dann stattfindend, wenn die Axen aller Schraubenpaare mit einer Ebene parallel sind, ist dauernd vorhanden, wenn 3 oder 4 auf einander folgende ebenso wie die 3 resp. 2 übrigen Schraubenaxen unter sich parallel sind, ohne dass zugleich die eine mit der anderen Gruppe parallel ist.

Somit hat sich ergeben, dass eine einfache geschlossene Schraubenkette in folgenden Fällen mit weniger, als 7 Gliedern zwangsläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann:

- a) als reine Schraubenkette, d. h. wenn alle Elementenpaare wirkliche Schraubenpaare sind,
- 1) mit 3 Gliedern als conaxiale Schraubenkette,
  - 2) mit 4 Gliedern, wenn 2 mal 2 benachbarte Schraubenpaare conaxial und beide Axen parallel sind,
  - 3) mit 5 Gliedern, wenn alle Paaraxen parallel sind,
  - 4) mit 6 Gliedern, wenn die Axen von 3 oder 4 benachbarten Schraubenpaaren ebenso wie die der 3 resp. 2 übrigen je unter sich, nicht aber die einen mit den anderen parallel sind;
- b) bei theilweisem Ersatze von Schraubenpaaren durch Drehkörper- oder Prismenpaare (abgesehen von solchen Specialfällen, die aus den eben unter 1)–4) genannten auf solche Weise erhalten werden)

- 1) mit 4 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 2 Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind,
- 2) mit 5 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 3 Drehkörperpaare, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder auch verbunden durch 2 mal 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist, ohne mit einer von ihnen parallel zu sein.

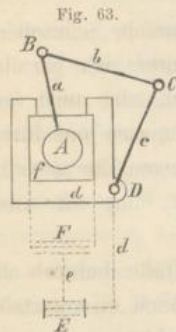
Aus allen diesen Fällen können noch weitere Specialfälle dadurch abgeleitet werden, dass man Schraubenpaare mit parallelen Axen in conaxiale, Schraubenpaare in Drehkörper- oder Prismenpaare, Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen lässt.

#### §. 51. Singuläre Schraubenketten.

Der nach vorigem §. sehr grosse Reichthum an zwangsläufig geschlossenen einfachen Schraubenketten, einem noch viel grösseren Reichthum an Mechanismen entsprechend, wird im Maschinenbau nur zu kleinem Theil verwerthet. Die Anwendungen beschränken sich hauptsächlich auf solche Ketten, die ausser Drehkörper- und Prismenpaaren nur ein Schraubenpaar enthalten und als singuläre Schraubenketten bezeichnet werden mögen.

Aus der conaxialen Schraubenkette geht als singuläre die schon in §. 49 besprochene Kette, Fig. 62, hervor. — Aus der viergliedrigen Schraubenkette unter a, 2) im vorigen §. ist eine neue singuläre nicht zu erhalten, weil, wie auch 3 der 4 Schraubenpaare durch Drehkörper- oder Prismenpaare mit unveränderten Axen resp. Schubrichtungen ersetzt werden mögen, die Kette stets entweder zu einer drei- oder zu einer zweigliedrigen, nämlich zu einer conaxialen Kette oder zu einem blossen Drehkörper- resp. Prismenpaare wird. — Die unter a, 3) im vorigen §. aufgeführte fünfgliedrige liefert aber eine singuläre Schraubenkette, indem 4 Schraubenpaare durch 3 Drehkörperpaare und ein Prismenpaar ersetzt werden, übrigens nur diese einzige, da 4 Drehkörperpaare mit parallelen Axen oder 2 Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen die Kette in eine zwangsläufige viergliedrige, beziehungsweise in ein Prismenpaar verwandeln würden. Die so erhaltende fünfgliedrige singuläre Schraubenkette (Fig. 63) kann aus einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette *a, b, c, d*

dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass von ihren 4 Drehkörperpaaren  $A, B, C, D$  das eine  $A$  durch ein Schraubenpaar ersetzt und gleichzeitig zwischen den Gliedern  $a$  und  $d$  ein fünftes Glied  $f$  eingeschaltet wird, das mit  $a$  durch jenes Schraubenpaar  $A$ , mit  $d$  durch ein Prismenpaar (Schubrichtung parallel mit den Axen  $A, B, C, D$ ) verbunden ist. —



Denkt man sich dieses Glied  $f$  mit dem Gliede  $d$  statt jenes Prismenpaares durch zwei Drehkörperpaare  $E$  und  $F$  verbunden, deren Axen parallel sind, indem zwischen  $d$  und  $f$  ein sechstes Glied  $e$  eingefügt wird, das mit  $d$  durch das Drehkörperpaar  $E$ , mit  $f$  durch das Drehkörperpaar  $F$  zusammenhängt, so erhält man eine sechsgliedrige singuläre Schraubenkette, die als Specialfall der unter a, 4) im vorigen §. angeführten Kette zu bezeichnen ist, sofern diese im allgemeinen Falle 6 Schraubenpaare enthielt, von denen beziehungsweise 4 und 2 benachbarte parallele Axen hatten. In Fig. 63 ist diese Abänderung der Kette durch Punktirung angedeutet, wobei zu bemerken ist, dass thatsächlich die Ebene  $EF$  im Allgemeinen nicht mit der Zeichnungsebene zusammenfällt, und wobei man sich ferner den Körper  $d$ , insoweit er zuvor die entsprechende Hohlform des prismatischen Körpers  $f$  bildete, jetzt beseitigt zu denken hat. Das Glied  $f$ , welches vorher nur nach Richtung der Axen  $A, B, C, D$  gegen das Glied  $d$  verschiebbar war, ist jetzt nach jeder Richtung gegen  $d$  verschiebbar geworden oder wenigstens nach jeder gegen die Axen  $E, F$  rechtwinkligen Richtung, wenn diese Axen selbst (wie in Fig. 63 angenommen) gegen die Axen  $A, B, C, D$  rechtwinklig gerichtet sind.

Von grösserem Interesse sind solche singuläre Schraubenketten, die aus den unter b) im vorigen §. genannten Ketten hervorgehen. Eine solche, übrigens auch nur eine, liefert zunächst die daselbst unter b, 1) erwähnte Kette, indem von ihren zwei conaxialen Schraubenpaaren das eine durch ein Drehkörperpaar ersetzt wird; durch ein Prismenpaar gleicher Schubrichtung würde es nicht ersetzbar sein, ohne die Kette in eine dreigliedrige ebene Prismenkette zu verwandeln. Die so erhaltene viergliedrige singuläre Schraubenkette  $a, b, c, d$  (Fig. 64) hat als Mechanismus insbesondere bei Feststellung des Gliedes  $d$ , das einerseits durch das Drehkörperpaar  $A$  mit der Schraubenspindel  $a$ , andererseits durch das Prismenpaar  $D$  mit dem Schieber  $c$  verbunden ist, Anwendung gefunden, dieser Mechanismus aber ferner so als Getriebe, dass die Bewegung vom Gliede  $a$  ausgeht, d. h. als Kurbelschubgetriebe. Wenn in dem durch Fig. 64 dar-

gestellten Specialfalle, dass die Schubrichtung des Prismenpaares  $D$  einen rechten Winkel mit der gemeinsamen Axe  $AB$  des Drehkörper- und des Schraubenpaares bildet, die Schubrichtung des Prismenpaares  $C$  unter dem Winkel  $\gamma$  gegen  $AB$  geneigt und  $s$  die Steigung des Schraubenpaares  $B$  ist, so entspricht einer Umdrehung der Schraubenspindel  $a$  die Schiebung  $s \tan \gamma$  des Gliedes  $e$ , die beliebig verändert werden kann durch Aenderung des Winkels  $\gamma$ , vermittelbar durch stellbare feste Verbindungen der prismatischen Stange  $b$  mit der Hohlschraube  $B$  und der prismatischen Stange  $e$  mit dem Hohlprisma  $C$ . Diese Eigenschaften des in Rede stehenden Getriebes sind u. A. bei einer Theilmaschine von Nasmyth verwerthet worden, abgesehen immer von der (hier nur schematisch und beispielsweise angedeuteten) besonderen Form der constructiven Ausführung.

Aus der fünfgliedrigen Kette — b, 2), §. 50 — mit 2 benachbarten coaxialen Schraubenpaaren und 3 Drehkörperpaaren, deren parallele Axen rechtwinklig gegen die Schraubenaxe gerichtet sind, ist eine fünfgliedrige singuläre Schraubenkette durch den Uebergang eines der beiden Schraubenpaare in ein damit coaxiales Drehkörperpaar zu erhalten. Diese Kette ( $ABCDE$ , Fig. 65) findet mehrfach Verwendung, z. B. bei Steuerrudergetrieben, Kniehebelpressen u. s. w. unter Feststellung des Gliedes  $e$ , das mit den benachbarten Gliedern durch die Drehkörperpaare  $A$  und  $E$  mit rechtwinklig gekreuzten Axen verbunden ist. Die Axen  $C$  und  $E$  können die dem Drehkörperpaare  $A$  und Schraubenpaare  $B$  gemeinsame Axe  $AB$  schneiden ohne den Charakter des Mechanismus zu ändern. Auch kann eine der Axen  $C$ ,  $D$ ,  $E$  ins Unendliche rücken, d. h. das betreffende Drehkörperpaar durch ein Prismenpaar ersetzt werden, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die beiden anderen dieser Axen gerichtet ist; würden aber zwei dieser Drehkörperpaare  $C$ ,  $D$ ,  $E$  durch solche Prismenpaare ersetzt, so erhielte man die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, wieder. Wenn man endlich in der ursprünglichen fünfgliedrigen Kette das eine der beiden coaxialen Schraubenpaare in ein längs der Schraubenaxe verschiebliches

Fig. 64.

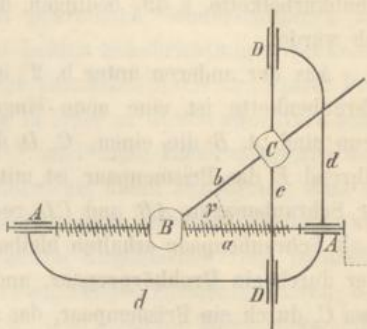
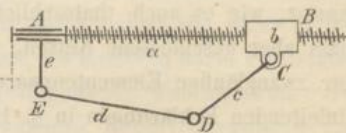


Fig. 65.



Prismenpaar übergehen liesse, so erhielte man keine singuläre Schraubenkette, weil dieses Prismenpaar zusammen mit den 3 Drehkörperpaaren  $C$ ,  $D$ ,  $E$  schon für sich eine zwangläufig geschlossene Kette (die allgemeine Schubkurbelkette, §. 39) bedingen, das Schraubenpaar also relativ unbeweglich würde.

Aus der anderen unter b, 2) im vorigen §. angeführten fünfgliedrigen Schraubenkette ist eine neue singuläre solche Kette nicht zu erhalten. Denn sind  $A$ ,  $B$  die einen,  $C$ ,  $D$  die anderen coaxialen Schraubenpaare, während  $E$  das Prismenpaar ist mit einer gegen die gemeinsame Normale der Schraubennaxen  $AB$  und  $CD$  rechtwinkligen Schubrchtung, und sollte  $A$  als Schraubenpaar erhalten bleiben, so könnte  $B$  durch ein Prismenpaar oder durch ein Drehkörperpaar, und von den Schraubenpaaren  $C$ ,  $D$  eines, etwa  $C$ , durch ein Prismenpaar, das andere durch ein Drehkörperpaar (nicht jedes zugleich durch ein Prismen- oder Drehkörperpaar) ersetzt werden. Mit  $B$  als Prismenpaar wäre dann aber die Kette eine dreigliedrige ebene Prismenkette  $BCE$ , mit  $B$  als Drehkörperpaar eine viergliedrige singuläre Schraubenkette  $ABCE$  nach Art von Fig. 64.

δ. Mechanismen aus Ketten mit theilweise nicht zwangläufigen niederen Elementenpaaren.

#### §. 52. Allgemeine Uebersicht.

Bei den bisherigen Untersuchungen einfacher kinematischer Ketten mit nur niederen Elementenpaaren wurden letztere als zwangläufig vorausgesetzt, wie es auch thatsächlich bei den meisten Anwendungen zutrifft. Dass aber geschlossene Ketten, um zwangläufig zu sein, nicht nothwendig nur zwangläufige Elementenpaare enthalten müssen, wurde schon bei den einleitenden Erklärungen in §. 1 hervorgehoben, und giebt es auch in der That manche praktisch benutzte Mechanismen, deren Ketten zum Theil Elementenpaare von mehrfacher Beweglichkeit enthalten. Nach §. 4 können solche Elementenpaare, wenn sie zugleich niedere, also umkehrbare, unbeschadet der Allgemeinheit folglich wieder als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende sein sollen, nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein, nämlich (§. 6) Cylinderpaare, Kugelpaare oder Plattenpaare. Das Cylinderpaar, mit 2 Freiheitsgraden verbunden, vereinigt in sich die Beweglichkeiten eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares, dessen Schubrchtung der Axe des ersteren parallel ist. Das Kugelpaar, 3 Freiheitsgraden entsprechend,

enthält die Beweglichkeiten von 3 Drehkörperpaaren, deren beliebig gerichtete Axen sich in einem Punkte schneiden. Das Plattenpaar, gleichfalls 3 Freiheitsgraden entsprechend, begreift in sich die Beweglichkeiten entweder von zwei Prismenpaaren mit gekreuzten Schubrichtungen und einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder von zwei Drehkörperpaaren mit parallelen Axen und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu diesen zwei Axen senkrechten Ebene liegt. Mit Rittershaus\* sind diese Elementenpaare auch passend als flächenläufige zu bezeichnen, um damit anzudeuten, dass die Punkte jedes Elementes sich gegen das andere in gewissen Flächen (hier in conaxialen Cylinderflächen, concentrischen Kugelflächen resp. parallelen Ebenen) bewegen können, während bei zwangläufigen Elementenpaaren, deshalb auch als curvenläufig zu bezeichnen, jene relativen Bewegungsgebiete der Elementenpunkte Linien sind.

Wenn zwei benachbarte Glieder einer kinematischen Kette, falls sie, obschon durch ein Elementenpaar verbunden, doch thatsächlich in der Kette gegen einander unbeweglich sind, stets nur als ein Glied gerechnet werden, da jenes Paar dann unbeschadet des kinematischen Charakters der Kette entbehrlich, nämlich durch starre Verbindung der fraglichen Glieder zu einem einzigen ersetzbar ist, so kann aus einer zwangläufigen Kette, die einem gewissen Bewegungszwecke entsprechend zunächst mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet wurde, eine ebenfalls zwangläufige Kette mit theilweise flächenläufigen Paaren entweder ohne oder mit gleichzeitiger Verminderung der Gliederzahl hervorgehen. Der erste Fall findet statt, so oft ein zwangläufiges Paar in der ursprünglichen Kette durch ein flächenläufiges ersetzt werden kann, das sich gar nicht anders wie jenes in der Kette verhält, weil die mit der Beweglichkeit des letzteren darin vereinigten Beweglichkeiten durch die im Uebrigen obwaltende Paarungsweise der Kettenglieder aufgehoben, d. h. die betreffenden Relativbewegungen verhindert werden. So könnte z. B. bei einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit eines ihrer Drehkörperpaare durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, vorausgesetzt dass die übrigen vollkommen (ohne Spielräume) ausgeführt und die Kettenglieder ganz unbiegsam sind, weil dann Axialverschiebung unmöglich wäre; wegen des stets nur unvollkommenen Zutreffens jener Voraussetzungen würde aber hier ebenso wie in analogen Fällen die Anwendung des flächenläufigen Elementen-

\* Die kinematische Kette; ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit. „Civilingenieur“, Bd. XXII.

paares nicht nur nutzlos, weil eine Vereinfachung der Kette nicht herbeiführend, sondern insofern selbst nachtheilig sein, als dadurch die Zwangläufigkeit beeinträchtigt und die Anstrengung der Kettenglieder durch äussere Kräfte, die in gewissem Sinne (hier im Sinne der Paaraxen) zufällig einwirken, vergrössert würde.

Eine nähere Prüfung verdient also die Einführung flächenläufiger Elementenpaare nur unter der Voraussetzung, dass dadurch eine Verminderung der Gliederzahl einer Kette ermöglicht wird. Das ist der Fall, wenn die mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildete Kette solche 2 oder 3 auf einander folgende Paare enthält, deren Beweglichkeiten einem gewissen flächenläufigen Elementenpaare zusammen eigen sind. Enthält die Kette zwei solche benachbarte Paare  $A, B$ , deren Beweglichkeiten in einem Cylinderpaare vereinigt vorkommen, oder drei auf einander folgende Paare  $A, B, C$ , deren Beweglichkeiten in einem Kugel- oder Plattenpaare vereinigt sind, so kann das betreffende flächenläufige Paar unbeschadet der Zwangläufigkeit der Kette an die Stelle jener zwangläufigen Elementenpaare gesetzt werden mit Beseitigung des dazwischen liegenden Gliedes  $AB$  resp. der beiden Glieder  $AB$  und  $CD$ ; wenn aber im Falle von nur zwei solchen auf einander folgenden zwangläufigen Paaren  $A, B$  die Beweglichkeiten derselben zwei Freiheitsgraden eines Kugelpaares  $K$  oder Plattenpaares  $P$  entsprechen, so bleibt bei der Substitution von  $K$  resp.  $P$  für die beiden mit dem Gliede  $AB$  wegfallenden Paare  $A$  und  $B$  die Kette nur dann zwangläufig, wenn es die ursprüngliche Kette bei Einschaltung eines weiteren, dem Paare  $A$  oder  $B$  benachbarten zwangläufigen Paares  $C$  bliebe, dessen Beweglichkeit dem dritten Freiheitsgrade von  $K$  resp.  $P$  entspricht, wenn also hierbei das Paar  $C$  thatsächlich gar nicht als solches zur Geltung kommen, d. h. wenn es die dadurch verbundenen Glieder unbeweglich gegen einander lassen würde.

So geht z. B. die fünfgliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 63, §. 51, in eine viergliedrige nach wie vor zwangläufige Kette über, wenn das Drehkörperpaar  $D$  und das Prismenpaar  $d, f$  unter Beseitigung des Gliedes  $d$  zusammen durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, indem ein am Gliede  $e$  als Hohlcyliner mit der Axe  $D$  befindlicher Ring einen damit coaxialen Volleylinder umschliesst, zu dem sich das excentrisch mit dem Muttergewinde des Schraubenpaares  $A$  versehene Glied  $f$  erweitert. Ebenso bleibt z. B. eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette zwangläufig, wenn 3 ihrer Drehkörperpaare zusammen durch ein Kugelpaar ersetzt werden; freilich ist die dann nur noch zweigliedrige Kette ein blosses Drehkörperpaar

geworden, dem es als solichem ganz unwesentlich ist, dass seine Elementenfläche theilweise die Form einer Kugel hat. Würden aber von den 4 Drehkörperpaaren der sphärischen Kette nur zwei benachbarte durch ein Kugel-paar ersetzt, so verlöre die Kette ihre Zwangläufigkeit, weil die ursprüngliche Kette sie durch Einschaltung eines fünften Drehkörperpaares verlieren würde, dessen Axe durch den Schnittpunkt der übrigen geht. Indessen kann die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, §. 51, als Beispiel des Falles dienen, dass der Ersatz von zwei zwangläufigen benachbarten Elementenpaaren durch ein flächenläufiges Paar mit 3 Freiheitsgraden trotz der damit verbundenen Einführung eines weiteren Freiheitsgrades doch die Zwangläufigkeit der Kette nicht aufhebt. Weil nämlich die Unveränderlichkeit der Winkel, unter denen hier die Schubrichtung des Prismen-paares  $C$  gegen die Schraubenaxe  $AA$  und die Schubrichtung  $DD$  des Prismen-paares  $D$  geneigt ist, schon durch einen dieser Winkel sicher gestellt wird, da  $AA$  und  $DD$  unter sich einen unveränderlichen Neigungswinkel haben, so verliert diese Kette ihre Zwangläufigkeit dadurch nicht, dass die prismatische Stange  $b$  mit der Hohl-schraube  $B$ , oder dass die prismatische Stange  $c$  mit dem Hohlprisma  $C$  statt fester Verbindung durch ein Drehkörperpaar verbunden wird, dessen Axe normal zu den Schubrichtungen der Prismenpaare  $C$  und  $D$  ist; also können unbeschadet der Zwangläufigkeit diese zwei Prismenpaare zusammen durch ein Plattenpaar ersetzt werden, in welchem ihre Beweglichkeiten und die jenes eingeschalteten Drehkörperpaares vereinigt sind. Die Kette geht dadurch in eine dreigliedrige Kette  $a, b, d$  über, welche, da in ihr das die Glieder  $b$  und  $d$  verbindende Plattenpaar thatsächlich nur als Prismenpaar zur Geltung kommt, identisch ist mit der conaxialen singulären Schraubenkette  $a, b, c$ , Fig. 62, §. 49.

Uebrigens ist natürlich eine solche, wenn auch mit Rücksicht auf die Zwangläufigkeit zulässige Vereinfachung der Kette doch mit Rücksicht auf den jeweiligen Bewegungszweck derselben nur dann zulässig, wenn die Bewegungen der in Wegfall kommenden Glieder bei diesem Zwecke nicht in Betracht kommen. So würde z. B. die eben angeführte Reduction der viergliedrigen Kette, Fig. 64, auf nur 3 Glieder unzulässig sein, sofern diese Kette, z. B. bei der Anwendung als Mechanismus einer Theilmaschine, gerade die Verschiebung des Gliedes  $c$  gegen das Glied  $d$  vermitteln sollte, die mit dem Wegfalle des Gliedes  $c$  verloren geht.

Während aus solchen Gründen die Anwendung des in Rede stehenden Princips, die Gliederzahl einer zwangläufigen Kette durch Einführung flächenläufiger Elementenpaare zu vermindern, sehr oft unthunlich ist, giebt es jedoch auch Fälle, in denen die Anwendbarkeit des Verfahrens insofern



eine Ausdehnung erfährt, als es selbst auf Kosten der Zwangläufigkeit in Anwendung gebracht werden darf, wenn nämlich die mehrfache Beweglichkeit nur solche Glieder betrifft und von solcher Art ist, dass dadurch der durch den betreffenden Mechanismus zu erfüllende Bewegungszweck nicht beeinträchtigt wird. So kann es z. B. der Fall sein, dass ein gerader stangenförmiger Körper, wenn er als Glied einer kinematischen Kette an beiden Enden durch Kugelpaare mit den benachbarten Gliedern verbunden und somit unabhängig von letzteren beliebig um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar, also nicht zwangläufig ist, dadurch doch die Zwangläufigkeit der übrigen Kettenglieder nicht stört und somit auch nicht die Brauchbarkeit des betreffenden Mechanismus, insoweit es dabei nur auf die Zwangläufigkeit jener übrigen Kettenglieder ankommt; in §. 54 wird ein Beispiel dieses Falles näher besprochen.

Ueberhaupt enthalten die zwei folgenden Paragraphen eine Uebersicht der einfacheren, aus Drehkörperketten ableitbaren Mechanismen mit Cylinder- oder Kugelpaaren nebst Beispielen praktischer Anwendung; Plattenpaare sind seftener benutzt worden.

#### §. 53. Mechanismen mit Cylinderpaaren.

Ein hier zunächst als Beispiel anzuführender Mechanismus ist auch deshalb bemerkenswerth, weil bei ihm das im vorigen §. besprochene Princip auf eigenthümliche Weise in Anwendung gebracht ist. Sind nämlich in einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette

die auf einander folgenden Glieder  $a \quad b \quad c \quad b' \quad a'$   
 durch die zwangläufigen Elementenpaare  $B \quad C \quad C' \quad B'$

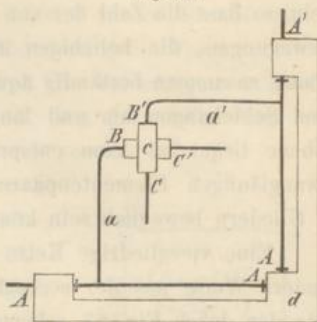
in der durch die Uebereinanderstellung angedeuteten Weise verbunden, und sind  $E, E'$  zwei flächenläufige Elementenpaare von solcher Art, dass die Beweglichkeiten der Paare  $B$  und  $C$  in  $E$ , die von  $B'$  und  $C'$  in  $E'$  vereinigt sind, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass unter Beseitigung der Glieder  $b$  und  $b'$  das Glied  $c$  unmittelbar mit  $a$  durch das Paar  $E$ , mit  $a'$  durch das Paar  $E'$  verbunden werden kann ohne die Zwangläufigkeit der Kette aufzuheben, falls etwa weitere den Elementenpaaren  $E, E'$  eigenthümliche Freiheitsgrade in Folge der besonderen Art der Kette nicht zur Geltung kommen können. Indem aber durch den Wegfall der Glieder  $b, b'$  auch die Folge der Elementenpaare  $C, C'$ , durch welche  $c$  mit diesen Gliedern zusammenhing, gleichgültig geworden ist, so kann schliesslich auch  $c$  mit  $a$  durch das Paar  $E$ , mit  $a'$  durch das Paar  $E'$  dann verbunden werden,

wenn  $E$  die Beweglichkeiten von  $B$  und  $C'$ ,  $E'$  die von  $B'$  und  $C$  in sich vereinigt.

Dieses Princip ist in dem Mechanismus, Fig. 66, zur Anwendung gekommen. Die viergliedrige Kette desselben besteht aus zwei Gliedern  $a, a'$ , die einerseits mit dem festgestellten Gliede  $d$  durch Drehkörperpaare  $A, A'$  mit rechtwinklig geschränkten (d. h. im Allgemeinen windschiefen) Axen und andererseits mit dem Gliede  $c$  durch Cylinderpaare  $BC'$  und  $B'C$  mit rechtwinklig geschränkten Axen verbunden sind; die Glieder  $a$  und  $a'$  sind zu dem Ende mit Ansätzen versehen, welche in cylindrische Stangen  $BC'$  und  $B'C$  auslaufen, deren Axen beziehungsweise parallel den Axen  $A$  und  $A'$  sind, während das als Doppelhülse gestaltete Glied  $c$  mit seinen rechtwinklig geschränkten entsprechenden cylindrischen Bohrungen  $BC'$  und  $B'C$  auf jene Stangen aufgeschoben ist. Einer Drehung des Gliedes  $a$  um seine Axe  $A$  entspricht eine gewisse Drehung von  $a'$  um  $A'$ , wobei die Bewegung von  $c$  eine blosse Schiebung ist, indem zwei feste Gerade in diesem Gliede  $c$  (die Axen seiner cylindrischen Bohrungen) beständig den Axen  $A$  und  $A'$  parallel bleiben. Die Kette dieses zur Drehung von Weichensignalen angewendeten Mechanismus kann vorgestellt werden als abgeleitet aus einer sechsgliedrigen Drehkörperkette  $ABCC'B'A'$  (§. 48) von solcher Art, dass die parallelen Axen  $A, B, C$  rechtwinklig gegen die gleichfalls parallelen Axen  $A', B', C'$  gerichtet, zugleich aber die Drehkörperpaare  $C$  und  $C'$  in Prismenpaare übergegangen sind, so dass die Schubrichtung von  $C$  parallel den Axen  $A'$  und  $B'$ , die von  $C'$  parallel den Axen  $A$  und  $B$  ist; indem dann nämlich die Beweglichkeiten der Paare  $B$  und  $C'$  zusammen die eines Cylinderpaares  $E$ , die der Paare  $B'$  und  $C$  zusammen die eines Cylinderpaares  $E'$  sind, konnte unter Beseitigung der Glieder  $BC = b$  und  $B'C' = b'$  das Glied  $CC'$  als das Glied  $c$  der Fig. 66 unmittelbar mit  $a$  durch das Paar  $E = BC'$ , mit  $a'$  durch  $E' = B'C$  verbunden werden.

Wenn man bei der Kette, Fig. 66, die Axe  $A$  im Sinne der gemeinsamen Normale von  $A$  und  $A'$  ins Unendliche rücken, d. h. das Drehkörperpaar  $A$  in ein Prismenpaar mit der Schubrichtung  $A'A'$  übergehen liesse, und dann dasselbe nebst dem Drehkörperpaare  $A'$  unter Beseitigung des Gliedes  $d$  durch ein Cylinderpaar mit der Axe  $A'$  ersetze, so ginge die Kette in eine dreigliedrige Cylinderkette über, die aber thatsächlich nur

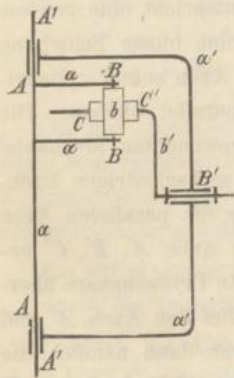
Fig. 66.



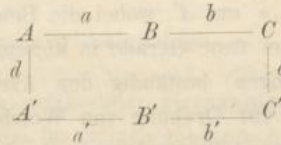
ein Prismenpaar mit der Schubrichtung  $A'A'$  wäre. Ebenso erhielte man durch Vertauschung von  $A$  mit  $A'$  ein Prismenpaar mit der Schubrichtung  $AA'$ . Ueberhaupt kann eine dreigliedrige Kette mit 3 Cylinderpaaren nur dann beweglich sein, wenn sie mit einem Prismenpaare oder einer ebenen Prismenkette identisch ist; denn anderenfalls dürften die Axen der 3 Cylinderpaare nicht einer Ebene parallel sein, so dass die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen, die beliebigen möglichen relativen Bewegungen sämtlicher Paare zusammen beständig äquivalent wären, = 6 sein würde (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen entsprechend), die Kette folglich, wenn mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet, nicht mit 6, sondern erst mit 7 Gliedern beweglich sein könnte.

Eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren kann aber noch auf andere Weise aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden, wie der durch Fig. 67 schematisch dargestellte Mechanismus zeigt. Auch

Fig. 67.



ihm liegt eine solche sechsgliedrige Drehkörperkette zu Grunde, bei der nach dem Schema



die parallelen Axen  $A, B, C$  rechtwinklig gegen die parallelen Axen  $A', B', C'$  gerichtet, zugleich aber jetzt das Drehkörperpaar  $C$  in ein Prismenpaar übergegangen ist, dessen Schubrichtung parallel der Axe  $C'$ , das Drehkörperpaar  $A'$  in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung parallel der

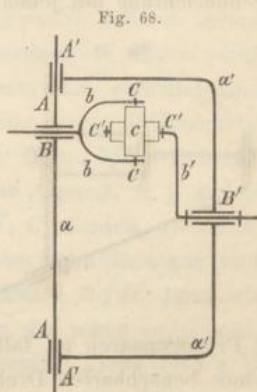
Axe  $A$  ist, so dass unter Beseitigung der Glieder  $c$  und  $d$  die Glieder  $b$  und  $b'$  durch ein Cylinderpaar mit der Axe  $C'$ ,  $a$  und  $a'$  durch ein Cylinderpaar mit der Axe  $A$  ersetzt werden konnten. Bei dem Mechanismus, Fig. 67, ist  $a'$  das festgestellte Glied; das ihm einerseits benachbarte Glied  $b'$  kann als Kurbel um die Axe  $B'$  rotiren, während die Bewegung des ihm andererseits benachbarten Gliedes  $a$  aus hin und her gehender Schiebung längs der Axe  $A$  und schwingender Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, dieses Glied deshalb als schwingender Schieber bezeichnet werden kann. Der somit als Schwingschieberkurbel zu bezeichnende Mechanismus ist von Robertson, und zwar als Schwingschieberkurbelgetriebe, d. h. mit dem

schwingenden Schieber als treibendem Gliede, für Dampfmaschinen erdacht worden, indem dabei das festgestellte Glied  $a'$  auf einer Seite als Dampfzylinder, der schwingende Schieber  $a$  als Kolbenstange mit entsprechendem Kolben ausgebildet, und die zusammengesetzte Bewegung des letzteren zugleich zur Vermittelung der Dampfvertheilung benutzt ist.

Bei einer anderen Form der Ausführung seines Dampfmaschinengetriebes (Fig. 68) hat Robertson nur das Glied  $d$  der zu Grunde liegenden sechsgliedrigen Kette wie im vorigen Falle beseitigt in Folge unmittelbarer Verbindung der Glieder  $a$  und  $a'$  durch das Cylinderpaar  $AA'$ , die Drehkörperpaare  $C$  und  $C'$  aber als solche mit dem dazwischen liegenden Gliede  $c$  bestehen lassen, und nur noch die Abänderung getroffen, dass das Drehkörperpaar  $B$  durch ein Prismenpaar ersetzt wurde, dessen gegen die Axen  $A$  und  $C$  rechtwinklige Schubrichtung dann nur vorübergehend mit den Axen  $B'$  und  $C'$  parallel wird. —

Indem die drei hier besprochenen Mechanismen, Fig. 66—68, zunächst nur als zufällige Ableitungen aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette erscheinen, mag noch die Frage geprüft werden, welche verschiedene Arten zwangläufiger Ketten mit Cylinderpaaren überhaupt aus zwangläufigen Drehkörperketten mit höchstens 6 Gliedern erhalten werden können? Dass eine solche Cylinderkette höchstens zwei Cylinderpaare enthalten kann, wurde schon oben hervorgehoben; dass andererseits siebengliedrige Drehkörperketten zu sehr mannigfachen Arten von Cylinderketten (u. A. auch mit 3 Cylinderpaaren) führen können, ist ausser Zweifel, hier aber nicht näher zu untersuchen, da es an übersichtlicher Classifizierung der reichhaltigen Gruppe von siebengliedrigen Drehkörperketten einstweilen fehlt, ein nahe liegendes Bedürfniss auch nicht dazu vorhanden ist, indem die Praxis stets mit den einfachsten Mitteln ihre Zwecke zu erreichen bestrebt sein muss.

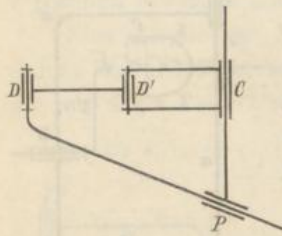
Da ein Cylinderpaar als Verschmelzung eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares bei vorhandenem Parallelismus der Schubrichtung des letzteren mit der Axe des ersteren zu betrachten ist, so ist zunächst klar, dass bei einer viergliedrigen Drehkörperkette niemals zwei Paare zu einem Cylinderpaare vereinigt werden können. Denn während bei der sphärischen Kette die Axen der Paare wesentlich im Endlichen liegen, diese also über-



haupt nicht in Prismenpaare übergehen können, sind sie bei der ebenen Kette zwar durch Prismenpaare ersetzbar, aber nur durch solche, deren Schubrichtungen rechtwinklig gegen die Paaraxen gerichtet sind.

Aus jeder der zweierlei fünfgliedrigen Drehkörperketten (§. 47) kann eine viergliedrige Kette mit einem Cylinderpaare erhalten werden. Aus einer solchen, welche 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen nebst 2 Prismenpaaren enthält, ist es dann möglich, wenn einem dieser Drehkörperpaare ein parallel mit seiner Axe verschiebliches Prismenpaar benachbart ist. Es ergibt sich so eine Kette mit einem Cylinderpaare, zwei ihm parallelaxigen Drehkörperpaaren und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung mit jenen Axen von 0 und 90° verschiedene Winkel bildet;

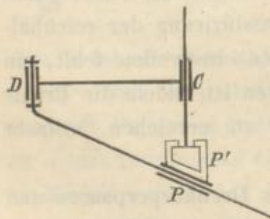
Fig. 69.



sie zerfällt in verschiedene Unterarten je nach der Folge ihrer dreierlei Elementenpaare. Fig. 69 zeigt eine solche Kette; mit  $C$  ist das Cylinderpaar, mit  $D$  das eine, mit  $D'$  das andere Drehkörperpaar, mit  $P$  das Prismenpaar bezeichnet, und ist die Axe  $D'$  ausserhalb der Ebene  $CD$  liegend zu denken.

Aus einer fünfgliedrigen Drehkörperkette mit 2 parallelaxigen Drehkörperpaaren und 3 Prismenpaaren ist, falls die Schubrichtung eines dieser letzteren der Axe eines benachbarten Drehkörperpaares parallel ist, eine viergliedrige Kette zu erhalten mit einem Cylinderpaare  $C$ , einem damit parallelaxigen Drehkörperpaare  $D$  und zwei Prismenpaaren  $P, P'$ , deren Schubrichtungen nicht zusammen mit den Axen  $C, D$  einer Ebene parallel, und welche auch nicht beide zugleich rechtwinklig gegen diese Axen gerichtet sind. Je nach der

Fig. 70.



Folge ihrer dreierlei Paare sind wieder verschiedene Unterarten der Kette zu unterscheiden. Durch Fig. 70, einer näheren Erklärung wohl nicht bedürftig, ist eine solche Kette angedeutet. — Ketten mit zwei Cylinderpaaren sind aus der einen oder anderen fünfgliedrigen Drehkörperkette offenbar nicht zu erhalten, weil sie, wie sie auch gebildet werden möchten, von einem blossen Prismenpaar nicht verschieden wären.

Wenn eine sechsgliedrige Drehkörperkette  $ABCC'B'A'$  mit zwei Gruppen von je 3 in einem Punkte sich schneidenden benachbarten Axen  $A, B, C$  und  $C', B', A'$  mittels der Einführung eines Cylinderpaares auf eine fünfgliedrige Kette reducirt sein soll, so muss von jenen zwei

Gruppen wenigstens eine, z. B. die zweite  $C'$ ,  $B'$ ,  $A'$  parallele Axen enthalten, die rechtwinklig gegen eine der äusseren Axen  $A$  oder  $C$  der ersten Gruppe gerichtet sind, um eines der beiden äusseren Drehkörperpaare  $A'$  oder  $C'$  der zweiten Gruppe durch ein Prismenpaar ersetzen zu können, dessen Schubrichtung mit der Axe  $A$  resp.  $C$  des benachbarten Paares der anderen Gruppe parallel ist. So könnten z. B. bei der Kette, Fig. 61, §. 48 (abgesehen von der dort angeführten speciellen Verwendung dieser Kette als Mechanismus einer Dampfmaschine) das Drehkörperpaar  $A$  und das Prismenpaar  $A'$  unter Beseitigung des Gliedes  $AA'$  (des festgestellten Gliedes bei jenem a. a. O. besprochenen Mechanismus) zu einem Cylinderpaare vereinigt werden. Zwei Specialfälle können bei der so zu erhaltenen fünfgliedrigen Kette mit einem Cylinderpaare dadurch herbeigeführt werden, dass von den beiden Drehkörperpaaren  $B'$ ,  $C'$ , deren parallele Axen rechtwinklig gegen die des Cylinderpaares  $AA'$  gerichtet sind, noch eines (nicht beide, weil sonst das Resultat eine ebene Prismenkette wäre) in ein Prismenpaar übergeht, wie es bei der Kette, Fig. 61, bezüglich des Paares  $B'$  der Fall ist. Auch können die Axen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  gleichfalls parallel, somit rechtwinklig gegen die Axen  $B'$ ,  $C'$  werden, wie es bei der fünfgliedrigen Kette, Fig. 68, der Fall ist; dabei kann dann nur noch eines der Drehkörperpaare  $B$ ,  $C$  oder eines der Paare  $B'$ ,  $C'$  durch ein Prismenpaar ersetzt werden ohne die Kette in eine der schon anderweitig classificirten viergliedrigen Ketten übergöhen zu lassen. Liesse man z. B. bei der Kette, Fig. 68, ausser  $B$  auch  $B'$  oder  $C'$  zu einem Prismenpaar werden, so würde, wenn auch die Schubrichtung desselben mit den Axen  $A$  und  $C$  einen von  $0$  und  $90^\circ$  verschiedenen Winkel bildete (widrigenfalls das Resultat ein blosses Prismenpaar oder eine Schieberschleifenkette, §. 43, wäre), doch nur eine Kette von der durch Fig. 70 dargestellten Art erhalten, indem die durch das Paar  $C'$  resp.  $B'$  verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich würden.

Wenn endlich in der sechsgliedrigen Drehkörperkette  $ABCC'B'A'$  sowohl die Paare  $A$  und  $A'$ , als auch die Paare  $C$  und  $C'$  durch je ein Cylinderpaar unter Ausfall der Glieder  $AA'$  und  $CC'$  ersetzbar sein sollen, so müssen die Paaraxen wenigstens einer der beiden mehrgenannten Gruppen, etwa  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  parallel und rechtwinklig gegen die beiden benachbarten Axen  $A$ ,  $C$  der anderen Gruppe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  gerichtet sein. Schnitten sich dabei diese letzteren in dem im Endlichen liegenden Punkte  $O$ , so dürfte der Winkel  $AOC$  nicht veränderlich sein, weil eine Aenderung desselben nur durch gegenseitige Verdrehung der Axen  $A$ ,  $C$  um die Normale der Winkelebene  $AOC$  im Punkte  $O$  vermittelt werden dürfte, um letztere be-

ständig normal zu den Axen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  zu erhalten; es müsste also die diese Drehung thatsächlich vermittelnde Axe  $B$  parallel mit den Axen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sein, wodurch die Kette zu einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette würde. Ist aber somit der Winkel  $AOC$  constant, so ist er nothwendig beständig = Null, dem Parallelismus der Axen  $A, B, C$  entsprechend, weil sonst die 3 constanten Winkel  $AOC$ ,  $COB$ ,  $BOA$  die Glieder einer unbeweglichen dreigliedrigen ebenen Drehkörperkette wären. Eine viergliedrige Kette mit 2 gegenüber liegenden Cylinderpaaren kann also aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette nur dann erhalten werden, wenn dieselbe solche zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden Drehkörperpaaren enthält, dass die parallelen Axen der einen rechtwinklig gegen die parallelen Axen der anderen gerichtet sind. Offenbar kann auch nur aus diesem Falle die Vereinigung von  $B$  mit  $C'$  und von  $C$  mit  $B'$ , oder von  $B$  mit  $A'$  und von  $A$  mit  $B'$  zu je 2 benachbarten Cylinderpaaren hervorgehen. Somit ist ersichtlich, dass eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren und 2 Drehkörperpaaren nur aus einer solchen sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden kann, deren zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden parallelen Paaraxen unter rechten Winkeln gegen einander gerichtet sind; und da ferner die zwei Cylinderpaare einer solchen Kette nur entweder benachbarte oder gegenüber liegende sein können, so sind überhaupt keine anderen Fälle derselben möglich, als die durch Fig. 66 und Fig. 67 dargestellten. Auch können nicht neue Specialfälle daraus durch den Uebergang eines der beiden übrig gebliebenen Drehkörperpaare in ein Prismenpaar erhalten werden, weil dadurch die Kette wieder zu der durch Fig. 70 dargestellten würde unter Beschränkung der Function eines der beiden Cylinderpaare auf die eines Prismenpaares.

#### §. 54. Mechanismen mit Kugelpaaren.

Die Mannigfaltigkeit kinematischer Ketten mit Kugelpaaren ist vor Allem durch den Umstand beschränkt, dass sie, um zwangläufig zu sein, nur ein Kugelpaar enthalten dürfen; schon bei nur zwei dergleichen wären die durch sie verbundenen Theile der Kette beliebig und unabhängig von gleichzeitigen relativen Bewegungen der einzelnen Glieder dieser Kettentheile um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar. Mit einem Kugelpaare kann aber eine zwangläufige Kette aus einer solchen mit zwangläufigen niederen Paaren nur dann erhalten werden, wenn letztere benachbarte Drehkörperpaare mit sich schneidenden Axen

enthält, und da die aus einer viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette durch Vereinigung von drei ihrer Paare in einem Kugelpaare hervorgehende zweigliedrige Kette nichts anderes, als ein Drehkörperpaar ist, so können es nur sechs- oder siebengliedrige Drehkörperketten sein, die hier als event. durch Einführung eines Kugelpaares auf eine kleinere Gliederzahl reducirbar in Betracht kommen.

Was die sechsgliedrige Drehkörperkette  $ABCC'B'A'$  betrifft, deren zwei Gruppen  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  auf einander folgender Paaraxen sich je in einem Punkte  $O$  resp.  $O'$  schneiden, so würde der Ersatz einer dieser Gruppen von Drehkörperpaaren, z. B. der zweiten durch ein Kugelpaar  $K$  mit Beseitigung der Glieder  $C'B'$  und  $B'A'$  nichts anderes als eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette  $ABCK$  zur Folge haben, indem das Kugelpaar  $K$  die gegenseitige Drehbarkeit der Glieder  $CK$  und  $KA$  um jede durch  $O'$  gehende Axe, insbesondere also auch die Drehung um  $OO'$  vermittelt, die dann zugleich die einzig mögliche, nämlich die einzige ist, die in Drehungen um die Axen  $A, B, C$  als Componenten zerlegt werden kann. In Frage kommt also nur die Einführbarkeit eines Kugelpaares für solche zwei benachbarte Drehkörperpaare  $A, A'$  oder  $C, C'$  der sechsgliedrigen Drehkörperkette, von denen das eine der einen, das andere der anderen der beiden Gruppen  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  angehört, deren Axen sich in je einem Punkte  $O$  resp.  $O'$  schneiden. Specialfälle können dabei nur insofern stattfinden, als sie der zu Grunde liegenden Kette an und für sich zukommen mit Rücksicht darauf, dass die Punkte  $O, O'$  im Unendlichen liegen, dass dann Drehkörper- durch Prismenpaare ersetzt, und event. Cylinderpaare eingeführt werden können.

Sollen nun etwa die Paare  $C$  und  $C'$  der sechsgliedrigen Drehkörperkette unbeschadet der Zwangsläufigkeit durch ein Kugelpaar ersetzbar sein, so müssen die Axen  $C, C'$  sich in einem gewissen Punkte  $P$  schneiden, und darf ferner die Zwangsläufigkeit der sechsgliedrigen Kette dadurch nicht gestört werden, dass das Glied  $CC'$  in zwei Glieder zerlegt wird, verbunden durch ein 7<sup>tes</sup> Drehkörperpaar  $D$ , dessen Axe, durch den Punkt  $P$  gehend, nicht in der Ebene  $CC'$  liegt. Dass aber Letzteres in der That nicht der Fall ist, ergibt sich durch folgende Erwägung. Beliebige unendlich kleine Drehungen um die Axen der sechsgliedrigen Drehkörperkette sind, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, 5 von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen äquivalent: Drehungen um 3 im Punkte  $O$  sich schneidende nicht in einer Ebene liegende Axen und Schiebungen nach 2 sich schneidenden zur Geraden  $OO'$  senk-



rechten Richtungen. Indem nun eine Drehung um die Axe  $D$  in eine gleiche Drehung um eine durch  $O$  gehende Parallelaxe und eine Schiebung normal zur Ebene  $CD$  zerlegt werden kann, d. i. eine Schiebung, die nicht normal zu  $OO'$ , weil  $OO'$  nicht in der Ebene  $CD$  enthalten ist, so kommt durch die Einführung des 7<sup>ten</sup> Drehkörperpaares  $D$  jedenfalls eine 6<sup>te</sup> unabhängige einfache Elementarbewegung hinzu (Verschiebbarkeit auch nach der Richtung  $OO'$ ), so dass die Kette nach §. 47 jetzt erst mit 7 Gliedern zwangläufig beweglich sein, die sechsgliedrige Kette folglich ihre Zwangläufigkeit nicht durch die Einführung des Drehkörperpaares  $D$  und somit auch nicht durch die Einführung eines Kugelpaares an Stelle der Drehkörperpaare  $C, C'$  verlieren kann. Hiernach ist die zwangläufige sechsgliedrige Drehkörperkette immer dann auf eine fünfgliedrige, und ebenso jede aus jener sechsgliedrigen Kette abgeleitete auf eine ein Glied weniger enthaltende zwangläufige Kette mit einem Kugelpaare zu reduciren, wenn die Axen der Drehkörperpaare  $A$  und  $A'$  oder  $C$  und  $C'$  sich schneiden.

So kann z. B. der sechsgliedrige Mechanismus Fig. 61, §. 48, auf einen fünfgliedrigen reducirt werden durch Anwendung eines Kugelpaares statt der beiden Drehkörperpaare  $C, C'$ , wie es bei der constructiven Ausführung des Mechanismus für Dampfmaschinen in der That geschehen ist; das stangenförmige Glied  $OC$  endigt dabei in einem kugeligen Kopf, dessen entsprechende Hohlkugel, äusserlich prismatisch gestaltet, in dem Rahmen  $B'B'$  gleitet. — Der viergliedrige Mechanismus Fig. 67 lässt die Einführung eines Kugelpaares nicht zu, da die Drehkörperpaare  $A, A'$  und  $C, C'$  schon in Cylinderpaaren  $AA'$  und  $CC'$  vereinigt sind. Der fünfgliedrige Mechanismus Fig. 68 liefert aber einen viergliedrigen, indem die Glieder  $b$  und  $b'$  mit Beseitigung des Gliedes  $c$  durch ein Kugelpaar verbunden werden, und zwar enthält der Mechanismus dann ein Prismenpaar  $B$ , ein Drehkörperpaar  $B'$ , ein Cylinderpaar  $AA'$  und ein Kugelpaar  $CC'$ . — Aus dem viergliedrigen Mechanismus Fig. 66 ist gar ein nur dreigliedriger mit zwei Cylinderpaaren und einem Kugelpaare zu erhalten, indem durch letzteres die Glieder  $a, a'$  unmittelbar verbunden werden. Bei Feststellung des Gliedes  $a$  und Bewegung von  $c$  ist dann jede elementare Bewegung von  $a'$  die Resultante von zwei Drehungen um Axen, welche, durch den Mittelpunkt des Kugelpaares gehend, mit den Axen der beiden Cylinderpaare parallel sind. —

Von siebengliedrigen Drehkörperketten, die durch Einführung von Kugelpaaren auf kleinere Gliederzahlen beschränkt werden können, sei schliesslich nur ein Beispiel erwähnt, zugleich als Beispiel solcher Umstände,

unter denen ein Mechanismus ausnahmsweise trotz nur unvollständiger Zwangläufigkeit doch seinem Zwecke vollkommen entsprechend sein kann. Die 7 Drehkörperpaare der Kette seien auf einander folgend  $A, B, C, D, C', B', A'$ ; die Axen  $B, C, D$  sollen sich in einem Punkte  $O$ , die Axen  $C', B'$  in einem Punkte  $O'$  schneiden, die Axen  $A$  und  $A'$  aber weder durch  $O$  noch durch  $O'$  gehen und gegenseitig im Allgemeinen windschief sein. Die Kette fällt dann unter keinen der Specialfälle, in denen sie nach §. 47 schon in Folge eines Theils ihrer Elementenpaare beweglich wäre, und ist sie also jedenfalls zwangläufig. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun die Paare  $B, C, D$  unter Beseitigung der Glieder  $BC$  und  $CD$  durch ein Kugelpaar  $K$  mit dem Mittelpunkte  $O$  ersetzt werden. Wollte man auch  $B'$  und  $C'$  durch ein Kugelpaar  $K'$  mit dem Mittelpunkte  $O'$  ersetzen, so würde zwar die Zwangläufigkeit der Kette insofern aufgehoben, als nun das Glied  $KK'$  unabhängig von den übrigen Gliedern beliebig um die Gerade  $OO'$  drehbar würde, allein dieser auf ein einzelnes Glied sich beschränkende Mangel an Zwangläufigkeit beeinträchtigt nicht nothwendiger Weise die Brauchbarkeit eines durch Feststellung eines anderen Gliedes aus der Kette hervorgehenden Mechanismus. Insbesondere z. B. bei Feststellung des Gliedes  $AA'$  erhält man so einen viergliedrigen Mechanismus, bestehend aus zwei um im Allgemeinen geschränkte Axen  $A, A'$  drehbaren Gliedern  $AK$  und  $A'K'$ , die durch eine Koppel  $KK'$  mit Kugelgelenken  $K, K'$  so verbunden sind, dass die Mittelpunkte  $O, O'$  der letzteren ausserhalb der Axen  $A, A'$  liegen. Eine gewisse Drehung von  $AK$  um  $A$  veranlasst hier offenbar eine zwangläufige, d. h. ganz bestimmte entsprechende Drehung von  $A'K'$  um  $A'$ , einerlei wie dabei die Koppel etwa gleichzeitig um  $OO'$  sich drehen mag. Dieser Mechanismus kann als geschränkte oder allgemeine Doppelschwinge, Schwingkurbel resp. Doppelkurbel bezeichnet werden, jenachdem von den beiden dem festgestellten benachbarten Gliedern  $AK$  und  $A'K'$  jedes nur zwischen Grenzlagen schwingen, oder eines stetig in einerlei Sinn rotiren, oder jedes rotiren kann. Wenn man die Bedingungen aufsuchte, unter denen der Mechanismus den ersten, zweiten oder dritten dieser Charaktere hat, so müssten darin die einfacheren, in §. 36 für die ebene Drehkörperkette entwickelten betreffenden Regeln als Specialfall enthalten sein.

## 2. Einfache Mechanismen mit höheren Elementenpaaren.

## §. 55. Vorbemerkungen.

Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare lassen sich die damit herstellbaren kinematischen Ketten und Mechanismen nicht in ebenso vollständiger Uebersicht systematisch entwickeln, wie es bei der beschränkten Zahl niederer Elementenpaare hinsichtlich der nur aus solchen gebildeten Ketten geschehen konnte. Indessen sind doch die im Maschinenbau bisher benutzten, wenigstens die einfachen Ketten (§. 1) mit höheren Elementenpaaren, von denen hier zunächst nur die Rede ist, in wenigen Gruppen zusammenzufassen. Zum Theil können sie aus Ketten mit nur niederer Elementenpaaren nach dem Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) erhalten werden, indem unter Beseitigung eines Kettengliedes die Elementenpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbanden, durch ein einzelnes, die Freiheitsgrade jener in sich vereinigendes Elementenpaar ersetzt werden, das dann ein höheres sein wird, wenn die in ihm vereinigten Freiheitsgrade nicht, wie bei den in §. 53 und §. 54 besprochenen Ketten, einem niederer flächenläufigen Elementenpaare entsprechen. Insbesondere ist das der Fall, wenn die zwei ausgefallenen Elementenpaare Drehkörperpaare mit parallelen Axen waren, oder das eine ein Drehkörperpaar, das andere ein Prismenpaar mit einer zur Axe des Drehkörperpaares senkrechten Schubrichtung; die relative Beweglichkeit der durch das neue Elementenpaar verbundenen Glieder besteht dann in Drehbarkeit um alle Axen, die in einer gewissen Ebene einer gewissen Geraden parallel sind, ist also unter den in §. 3 zusammengestellten möglichen relativen Beweglichkeiten der Elemente eines niederer (umkehrbaren) Paares nicht enthalten.

Auf solche Weise können Ketten selbst mit nur zwei Gliedern (zu betrachten als blosse Elementenpaare) entstehen, wie z. B. die durch Fig. 36 (Seite 105) dargestellte Kette zeigt, die aus einer Kreuzschieberkette (Fig. 55, §. 42) dadurch entstanden zu denken ist, dass sowohl das Drehkörperpaar  $a, b$  mit dem Prismenpaare  $b, c$  unter Ausfall des Gliedes  $b$ , als auch das Drehkörperpaar  $a, d$  mit dem Prismenpaare  $d, c$  bei Ausfall des Gliedes  $d$  je durch ein flächenläufiges höheres Elementenpaar ersetzt wird, bestehend aus einem Drehkörper mit einer entsprechenden, nämlich solchen prismatischen Rinne als Hohlkörper, dass der Querschnitt der Rinnenfläche und der Meridianschnitt der Drehkörperfläche congruent sind. Ebenso

könnte aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette, Fig. 39 in §. 36, eine drei- oder zweigliedrige Kette mit einem resp. zwei solchen höheren Elementenpaaren erhalten werden, indem der Zapfen *B* oder *C* der Koppel *b* oder jeder von beiden in einer kreisförmigen entsprechenden Rinne des Steges *d* geführt würde.

Die auf solche Weise zu erhaltenden Ketten mit höheren Elementenpaaren, die natürlich voraussetzen, dass die ausgefallenen Glieder der ursprünglichen Kette mit nur niederen Paaren für den Zweck des Mechanismus in der betreffenden Maschine nicht wesentlich sind, haben indessen nur untergeordnetes Interesse, weil der Vortheil der Vereinfachung durch Verminderung der Gliederzahl in der Regel mehr als aufgewogen wird durch den Nachtheil vermehrter Abnutzung der höchstens in Linien sich berührenden Elemente des höheren Paares bei Uebertragung grösserer Kräfte, wozu in gewissen Fällen (bei Kapselwerken) der Uebelstand vermehrter Durchlässigkeit für Flüssigkeiten hinzukommen kann. Im Folgenden ist deshalb nur noch von solchen Ketten die Rede, deren Glieder eine theilweise andere gegenseitige Beweglichkeit haben, als die Glieder von Ketten mit nur niederen Elementenpaaren, aus denen sie somit nicht durch blosse Reduction der Glieder, also durch Specialisirung, sondern nur durch Verallgemeinerung, event. mit Verminderung der Gliederzahl verbunden, erhalten werden können. Sie mögen als *n*-fach höhere Prismenketten, *n*-fach höhere Drehkörperketten oder *n*-fach höhere Schraubenkette bezeichnet werden, wenn sie ausser *n* höheren Paaren nur Prismenpaare, oder nur Drehkörperpaare event. mit Prismenpaaren, oder Schraubepaare event. mit Drehkörper- oder Prismenpaaren enthalten. Praktische Verwendung haben besonders höhere Drehkörperketten gefunden.

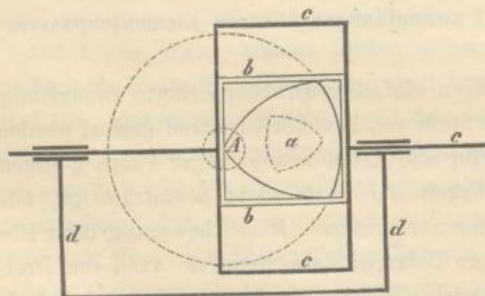
#### §. 56. Drehkörperketten mit zwangläufigen höheren Elementenpaaren.

Wenn in einer zwangläufigen einfachen Drehkörperkette zwangläufige höhere Elementenpaare an die Stelle von Drehkörperpaaren gesetzt werden, so wird dadurch gemäss der (für alle Arten zwangläufiger Paare gültigen) Regel in §. 47 die Zwangläufigkeit der Kette nicht beeinträchtigt, falls auch diesen höheren Paaren eine nur drehende Relativbewegung ihrer Elemente zukommt um so gelegene Polaxen, dass, wenn sie Axen von Drehkörperpaaren wären, die Kette nach §. 47 zwangläufig beweglich sein würde. Insbesondere kann also ein Drehkörperpaar, dessen Axe in der ursprünglichen Drehkörperkette mit denen der beiden benachbarten Paare parallel

ist, durch ein höheres Paar mit cylindrischen Axoiden ersetzt werden, deren Berührungslinie als Polaxe beständig mit denselben Axen parallel bleibt; ein Drehkörperpaar, dessen Axe die der benachbarten in einem gewissen Punkte  $O$  schneidet, durch ein höheres Paar mit conischen Axoiden, deren Mittelpunkte (Spitzen) in diesem Punkte  $O$  liegen. Solche höhere Drehkörperketten können analog den früher für niedere oder schlechtweg sogenannte Drehkörperketten festgesetzten Bezeichnungen als eben oder sphärisch bezeichnet werden, wenn die Polaxen aller ihrer Elementenpaare (die der Drehkörperpaare sind bekanntlich ihre geometrischen Axen) parallel sind resp. in einem Punkte sich schneiden; der obigen Bemerkung zufolge sind sie mit derselben Gliederzahl, wie niedere ebene oder sphärische Drehkörperketten (§. 36 und §. 45), also mit 4 Gliedern zwangsläufig beweglich.

Ein zwangsläufiges höheres Paar mit cylindrischen Axoiden seiner Elemente kann aus einer Scheibe mit entsprechendem Rahmen gebildet werden, so dass das Profil der ersteren eine Figur von constanter Breite (§. 14), das des Rahmens ein jene Figur berührend umschliessendes Quadrat (allgemeiner ein Rhombus) ist. So ist z. B. in dem ebenen Schubkurbelmechanismus (Fig. 47, §. 39) bei seiner Benutzung als Kurbelschubgetriebe zur Bewegung des Steuerungsschiebers von Dampfmaschinen das die Kurbel  $a$  mit der Koppel  $b$  verbindende Drehkörperpaar  $B$  durch eine Curvenscheibe mit Rahmen ersetzt worden (jene der Kurbel, dieser der Koppel angehörig), um das Bewegungsgesetz des Schiebers in zweckdienlicher Weise abzuändern. Dabei kann ebenso, wie in solchem Falle die gewöhnliche Kurbel nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als excentrische Scheibe gestaltet zu werden pflegt, auch hier die allgemeinere Curvenscheibe in solchen Dimensionen ausgeführt werden,

Fig. 71.



das die Kurbel  $a$  mit dem Stege  $d$  verbindet, eingeschlossen wird. Fig. 71 stellt einen Specialfall dieses Mechanismus dar, entsprechend dem Uebergange des die rahmenförmige Koppel  $b$  mit dem Schieber  $c$  verbindenden Drehkörperpaares  $C$  in ein Prismenpaar; der Schieber ist dadurch zu einem Kreuzschieber geworden, der

sowohl mit dem Stege  $d$ , als mit dem Rahmen  $b$  prismatisch gepaart ist. Unmittelbar geht der Mechanismus aus der Kreuzschieberkurbel (Fig. 56, §. 42) hervor, indem das Drehkörperpaar  $B$  derselben durch das höhere Curvenscheibenpaar ersetzt wird. Als Profil der Curvenscheibe ist in Fig. 71 ein gleichseitiges Bogendreieck (§. 14) angenommen worden, von dem eine Ecke in  $A$  liegt. Der Mechanismus kann als Kreuzschieberkurbel aufgefasst werden, deren Kurbellänge nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, nämlich bei jeder Viertelumdrehung einmal den Verbindungslinien des Punktes  $A$  mit allen Punkten der Polbahn des Bogendreiecks (in Fig. 71 als kleineres Bogendreieck punktirt eingetragen) nach und nach gleich wird.

Noch häufiger, als die Benutzung von dergleichen selbständig geschlossenen höheren Elementenpaaren, ist die von unselbständigen, die durch äusseren Druck geschlossen und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemacht werden. Die Elementenflächen solcher Paare (Reibungsräderpaare, Rollenpaare, Walzenpaare) sind zugleich ihre Axoide, und besteht ihre Zwangläufigkeit in relativ rollender Bewegung. So bilden z. B. zwei cylindrische Walzen mit einem Gestelle, in dem die untere Walze mit horizontaler Axe fest gelagert (durch ein Drehkörperpaar damit verbunden) ist, während die Zapfenlager der oberen in entsprechenden Schlitzten des Gestelles geführt (durch ein Prismenpaar damit verbunden) sind, eine einfach höhere ebene Drehkörperkette, deren höheres Paar von der so eben erklärten Art und von deren Drehkörperpaaren das eine durch ein Prismenpaar ersetzt ist. Ein vierrädriger Wagen ist als eine zweifach höhere ebene Drehkörperkette zu betrachten; die Vorder- und die Hinterräder als gegenüber liegende Glieder sind mit dem Wagengestelle als drittem Gliede durch Drehkörperpaare, mit der Fahrbahn als viertem Gliede durch Reibungsräderpaare verbunden. Ein Körper, der mit seiner ebenen Unterfläche auf zwei cylindrischen Walzen liegend fortgerollt wird, bildet mit diesen Walzen und der festen Rollbahn einen sogar vierfach höheren ebenen Drehkörpermechanismus, indem hier alle 4 Elementenpaare der Kette kraftschlüssige, durch Reibung zwangläufig gemachte höhere Paare sind.

#### §. 57. Verminderte höhere Drehkörperketten.

Dass das Princip der Verminderung der Gliederzahl einer kinematischen Kette, d. h. die Ersetzung benachbarter zwangläufiger Paare durch ein nicht zwangläufiges unter Wegfall der zwischenliegenden Glieder, auch

bei höheren Ketten Anwendung finden kann, und zwar in Beziehung sowohl auf die darin vorkommenden niederen als höheren Elementenpaare, ist selbstverständlich. Als Beispiel kann die im vorigen §. erwähnte und durch Fig. 71 dargestellte Kette dienen. Bei ihrer Benutzung als Curvenkurbelschubgetriebe (Kurbelschubgetriebe, in dem die Kurbel durch eine rotirende Curvenscheibe ersetzt ist) oder, wie es kürzer genannt werde, als Curvenschubgetriebe kommt es nur darauf an, durch Drehung der Curvenscheibe *a* den Schieber *c* zu gesetzmässig entsprechender Schiebung zu nöthigen, die dadurch keine Aenderung erfährt, dass der Rahmen *b* weggelassen wird, so dass nun die Curvenscheibe und der Schieber ein flächenläufiges höheres Elementenpaar bilden, die Kette auf eine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette reducirt wird, als welche sie, von Hornblower angegeben, mehrfach benutzt wird. Auch ist hier die in Rede stehende Verminderung der Kette nicht nur zulässig, sondern unbedingt gerechtfertigt, da die ursprüngliche höhere Paarung von *a* mit *b* nur durch eine andere höhere Paarung von *a* mit *c* ersetzt wird, somit dem Vortheil der Vereinfachung nicht ebenso ein Nachtheil gegenüber steht, wie es bei dem Ersatze von niederen Paaren mit Flächenberührung durch ein höheres Paar mit Linienberührung seiner Elemente eben durch diese Aenderung der Berührungsart der Fall ist.

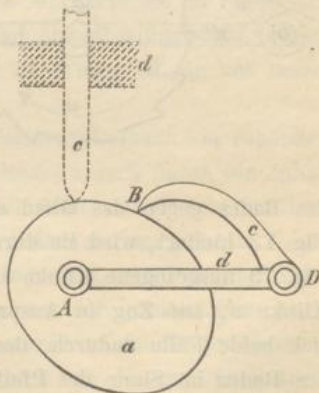
Das dreigliedrige Curvenschubgetriebe kann übrigens auf mehrfach verschiedene Weise ausgeführt werden nicht nur, was die Form der Curvenscheibe betrifft, sondern auch hinsichtlich der Art ihrer Paarung mit dem Schieber. Ist ihr Profil *F* eine Figur von constantem Durchmesser und der innerhalb liegende Drehungspunkt *A* ihr Mittelpunkt, d. h. sind alle ihre durch diesen Punkt *A* gehenden Durchmesser von gleicher Länge *d*, so kann der Schieber *c* mit zwei geradlinigen, der Axe *A* parallelen Kanten versehen werden, deren Ebene durch diese Axe geht und deren Entfernung = *d* ist, um in denselben von der dazwischen liegenden Curvenscheibe berührt zu werden. Bei beliebiger Beziehung zwischen gleichzeitiger Drehung und Schiebung der Glieder *a* und *c*, welcher entsprechend das Profil *F* eine Figur von im Allgemeinen weder constanter Breite noch constantem Durchmesser sein würde, kann der Schieber mit einem cylinderförmigen Zapfen in eine Rinne der Curvenscheibe eingreifen, deren Begrenzungsflächen die zwei äquidistanten Umhüllungsflächen aller relativen Lagen der Zapfenfläche gegen die Scheibe sind. Oder es kann der Schieber kraftschlüssig mit der Curvenscheibe gepaart werden, indem er dieselbe nur an einer Stelle in einer geraden Linie berührt, z. B. in verticaler Richtung periodisch durch die rotirende Scheibe gehoben wird und

durch seine eigene Schwere niedersinkt, die Scheibe beständig von oben her berührend. Würde in diesem Falle zur Vermeidung relativ gleitender Bewegung an der Scheibenfläche und des entsprechenden Arbeitsverlustes durch Reibung der Schieber mit einer Rolle versehen, um mittels derselben die Scheibe zu berühren, so würde damit die auf 3 verminderte Gliederzahl der Kette wieder auf 4 vermehrt, und wäre das höhere Elementenpaar derselben wieder zwangläufig: ein durch äusseren Druck geschlossenes und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemachtes Rollenpaar (§. 56).

Wenn in der vorliegenden dreigliedrigen Kette das Drehkörperpaar  $A$  durch ein Prismenpaar ersetzt würde, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe  $A$ , mit der des Prismenpaares  $e, d$  aber nicht parallel ist, so ginge sie in eine einfach höhere ebene Prismenkette über, die sich von der niederen oder kurzweg so genannten ebenen Prismenkette (§. 34) durch die Veränderlichkeit des Verhältnisses der den Elementen ihrer zwei Prismenpaare zukommenden relativen Schiebungsgeschwindigkeiten unterscheidet.

Die allgemeine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette geht aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette (Fig. 39, §. 36) dadurch hervor, dass benachbarte Drehkörperpaare, etwa  $B$  und  $C$  mit Beseitigung des Gliedes  $BC = b$  durch ein flächenläufiges höheres Paar ersetzt werden, entstanden zu denken dadurch, dass zunächst eines dieser Drehkörperpaare durch ein zwangläufiges höheres Paar ersetzt und dieses dann mit dem anderen zu einem flächenläufigen combinirt wird unter Wegminderung des Gliedes  $b$ . Eine so entstandene Kette, die als Curvenschwingkette bezeichnet werden kann, zeigt Fig. 72 bei kraftschlüssiger Ausführung des höheren Paares, gebildet aus der beliebig profilirten Curvenscheibe  $a$  und der damit durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) längs einer geraden Linie  $B$  in Berührung erhaltenen Schwinde  $e$ . Diese Curvenschwingkette geht wieder in eine Curvenschubkette über, wenn das Drehkörperpaar  $D$ , indem seine Axe ins Unendliche rückt, zu einem Prismenpaar wird, wie in Fig. 72 punktirt angedeutet wurde vorbehaltlich hinzuzudenkender starrer Verbindung der Prismenführung des Schiebers  $e$  mit dem einen Elemente des Drehkörperpaares  $A$  durch das Glied  $d$ .

Fig. 72.

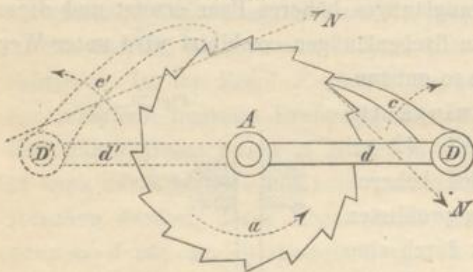




## §. 58. Gesperre.

Die ebene Curvenschwinkette kommt u. A. in einer Form zur Verwendung, die besonders hervorgehoben zu werden verdient. Wenn nämlich bei derselben (Fig. 72) von einer gewissen Lage aus das Glied  $a$  gegen  $d$  in einem gewissen Sinne gedreht wird, so ist der entsprechende Drehungssinn von  $c$  gegen  $d$  bestimmt durch die Bedingung beständiger Berührung von  $a$  und  $c$  längs einer stetigen Folge gerader Linien  $B$  der Scheibenfläche  $F$ . Indem aber diese Drehung von  $c$  gegen  $d$ , wenn in solchem Sinne stattfindend, dass dabei die Entfernung der Geraden  $B$  von der Axe  $A$  zunimmt, durch den Normaldruck  $N$  der Curvenscheibe auf die Schwinge entgegen der die letztere angreifenden Schliessungskraft des Elementenpaares  $a, c$  bewirkt werden muss, wird sie unmöglich und damit die Kette zu einem Gesperre, wenn der Druck  $N$  eine solche Richtung hat, dass er die Schwinge im umgekehrten, d. h. im Sinne einer Annäherung der Berührungslinie  $B$  an die Axe  $A$  zu drehen strebt. Insbesondere kann das in gewissen Configurationen der Kette bei unstetiger, zackiger Form

Fig. 73.



der Rades gegen das Glied  $d$  entgegengesetzt dem Sinne des Pfeils  $a$  in Fig. 73 hindert, wird sie durch den Normaldruck  $N$  entweder, wie die in Fig. 73 ausgezogene Klinke  $c$ , auf Druck oder, wie die daselbst punktierte Klinke  $c'$ , auf Zug in Anspruch genommen. Kinematisch unterscheiden sich beide Fälle dadurch, dass bei der unbeschränkt möglichen Drehung des Rades im Sinne des Pfeils  $a$  die Zugklinke sich in demselben Sinne, die Druckklinke dagegen im umgekehrten Sinne dreht, indem ihre Angriffskante längs der schrägen Fläche eines Zahns gleitet, nämlich in dem durch den betreffenden Pfeil  $c'$  resp.  $c$ , Fig. 73, angedeuteten Sinne.

der Scheibenfläche  $F$  der Fall sein (Fig. 73), wobei dann die Schwinge als Klinke, die gezackte Curvenscheibe als Klinkrad bezeichnet werde. Indem erstere, durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) gegen das Klinkrad angedrückt, eine durch eine andere Kraft angestrebte relative Drehung

Von anderem Charakter wird dieses Gesperre, wenn seine Klinke  $c$ , angedrückt durch die das Paar  $a, c$  schliessende äussere Kraft, mit einem Haken in eine so gestaltete Zahnücke des Klinkrades  $a$  eingreift, dass dadurch dieses in beiderlei Sinne undrehbar wird, so lange nicht durch eine andere äussere Kraft die Klinke ausgehoben, das Gesperre „ausgelöst“ wird. Diese Klinke vereinigt dann in sich die Eigenschaften einer Druck- und einer Zugklinke; das Gesperre kann mit Reuleaux als ruhendes im Gegensatze zu jenem durch Fig. 73 dargestellten als laufendem Gesperre bezeichnet werden.

Während das laufende Gesperre in der durch Fig. 73 dargestellten Lage bezüglich auf eine angestrebte relative Drehung von  $a$  gegen  $d$  entgegen dem Sinne des Pfeils  $a$  als Sperrung, das Klinkrad als Sperrrad wirkt, kommt es als sogenannte Schaltung zur Verwendung, nämlich zur Vermittelung einer periodisch absetzenden Drehung des Rades  $a$  als Schaltrad um seine Axe  $A$ , wenn das Glied  $d$  um diese Axe hin und her gedreht und jedesmal bei seiner Drehung entgegen dem Pfeile  $a$  das Schaltrad an dieser Drehung verhindert (festgestellt) wird; letzteres geschieht in der Regel durch ein zweites laufendes Klinkengesperre, dessen Sperrrad mit dem Schaltrade  $a$  identisch sein kann. So kann z. B. das in Fig. 73 bezüglich seiner Glieder  $c'$  und  $d'$  punktirt angedeutete Gesperre  $a, c', d'$  bei beständiger Feststellung seines Gliedes  $d'$  als Sperrung, das andere  $a, c, d$  als Schaltung dienen. Der aus beiden zusammen bestehende Mechanismus ist ein vollständiges Schaltwerk oder Schaltgetriebe. Obgleich hier das Rad  $a$  mit 4 anderen Gliedern ( $c, d$  und  $c', d'$ ) gepaart ist, handelt es sich dabei doch nicht um einen zusammengesetzten Mechanismus im Sinne der Definition eines solchen (§. 1), weil jenes Rad abwechselungsweise gegen die Glieder  $c, d$  oder  $c', d'$  unbeweglich, d. i. zu einem Gliede mit ihnen verbunden ist.

Als Sperrung kann bei einem solchen Schaltwerke auch ein ruhendes Gesperre dienen, und kann die Drehung des Rades  $a$  auch durch ein Zahnrad vermittelt werden, das nicht am ganzen Umfange verzahnt ist, so dass bei seiner Drehung seine vereinzelt stehenden Zähne nur zeitweise in Zahnücken des Rades  $a$  behufs dessen Schaltung eingreifen, nachdem die Klinke des ruhenden Gesperres (z. B. durch einen anderen vereinzelt Zahn jenes unvollständig verzahnten Rades) ausgehoben wurde. Ueberhaupt kommen solche Schaltwerke in sehr verschiedenen Formen vor, die zum Theil übrigens wirklich zusammengesetzte Mechanismen (nicht nur einfache Mechanismen von wechselnder Zusammensetzung) sind. Dass insbesondere auch zur Vermittelung einer periodisch absetzenden geradlinigen Bewegung das Klink-

rad durch eine in ähnlicher Weise gezahnte Stange ersetzt werden kann, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares  $A$  in ein Prismenpaar, bedarf hier keiner weiteren Ausführung.

#### §. 59. Einfache Zahnäderketten.

Die allgemeinste dreigliedrige einfach höhere Drehkörperkette, von der die einfache Zahnäderkette eine besondere Ausführungsform ist, ergibt sich aus der Erwägung, dass, wenn  $a$  und  $a'$  zwei Körper sind, von denen  $a$  durch ein Drehkörperpaar  $A$ ,  $a'$  durch ein anderes Drehkörperpaar  $A'$  mit einem dritten Körper  $b$  verbunden ist, dieselben stets unter sich durch ein höheres Elementenpaar  $a, a'$  so gepaart werden können, dass sie mit dem Körper  $b$  eine zwangläufig geschlossene Kette bilden und dass, unter  $\omega$  die relative Winkelgeschwindigkeit von  $a$  gegen  $b$  um die Axe  $A$ , unter  $\omega'$  die relative Winkelgeschwindigkeit von  $a'$  gegen  $b$  um die Axe  $A'$  verstanden, das Verhältniss  $\omega : \omega'$  nach einem beliebig gegebenen Gesetze veränderlich ist. Dass das Paar  $a, a'$  an und für sich nicht zwangläufig sein kann, folgt aus der allgemeinen Regel in §. 47 bezüglich der Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, übrigens auch unmittelbar aus der Erwägung, dass Zwangläufigkeit dieses Paares  $a, a'$ , um die in dem Element  $a$  feste Gerade  $A$  in unveränderlicher Lage gegen die im Element  $a'$  feste Gerade  $A'$  zu erhalten, nur in relativer Drehbarkeit von  $a'$  gegen  $a$  um die Axe  $A$  oder von  $a$  gegen  $a'$  um die Axe  $A'$  bestehen könnte, so dass dann das Paar  $a, a'$  ein mit  $A$  oder  $A'$  coaxiales Drehkörperpaar wäre, auf das sich die ganze Kette reducirte.

Die Axen  $A, A'$  der gleich bezeichneten Drehkörperpaare können im Allgemeinen windschief gegen einander gerichtet sein, und sind dann die den Elementen des Paares  $a, a'$  angehörigen Elementenflächen  $F, F'$  nach §. 25 auf unendlich mannigfache Weise bestimmbar, nachdem ihre betreffenden Axoide gemäss §. 24 bestimmt worden sind. Letztere sind Flächen, die von der Polaxe  $P$  bei ihrer relativen Bewegung beziehungsweise gegen  $a$  und  $a'$  beschrieben werden; diese Polaxe ist eine Gerade, welche die gemeinsame Normale  $OO'$  der Axe  $A, A'$  in einem solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Punkte  $Q$  rechtwinklig schneidet und unter solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Winkeln  $\alpha, \alpha'$  gegen  $A$  und  $A'$  geneigt ist, dass, unter  $r = QO, r' = QO'$  die Abstände des Punktes  $Q$  von den Fuss-

punkten  $O, O'$  jener gemeinsamen Normale der Axen  $A, A'$  verstanden, nach Gl. (1) und (3) in §. 24:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'; \quad \frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

ist. Die gleitend-rollende Relativbewegung der in der Polaxe  $P$  sich berührenden Axoide entspricht einer Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um dieselbe und einer Schiebungsgeschwindigkeit  $v$  längs derselben, die nach Gl. (7) und (8) in §. 24 bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos \alpha}{r'} = \frac{\omega' \cos \alpha'}{r}; \quad \frac{v}{e} = \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha',$$

unter  $e$  die kürzeste Entfernung  $OO'$  der Axen  $A, A'$  verstanden. Liegen diese in einer Ebene, so ist  $e = 0$  und werden damit auch  $r, r'$  und  $v = 0$ ; die Polaxe geht in der Ebene der Axen  $A, A'$  durch ihren Schnittpunkt, und die dann conischen Axoide haben eine rein rollende Relativbewegung. Sind insbesondere die Axen  $A, A'$  parallel, so sind sie es auch mit der in ihrer Ebene liegenden Polaxe und werden die Axoide cylindrische Flächen. In diesen besonderen Fällen conischer oder cylindrischer Axoide ergeben sich die Elementenflächen  $F, F'$  des Paares  $a, a'$  nach §. 23 resp. nach §. 15 bis §. 20.

Während sich die Glieder  $a, a'$  um ihre Polaxe mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  gegenseitig drehen und event. längs derselben mit der Geschwindigkeit  $v$  gleiten (wenn die Axen  $A, A'$  nicht in einer Ebene liegen), haben die Elementenflächen  $F, F'$  in einem Berührungspunkte, dessen Entfernung von der Polaxe  $= p$  ist, eine relativ gleitende Bewegung mit der Geschwindigkeit  $p\Omega$  resp.  $\sqrt{v^2 + p^2\Omega^2}$ . Dieselbe ist um so grösser, und entspricht ihr eine um so grössere Reibungsarbeit in Folge des gegenseitigen Drucks der Glieder  $a, a'$ , je grösser  $p$  ist. Durch diese Erwägung wird, wenn die Glieder  $a, a'$  gegen das Glied  $b$  um grössere oder gar um beliebig grosse Winkel drehbar sein sollen, die Ausführung des Elementenpaares  $a, a'$  als Zahnräderpaar, der Kette als Zahnräderkette begründet, d. h. eine Trennung der Elementenflächen  $F, F'$  in Theile, die nur in der Nähe der Polaxen sich berühren, dabei aber so angeordnet sind, dass wenigstens ein Paar solcher Flächentheile (Zahnflächen) sich stets in Berührung befindet. Sofern diese Berührung und entsprechende Stützung nur einseitig stattfindet in Folge des Spielraums der Zähne des einen in den Zahnlücken des anderen Rades, muss der Schluss des Paares  $a, a'$  und somit der Kette durch die äussere Kraft vermittelt werden, von der bei Benutzung der Kette als Getriebe die Bewegung verursacht wird.

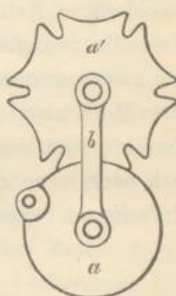
Aus dieser einfachen Zahnradkette gehen zweierlei Mechanismen hervor, jenachdem das Glied  $b$  oder eines der Räder  $a, a'$  festgestellt wird. Der erstere dieser Mechanismen kann als Zahnradmechanismus, der andere als Kurbelradmechanismus bezeichnet werden, indem dabei das Glied  $b$  zur Kurbel, d. h. zu einem Gliede wird, das sowohl mit dem festgestellten, als mit dem andererseits benachbarten Gliede durch ein Drehkörperpaar verbunden und gegen ersteres unbegrenzt drehbar ist. Während sich im ersten Falle die Räder  $a, a'$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  um ihre Axen  $A, A'$  drehen, entspricht im zweiten Falle einer Drehung der Kurbel um ihre feste Axe eine Bewegung des beweglichen Rades, die mit der durch  $\Omega, v$  und die Lage der gegenseitigen Polaxe der Glieder  $a, a'$  bestimmten Relativbewegung als jetzt absolute Bewegung identisch ist.

Von den Drehkörperpaaren  $A, A'$  kann eines, etwa  $A'$  in ein Prisma übergehen, entsprechend dem Uebergange des betreffenden Zahnrades  $a'$  in eine Zahnstange. Jenachdem  $b$ , das Zahnrad  $a$  oder die Zahnstange  $a'$  das festgestellte Glied ist, sind dann dreierlei Mechanismen zu unterscheiden. Würden beide Drehkörperpaare  $A, A'$  durch Prismenpaare ersetzt, so wäre die Relativbewegung der Glieder  $a, a'$  eine bloße Schiebung, deren Richtung mit den Schubrichtungen der Prismenpaare derselben Ebene  $E$  parallel ist. Jenachdem diese Glieder durch ein Prisma (dessen Schubrichtung auch jener Ebene  $E$  parallel sein muss) oder durch ein höheres Paar verbunden werden, wäre die Kette eine gewöhnliche (niedere) oder eine einfach höhere Prismenkette; übrigens ist dieser Specialfall der einzige, in welchem unbeschadet der Beweglichkeit der Kette die Glieder  $a, a'$  auch durch ein niederes Paar verbunden werden können. —

Auch die einfache Zahnradkette kann als Gesperre (§. 58) gebildet werden. Insbesondere wird die ebene Zahnradkette, entsprechend dem Falle, dass die Axen der Drehkörperpaare  $A, A'$  in einer gewissen Entfernung  $e$  parallel sind, dadurch zu einer Gesperre, dass das eine Rad, etwa  $a$ , nur an einem zusammenhängenden Theile des Umfangs verzahnt, im Uebrigen durch eine Umdrehungsfläche zur Axe  $A$  begrenzt, das andere Rad  $a'$  aber an mehreren Umfangstheilen von gleicher Länge mit dem verzahnten Umfangstheile von  $a$  entsprechend verzahnt und in den unter sich gleichen Zwischenräumen durch Umdrehungsflächen begrenzt wird, die der das Rad begrenzenden Umdrehungsfläche congruent sind und deren Axen von der Axe  $A'$  des Rades  $a'$  die Entfernungen  $e$  haben; es kann z. B.  $a$  als sogenanntes Einzahnrad mit nur einem Zahne, das mit Rücksicht auf seine Gestalt als Sternrad zu bezeichnende Rad  $a'$  mit entsprechenden

einzelnen Zahnlücken versehen werden: Fig. 74. So lange dann, wie es in der Figur der Fall ist, die Umdrehungsfläche des Einzahnrades  $a$  von einer der entsprechenden Begrenzungsflächen des Sternrades  $a'$  berührt wird, ist letzteres bezüglich seiner relativen Beweglichkeit gegen das Glied  $b$  gehemmt (gesperrt), die Kette somit auf ein Drehkörperpaar mit der Axe  $A$  reducirt, für dessen kinematischen Charakter die Zusammengesetztheit seiner Elementenfläche aus zwei coaxialen Umdrehungsflächen gleichgültig ist; durch den bei jeder vollen Umdrehung von  $a$  gegen  $b$  einmal erfolgenden Eingriff des Zahnes von  $a$  in eine der  $n$  Zahnlücken des Sternrades wird aber letzteres gedreht bis es nach  $\frac{1}{n}$  Umdrehung aufs Neue gehemmt wird.

Fig. 74.



Dieses Sternradgesperre ist im Sinne der in §. 58 getroffenen Unterscheidung als laufendes zu bezeichnen, unterscheidet sich aber von dem dort betrachteten laufenden Klinkengesperre dadurch, dass, während bei diesem die Kette durch Sperrung zu einem starren Körper wird und deshalb die Drehung des Klinkrades nur in einem Sinne unbegrenzt stattfinden kann, hier die Drehung des Rades  $a$  in beiderlei Sinn möglich ist, indem durch die Sperrung nur das Sternrad  $a'$  und das Glied  $b$  gegenseitig unbeweglich werden.

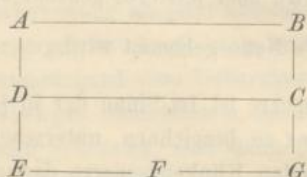
Den dreierlei Mechanismen, die aus dieser Kette durch Feststellung eines der Glieder  $b$ ,  $a$ ,  $a'$  erhalten werden können, entsprechen auch nur ebenso viel Getriebe, da die Bewegung immer nur eingeleitet werden kann durch die relative Bewegung der Glieder  $a$ ,  $b$ , so dass sie vom Gliede  $a$  ausgehen muss bei Feststellung von  $b$  oder  $a'$ , vom Gliede  $b$  bei Feststellung von  $a$ . Mit Rücksicht auf die periodisch absetzende Relativbewegung der Glieder  $b$ ,  $a'$  wirkt auch ein solches Getriebe als Schaltung ausser als Sperrung mit Rücksicht auf die zeitweilige relative Unbeweglichkeit dieser Glieder.

## b. Zusammengesetzte Mechanismen.

### §. 60. Vorbemerkungen.

Eine zusammengesetzte geschlossene kinematische Kette ist aus einfachen geschlossenen Ketten dadurch entstanden zu denken, dass gewisse

Glieder von verschiedenen dieser einfachen Ketten zu ternären, quaternären etc., d. h. zu Gliedern verbunden werden, die Elemente von mehr als zwei Paaren enthalten. Umgekehrt kann durch Zerlegung ihrer ternären, quaternären etc. Glieder in binäre, die zusammengesetzte in einfache geschlossene Ketten aufgelöst werden. Wären die letzteren ebenso wie jene alle zwangläufig, so wären die durch Feststellung eines Gliedes aus der zusammengesetzten Kette hervorgehenden Mechanismen keine elementare Mechanismen, die vielmehr gemäss ihrer Definition in §. 1 dadurch charakterisirt sind, dass ihre zwangläufige kinematische Kette entweder einfach oder, wenn zusammengesetzt, einer Zerlegung in lediglich zwangläufige einfache oder weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist.



Es sei z. B. nach vorstehendem Schema  $ABCD$  eine viergliedrige, also zwangläufige, und  $CDEFG$  eine fünfgliedrige, also nicht zwangläufige ebene Drehkörperkette. Würden diese zwei einfachen Ketten so mit einander verbunden, dass  $CD$  als ein nunmehr quaternäres Glied (durch zwei coaxiale Drehkörperpaare  $CD, DA$  und  $CD, DE$  und die zwei coaxialen Drehkörperpaare  $BC, CD$  und  $GC, CD$  mit folgenden Gliedern gepaart) ihnen gemeinsam ist, so wäre die entstandene zusammengesetzte Kette noch ebenso wenig zwangläufig wie es die eine der beiden einfachen Ketten war. Auch durch Verbindung der Glieder  $DA$  und  $DE$  zu dem ternären Gliede  $ADE$ , wodurch das vorher quaternäre Glied  $CD$  zu einem gleichfalls ternären (bei  $D$  nur noch mit einem anderen Gliede gepaarten) wird, würde die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette noch nicht erzielt werden, weil gleichzeitige elementare relative Drehungen der auf einander folgenden Glieder  $CD, DE, EF, FG, GC$  nach wie vor durch eine derselben nicht bestimmt sein würden. Wenn aber auch noch  $BC$  und  $GC$  zu dem ternären Gliede  $BCG$  verbunden werden, wobei dann  $CD$  ein binäres Glied wird, so sind dadurch gleichzeitige relative Drehungen der Glieder  $GC, CD$  und  $CD, DE$  von einander abhängig, nämlich den relativen Drehungen der Glieder  $BC, CD$  und  $CD, DA$  der zwangläufigen einfachen Kette  $ABCD$  gleich geworden, und die somit zwangläufig gewordene zusammengesetzte Kette ist von solcher Art, dass sie nicht in zwangläufige Ketten

zerlegt werden kann, dass es also elementare Mechanismen sind, die daraus durch Feststellung eines Gliedes erhalten werden können.

Würde aber die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette dadurch herbeigeführt, dass, nachdem  $DA$  und  $DE$  zu dem ternären Gliede  $ADE$  verbunden waren, ausserdem noch  $GC$  mit  $CD$  zu dem (ebenso wie  $CD$  ternären) Gliede  $GCD$  verbunden werden, so hätte man damit zwei benachbarte Glieder der ursprünglichen fünfgliedrigen Drehkörperkette  $CDEFG$  zu einem einzigen Gliede fest verbunden, d. h. diese Kette zu einer viergliedrigen, somit zwangläufigen Kette gemacht, deren Verbindung mit der auch schon für sich zwangläufigen Kette  $ABCD$  natürlich eine, wenn überhaupt bewegliche, dann jedenfalls zwangläufige zusammengesetzte Kette liefert, aus der aber, da sie umgekehrt in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden könnte, nicht elementare Mechanismen durch Feststellung je eines Gliedes hervorgehen.

Zur Bildung der zwangläufigen Kette eines elementaren Mechanismus durch Zusammensetzung einfacher geschlossener Ketten ist es also wesentlich, dass letztere nicht alle schon für sich zwangläufig sind und dass ihre Zusammensetzung nur durch Verbindung von Gliedern verschiedener der einfachen Ketten herbeigeführt wird. Die dadurch eingeführte Beschränkung lässt es möglich erscheinen, alle Arten solcher Bildungen von Ketten zusammengesetzter elementarer Mechanismen aus gegebenen Arten von einfachen Ketten in systematischer Uebersicht zu entwickeln, wogegen die Kettenbildung nicht elementarer Mechanismen aus einfachen Ketten von gegebener Art einer unendlich grossen Mannigfaltigkeit fähig und nur durch den Zweck beschränkt ist, gewissen Gliedern bestimmte Bewegungen oder solche Bewegungen zu ertheilen, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen. Indem die Auswahl der dazu dienlichen Arten zusammengesetzter Mechanismen eine dem Combinationsvermögen des Constructeurs und der Berücksichtigung praktischer Anforderungen anheimfallende Aufgabe ist, werden die nicht elementaren Mechanismen überhaupt als in das Gebiet des Maschinenbaues oder der Technologie fallend hier betrachtet und die Aufgabe der theoretischen (einen Theil der theoretischen Maschinenlehre ausmachenden) Kinematik nur dahin verstanden, dass sie durch eine möglichst systematische und vollständige Uebersicht der elementaren Mechanismen und ihrer kinematischen Eigenschaften den wissenschaftlichen Grund zur Behandlung jener weiteren Aufgabe zu legen hat. Selbst bei dieser beschränkten Auffassung der theoretischen Kinematik fehlt freilich noch viel an der vollständigen Lösung ihrer Aufgabe, und sind besonders die hier in Rede



stehenden zusammengesetzten elementaren Mechanismen einer systematischen Ordnung bisher nicht unterworfen worden.

Jene angeführte Ableitung zusammengesetzter Ketten von elementaren Mechanismen aus einfachen, wegen zu grosser Gliederzahl nicht zwangläufigen Ketten durch feste Verbindung gewisser ihrer Glieder mit solchen von anderen einfachen Ketten setzte voraus, dass alle Kettenglieder starre Körper sind. Zusammengesetzt sind aber ferner geschlossene Ketten mit Zug- oder Druckkraftorganen (§. 28), und wie auch daraus elementare Mechanismen hervorgehen können, zeigen die in §. 30 erwähnten Beispiele des Riemengetriebes (Fig. 31) und des Wassergestänges (Fig. 32).

Wenn endlich die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes durch Kettenschluss (§. 32) herbeigeführt wird, wie z. B. bei dem Parallelkurbelgetriebe durch feste Verbindung seiner Kurbeln mit denen eines anderen Parallelkurbelgetriebes, das mit jenem den Steg gemein hat, oder wie bei dem gleichschenkligen Schleifkurbelgetriebe durch Verdoppelung seiner Kurbel und Schleife (Fig. 54, §. 41), so geht daraus ein zusammengesetzter Mechanismus hervor, der bedingungsweise auch elementar ist, indem er nicht in einfache Ketten zerlegt werden kann, die für die betreffende Verwendung als Getriebe unbedingt zwangläufig geschlossen sind. Wird aber die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines einfachen Getriebes durch Elementenpaare herbeigeführt, wie z. B. bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe (Fig. 35, §. 32), so wird der betreffende elementare Mechanismus dadurch nur bedingungsweise, nämlich nur bei Ueberschreitung der Todlagen ein zusammengesetzter.

#### §. 61. Zusammengesetzte ebene Drehkörperketten.

Eine einfache geschlossene kinematische Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, die aus  $x$  Gliedern mehr besteht, als sie haben dürfte, um nach dem in §. 47 nachgewiesenen Kriterium zwangläufig zu sein, kann im Allgemeinen zwangläufig gemacht werden durch eine solche Verbindung mit anderen einfachen Ketten, dass dadurch  $x$  weitere Beziehungen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen ihrer Elementenpaare herbeigeführt werden. Bei ebenen Drehkörperketten insbesondere betreffen diese Beziehungen die Winkel der Axenebenen, d. h. die Winkel, unter denen sich irgend zwei solche Ebenen schneiden, deren jede durch zwei Axen von Drehkörperpaaren hindurch geht.

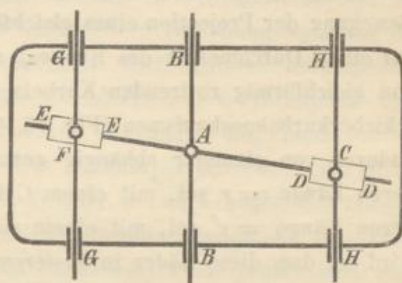
So wird z. B. nach dem Schema auf S. 206 durch die Verbindung der fünfgliedrigen ebenen Drehkörperkette  $CDEFG$  mit der viergliedrigen, also zwangläufigen  $ABCD$  der Art, dass  $GC$  mit  $BC$ ,  $CD$  mit  $CD$ ,  $DE$  mit  $DA$  zu je einem einzigen Gliede verbunden wird, die Summe der Winkel  $GCD$  und  $BCD$  constant (unter den Buchstaben die betreffenden Paaraxen verstanden, so dass z. B.  $GCD$  der Winkel zwischen den Ebenen  $GC$  und  $CD$  ist), desgleichen die Summe der Winkel  $CDE$  und  $CDA$ . Indem aber die Winkel  $BCD$  und  $CDA$  in der viergliedrigen Kette sich gegenseitig bedingen, gilt dasselbe nun auch von den Winkeln  $GCD$  und  $CDE$  der fünfgliedrigen Kette, und ist diese somit zwangläufig geworden, da sie ein Glied zu viel dazu hatte.

Aus einer solchen zusammengesetzten ebenen Drehkörperkette mit 6 Gliedern (4 binären, 2 ternären) und 7 Drehkörperpaaren kann bei theilweisem Ersatze der letzteren durch Prismenpaare u. A. ein Mechanismus gebildet werden, vermittels dessen die nach einem gewissen Gesetze stattfindende geradlinig schwingende Bewegung eines Körpers nach constantem Verhältnisse verkleinert oder vergrößert auf einen anderen Körper übertragbar ist. Zu dem Ende seien (Fig. 75, worin die bei  $H$  und  $H$  angedeuteten prismatischen Führungen einstweilen durch starre Verbindungen ersetzt zu denken sind)

$BB$  und  $DE$  zwei durch das Drehkörperpaar  $A$  verbundene gerade Stangen, von denen die erste (bei  $B$  und  $B$ ) mit einem festen Gestelle, die andere mit zwei Hülsen  $DD$  und  $EE$  (als Hohlprismen) prismatisch gepaart ist; die Hülse  $DD$  sei um den festen Bolzen  $C$ , die Hülse  $EE$  um den Bolzen  $F$  einer Stange  $GG$  drehbar, die parallel der Stange  $BB$  im Gestelle prismatisch geführt ist. Hiernach ist  $CDEFG$  eine fünfgliedrige Kette, die zwangläufig gemacht ist durch ihre Verbindung mit der viergliedrigen  $ABCD$ ;  $BCG$  ist das festgestellte,  $ADE$  das andere ternäre Glied. Jenachdem die Bewegung von der Stange  $GG$  oder  $BB$  ausgeht, wird sie verkleinert oder vergrößert auf die andere übertragen, und zwar in dem constanten Verhältnisse  $CA:CF$ .

Wenn die Hülse  $DD$  durch das Drehkörperpaar  $C$  nicht mit dem festen Gestelle, sondern, wie Fig. 75 darstellt, mit einer Stange  $HH$  gepaart wird, die parallel den Stangen  $BB$  und  $GG$  prismatisch im Gestelle

Fig. 75.



geführt ist, so würde die nun siebengliedrige und 8 Elementenpaare enthaltende zusammengesetzte Kette nicht mehr zwangläufig sein, falls nach wie vor die Bewegung nur von einer der Stangen  $BB$ ,  $GG$ ,  $HH$  ausginge, sofern nicht zwei derselben durch eine weitere Kette mit einander verbunden werden, um ihre gleichzeitigen Schiebungen von einander abhängig zu machen. Ist das aber der Fall oder geht die Bewegung von zwei der drei Stangen zugleich aus, z. B. von  $GG$  und  $HH$ , indem sie nach gewissen Gesetzen hin und her bewegt werden, so setzt sich aus ihren gleichzeitigen Schiebungen  $g$ ,  $h$  die Schiebung  $b$  der dritten Stange  $BB$  nach einem bestimmten Verhältnisse zusammen:

$$b = \frac{fg + ch}{f + c},$$

wenn das constante Verhältniss der veränderlichen Axenentfernungen:

$$AC : AF = f : c$$

gesetzt wird. Der Mechanismus ist immer noch elementar und als Interferenzmechanismus zu bezeichnen.

Sollte er z. B. benutzt werden, um das Resultat der Interferenz von zwei parallelen sogenannten einfach harmonischen geradlinigen Bewegungen darzustellen (d. h. von Bewegungen, die demselben Gesetze folgen wie die Bewegung der Projection eines gleichförmig im Kreise umlaufenden Punktes auf einen Durchmesser des Kreises), so können die Stangen  $GG$  und  $HH$  von gleichförmig rotirenden Kurbeln aus vermittels rechtwinkliger Kreuzschieberkurbelmechanismen (Fig. 56, §. 42) bewegt und diese Bewegungen dadurch von einander abhängig gemacht werden, dass die erste Kurbel, deren Länge =  $r$  sei, mit einem Cyllinderrade von  $z$  Zähnen, die andere, deren Länge =  $r'$  sei, mit einem solchen von  $z'$  Zähnen fest verbunden wird so, dass diese Räder in äusserem Eingriffe sind der Art im Allgemeinen, dass, wenn die erste Kurbel sich in einer ihrer zwei Mittelstellungen befindet (gegen die Schubrichtung der betreffenden Stange im einen oder anderen Sinne rechtwinklig gerichtet ist), die zweite um einen gewissen Winkel  $\delta$  über ihre entgegengesetzt gerichtete Mittelstellung hinaus ist. Dem Drehungswinkel  $\alpha$  der ersten Kurbel, der von jener Mittelstellung aus gerechnet werde, entspricht dann der Drehungswinkel  $\frac{z}{z'}\alpha$  der zweiten, und ist im Falle  $f = c$ , d. h. bei gleichen Entfernungen der äusseren Stangen  $GG$  und  $HH$  von der mittleren  $BB$ , der entsprechende Weg dieser letzteren von derjenigen Lage aus gerechnet, die sie hätte, wenn beide Kurbeln sich zugleich in ihren Mittelstellungen befänden:

$$b = \frac{1}{2} \left[ r \sin \alpha + r' \sin \left( \delta + \frac{z}{z'} \alpha \right) \right].$$

Die interferirenden Schwingungen hätten gleiche Amplitude für  $r = r'$ , gleiche Schwingungsdauer für  $z = z'$ , gleiche Phase für  $\delta = 0$ . Der Mechanismus, der so dazu dient, die Stangen  $GG$  und  $HH$  in bestimmter Weise zu bewegen, ist zusammengesetzt ohne elementar zu sein, da seine Kette in drei zwangläufige Ketten (zwei Kreuzschieberketten und eine einfache Zahnradkette) zerlegbar ist.

Um endlich nicht sowohl das arithmetische Mittel, als vielmehr die Summe der beiden gegebenen Schwingungen als das Resultat ihrer Interferenz zu erhalten, müsste noch die Bewegung der Stange  $BB$  verdoppelt werden, was u. A. wieder mit Hilfe eines Mechanismus von der in Fig. 75 dargestellten Art (bei Feststellung einer der beiden äusseren Stangen und mit  $f = c$ ) geschehen könnte.

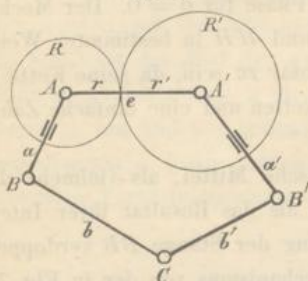
#### §. 62. Zusammengesetzte ebene Zahnradketten.

Sind  $a, b, c$  drei auf einander folgende Glieder einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette, die aus mehr als vier Gliedern besteht und somit nicht zwangläufig ist, so kann eine weitere Beziehung zwischen den Winkeln der Axenebenen dieser Kette u. A. auch dadurch herbeigeführt werden, dass  $a$  mit einem gezahnten Cylinderrade fest verbunden wird, das mit dem Drehkörperpaare  $a, b$  coaxial ist, und  $c$  mit einem solchen, das mit jenem in Eingriff und mit dem Drehkörperpaare  $b, c$  coaxial ist. Gleichzeitige relative Drehungen der Glieder  $a$  und  $c$  gegen das Glied  $b$  haben dann immer dasselbe Verhältniss zu einander, indem sie den Theilkreisradien der mit ihnen verbundenen Räder umgekehrt proportional sind. Die ursprüngliche Drehkörperkette findet sich auf solche Weise mit der einfachen Zahnradkette  $a, b, c$  zu einer elementar zusammengesetzten Kette mit den ternären Gliedern  $a$  und  $c$  verbunden, und wenn sie aus  $x + 4$  Gliedern besteht, kann sie dadurch zwangläufig gemacht werden, dass  $x$  mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder auf solche Weise mit einfachen Zahnradketten verbunden werden. Durch Feststellung eines Gliedes sind daraus verschiedene elementar zusammengesetzte ebene Zahnradmechanismen zu erhalten.

Von grösserem Interesse ist der einfachste hierher gehörige Fall einer fünfgliedrigen elementar zusammengesetzten ebenen Zahnradkette  $abb'a'e$ , schematisch dargestellt durch Fig. 76, worin die Glieder

durch gerade Linien, die sie verbindenden Drehkörperpaare  $A, B, C, B', A'$  durch kleine Kreise, die mit den Gliedern  $a$  und  $a'$  fest verbundenen Zahnräder  $R$  und  $R'$  durch ihre Theilkreise, deren Radien  $= r$  und  $r'$  seien, angedeutet sind; die Einschliessung der geraden Linien  $a$  und  $a'$  zwischen kurzen Parallel-  
linien innerhalb der Theilkreise soll die feste Verbindung der betreffenden Glieder und Zahnräder andeuten. Mehrere der aus dieser Kette unter speciellen Voraussetzungen hervorgehenden Mechanismen haben praktische Anwendung gefunden oder sind dazu vorgeschlagen worden, wenigstens

Fig. 76.



als mehr oder weniger zufällig und unabhängig von einander, unbewusst ihres principiellen Zusammenhanges concipirte Mechanismen. Dergleichen besondere Fälle können namentlich in der Gleichheit gewisser Dimensionen oder darin bestehen, dass einzelne Gliedlängen  $=$  Null (benachbarte Drehkörperpaare coaxial) oder unendlich (Drehkörperpaare durch Prismenpaare ersetzt) sind.

1) Ist  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $r = r'$  und sind die Räder in Eingriff gebracht, während die Kette (verstanden als Durchschnittsfigur mit einer zu den Axen ihrer Drehkörperpaare senkrechten Ebene) in Bezug auf die Gerade symmetrisch ist, von der die Strecke  $AA' = e$  in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig geschnitten wird, so bleibt sie beständig in dieser Weise symmetrisch, wird also bei Feststellung des Gliedes  $e$  der Punkt  $C$  in der Symmetrieaxe geführt: Cartwright'sche Geradföhrung.

2) Verschwinden kann offenbar nur eine der Gliedlängen  $a, a'$ ; denn mit  $e = 0$  würden auch die Räder  $R, R'$  verschwinden und ginge die Kette in eine einfache viergliedrige Drehkörperkette über, während mit  $b = 0$  oder  $b' = 0$  die Kette gar unbeweglich, nämlich zu einer viergliedrigen Drehkörperkette würde, die durch ihre Verbindung mit der Räderkette einem weiteren, also übermässigen Zwange unterläge. Die Voraussetzung  $a = 0$  aber (principiell nicht verschieden von dem Falle  $a' = 0$ , da  $a$  und  $a'$  gleichwerthige Glieder der Kette sind) liefert eine zwangläufig bewegliche Kette, da mit dem Wegfalle des Gliedes  $a$ , mit dem das Rad  $R$  fest verbunden war, auch jeder Zwang der Drehkörperkette durch das Räderpaar beseitigt ist; bei Feststellung des Gliedes  $AC = b$  geht daraus ein Mechanismus hervor, der, falls  $e$  die kleinste der vier Gliedlängen  $b, b', a', e$  und die Summe aus ihr und der grössten Gliedlänge kleiner als die

Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, von Watt in seinem sogenannten Planetenräderwerke benutzt wurde. Nach §. 36 verhält er sich als Schwingkurbel mit  $b'$  als Schwinge (Arm eines um  $C$  schwingenden Balanciers) und mit  $e$  als Kurbel, zusammenhängend mit jener durch die Koppel  $a'$ . Benutzt wird aber bei diesem Watt'schen Mechanismus nicht die Drehung der Kurbel  $e$  (in Bezug auf welche in der That die Räder  $R, R'$  eine unnütze Beigabe wären), sondern die des Rades  $R$  in ihrer Abhängigkeit von den Schwingungen des Gliedes  $b'$ . So oft letzteres eine Hin- und Herschwingung macht und somit die Kette  $ACB'A'$  in die Anfangslage zurückkehrt, macht die Kurbel eine Umdrehung und im entgegengesetzten Sinne das Rad  $R'$  eine relative Umdrehung gegen die Kurbel; im Sinne der absoluten Kurbeldrehung macht dann also das mit  $R'$  in äusserem Eingriffe befindliche Rad  $R$  relativ gegen die Kurbel  $\frac{r'}{r}$  Umdrehungen, absolut oder in Bezug auf das festgestellte Glied folglich

$$\frac{r'}{r} + 1 = \frac{e}{r} \text{ Umdrehungen,}$$

insbesondere zwei Umdrehungen im Falle  $r = r'$ .

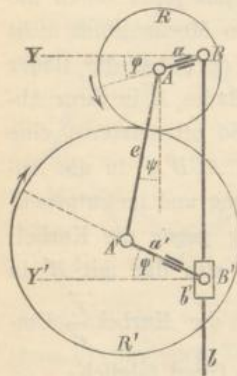
3) Mannigfaltig sind die Specialfälle, die aus der vorliegenden Kette dadurch erhalten werden können, dass eins ihrer fünf Drehkörperpaare durch ein Prismenpaar ersetzt wird; in welcher Hinsicht (Fig. 76) vor Allem die drei Fälle zu unterscheiden sind, dass solcher Uebergang in ein Prismenpaar (verbunden mit unendlich grosser Länge der zwei dadurch gepaarten Glieder) entweder das Paar  $C$  oder eins der Paare  $B, B'$  oder eins der Paare  $A, A'$  betrifft.

Zunächst werde das Drehkörperpaar  $C$  durch ein Prismenpaar ersetzt angenommen. Ist dessen Schubrichtung parallel der Axenebene  $BB'$  (entsprechend dem Falle, dass die Axe  $C$  nach einer zu dieser Ebene senkrechten Richtung ins Unendliche rückte), so geht daraus bei Feststellung eines der beiden benachbarten Glieder ein Mechanismus hervor, der 1858 von Reuleaux unter dem Namen des Zahnexcentriks als ein neuer Bewegungsmechanismus bekannt gemacht wurde.\* Fig. 77 stellt ihn schematisch dar ohne nach obigen Bemerkungen zu Fig. 76 einer näheren Erklärung zu bedürfen;  $b$  ist darin als festgestelltes Glied vorausgesetzt,

\* Seine kinematischen Eigenschaften wurden vom Verf. demnächst eingehender entwickelt im Jahrgange 1858, S. 236 u. ff. der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

prismatisch gepaart mit dem Schieber  $b'$ . Sofern das mit dem Rade  $R$  fest verbundene Glied um die Axe  $B$  ringsum drehbar ist (wozu nöthig, dass  $a < e + a'$ ), kann der Mechanismus betrachtet werden als eine Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel unter Herstellung der durch solche Gliederung gestörten Zwangläufigkeit durch die Verbindung der Kette mit der Zahnradkette  $R, e, R'$ .

Fig. 77.



Um die Beziehung zwischen der Bewegung des Schiebers  $b'$  und der Drehung der Kurbel  $a$  auszudrücken, seien

$\varphi$  und  $\varphi'$  gleichzeitige Drehungswinkel der Glieder  $a, a'$  um die Axen  $B, B'$ , gerechnet von den zu  $BB'$  senkrechten Richtungen  $BY$  und  $B'Y'$  aus im Sinne der Pfeile,  $\psi$  der von den Richtungen  $AA'$  und  $BB'$  gebildete und positiv oder negativ gesetzte Winkel, jenachdem er von der durch  $A$  nach der Richtung  $BB'$  gezogenen Geraden im Sinne  $BY$  (wie in Fig. 77) oder auf der anderen Seite gelegen ist.

Dann ist:

$$BB' = x = e \cos \psi + a \sin \varphi + a' \sin \varphi' \dots \dots \dots (1),$$

worin, um  $x$  als Function von  $\varphi$  allein zu erhalten, noch  $\varphi'$  und  $\psi$  durch  $\varphi$  auszudrücken sind. Zu dem Ende hat man zuvörderst:

$$\sin \psi = \frac{a' \cos \varphi' - a \cos \varphi}{e} \dots \dots \dots (2).$$

Ist ferner in der Anfangslage ( $\varphi = 0$ ):  $\varphi' = \alpha$  und  $\psi = \beta$ , welche Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  nach Gl. (2) in der Beziehung stehen:

$$\sin \beta = \frac{a' \cos \alpha - a}{e},$$

so entsprechen dem Drehungswinkel  $\varphi$  des Gliedes  $a$  um  $B$  die folgenden Aenderungen der Winkel  $A'AB$  und  $AA'B'$ :

$$\Delta(A'AB) = \varphi + \psi - \beta; \quad \Delta(AA'B') = \varphi' - \alpha - \psi + \beta$$

und da wegen des Eingriffes der Räder auch

$$r \cdot \Delta(A'AB) = r' \cdot \Delta(AA'B')$$

ist, so folgt:

$$(r + r')(\psi - \beta) = r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi$$

$$\psi = \beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e} \dots \dots \dots (3).$$

Durch die Gleichungen (2) und (3) sind  $\varphi'$  und  $\psi$  als Functionen von  $\varphi$  bestimmt, freilich in solcher Weise, dass die durch Elimination von  $\psi$  sich ergebende Gleichung für  $\varphi'$ :

$$\sin\left(\beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e}\right) = \frac{a' \cos \varphi' - a \cos \varphi}{e}$$

eine allgemeine Auflösung nicht gestattet. Man erhält indessen eine Vorstellung von der Bewegungsart des Schiebers, indem man sich in einer Ebene die drei wellenförmigen Linien verzeichnet denkt, deren gemeinsame Abscissen =  $\varphi$  und deren Ordinaten den drei Gliedern des Ausdruckes (1) von  $x$  gleich sind; die durch Interferenz dieser drei Wellensysteme entstehende Linie bildet Wellen von periodisch wechselnder Gestalt und Lage gegen die Abscissenaxe, indem, falls  $x'$  ein Maximum,  $x''$  das vorhergehende oder folgende Minimum von  $x$  bedeutet, sowohl die Amplitude =  $\frac{x' - x''}{2}$ , als die Entfernung der Hubmitte vom Punkte  $B = \frac{x' + x''}{2}$  für die auf einander folgenden Schwingungen des Punktes  $B'$  einem periodischen Wechsel unterliegt. Eine Periode, nach der dieselbe Gruppe von Schwingungen wiederkehrt, ist dann vollendet, wenn die Kette in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, wenn also

$$\varphi = n \cdot 2\pi, \quad \varphi' = \alpha + n' \cdot 2\pi, \quad \psi = \beta$$

geworden ist, unter  $n$  und  $n'$  die kleinsten ganzen Zahlen verstanden, die der fraglichen Bedingung Genüge leisten können. Die Substitution dieser Werthe von  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $\psi$  in Gl. (3) giebt aber:

$$0 = r'n' - rn, \quad \text{also} \quad \frac{n}{n'} = \frac{r'}{r} = \frac{z'}{z},$$

unter  $z$  und  $z'$  die Zähnezahlen der Räder  $R$  und  $R'$  verstanden. Wäre z. B.  $z = 18$ ,  $z' = 26$ , so würde die Periode  $n = 13$  Umdrehungen von  $R$  und  $n' = 9$  Umdrehungen von  $R'$  umfassen.

Näherungsweise liesse sich  $x$  durch  $\varphi$  ausdrücken, wenn  $a$  und  $a'$  sehr klein im Vergleich mit  $e$  wären. Es wäre dann  $\psi$  ein stets sehr kleiner Winkel und nach Gl. (3) bei Vernachlässigung von  $\psi$  und  $\beta$ :

$$\varphi' = \alpha + \frac{r'}{r} \varphi$$

sowie nach Gl. (1) mit  $\cos \psi = 1$ :

$$x = e + a \sin \varphi + a' \sin\left(\alpha + \frac{r'}{r} \varphi\right) \dots \dots \dots (4).$$

Von besonderen Fällen des Zahnexcentriks sind folgende hervorzuheben.



a) Mit  $a' = 0$  wäre die gegenseitige Abhängigkeit der Bewegungen des Schiebers  $b'$  und der Kurbel  $a$  dieselbe wie bei der einfachen Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), so dass in dieser Hinsicht die Zahnradkette  $R, e, R'$  eine unnütze Beigabe wäre und deshalb die Annahme  $a' = 0$  weiter kein Interesse hat, als dass sie zeigt, wie die gewöhnliche Schubkurbel als Specialfall des allgemeineren Zahnexcentriks angesehen werden kann. Ebenso würde es sich im Falle  $a = 0$  verhalten, wenn nicht  $b$  (wie mit Bezug auf Fig. 77 hier vorausgesetzt ist), sondern  $b'$  das festgestellte Glied wäre.

b) Um so bemerkenswerther ist (mit  $b$  als festgestelltem Gliede) der Specialfall  $a = 0$ . Ist dabei  $e < a'$ , so ist der Mechanismus ein besonderer Fall des oben unter 2) erwähnten Watt'schen Planetenräderwerkes. Auch ist er so zur Anwendung gekommen, dass  $R$  als Hohlräder ausgeführt wurde (Fig. 78), z. B. in dem Mechanismus zum Steuerruderbetriebe von Caird

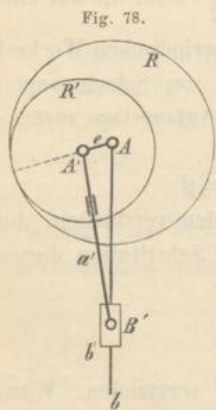


Fig. 78.

und Robertson, wobei die Steuerruderaxe coaxial mit dem Rade  $R$  verbunden ist, während der Antrieb durch Drehung des Gliedes  $e$  erfolgt. Da jeder Umdrehung dieses Gliedes, wie oben unter 2) nachgewiesen wurde,  $\frac{e}{r}$  Umdrehungen des Rades  $R$  in demselben Sinne entsprechen, so kann dadurch, dass  $r' = r - e$  nur wenig  $< r$  gemacht wird, eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame erzielt werden. Dass jene Umdrehungszahl  $= \frac{e}{r}$  des Rades  $R$  bei einer Umdrehung von  $e$  auch hier für inneren Eingriff gilt, ist leicht zu erkennen; denn einer Umdrehung von  $e$  entsprechen im umgekehrten Sinne

eine relative Umdrehung von  $R'$  gegen  $e$ , also  $\frac{r'}{r}$  relative Umdrehungen von  $R$  gegen  $e$ , somit

$$1 - \frac{r'}{r} = \frac{e}{r}$$

absolute Umdrehungen von  $R$  in einerlei Sinne mit  $e$ .

Während in diesem Falle  $e < a'$  das Glied  $e$  um  $A$  rotirt,  $a'$  um  $B'$  schwingt und die Schublänge von  $b' = 2e$  ist, hat im umgekehrten Falle  $e > a'$  das Glied  $e$  eine schwingende Bewegung um  $A$ ,  $a'$  eine rotirende um  $B'$  und ist die Schublänge von  $b' = 2a'$ . Der diesem letzteren Falle entsprechende Mechanismus ist es namentlich, der bei äusserem Eingriffe der

Räder und mit  $R$  als treibendem Gliede von Reuleaux als ein zu Pressen, Nietmaschinen, Lochmaschinen und dergl. u. A. geeignetes Getriebe empfohlen wurde. Im Vergleich mit einem gewöhnlichen Kurbelschubgetriebe gewährt es den Vortheil, dass das Rad  $R$  an einer beliebigen Stelle der treibenden Welle ohne Kröpfung derselben angebracht werden kann und dass es eine starke Koppelstange  $AA'$  unnöthig macht, wenn man die Räder  $R, R'$  mit längs ihren Axoiden abgedrehten Rändern sich berühren lässt, so dass der in solchen Fällen beträchtliche Druck ohne Vermittelung der Koppel von  $R$  gegen  $R'$  übertragen wird; da ferner die Schwingungszahl des Schiebers  $b'$  sich zur gleichzeitigen Umdrehungszahl des Rades  $R$  wie  $r:r'$  verhält, so kann zugleich diesem Verhältnisse ohne anderweitige Uebersetzung, nur durch passende Wahl der Räder, ein gewünschter Werth gegeben werden.

c) Während die Annahme  $a = a'$  für sich allein die Bewegung des Schiebers  $b'$  nicht wesentlich vereinfacht, weil ihre Periode nach wie vor mehrere ( $n$  resp.  $n'$ ) Umdrehungen der Räder  $R, R'$  um die excentrischen Axen  $B, B'$  umfasst, wird dagegen eine solche Vereinfachung herbeigeführt durch die Annahme gleich grosser (und dann natürlich in äusserem Eingriffe befindlicher) Räder:  $r = r' = \frac{e}{2}$ . Die Periode enthält dann nur eine

Umdrehung jedes Rades ( $n = n' = 1$ ), und es haben alle Schwingungen des Schiebers gleiche Amplitude  $= \frac{x' - x''}{2}$  und gleiche Entfernung  $= \frac{x' + x''}{2}$

des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte  $B$ , ebenso wie es für  $a' = 0$  ( $n = 1$ ) und für  $a = 0$  ( $n' = 1$ ) der Fall ist. Vor diesen unter a) und b) besprochenen Fällen ist aber der vorliegende dadurch ausgezeichnet, dass er durch blosse Aenderung des Winkels  $\alpha$  (dadurch zu bewirken, dass die Räder an einer anderen Stelle in Eingriff gebracht werden) eine wesentliche Aenderung der Amplitude gestattet.

Im Allgemeinen lässt sich zwar auch mit  $r = r'$  die veränderliche Entfernung  $BB' = x$  noch nicht als eine entwickelte Function von  $\varphi$  (Fig. 77) ausdrücken. Werden aber ausserdem  $a$  und  $a'$  als klein im Vergleich mit  $r$ , somit

$$\frac{a}{r} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{a'}{r} = \varepsilon'$$

als kleine Brüche angenommen, so findet man aus den Gleichungen (1) bis (3) bei Vernachlässigung kleiner Grössen von höherer als der zweiten Ordnung\*:

\* Siehe die oben citirte Abhandlung des Verfassers im Jahrgange 1858 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

$$x = 2r \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi + \frac{\varepsilon'}{2} \left[ \sin \omega + (\varepsilon' \cos \omega - \varepsilon \cos \varphi) \cos \omega \right] - \frac{1}{8} (\varepsilon' \cos \omega - \varepsilon \cos \varphi)^2 \right\} \dots \dots \dots (5)$$

mit  $\omega = \varphi + \alpha - 2\beta$ ,

und insbesondere bei vorläufiger Berücksichtigung nur kleiner Grössen erster Ordnung:

$$x = 2r \left( 1 + \frac{\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon' \sin \omega}{2} \right) \text{ mit } \omega = \varphi + \alpha.$$

Durch die Bestimmung des Maximum  $x'$  und Minimum  $x''$  dieses Ausdruckes von  $x$  ergibt sich die Amplitude der Schieberschwingungen:

$$\frac{x' - x''}{2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + 2\varepsilon\varepsilon' \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos \alpha}$$

am grössten =  $a + a'$  für  $\alpha = 0$ ,

am kleinsten =  $\pm(a - a')$  für  $\alpha = 180^\circ$ ,

am meisten veränderlich also im Falle  $a = a'$ , der deshalb als der zugleich einfachste sich zur Ausführung empfiehlt, wenn die in Rede stehende Abhängigkeit der Schwingungsweite des Schiebers vom Winkel  $\alpha$  praktisch benutzt werden soll.

d) In diesem Falle  $r = r'$ ,  $a = a' = \varepsilon r$  ergibt sich aus Gl. (5):

$$x = 2r \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) \right] + \frac{\varepsilon^2}{8} \left[ 3 \cos^2(\varphi + \alpha) + 2 \cos(\varphi + \alpha) \left( 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \varphi \right) - \cos^2 \varphi \right] \right\}$$

und daraus:

$$\frac{x' - x''}{2} = \pm 2a \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \sin^3 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (6).$$

Der mit dem Winkel  $\alpha$  hiernach sehr verschiedenen Schwingungsweite des Schiebers entsprechen auch etwas verschiedene Entfernungen

$$\frac{x' + x''}{2} = 2r \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (7)$$

des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte  $B$ . In dem Ausdrucke (6) für die Amplitude gilt das Zeichen  $+$  oder  $-$ , jenachdem  $\alpha$  kleiner oder grösser als der Werth ist, für welchen (mit der hier zu Grunde liegenden Annäherung) die Amplitude = Null wird und für den man findet:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon^2}} \left( \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{27\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{27\varepsilon^2}}} \right) (8).$$

Von dieser Eigenschaft der in Rede stehenden Specialform des Zahn-excentriks, dass bei einem gewissen Werthe des Winkels  $\alpha$  die excentrische Axe  $B'$  des Rades  $R'$  mit dem Schieber  $b'$  fast unbeweglich ist, kann eine nützliche Anwendung gemacht werden. Denkt man sich nämlich, während  $\alpha$  den durch Gl. (8) bestimmten Werth hat, den Schieber mit der Axe  $B'$  festgestellt in der durch den Ausdruck (7) bestimmten Entfernung von  $B$ , während das Glied  $\varepsilon$  beseitigt wird, so können die nun fest gelagerten Räder  $R, R'$  sich gegenseitig ihre Rotationsbewegung mittheilen, sofern nur  $\varepsilon$  hinlänglich klein ist und die Zähne hinlänglich lang, die Zahnücken hinlänglich tief gemacht werden, um eine kleine Aenderung der Entfernung  $AA'$  ohne Störung des Eingriffes zu gestatten; und wenn das treibende Rad mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirt, so wird das andere in periodisch ungleichförmige Rotation versetzt ähnlich wie durch Ellipsenräder, nämlich durch Zahnräder mit elliptischen Polbahnen, deren feste Brennpunkte  $B, B'$  und deren Mittelpunkte  $A, A'$  sind.

Ist  $m$  das Verhältniss der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades,  $n$  das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen desselben, so stehen  $m, n$  und das Verhältniss  $\varepsilon = \frac{a}{r}$  in den durch die Gleichungen (10) und (11), §. 22, dargestellten Beziehungen und erscheint es thunlich, etwa bis

$$n = 2, \text{ entsprechend } m = 3 \text{ und } \varepsilon = 0,2679$$

die Ellipsenräder durch excentrisch gelagerte kreisrunde Räder zu ersetzen, falls dieselben so in Eingriff gebracht werden, dass nach Gl. (7) und (8):

$$\alpha = 151^{\circ} 42' \text{ und } BB' = 1,0337 \cdot 2r$$

ist. Jener Winkel  $\alpha$  wird dabei freilich nur angenähert realisirt werden können, da er nicht stetig, sondern nur sprungweise geändert werden kann in um so kleineren Intervallen, je grösser die Zahnzahlen der Räder sind. —

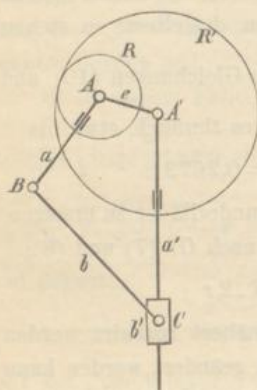
Wenn im Falle  $r = r', a = a'$  die Räder  $R, R'$  so in Eingriff gebracht werden, dass  $\alpha = 0$  ist, dass also  $\varphi$  und  $\varphi'$  (Fig. 77) gleichzeitig  $= 0$  sind, so bleibt offenbar  $AA'$  beständig parallel  $BB'$  und der Mechanismus, der deshalb mit Reuleaux das symmetrische Zahnexcentrik genannt werde, beständig symmetrisch in Bezug auf die Gerade, welche die Strecke  $AA'$  in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig schneidet. Der Punkt  $M$  des Gliedes  $b$ , in dem sich der Punkt  $B'$  in der Anfangslage ( $\varphi = \varphi' = 0$ ) befindet, ist sein Schwingungsmittelpunkt; seine veränderliche Entfernung von demselben aber:

$$\xi = 2a \sin \varphi.$$

Beschreibt man um  $A'$  mit dem Radius  $A'B' = a$  einen Kreis  $K$ , so geht derselbe durch  $M$ , weil  $BM$  parallel und  $= AA'$ , also  $A'M = AB = a$  ist, und wenn  $D'$  den zweiten Durchschnittspunkt dieses Kreises  $K$  mit der Geraden  $A'B'$  bezeichnet, so ist  $B'MD'$  ein rechter Winkel. Die Bewegung des Gliedes  $a'$  gegen  $b$  ist also einerlei mit der Bewegung der Strecke  $B'D'$  im rechten Winkel  $B'MD'$ ; der Kreis  $K$  mit dem Durchmesser  $2a$  und ein Kreis um  $M$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $2a$  sind als sogenannte Cardanische Kreise (§. 12) die relativen Polbahnen beziehungsweise der Glieder  $a'$  und  $b$ , und alle Punkte des Kreises  $K$  bewegen sich in geraden Linien, nämlich in den verschiedenen Durchmessern des Kreises um  $M$ . Diese letztere Eigenschaft des symmetrischen Zahnexcentriks kann u. A. nützliche Verwendung finden.

4) Auch so ist die hier in Rede stehende Kette, Fig. 76, zur Ausführung gekommen, dass eins der Drehkörperpaare  $B, B'$  durch ein Prismenpaar ersetzt wurde; Fig. 79 stellt den Fall dar beispielsweise mit  $B'$  als Prismenpaar und innerem Eingriffe der Räder  $R, R'$ . Ist dabei  $a'$  das festgestellte Glied

Fig. 79.



und  $e < a + b$ , so verhält sich auch dieser Mechanismus als eine Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel ( $e$  Kurbel,  $b'$  Schieber) ähnlich wie das Zahnexcentrik, Fig. 77, im Falle  $a < e + a'$ ; wenn die Bewegung von der Kurbel ausgeht, so bewegt sich der Schieber nach einem ähnlich wie dort im Allgemeinen verwickelten Gesetze.

Bemerkenswerth ist der Specialfall, dass bei innerem Eingriffe der Räder (Fig. 79)  $a = r = \frac{1}{2}r'$

gemacht wird. Der Punkt  $B$  als ein Punkt in der Peripherie des kleineren  $R$  von zwei Cardanischen Kreisen  $R, R'$  bewegt sich dann in einem Durchmesser des grösseren Kreises  $R'$ ; bei Feststellung des Gliedes  $a'$  (mit dem Rade  $R'$ ) kann also der Mechanismus als Geradföhrung dienen und ist er als solche mehrfach in Benutzung. Wenn freilich nur die Beziehung zwischen dieser geradlinigen Bewegung des Punktes  $B$  und der Rotation der Kurbel  $e$  benutzt werden soll, so sind die Glieder  $b$  und  $b'$  überflüssig. Beim Wegfalle derselben geht der zusammengesetzte in einen einfachen Mechanismus über: einen Kurbelradmechanismus nach der Bezeichnung in §. 59, indem die Kette dadurch auf die einfache Zahnradkette  $R, e, R'$  reducirt wird.

5) Die unter 2), 3) und 4) besprochenen Fälle können combinirt werden, wie es z. B. bei dem Flaschenzuge von Eade\* geschehen ist. Seine kinematische Kette geht aus der in Fig. 78 schematisch dargestellten dadurch hervor, dass auch noch das Drehkörperpaar  $B'$  durch ein Prismenpaar ersetzt wird, und zwar so, dass dessen Schubrichtung zu der des Prismenpaares  $b, b'$  senkrecht ist; das Glied  $b'$  ist dann ein rechtwinkliger Kreuzschieber. Sind  $z$  und  $z'$  die Zahnzahlen der Räder  $R, R'$ , so entsprechen bei Stellung auf  $b$  einer Umdrehung von  $e$ :

$$\frac{e}{r} = \frac{r - r'}{r} = \frac{z - z'}{z}$$

Umdrehungen von  $R$ . Bei der hier in Rede stehenden Ausführung hat  $R'$  nur einen Zahn weniger als  $R$ , so dass sich letzteres Rad auch nur um einen Zahn dreht bei einer vollen Umdrehung von  $e$  und somit eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame dadurch erreicht werden kann, entsprechend der Hebung einer bedeutenden Last durch eine Kraft von mässiger Grösse. Indem dabei die Kurbel  $e$  sehr klein ausfällt, ist sie nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als Excentrik gestaltet.

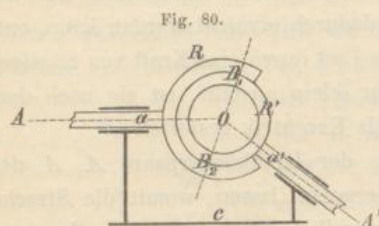
6) Endlich könnte man auch eins der Drehkörperpaare  $A, A'$  der Kette, Fig. 76, in ein Prismenpaar übergehen lassen, womit die Strecke  $AA'$  und also einer der Radien  $r, r'$  unendlich gross würde, so dass von den Rädern  $R, R'$  eins durch eine Zahnstange zu ersetzen wäre. Gleichzeitig könnte als Combination mit einem der unter 3) und 4) besprochenen Fälle auch das Paar  $C$  oder eins der Paare  $B, B'$  als Prismenpaar ausgeführt sein, indem nur nicht drei Prismenpaare in der Kette enthalten sein dürften, um sie nicht in eine ebene Prismenkette zu verwandeln. Auch kann als Combination mit dem Falle unter 2) immer dann  $a = 0$  oder  $a' = 0$  sein, wenn nicht  $A$  und  $B'$  oder  $A'$  und  $B$  zugleich Prismenpaare sind.

### §. 63. Zusammengesetzte sphärische Zahnräderketten.

Ebenso wie nach vorigem §. eine ebene, kann auch eine sphärische Drehkörperkette mit  $x + 4$  Gliedern dadurch zwangläufig gemacht werden, dass  $x$  mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder mit einfachen Zahnräderketten verbunden werden, die dann nur nicht cylindrische, sondern conische Räder enthalten. Ein elementar zusammengesetzter Mechanismus, dessen Kette auf solche Weise insbesondere aus einer sechs-

\* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1868, Tafel II.

gliedrigen sphärischen Drehkörperkette entstanden gedacht werden kann, ist z. B. das Blees'sche Universalgelenk, wobei zugleich das Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) in Anwendung gebracht, die Kette nämlich auf eine viergliedrige reducirt ist in Folge des Ersatzes von drei Drehkörperpaaren durch ein Kugelpaar. Dieser Mechanismus, welcher bezweckt, den Ungleichförmigkeitsgrad der Rotationsbewegung einer getriebenen Welle  $a'$  bei gleichförmiger Rotation der treibenden Welle  $a$  möglichst auf Null zu reduciren selbst bei grösseren spitzen Winkeln  $\alpha$ , unter denen sich die Axen  $A$  und  $A'$  von  $a$  und  $a'$  im Punkte  $O$  (Fig. 80) schneiden (während bei dem gewöhnlichen Universalgelenk dieser Ungleichförmigkeitsgrad nach §. 46 einen beträchtlich von Null verschiedenen, mit  $\alpha$  schnell wachsenden Werth hat), liegt die folgende Ueberlegung zu Grunde.



Wenn die Wellen  $a$ ,  $a'$  um ihre Axen  $A$ ,  $A'$  mit jeder Zeit gleichen Winkelgeschwindigkeiten relativ gegen den gemeinsamen Lagerkörper  $c$  (Fig. 80) als festgestelltes Glied rotirten, so würde die Durchschnittsline  $B$  einer durch  $A$  gehenden und in  $a$  festen Ebene  $E$  mit einer durch  $A'$  gehenden und in  $a'$  festen Ebene  $E'$ ,

falls sie in irgend einer Lage in der Ebene  $H$  enthalten wäre, die in der Halbierungslinie des Winkels  $AOA'$  normal zur Ebene  $AA'$  ist, beständig in dieser Ebene  $H$  bleiben, in derselben um den Punkt  $O$  rotirend. Wenn also umgekehrt  $a$  und  $a'$  durch einen Bolzen  $b$  von veränderlicher relativer Lage gegen  $a$  und  $a'$  so verbunden werden könnten, dass dessen-Axe  $B$  ( $B_1OB_2$  in Fig. 80) in der Ebene  $H$  um den Schnittpunkt  $O$  der Axen  $A$ ,  $A'$  rotirt, so würden  $a$  und  $a'$  stets gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben.

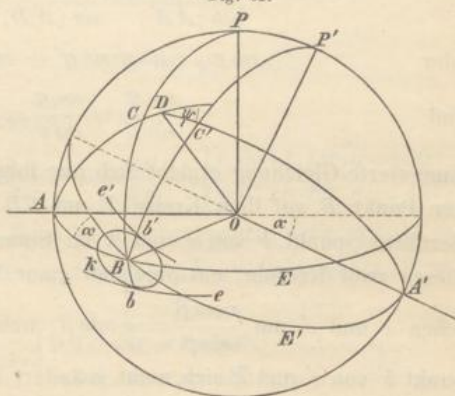
Bei der Blees'schen Ausführung dieses Gedankens sind  $E$ ,  $E'$  die Mittelebenen zweier Ringe  $R$ ,  $R'$ , mit denen die Wellen  $a$ ,  $a'$  endigen und wovon der eine  $R$  den anderen  $R'$  umgreift, indem sich beide in einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte  $O$  berühren.  $R'$  ist ein geschlossener Ring,  $R$  aber so weit aufgeschnitten, wie das ungehinderte Spiel mit Rücksicht auf den Neigungswinkel  $\alpha$  der Axen  $A$ ,  $A'$  und die Dicke der Welle  $a'$  erfordert. An zwei diametral gegenüber liegenden Stellen  $B_1$  und  $B_2$  sind die Ringe längs ihren Mittelebenen  $E$ ,  $E'$  geschlitzt auf solche Längen, dass der Bolzen  $b$ , indem seine Axe  $B$  mit der Durchschnittsline der Ebenen  $E$ ,  $E'$  zusammenfällt, stets in allen vier Schlitzen Raum zum Durchgange durch die Ringe findet. Um ihn aber zu nöthigen, diese Lage be-

ständig zu behalten, ist er bei  $B_1$  und  $B_2$  ringsum conisch verzahnt, so dass die Zahnflächen gegen  $O$  convergiren, und sind ebenso die inneren Flächen der Ringschlitzte mit entsprechenden Zähnen versehen, jedoch nur einseitig und wechselweise auf entgegengesetzten Seiten des Bolzens, so dass diese vier Ringverzahnungen durch ihre Eingriffe mit den (doppelt so breiten) Zähnen des Bolzens diesen alle in gleichem Sinne um seine Axe drehen, während sich bei der Rotation der Wellen  $a, a'$  die Ebenen  $E, E'$  längs  $OB_1$  und  $OB_2$  in entgegengesetztem Sinne gegen einander bewegen. —

Um zu untersuchen, in welchem Grade der Zweck eines möglichst constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses der Wellen  $a, a'$  durch diesen Mechanismus erreicht wird, sei um  $O$  als Mittelpunkt mit dem Radius = 1 eine Kugelfläche beschrieben, die von den Axen  $A, A'$  in den Punkten  $A, A'$  (Fig. 81), von den Mittelebenen  $E, E'$  der Ringe in den grössten Kreisen  $E, E'$ , von der Bolzenaxe im Punkte  $B$  (und seinem hier nicht gezeichneten Gegenpunkte) als Schnittpunkt der grössten Kreise  $E, E'$ , von den Theilrisskegeln (Axoiden) der Ringverzahnungen in den kleineren Kreisen  $e, e'$  und von dem Theilrisskegel des Bolzens in dem kleinen Kreise  $k$  geschnitten wird. Letzterer werde von  $e$  und  $e'$  in den Punkten  $b$  und  $b'$  berührt, und es sei der Winkel  $BOb = BOb' = \beta$ . Der Radius von  $k$  ist dann =  $\sin \beta$ , der Radius von  $e$  und  $e' = \cos \beta$ .

Es werde ausgegangen von derjenigen Lage als Anfangslage, in welcher  $E$  normal zur Axenebene  $AOA'$  ist, und es seien die Verzahnungen so in Eingriff gebracht, dass in dieser Lage zugleich  $E'$  und folglich auch die Bolzenaxe normal zur Axenebene ist;  $E$  und  $E'$ , ebenso  $e$  und  $e'$  schneiden sich dann unter dem Winkel  $\alpha =$  dem Neigungswinkel der Axen  $A, A'$ . Wird ferner in der Axenebene  $OP$  normal zu  $OA$ ,  $OP'$  normal zu  $OA'$  gezogen, so dass in der Anfangslage  $P$  der Pol von  $E$  und  $e$ ,  $P'$  der Pol von  $E'$  und  $e'$  ist, so liegen die Berührungspunkte  $b, b'$  beziehungsweise in den grössten Kreisen  $PB$  und  $P'B$ , deren Ebenen normal zu  $OA$  und  $OA'$  sind.

Fig. 81.





Wenn nun die Welle  $a$  mit den Ebenen  $E, e$  sich um den Winkel  $\varphi = BC$  dreht, so sei  $\varphi' = BC'$  der entsprechende Drehungswinkel von  $a'$  mit den Ebenen  $E', e'$ , und  $\psi$  der Winkel, unter dem sich nach diesen Drehungen die Ebenen  $E, E'$  in  $OD$  (der Bolzenaxe) schneiden, ferner  $CD = x$  und  $C'D = x'$ . Das sphärische Dreieck  $AA'D$  hat dann die folgenden Seiten nebst gegenüber liegenden Winkeln:

$$AA' = \pi - \alpha, \quad A'D = \frac{\pi}{2} + x', \quad DA = \frac{\pi}{2} + x$$

$$D = \pi - \psi, \quad A = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad A' = \frac{\pi}{2} + \varphi'.$$

Zwischen ihnen bestehen drei von einander unabhängige Relationen:

$$\cos D = -\cos A \cos A' + \sin A \sin A' \cos(AA')$$

$$\frac{\sin D}{\sin(AA')} = \frac{\sin A}{\sin(A'D)} = \frac{\sin A'}{\sin(DA)}$$

oder  $\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \alpha \dots \dots \dots (1)$

und  $\frac{\sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{\cos \varphi}{\cos x'} = \frac{\cos \varphi'}{\cos x} \dots \dots \dots (2).$

Eine vierte Gleichung ergibt sich aus folgender Erwägung. Dadurch, dass der Punkt  $B$  auf dem Kreise  $E$  um  $CD = x$  fortrückt, bewegt sich der Berührungspunkt  $b$  von  $e$  und  $k$  im Sinne  $be$  (Fig. 81) um  $x \cos \beta$  längs diesen zwei Kreisen, entsprechend einer Vergrößerung des Winkels zwischen  $e$  und  $e'$  um  $\frac{x \cos \beta}{\sin \beta} = x \cot \beta$ , wenn unterdessen der Berührungspunkt  $b'$  von  $e'$  und  $k$  sich nicht geändert hätte. In der That ist aber letzterer im Sinne  $b'e'$  um  $x' \cos \beta$  längs  $e'$  und  $k$  fortgerückt, entsprechend einer Verkleinerung des Winkels zwischen  $e$  und  $e'$  um  $x' \cot \beta$ , falls  $b$  ohne Lagenänderung geblieben wäre. Aus beiden Gründen zusammen hat sich also jener Winkel um  $(x' - x) \cot \beta$  verkleinert, und folgt daraus die Gleichung:

$$(x' - x) \cot \beta = \alpha - \psi \dots \dots \dots (3).$$

Die Elimination von  $x, x'$  und  $\psi$  zwischen den 4 Gleichungen (1)–(3) liefert eine Beziehung zwischen  $\varphi', \varphi, \alpha$  und  $\beta$ , somit dann auch das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Wellen  $a', a$ :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi}$$

als eine Function von  $\varphi$  mit den Constanten  $\alpha, \beta$ . Einer Viertelumdrehung von  $a$  entspricht auch eine solche von  $a'$  der Art, dass sich  $\frac{\omega'}{\omega}$  bei der

1<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup>, 5<sup>ten</sup> . . . Viertelumdrehung auf gleiche und zwar entgegengesetzte Weise ändert wie bei der 2<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, 6<sup>ten</sup> . . . Viertelumdrehung. Je kleiner dabei  $\beta$  ist, je grösser also  $\cotg \beta$ , desto weniger sind  $x'$  und  $x$  nach Gl. (3), also  $\varphi'$  und  $\varphi$  nach Gl. (2), somit auch  $\omega'$  und  $\omega$  verschieden.

Ist  $\beta$  ein kleiner Bruch, so kann aus den Gleichungen (1)–(3) näherungsweise gefolgert werden:

$$\varphi' = \varphi - \eta; \quad \eta = \frac{(\alpha - 2\vartheta) \cos \varphi}{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \beta + \sin \varphi \operatorname{tg} \vartheta}; \quad \sin \vartheta = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi. \quad (4)$$

und findet man daraus beispielsweise für  $\operatorname{tg} \beta = 0,163$  (Werth von  $\operatorname{tg} \beta$  bei einem ausgeführten Modell) und

$$\alpha = 30^\circ \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\max \frac{d\eta}{d\varphi} = 0,0085 \quad 0,0198 \text{ bei nahe } \varphi = 33^\circ,$$

$$\min \frac{d\eta}{d\varphi} = -0,0229 \quad -0,0530 \text{ bei } \varphi = 90^\circ,$$

also den Ungleichförmigkeitsgrad (§. 46):

$$\delta = \max \frac{\omega'}{\omega} - \min \frac{\omega'}{\omega} = \max \frac{d\eta}{d\varphi} - \min \frac{d\eta}{d\varphi} = \begin{cases} 0,0314 \text{ für } \alpha = 30^\circ \\ 0,0728 \text{ für } \alpha = 45^\circ. \end{cases}$$

Für andere kleine Werthe von  $\beta$  ist er näherungsweise proportional  $\operatorname{tg} \beta$ . Der Ungleichförmigkeitsgrad  $\Delta$  des gewöhnlichen Universalgelenkes ist nach §. 46, Gl. (5) erheblich grösser:

$$\Delta = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \begin{cases} 9,2 \delta \text{ für } \alpha = 30^\circ \\ 9,7 \delta \text{ für } \alpha = 45^\circ. \end{cases}$$

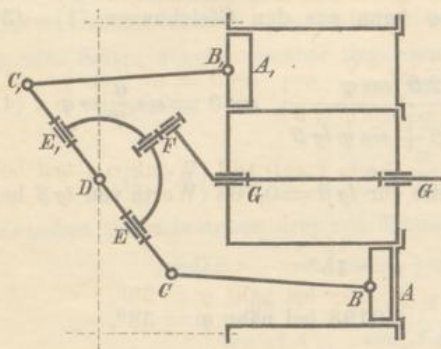
#### §. 64. Nicht elementare Mechanismen.

Wenn auch die Untersuchung der kinematischen Eigenschaften von nicht elementaren Mechanismen, wie schon in §. 60 bemerkt wurde, im Allgemeinen hier nicht beabsichtigt ist, so mögen doch an dieser Stelle schliesslich einige solche Mechanismen als Beispiele besprochen werden, um ihre Unterschiede von elementar zusammengesetzten deutlicher hervortreten zu lassen.

1) Um durch den in einem Dampfzylinder hin und her gehend bewegten Kolben  $AB$ , Fig. 82, eine Welle  $FG$  in stetige Rotation zu versetzen, deren Axe  $G$  mit der Cylinderaxe parallel ist, kann ein Hebel  $CD$ , dessen fest (in fester Verbindung mit dem Cylinder) gelagerte Drehungs-

axe  $D$  die Wellenaxe  $G$  rechtwinklig schneidet, einerseits durch die Koppel  $BC$ , deren Axen  $B, C$  parallel der Axe  $D$  sind, so mit dem Kolben, andererseits durch den Bügel  $EF$ ,

Fig. 82.



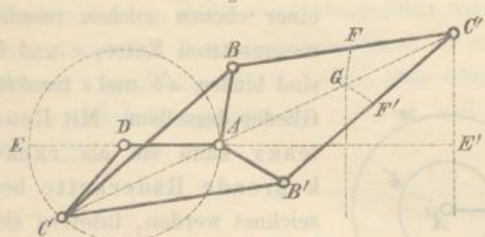
dessen Axen  $E, F$ , indem dabei  $D$  und  $E, E$  und  $F$  rechte Winkel bilden, durch den Schnittpunkt der Axen  $D, G$  gehen, so mit der Welle verbunden werden, dass dadurch ein zusammengesetzter Mechanismus  $ABCDEFGG$  entsteht, der indessen nicht elementar ist, da seine Kette in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden kann: in die Ketten der ebenen (allgemeinen) Schubschwinge  $ABCD$  und der sphärischen Schwingkurbel  $DEFG$ . Wenn die Schwinge  $CD$  über  $D$  hinaus verlängert und an der anderen Seite mittels einer Koppel  $C, B$ , mit dem Kolben  $B, A$ , eines zweiten Dampfzylinders verbunden wird, so kann ohne allzu ungleichförmige Rotation der Welle jeder dieser Dampfzylinder einfach wirkend, an der Koppelseite offen und der Mechanismus dann sehr compendiös gemacht werden durch unmittelbare Verbindung der Koppel mit dem Kolben ohne Pleuellagerbohle. — Wenn auch dieselbe hier besprochene Bewegungsumwandlung durch einen elementaren, insbesondere sogar durch einen einfachen, z. B. durch den sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus nach Fig. 61, §. 48, erreichbar ist, so kann doch von praktischen Gesichtspunkten aus jener nicht elementare Mechanismus den Vorzug verdienen.

2) Um einen Punkt  $C'$  in gerader Linie (resp. eine Gerade  $C'$  nach einer zu ihr normalen Richtung in einer Ebene) zu führen durch Vermittelung eines ebenen Drehkörpermechanismus, dessen Paaraxen alle im Endlichen liegen, kann man den geometrischen Satz benutzen, dass, wenn man durch einen Punkt  $A$  in der Peripherie eines Kreises alle möglichen Secanten desselben zieht und, unter  $C$  ihre zweiten Schnittpunkte mit dem Kreise verstanden, die Punkte  $C'$  in ihnen so wählt, dass die Producte  $AC \cdot AC'$  gleich gross sind, alsdann der Ort der Punkte  $C'$  eine Gerade  $C'E'$  und zwar normal zu dem durch  $A$  gehenden Durchmesser  $AE$  des Kreises ist; aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke  $ACE$  und  $AE'C'$  (Fig. 83) folgt nämlich:

$$AC:AE = AE':AC', \text{ also } AC \cdot AC' = AE \cdot AE'.$$

Diese Bemerkung liegt der Peaucellier'schen Geradführung, Fig. 83, zu Grunde. Dieselbe besteht aus drei viergliedrigen, also zwangläufigen

Fig. 83.



ebenen Drehkörperketten  $ABCD$ ,  $AB'CD$ ,  $BCB'C'$ , von denen die erste mit der zweiten die Glieder  $CD$  und  $DA$ , die erste mit der dritten das Glied  $BC$ , die zweite mit der dritten das Glied  $CB'$  gemein hat, und deren Gliedlängen so gewählt sind, dass

$$CD = DA, AB = AB', BC = CB' = B'C' = C'B$$

ist, während das Glied  $AD$  in solcher Lage festgestellt ist, dass seine Axenebene  $DA$  normal zu der Ebene  $C'E'$  ist, in der die Axe  $C'$  geführt werden soll. Dass unter diesen Umständen die Punkte  $A$ ,  $C$ ,  $C'$  beständig in gerader Linie liegen, und dass  $C$  in dem durch  $A$  gehenden Kreise zum Mittelpunkte  $D$  geführt wird, ist ohne Weiteres einleuchtend; dass aber auch das Product  $AC \cdot AC'$  constant ist, folgt daraus, dass es gleich dem Producte der Abschnitte jeder anderen durch  $A$  gehenden Sehne des aus  $B$  als Mittelpunkt mit  $BC = BC'$  als Radius beschriebenen Kreises, insbesondere also

$$= (CB + BA)(CB - BA)$$

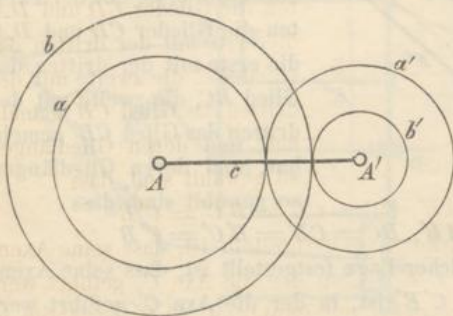
= dem Producte der Abschnitte des durch  $A$  gehenden Durchmessers jenes Kreises ist. Bei der durch Fig. 83 angedeuteten Anordnung erscheint der Mechanismus als ein um die Axe  $A$  schwingender, aus 6 paarweise gleichen Stäben gebildeter Balancier von veränderlicher Form, dessen Endpunkt  $C'$  dadurch in einer Geraden sich zu bewegen genöthigt ist, dass der andere Endpunkt  $C$  in einem durch  $A$  gehenden Kreise geführt wird. Durch die punktirten Linien  $FG$  und  $F'G$  ( $BF = B'F'$ ,  $FG = F'G$ ) ist angedeutet, wie es nur der Hinzufügung von je zwei weiteren gleich langen Gliedern bedarf, die bei  $G$  unter sich, bei  $F$  und  $F'$  mit den Gliedern  $BC'$  und  $B'C'$  durch Drehkörperpaare verbunden sind, um ausser  $C'$  noch andere Punkte  $G$  in geraden Linien zu führen, die mit der Bahn des Punktes  $C'$  parallel sind, entsprechend aber solchen darin durchlaufenen Strecken (Hublängen), die sich zu der des Punktes  $C'$  verhalten

$$= AG : AC' = BF : BC'.$$

3) Von nicht elementaren Zahnradmechanismen sind solche bemerkenswerth, deren viergliedrige Ketten aus zwei einfachen Zahnradketten  $a, a', c$  und  $b, b', c$  so zusammengesetzt sind, dass der Steg  $c$  ihnen gemeinsam

ist, die Räder  $a, b$  zusammenfallende Axen  $A$ , die Räder  $a', b'$  dagegen die gemeinsame Axe  $A'$  haben, indem sie zu einem Gliede fest verbunden sind:

Fig. 84.



siehe Fig. 84 für den Fall einer ebenen solchen zusammengesetzten Kette;  $a$  und  $b$  sind binäre,  $a'b'$  und  $c$  ternäre Glieder derselben. Mit Reuleaux kann sie als rückkehrende Räderkette bezeichnet werden, insofern sie bei der Reihenfolge

$$a, a'b', c, b$$

ihrer Glieder eine Rückkehr des letzten Gliedes  $b$  zur Axe  $A$  des ersten Gliedes  $a$  vermittelt.

Der durch die Stellung auf  $c$  hervorgehende Mechanismus, als rückkehrender Zahnradmechanismus zu bezeichnen (entsprechend den für die Mechanismen aus der einfachen Zahnradkette in §. 59 gewählten Namen), kann zur Vermittelung einer von der des Rades  $a$  verschiedenen Winkelbewegung des Rades  $b$  oder einer gewissen relativen Winkelbewegung von  $b$  gegen  $a$  dienen. Sind nämlich  $a, b, a', b'$  die Theilrisshalbmesser der gleich bezeichneten Räder, so hat die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_a$  des Rades  $a$  die in gleichem Sinne stattfindende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b = \frac{a}{a'} \frac{b'}{b} \omega_a \dots \dots \dots (1)$$

des Rades  $b$  zur Folge, also die relative Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b - \omega_a = \left( \frac{a}{a'} \frac{b'}{b} - 1 \right) \omega_a \dots \dots \dots (2)$$

von  $b$  gegen  $a$ , positiv im Sinne von  $\omega_a$ . Wenn insbesondere die Räder nicht nach Fig. 84 mit kreisförmigen Theilrissen, sondern als unrunde Räder ausgeführt werden, so aber, dass die Mittelwerthe von  $\omega_a$  und  $\omega_b$  einander gleich sind (wie es z. B. der Fall ist, wenn alle 4 Räder congruente elliptische Räder,  $a'$  und  $b'$  aber ungleich liegend verbunden sind), so erhält  $b$  gegen  $a$  eine zu verschiedenen Zwecken verwendbare oscillatorische relative Winkelbewegung.

Durch Feststellung des Rades  $a$  ergibt sich ein Mechanismus, der analog den in §. 59 gewählten Bezeichnungen ein rückkehrender Kurbelradmechanismus genannt werden kann. Sind dabei  $\omega_b$  und  $\omega_c$  die Winkelgeschwindigkeiten des Rades  $b$  und der Kurbel  $c$  ( $\omega_c$  absolut ver-

standen,  $\omega_b$  aber positiv oder negativ, jenachdem der betreffende Drehungssinn mit dem der Kurbel übereinstimmend oder ihm entgegengesetzt ist), so folgt die Beziehung zwischen  $\omega_b$  und  $\omega_c$  aus der Bemerkung, dass dieser Mechanismus in den vorigen übergeführt wird durch seine Drehung um die Axe  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega_c$ , wodurch die Bewegung des Gliedes  $c$  aufgehoben wird. Indem aber dann die Winkelgeschwindigkeiten von  $a$  und  $b$  beziehungsweise  $= -\omega_c$  und  $= \omega_b - \omega_c$  würden, ist nach Gl. (1):

$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'} \frac{b'}{b} (-\omega_c),$$

also 
$$\omega_b = \left(1 - \frac{a}{a'} \frac{b'}{b}\right) \omega_c \dots \dots \dots (3)$$

Diese Formeln gelten allgemein für die verschiedenen Specialfälle solcher Räderwerke, wenn nur der Radius eines Hohlrades (Rades mit innerer Verzahnung) mit entgegengesetztem Zeichen in die betreffende Formel eingesetzt wird. Bemerkenswerth ist z. B. der Fall, dass (bei kreisförmigen Theilrissen)  $a$  ein Hohlrad ist, und dass die Räder  $a', b'$  einander gleich sind, somit zu einem einzigen mit  $a$  und  $b$  zugleich in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden können:

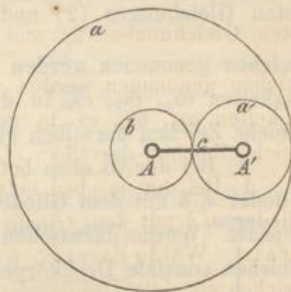
Fig. 85. Mit  $c$  als festgestelltem Gliede er giebt sich daraus u. A. ein bekanntes Gangspillgetriebe; wird dabei das Rad  $b$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  gedreht, so folgt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_a$  der innen verzahnten Kettentrommel aus Gl. (1) mit  $-a$  statt  $a$  und mit  $a' = b'$ :

$$\omega_a = -\frac{b}{a} \omega_b.$$

Es dreht sich also die Trommel mit einer im

Verhältnisse  $\frac{b}{a}$  kleineren Winkelgeschwindigkeit, und zwar, wie das Minuszeichen ausdrückt, im entgegengesetzten Sinne wie das Rad  $b$ . — Mit  $a$  als festgestelltem Gliede erhält man aus der Kette, Fig. 85, ein vielfach benutztes Göpelgetriebe, bei dem es umgekehrt darauf ankommt, die kleine Winkelgeschwindigkeit  $\omega_c$ , womit das Glied  $c$  von dem Pferde umgedreht wird, mit Uebersetzung ins Schnelle auf die Welle des Rades  $b$  zu übertragen; die betreffende Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  derselben folgt aus Gl. (3) mit  $-a$  statt  $a$  und mit  $a' = b'$ :

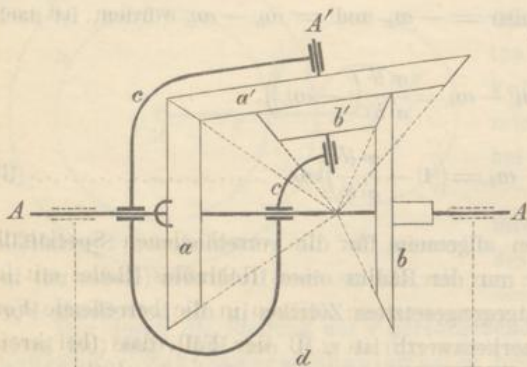
Fig. 85.



$$\omega_b = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega_c.$$

Wenn die hier besprochene rückkehrende Räderkette mit Kegelrädern statt mit Cyllinderrädern ausgeführt wird, wie Fig. 86 schematisch

Fig. 86.



darstellt (ohne das später zu besprechende, punktiert angedeutete Glied  $d$ , und indem  $b$  mittels einer Hülse lose drehbar zu denken ist um die mit  $a$  fest verbundene Welle), so ist zu berücksichtigen, dass bei überall äusserer Verzahnung und Feststellung des Gliedes  $c$  die coaxialen Räder  $a, b$  nicht, wie

in Fig. 84, in gleichem Sinne, sondern in entgegengesetztem Sinne um die Axe  $A$  rotiren, so dass in Gl. (1) und somit auch in den daraus abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) der Factor  $\frac{a}{a'} \frac{b'}{b}$  mit entgegengesetztem

Zeichen genommen werden muss, falls nach wie vor die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  in der Weise algebraisch verstanden werden, dass gleiche Zeichen derselben einerlei Drehungssinne entsprechen.

4) Bei der so eben betrachteten rückkehrenden Räderkette waren die Glieder  $a, b$  mit dem Gliede  $c$  durch coaxiale Drehkörperpaare unmittelbar gepaart. Würde dazwischen ein weiteres Glied  $d$  eingefügt, das durch dergleichen coaxiale Drehkörperpaare mit den Rädern  $a, b$  und dem Gliede  $c$ , oder auch nur mit einem Theil dieser Glieder unmittelbar gepaart ist, so wäre die nun fünfgliedrige zusammengesetzte Kette zwar nicht mehr zwangsläufig, dieser Mangel an Zwangsläufigkeit indessen unwesentlich, wenn nicht etwa  $d$  als festgestelltes Glied oder anderweitig die relative Bewegung dieses Gliedes gegen ein anderes der Kette bei dem betreffenden Mechanismus benutzt werden soll. Bei dem Mechanismus aber, der durch Feststellung des Gliedes  $d$  aus der Kette hervorgeht, kann die Zwangsläufigkeit dadurch wieder hergestellt werden, dass zwei der Glieder  $a, b, c$  gleichzeitig und unabhängig von einander gedreht werden, etwa  $a$  und  $c$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a$  und  $\omega_c$ ; der Mechanismus ist dann als Inter-

ferenzmechanismus zu bezeichnen, insofern die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  des Rades  $b$  sich als Resultat der Interferenz jener zwei unabhängigen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_a$  und  $\omega_c$  ergibt. Die betreffende Beziehung folgt aus Gl. (1) mit Rücksicht darauf, dass jetzt  $\omega_a - \omega_c$  und  $\omega_b - \omega_c$  die relativen Winkelgeschwindigkeiten von  $a$  und  $b$  gegen  $c$  sind:

$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'} \frac{b'}{b} (\omega_a - \omega_c) \dots \dots \dots (4).$$

Darin sind wieder die Radien etwaiger Hohlräder mit negativen Vorzeichen einzusetzen; auch ist wieder der aus diesen Radien gebildete Factor im Falle von Kegerrädern (Fig. 86) entgegengesetzt zu nehmen, so dass dann die Beziehung lautet:

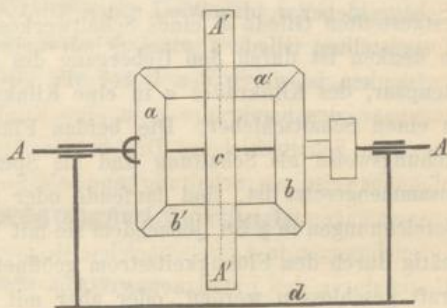
$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'} \frac{b'}{b} (\omega_c - \omega_a) \dots \dots \dots (5).$$

Dieser letztere Mechanismus ist es namentlich, der bei gewissen Spinnmaschinen Anwendung findet, und zwar so, dass  $a = b$  und  $a' = b'$ , folglich nach Gl. (5):

$$\omega_a + \omega_b = 2 \omega_c \dots \dots \dots (6)$$

ist. Die Axen  $A$  und  $A'$  sind dann rechtwinklig gegen einander gerichtet, und können  $a', b'$  zu einem einzigen zugleich mit  $a$  und  $b$  in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden, statt dessen jedoch der Symmetrie halber zwei gleiche Räder  $a', b'$  benutzt zu werden pflegen, die auf entgegengesetzten Seiten der Axe  $A$  zugleich mit  $a$  und  $b$  in Eingriff und in dem als Cylinderrad ausgeführten Gliede  $c$  um die Axe  $A'$  drehbar sind. Fig. 87 stellt diesen Mechanismus schematisch dar, unter  $AA$  eine Welle verstanden, auf der das Rad  $a$  fest sitzt, während  $b$  und  $c$  lose darauf drehbar sind; durch ein Rad auf der Hülse des Rades  $b$  kann seine Drehung weiter fortgepflanzt werden, wogegen die Räder  $a$  und  $c$  ihre Drehungen beziehungsweise durch die Welle  $AA$  und durch die Verzahnung von  $c$  empfangen.

Fig. 87.



5) Als besonders artenreiche Gruppe von nicht elementar zusammengesetzten Mechanismen sind solche zu erwähnen, bei denen Flüssigkeiten zur Gliedbildung benutzt werden, namentlich in der Weise, dass die Bewegung der betreffenden Maschine von dieser Flüssigkeit ausgeht (Kraft-



maschine) oder dass umgekehrt die Ortsänderung der Flüssigkeit durch die Maschine bezweckt wird (Pumpe). Dabei wird die zusammengesetzte Kettenbildung im Allgemeinen durch einen Hilfsmechanismus so vermittelt, dass ein Glied desselben als Kapsel (Hohlkörper), ein anderes als ein damit gepaarter Kolben gestaltet wird, während beide mit der Flüssigkeit durch kraftschlüssige Paarung eine Kette bilden, die sich mit der Kette jenes Hilfsmechanismus zu einer nicht elementaren Kette zusammensetzt. Als Hilfsmechanismus kann insbesondere z. B. ein einfacher Zahnradmechanismus oder ein viergliedriger Drehkörpermechanismus dienen, ersteren Falles so, dass der Steg als Kapsel, die Zahnräder als Kolben auf verschiedene Weise ausgebildet werden, wogegen im anderen Falle eine grössere Mannigfaltigkeit je nach der Art des Drehkörpermechanismus und der Wahl seiner als Kapsel und als Kolben auszubildenden Glieder stattfinden kann.

Wenn im Falle einer solchen Pumpe im weiteren Sinne des Wortes durch Ventile oder Schieber ein periodisches Oeffnen und Schliessen des Kapselraumes vermittelt wird, so kommt die aus dieser sogenannten Steuerung, aus der Kapsel, dem Kolben und der Flüssigkeit gebildete Kette ganz analog einem Schaltwerke (§. 58) zur Wirkung, so dass die betreffende Pumpe mit Reuleaux nicht unpassend ein Flüssigkeitsschaltwerk genannt werden kann. So entspricht z. B. bei der gewöhnlichen Wasser-Saug- und Hebepumpe mit Ventilkolben das Bodenventil der Sperrklinke  $e'$ , das Kolbenventil der Schaltklinke  $e$ , der Kolben selbst dem hin und her bewegten Schaltschieber  $d$ , das Wasser der Klinkstange  $a$ , der Pumpencylinder dem festgestellten Gliede  $d'$  eines Schaltwerkes, wie es aus Fig. 73 entstanden zu denken ist durch den Uebergang des Drehkörperpaares  $A$  in ein Prismenpaar, des Klinkrades  $a$  in eine Klinkstange und der Schaltschwinge  $d$  in einen Schaltschieber. Die beiden Flüssigkeitssperre, aus denen beziehungsweise als Schaltung und als Sperrung das Flüssigkeitsschaltwerk zusammengesetzt ist, sind laufende oder ruhende Gesperre im Sinne der Bezeichnungen in §. 58, jenachdem sie mit Ventilen gebildet sind, die selbstthätig durch den Flüssigkeitsstrom geöffnet, durch Schwerkraft oder Federkraft geschlossen werden, oder aber mit Schiebern (auch mit entlasteten Ventilen), die kettenschlüssig zwangläufig bewegt werden. Letzteres ist namentlich dann nöthig, wenn die Bewegung von der Flüssigkeit ausgeht, also bei hydraulischen Kraftmaschinen von der hier in Rede stehenden Art (Wassersäulenmaschinen, Kolbendampfmaschinen etc.), die als rückläufige Flüssigkeitsschaltwerke bezeichnet werden können. —

Die besprochenen Beispiele lassen erkennen, wie die Bildung zusammengesetzter Mechanismen wesentlich durch den Zweck bedingt ist, der

dadurch erreicht werden soll, bestehend bei den Beispielen unter 1) in der Verwandlung der gegebenen Bewegungsart eines Gliedes in eine andere Bewegungsart eines anderen Gliedes, unter 2) in der an gewisse Bedingungen geknüpften Erzielung einer bestimmten Bahn, die von einem gewissen Körperpunkte durchlaufen werden soll, unter 3) in der Verwandlung einer gegebenen Bewegungsart (dort Rotation um eine gewisse Axe) in eine eben solche (Rotation um dieselbe Axe) mit anderer Geschwindigkeit, unter 4) in der Zusammensetzung verschiedener Bewegungen zu einer resultirenden Bewegung, unter 5) in der Förderung einer Flüssigkeit oder in ihrer Benutzung als Arbeitsflüssigkeit einer Kraftmaschine. Noch mannigfaltiger, als solche Zwecke selbst, sind die möglichen Arten ihrer Erfüllung, so dass eine allgemeine und erschöpfende synthetische Entwicklung von dergleichen nicht elementaren Mechanismen kaum thunlich erscheint. Eine mit Bezug auf technische Anwendungen beschränkte, in erster Reihe vom Zwecke, sowie event. von der Form des zum Betriebe disponiblen Arbeitsvermögens ausgehende Uebersicht derselben und ihre Besprechung mit Rücksicht auf die Vollkommenheit und Einfachheit der Erreichung des Zweckes, mit Rücksicht ferner auf die Anforderungen der praktischen Ausführung und des Betriebes, auch auf die Wirthschaftlichkeit der Benutzung des disponiblen Arbeitsvermögens, ist aber theils als Aufgabe der Technologie und des Maschinenbaues zu betrachten, theils in die einzelnen folgenden Abschnitte der theoretischen Maschinenlehre zu verweisen, wenigstens so lange die synthetische Entwicklung und systematische Uebersicht selbst der elementaren Mechanismen, als Grundlage jener weiteren Aufgabe, einstweilen nur so unvollständig durchgeführt ist, wie aus dem Vorhergehenden sich ergeben hat.

## B. Allgemeine Bewegungswiderstände.

### §. 65. Einleitende Erklärungen.

Die auf die Glieder eines Getriebes wirkenden äusseren Kräfte können unterschieden werden als active oder treibende Kräfte, als passive Kräfte oder Widerstände und als indifferente Kräfte, jenachdem ihre Arbeiten bei der Bewegung des Getriebes positiv, negativ oder Null sind. Diese Charaktere sind also nicht den Kräften an sich eigenthümlich, sondern davon abhängig, wie sie an dem betreffenden Getriebe zur Wirkung kommen; so kann die Schwerkraft ebensowohl treibende Kraft (z. B. bei