Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

II. Schwungräder

würde dazu noch eine weitere Reibung wegen des axialen Druckes der ganzen Welle gegen ihre Lager hinzukommen, die bei der Schliessungsbremse wenigstens nur durch das Niederlassen der Last, also dann verursacht würde, wenn sie weniger schädlich, in Bezug auf die bremsende Wirkung sogar förderlich ist.

II. Schwungräder.

§. 92. **Allgemeine Untersuchung der Beziehung zwischen der auf einen gewissen Punkt der Schwungradwelle reducirten Masse einer Maschine und dem Ungleichförmigkeitsgrade der Bewegung dieses Punktes.**

Der in §. 87 mit A bezeichnete Punkt, auf welchen die ganze Masse einer Maschine reducirt wurde, befinde sich in der Entfernung r von der Axe der Schwungradwelle; der constante Theil $= M$ dieser reducirten Masse rührt dann hauptsächlich her von den Maschinentheilen, die um feste Axen so rotiren, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten zu derjenigen der Schwungradwelle constante Verhältnisse haben, insbesondere also vom Schwungrade selbst, wogegen der veränderliche Theil $= m$ jener reducirten Masse von solchen Maschinentheilen herzurühren pflegt, die, wie z. B. die Kolbenmasse einer Dampfmaschine, hin und hergehende oder auch, wie z. B. die Koppel eines Schubkurbelmechanismus, weniger einfache Bewegungen haben, die dann in der Regel als Drehungen mit veränderlichen Winkelgeschwindigkeiten um Axen von veränderlichen Lagen aufzufassen sind. Die Bewegung der Maschine sei gleichförmig periodisch (die Maschine befinde sich in periodischem Beharrungszustande), d. h. die Geschwindigkeit v des Reductionspunktes erfahre in gewissen gleichen auf einander folgenden Zeiten (Perioden) stets dieselben Aenderungen. Ist dann v' das Maximum, v'' das Minimum, c der Mittelwerth von v in jeder Periode, so heisst

$$\delta = \frac{v' - v''}{c}$$

der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung des Reductionspunktes resp. der Schwungradwelle oder überhaupt aller mit proportionalen Winkelgeschwindigkeiten rotirenden Maschinentheile, deren reducirte Masse M ist, und handelt es sich um die Beziehung zwischen M und δ, während die mittlere Geschwindigkeit c des Reductionspunktes eine gegebene Constante ist und m sowie die vom Anfange der Periode an gerechnete algebraische

Summe $= A$ der Arbeiten aller auf die Maschine wirkenden Kräfte gegebene Functionen des Winkels φ sind, um den sich die Schwungradwelle seit dem Beginne der betreffenden Periode gedreht hat. Diese Beziehung ist bedingt durch die Gleichung der lebendigen Kraft, also, unter m_0 und v_0 die Werthe von m und v für den Anfang der Periode, d. h. für $\varphi = 0$ verstanden, durch die Gleichung:

$$(M + m)\frac{v^2}{2} - (M + m_0)\frac{v_0^2}{2} = A \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ihrzufolge erfordert die vorausgesetzte Periodicität der Bewegung vor Allem, dass auch m und A periodische Functionen von φ und ihre Perioden derjenigen von v gleich oder aliquote Theile derselben sind, so dass jedenfalls

$$m = m_0 \text{ und } A = 0 \text{ ist für } \varphi = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn α (gewöhnlich $= 2\pi$) den Drehungswinkel der Schwungradwelle in jeder Periode bedeutet. Aus Gl. (1) folgt:

$$v^2 = \frac{2A + (M + m_0)v_0^2}{M + m} = F(M, v_0, \varphi) \ldots\ldots\ldots (3)$$

$=$ einer Function von φ, die ausser M und gegebenen Constanten die Unbekannte v_0 enthält. Um letztere zu eliminiren, kann man bemerken, dass die Winkelgeschwindigkeit der Schwungradwelle

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$$

und somit die Dauer einer Periode:

$$\frac{r\alpha}{c} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} dt = r\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{v}$$

ist, woraus mit Rücksicht auf Gl. (3) folgt:

$$\frac{\alpha}{c} = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{v} = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{F(M, v_0, \varphi)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Durch Elimination von v_0 zwischen dieser Gleichung und Gl. (3) ergebe sich:

$$v = f(M, \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$=$ einer Function von φ, die ausser M nur gegebene Constante enthält. Die relativen Maxima und Minima von v in irgend einer Periode entsprechen dann den zwischen 0 und α liegenden Wurzelwerthen der Gleichung:

$$\frac{df(M, \varphi)}{d\varphi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

und wenn insbesondere φ' der dem absoluten Maximum v' und φ'' der dem absoluten Minimem v'' entsprechende Werth von φ ist, so folgt aus

$$v' = f(M, \varphi') \text{ und } v'' = f(M, \varphi'')$$

der Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{v' - v''}{c} = \frac{f(M, \varphi') - f(M, \varphi'')}{c}$ . . (7).

Ist δ gegeben, so kann hieraus M und somit durch Subtraction der reducirten Massen der übrigen rotirenden Maschinentheile die erforderliche Grösse der reducirten Masse des Schwungrades bestimmt werden, der alsdann die Dimensionen desselben anzupassen sind. —

Die vorstehend angedeutete Rechnung würde ohne wesentliche Vereinfachung durch Vernachlässigung untergeordneter Umstände und durch nur näherungsweise zutreffende Annahmen meistens nicht durchführbar sein, wenigstens nicht in hinlänglich einfacher, praktisch brauchbarer Form. Indem es aber nie darauf ankommt, einen gewissen Ungleichförmigkeitsgrad δ genau zu realisiren, kann man sich stets darauf beschränken, in M und m nur die hauptsächlichsten bewegten Massen der Maschine und auch diese nur näherungsweise zu berücksichtigen. Auch kann von den Bewegungswiderständen hier meistens ganz abgesehen, unter A folglich die Summe der Arbeiten der treibenden Kräfte und der Nutzwiderstände verstanden werden. Handelt es sich dann um das Schwungrad einer Kraftmaschine von gegebener Arbeit A_1 der treibenden Kräfte in jeder Periode oder um das Schwungrad einer Arbeitsmaschine von gegebener Arbeit A_2 der Nutzwiderstände in jeder Periode, so ist im ersten Falle A_2, im zweiten A_1 so in Rechnung zu bringen, dass die Bedingung $A_1 = A_2$ des periodischen Beharrungszustandes erfüllt wird, indem erst nachträglich und unabhängig von der Schwungradbestimmung darauf Rücksicht zu nehmen ist, dass die Bewegungswiderstände thatsächlich im ersten Falle nur eine kleinere Arbeit A_2 der Nutzwiderstände zulassen, im zweiten dagegen eine grössere Arbeit A_1 der treibenden Kräfte erfordern.

Eine weitere Vereinfachung gestattet der Umstand, dass δ ein kleiner Bruch und dass überhaupt das Verhältniss irgend zweier Werthe von v höchstens um einen kleinen Bruch von einerlei Grössenordnung mit δ von der Einheit verschieden, während es bei dieser Rechnung immer zulässig ist, kleine Grössen zweiter Ordnung, die also mit δ^2 vergleichbar sind, zu vernachlässigen. Endlich ist m meistens so klein im Vergleich mit M, dass das Verhältniss $\frac{m}{M}$ höchstens von einerlei Grössenordnung mit δ oder gar $=$ Null zu setzen ist. In diesem letzten Falle ($m = m_0 = 0$) folgt aus Gl. (3):

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 + \frac{2A}{Mv_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

also auch mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{A}{M v_0^2} = 1 + \frac{A}{M c^2}$$

und, wenn $\frac{v_0}{c} = 1 + \gamma$ gesetzt wird, wo γ wieder ein kleiner Bruch ist:

$$\frac{v}{c} = (1+\gamma)\left(1 + \frac{A}{M c^2}\right) = 1 + \gamma + \frac{A}{M c^2}.$$

Das Maximum und Minimum (v' resp. v'') von v entspricht dem Maximum und Minimum (A' resp. A'') von A, und folgt also

$$\frac{v' - v''}{c} = \delta = \frac{A' - A''}{M c^2}$$

$$M = \frac{A' - A''}{\delta c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Kenntniss von v_0 war hierbei unnöthig, die unbequeme Gleichung (4) also entbehrlich.

Dieselbe Gleichung (9) entspricht im vorliegenden Falle $m = 0$ der Annahme:

$$v' + v'' = 2\,c.$$

Denn indem hieraus und aus $v' - v'' = \delta c$

$$\frac{v'^2 - v''^2}{2} = \delta c^2$$

folgt, ergiebt sich aus Gl. (8) unmittelbar:

$$\frac{v'^2 - v''^2}{2} = \frac{A' - A''}{M} = \delta c^2.$$

Ist m zwar nicht klein genug, um gegen M ganz ausser Acht bleiben zu dürfen, aber doch so klein, dass $\frac{m}{M}$ ein höchstens mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist, so folgt aus Gl. (3) mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\frac{2A}{M v_0^2} + 1 + \frac{m_0}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = 1 + \frac{2A}{M v_0^2} - \frac{m - m_0}{M}$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{A}{M c^2} - \frac{1}{2}\frac{m - m_0}{M}$$

$$\frac{v}{c} = 1 + \gamma + \frac{A}{M c^2} - \frac{1}{2}\frac{m - m_0}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

wenn wieder $\frac{v_0}{c} = 1 + \gamma$ gesetzt wird. Hiernach ist v am grössten und am kleinsten zugleich mit

$$A - \frac{mc^2}{2},$$

also für Wurzelwerthe der Gleichung:

$$\frac{dA}{d\varphi} - \frac{c^2}{2}\frac{dm}{d\varphi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

die insbesondere für das absolute Maximum und das absolute Minimum wieder mit φ' und φ'' bezeichnet seien. Sind dann

A' und m' die Werthe von A und m für $\varphi = \varphi'$,
A'' und m'' die Werthe von A und m für $\varphi = \varphi''$,

so folgt aus Gl. (10):

$$\frac{v' - v''}{c} = \delta = \frac{A' - A''}{Mc^2} - \frac{1}{2}\frac{m' - m''}{M}$$

$$M = \frac{1}{\delta}\left(\frac{A' - A''}{c^2} - \frac{m' - m''}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Kenntniss von v_0 war wieder unnöthig, weil γ ebenso wie m_0 aus dem Ausdrucke der Differenz irgend zweier Werthe von v verschwindet, falls letztere durch die auf der Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung beruhende Gleichung (10), δ und $\frac{m}{M}$ als kleine Grössen erster Ordnung vorausgesetzt, bestimmt werden.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die durch Gleichung (11) bestimmten Winkel φ' und φ'' nicht nur mit kleinen Fehlern zweiter Ordnung, sondern schon mit solchen erster Ordnung behaftet sein können. Denn mit den abgekürzten Bezeichnungen:

$$\frac{2A}{Mc^2} = x, \quad \frac{m}{M} = y, \quad \frac{m_0}{M} = y_0$$

und mit $v_0 = (1 + \gamma)c$ ist streng genommen:

$$\frac{v}{c} = (1+\gamma)\sqrt{\frac{1 + \frac{x}{(1+\gamma)^2} + y_0}{1 + y}}$$

und es entsprechen also das Maximum und Minimum von v der Gleichung:

$$(1+y)\frac{dx}{(1+\gamma)^2} - \left(1 + \frac{x}{(1+\gamma)^2} + y_0\right)dy = 0,$$

woraus, indem γ, x, y, y_0 kleine Grössen erster Ordnung sind, mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1+\gamma)^2(1+y_0)+x}{1+y} = 1+2\gamma+x+y_0-y.$$

Wenn nun auch aus der Gleichung für $\frac{v}{c}$ mit einem nur kleinen Fehler zweiter Ordnung gefolgert werden kann:

$$\frac{v}{c} = (1+\gamma)\left(1+\frac{x+y_0-y}{2}\right) = 1+\gamma+\frac{x+y_0-y}{2},$$

so ist doch die daraus weiter als den eminenten Werthen von v entsprechend gefolgerte Gleichung:

$$dx - dy = 0 \text{ oder } \frac{dx}{dy} = 1$$

mit obiger Gleichung für $\frac{dx}{dy}$ erst bei Vernachlässigung kleiner Grössen erster Ordnung identisch. Dieser der Gleichung (11) als Bestimmungsgleichung von φ' und φ'' anhaftende Mangel ist indessen hier unschädlich, weil die Function v von φ sich um so langsamer mit φ ändert, je mehr sie sich einem Maximum oder Minimum nähert, so dass ein bei Bestimmung von φ' oder φ'' begangener kleiner Fehler nur einen solchen Fehler von v' resp. v'' zur Folge hat, der eine kleine Grösse höherer Ordnung ist, und weil es hier nicht sowohl darauf ankommt, die dem Maximum und Minimum von v entsprechenden Configurationen der Maschine, als vielmehr nur diese eminenten Werthe von v selbst mit hinlänglicher Annäherung zu finden.

Aus demselben Grunde kann sogar Gl. (11) durch die auch der Gleichung (9) zu Grunde liegende einfachere Bestimmungsgleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0$$

für φ' und φ'' ersetzt werden, wenn $\frac{mc^2}{2}$ klein im Vergleich mit A, wenn also $\frac{mc^2}{2A}$ oder auch $\frac{mc^2}{A'-A''}$ ein mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist, was aber, da

$$\frac{Mc^2}{A'-A''} = \frac{1}{\delta} \text{ nach Gl. (9)}$$

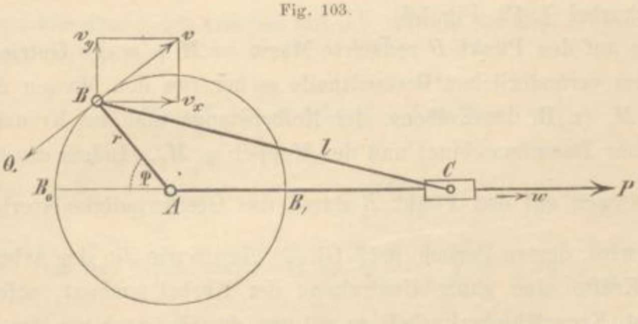
und wenigstens von derselben Grössenordnung, wie $\frac{1}{\delta}$, nach Gl. (12) ist, im Allgemeinen vorausgesetzt, dass $\frac{m}{M}$ ein selbst im Vergleich mit δ kleiner, nämlich ein Bruch von einerlei Grössenordnung mit δ^2 sei.

§. 93. Anwendung auf Schubkurbelmechanismen.

Von besonderem Interesse ist die Anwendung des im vorigen Paragraph erklärten Verfahrens auf den Schubkurbelmechanismus (§. 39 und §. 40), dessen Kurbelwelle zugleich Schwungradwelle ist, z. B. mit Rücksicht auf die (später im dritten Bande dieses Werkes weiter zu besprechende) Schwungradbestimmung für Dampfmaschinen, wobei dieser Mechanismus als Schubkurbelgetriebe, d. h. so zur Verwendung kommt, dass die Bewegung vom Schieber ausgeht, wie auch im Folgenden vorausgesetzt werden soll.

Ist r die Kurbellänge AB (Fig. 103), l die Koppellänge BC und $\lambda = \frac{r}{l}$, ferner φ der Drehungswinkel der Kurbel seit dem letzten Durchgange des Punktes B durch einen der beiden Todpunkte B_0 und B_1, x der

Fig. 103.



entsprechende Schieberweg, v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens (des Punktes B), w die Geschwindigkeit des Schiebers (des Punktes C), so ist nach §. 40 bei Vernachlässigung der Glieder mit λ^3 und höheren Potenzen von λ:

$$x = r\left(1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2} \sin^2\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$w = v \sin\varphi \,(1 \mp \lambda \cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und gelten dabei vor den Gliedern mit λ die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem die zuletzt vom Getriebe passirte Todlage eine obere oder untere war, der Winkel φ folglich von der Kurbelrichtung AB_0 oder AB_1 an gerechnet wird.

Die treibende Kraft eines solchen Schubkurbelgetriebes, angreifend im Punkte C im Sinne AC oder CA, jenachdem der Kurbelzapfen B sich vom oberen Todpunkte B_0 zum unteren B_1 oder umgekehrt bewegt, sei bezeichnet mit P; wenn sie nicht constant ist, sei sie für die Bewegung des Schiebers im einen Sinne nach demselben Gesetze veränderlich wie für den umgekehrten Bewegungssinn. Q sei der auf den Kurbelzapfen reducirte gesammte Widerstand, d. h. die in B angreifende und entgegen der Geschwindigkeit v dieses Punktes gerichtete Kraft, deren Arbeit in jedem Zeitelement der Arbeitssumme aller Widerstände gleich ist; im Folgenden wird Q stets als Constante angenommen. Die algebraische Summe der von irgend einem Augenblicke an geleisteten Arbeiten der Kräfte P und Q ist unter diesen Umständen eine periodische Function, deren Periode einer ganzen Kurbelumdrehung entspricht, weil, wenn auch die Aenderungen von P schon nach je einer halben Umdrehung der Kurbel in gleicher Weise wiederkehren, doch das Verhältniss entsprechender Wege der Angriffspunkte C und B der Kräfte P und Q nach Gl. (1) erst nach je einer ganzen Umdrehung immer denselben Werth wieder annimmt, sofern nicht $\lambda = 0$ ist, wie im Falle der Kreuzschieberkurbel (§. 42, Fig. 56).

Die auf den Punkt B reducirte Masse $= M + m$ des Getriebes rührt mit ihrem veränderlichen Bestandtheile m her von den Massen des Schiebers $= M_1$ (z. B. des Kolbens, der Kolbenstange und des Kreuzkopfes im Falle einer Dampfmaschine) und der Koppel $= M_2$. Indem die Reduction dieser Massen auf den Punkt B durch das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v}$ bedingt wird, dessen Periode nach Gl. (2) ebenso wie die der Arbeitssumme A der Kräfte eine ganze Umdrehung der Kurbel umfasst, sofern nicht $\lambda = 0$ ist (Kreuzschieberkurbel), so gilt nun dasselbe auch von der Periode der Kurbeldrehung, also der Geschwindigkeit v. Sie werde von der oberen Todlage aus gerechnet unbeschadet dessen, dass der Winkel φ in oben erklärter Weise für jede halbe Periode besonders von 0 bis 180° gerechnet wird.

Die Koppelmasse M_2 kann dadurch genügend berücksichtigt werden, dass sie ganz in die Schiebermasse M_1 und allenfalls ausserdem noch mit einem gewissen Theile in die auf den Kurbelzapfen reducirte rotirende Masse M eingerechnet wird. Sind nämlich v_x und v_y (Fig. 103) die Componenten der Geschwindigkeit v beziehungsweise im Sinne von w und senkrecht dazu, wird ferner die Koppel als prismatische Stange betrachtet und mit $\mu = \frac{1}{l} M_2$ ihre Masse pro Längeneinheit, mit z die Entfernung ihres Massenelementes μdz vom Punkte C bezeichnet, so ist ihre doppelte lebendige Kraft

$$=\int_0^l \mu\, dz \left\{\left[w+\frac{z}{l}(v_x-w)\right]^2+\frac{z^2}{l^2}v_y{}^2\right\}$$

$$=\mu\int_0^l dz\left[w^2+\frac{z^2}{l^2}v_y{}^2+2w\frac{z}{l}(v_x-w)+\frac{z^2}{l^2}(v_x-w)^2\right]$$

$$=M_2\left[w^2+\frac{1}{3}v_y{}^2+\frac{2w+v_x}{3}(v_x-w)\right].$$

Nun ist $\quad v_x=v\sin\varphi,\quad v_y=\pm v\cos\varphi,$

$w=v_x(1\mp\lambda\cos\varphi)$ nach Gl. (2), also

$$\frac{2w+v_x}{3}(v_x-w)=v_x{}^2\frac{2(1\mp\lambda\cos\varphi)+1}{3}(\pm\lambda\cos\varphi)$$

$$=\pm v_x{}^2\left(1\mp\frac{2}{3}\lambda\cos\varphi\right)\lambda\cos\varphi=\pm v_x{}^2\lambda\cos\varphi$$

bei Vernachlässigung des Gliedes mit λ^2. Mithin ist die zweifache lebendige Kraft der Koppel

$$=M_2\left[w^2+\frac{v^2}{3}(\cos^2\varphi\pm 3\lambda\sin^2\varphi\cos\varphi)\right]$$

im Mittel $=M_2\left(w^2+\dfrac{v^2}{6}\right)$,

da der Mittelwerth von $\cos^2\varphi=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos^2\varphi\, d\varphi=\dfrac{1}{2}$

und von $\pm\sin^2\varphi\cos\varphi=$ Null ist. Die Masse der Koppel ist also näherungsweise dadurch zu berücksichtigen, dass sie mit ihrem vollen Werthe in M_1 und ausserdem (worauf übrigens meistens wenig ankommen wird) mit $\frac{1}{6}$ desselben in M eingerechnet wird, nämlich beziehungsweise in den Punkten C und B mit den Geschwindigkeiten w und v concentrirt gedacht wird. Bei solcher Bedeutung von M_1 ist dann:

$$m=M_1\left(\frac{w}{v}\right)^2=M_1\sin^2\varphi(1\mp\lambda\cos\varphi)^2 \qquad (3)$$

oder bei Vernachlässigung des Gliedes mit λ^2:

$$m=M_1\sin^2\varphi(1\mp 2\lambda\cos\varphi) \qquad (4).$$

Was die vom Anfange einer Periode an gerechnete Arbeitssumme $=A$ der Kräfte P und Q betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass, da den Annahmen zufolge die Arbeiten dieser einzelnen Kräfte für beide Hälften der Periode gleich gross sind, A schon für jede Hälfte = Null sein muss, um es gemäss der Forderung des Beharrungszustandes für die ganze Periode sein zu können. Hiernach kann unter A auch die vom Anfange der betreffenden halben Periode, also vom Durchgange durch die letzte Todlage an gerechnete Arbeit der Kräfte verstanden werden. Um sie auszudrücken, werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} x = r\Phi \text{ mit } \Phi &= 1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi \\ &= 1 \mp \frac{\lambda}{4} - \cos\varphi \pm \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

nach Gl. (1). Bei constanter Schubkraft P ist dann wegen

$$A = Px - Qr\varphi$$

die Bedingung des Beharrungszustandes:

$$0 = P.2r - Qr\pi \text{ oder } P = \frac{\pi}{2}Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und mit Rücksicht hierauf sowie auf Gl. (5):

$$A = \left(\frac{Pr\Phi}{P.2r} - \frac{\varphi}{\pi}\right)Q\pi r = \left(\frac{\Phi}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\right)Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Der Fall einer veränderlichen Schubkraft ist wegen später zu besprechender Anwendungen unter der Voraussetzung von Interesse, dass, unter x_1 eine Länge $< 2r$ und unter P_1, P_2 constante Kräfte verstanden,

für $x < x_1$: $$P = P_1 - P_2,$$

also $$A = (P_1 - P_2)x - Qr\varphi = P_1 x_1 \frac{x}{x_1} - P_2 x - Qr\varphi,$$

dagegen für $x > x_1$: $$P = P_1 \frac{x_1}{x} - P_2,$$

also $$A = P_1 x_1 + \int_{x_1}^{x} P_1 \frac{x_1}{x}\,dx - P_2 x - Qr\varphi$$

$$= P_1 x_1\left(1 + ln\frac{x}{x_1}\right) - P_2 x - Qr\varphi$$

ist. Beide Ausdrücke von A mögen zusammengefasst werden in der Gleichung:

$$A = P_1 x_1\left([1 + ln]\frac{x}{x_1}\right) - P_2 x - Qr\varphi,$$

worin das Zeichen $[1 + ln]$ nur die Bedeutung hat, dass

$$[1 + ln]\frac{x}{x_1} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } = 1 + ln\frac{x}{x_1}$$

zu setzen ist, jenachdem $x < x_1$ oder $x > x_1$ ist. Mit $x_1 = \varepsilon \,.\, 2\,r$ folgt daraus die Bedingung des Beharrungszustandes:

$$0 = P_1 \varepsilon \,.\, 2\,r \left(1 + ln \frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 \,.\, 2\,r - Q\,r\,\pi$$

$$P_1 \varepsilon \left(1 + ln \frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 = \frac{\pi}{2} Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und mit Rücksicht hierauf sowie auf Gl. (5):

$$A = \left(\frac{P_1 \varepsilon \,.\, 2\,r \left([1 + ln] \frac{\Phi}{2\,\varepsilon}\right) - P_2\, r\, \Phi}{P_1 \varepsilon \,.\, 2\,r \left(1 + ln \frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 \,.\, 2\,r} - \frac{\varphi}{\pi} \right) Q \pi r$$

oder mit $P_2 = \beta P_1$:

$$A = \left(\frac{[1 + ln] \frac{\Phi}{2\,\varepsilon} - \beta \frac{\Phi}{2\,\varepsilon}}{1 + ln \frac{1}{\varepsilon} - \beta \frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\varphi}{\pi} \right) Q \pi r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Im Falle $\varepsilon = 1$ geht dieser Ausdruck, wie es sein muss, in den Ausdruck (7) über.

Mit Rücksicht auf Gl. (5) hat man schliesslich für den Cosinus des Winkels $\varphi = \varphi_1$, welcher $x = x_1 = \varepsilon \,.\, 2\,r$ entspricht, die quadratische Gleichung:

$$\frac{x_1}{r} = 2\,\varepsilon = 1 - cos\, \varphi_1 + \frac{\lambda}{2}(1 - cos^2 \varphi_1).$$

Daraus folgt:
$$cos\, \varphi_1 = \pm \frac{1}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^2 \pm \frac{4\,\varepsilon}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

worin sämmtliche obere Vorzeichen für die erste, die unteren für die zweite Hälfte der Periode gelten, indem auch das Zeichen der Wurzelgrösse demjenigen des ersten Summanden $\frac{1}{\lambda}$ entgegengesetzt genommen werden muss, weil der Absolutwerth von $cos\, \varphi_1 < 1$, dagegen $\frac{1}{\lambda} > 1$ ist. Z. B. mit $\lambda = \frac{1}{5}$ wird

$$cos\, \varphi_1 = \begin{cases} 5 - \sqrt{16 + 20\,\varepsilon} & \text{für die erste Hälfte,} \\ -5 + \sqrt{36 - 20\,\varepsilon} & \text{für die zweite Hälfte} \end{cases}$$

der Periode, wonach beide Werthe von φ_1 um mehr als 10^0 verschieden sein können, z. B. $= 95^0 41'$ und $84^0 19'$ für $\varepsilon = 0{,}5$.

Ausser den hier erwähnten zwei Fällen einer constanten und einer veränderlichen Schubkraft sind ferner einfache und mehrfache Schubkurbelmechanismen zu unterscheiden. Letztere werden durch passende Verbindung von 2 oder 3 gleichen einfachen solchen Mechanismen mit einer gemeinschaftlichen Kurbel- und Schwungradwelle erhalten und gewähren, abgesehen von dem durch das Schwungrad vermittelten Massenkraftschluss, den in §. 32 besprochenen Kraftkettenschluss zu zwangläufiger Ueberschreitung der den einfachen Schubkurbelgetrieben eigenthümlichen Todlagen; zugleich bedürfen sie bei gegebenem Ungleichförmigkeitsgrade δ und unter sonst gleichen Umständen eines weniger schweren Schwungrades, als die isolirten einfachen Getriebe zusammen.

Endlich ist zu bemerken, dass bei der Verwendung des in Rede stehenden Mechanismus als Kurbelschubgetriebe, indem dabei Q die treibende Kraft und P der Widerstand ist, jetzt offenbar dieselben Maximal- und Minimalwerthe von v bei denselben Configurationen des Mechanismus, wie zuvor, stattfinden würden, wenn gleichzeitig auch der Bewegungssinn der umgekehrte wäre. Eine besondere Untersuchung dieses Falles eines Kurbelschubgetriebes ist deshalb nicht erforderlich.

§. 94. Einfache Schubkurbel mit constanter Schubkraft.

Es werde zunächst angenommen, dass das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der auf den Kurbelzapfen reducirten rotirenden Masse M selbst in Vergleich mit dem Ungleichförmigkeitsgrade δ klein, nämlich ein höchstens mit δ^2 vergleichbarer Bruch ist. Die den grössten und kleinsten Werthen der Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens (des Punktes B, Fig. 103) entsprechenden Winkel φ ($= B_0AB$ oder B_1AB beziehungsweise für die erste oder zweite Hälfte der Periode) können dann nach §. 92 gemäss der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0,$$

also nach §. 93, Gl. (5) und (7) gemäss der Gleichung:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sin\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi = \frac{2}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

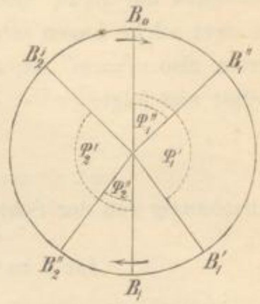
bestimmt werden, worin sich das obere Vorzeichen des Gliedes mit λ auf die erste, das untere auf die zweite Hälfte der Periode bezieht. In beiden Fällen entsprechen ihr zwei Wurzelwerthe φ zwischen 0 und 180°, die bei Voraussetzung eines Schubkurbelgetriebes bezeichnet seien mit

φ_1'' und φ_1' für die erste,

φ_2'' und φ_2' für die zweite

Hälfte der Periode, da in jeder dann zuerst ein Minimum von v erreicht wird, weil in jeder Todlage die elementare Arbeit der treibenden Kraft $P =$ Null und somit die Geschwindigkeit v in der Abnahme begriffen ist. Die der zweiten Hälfte der Periode angehörigen dieser ausgezeichneten Kurbelstellungen sind den der ersten Hälfte angehörigen symmetrisch gegenüber liegend in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$, Fig. 104, des Kurbelkreises, d. h. es ist

Fig. 104.



$$\varphi_2'' = 180^0 - \varphi_1' \text{ und } \varphi_2' = 180^0 - \varphi_1'',$$

weil durch die Substitution von $180^0 - \varphi$ für φ in Gl. (1) nur $\sin 2\varphi$ entgegengesetzt wird, während $\sin\varphi$ ungeändert bleibt. Es ist deshalb auch nur nöthig, die Winkel φ_1'' und φ_1' als Wurzeln der Gleichung

$$\sin\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi = \frac{2}{\pi}$$

zu ermitteln, was durch allmählige Näherung zu geschehen hat, da diese Gleichung mit

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \pm 2\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

vom vierten Grade in Bezug auf $\sin\varphi$ wird.

Setzt man ferner $$A = f(\varphi)\,.\,Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
so ist nach Gl. (5) und (7) im vorigen Paragraph:

$$f(\varphi) = \frac{\Phi}{2} - \frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots (3),$$

insbesondere also für die zweite Hälfte der Periode:

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$f(\pi - \varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - 1 + \frac{\varphi}{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) + \frac{\varphi}{\pi}$$

$= - f(\varphi)$ für die erste Hälfte. Daraus folgt, dass für solche Kurbelstellungen, die einander in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$ symmetrisch gegenüber liegen, die Werthe von $f(\varphi)$ und somit von A entgegengesetzt gleich sind, dass also auch, wenn

$$A' - A'' = \alpha\, Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gesetzt wird, $\alpha =$ dem Doppelten des grösseren Absolutwerthes von

$f(\varphi_1'')$ und $f(\varphi_1')$ ist, indem dann das absolute Maximum v' und das absolute Minimum v'' der Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens in solchen bezüglich auf $B_0 B_1$ symmetrischen Lagen stattfinden. Weil übrigens für je zwei solche Lagen m nach Gl. (3) oder (4) im vorigen Paragraph gleich gross, also $m' = m''$ ist, so wird Gl. (12) im §. 92 identisch mit Gl. (9) daselbst und folgt:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q \pi r}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

unabhängig von der Schiebermasse M_1. Hiernach findet man z. B.

für	$\lambda = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\varphi_1'' = 180^0 - \varphi_2' =$	$39^0 32'$	$44^0 21'$	$46^0 3'$	$47^0 25'$	$49^0 29'$
$\varphi_1' = 180^0 - \varphi_2'' =$	$140^0 28'$	$144^0 43'$	$145^0 59'$	$146^0 57'$	$148^0 20'$
$\alpha =$	$0{,}2105$	$0{,}2384$	$0{,}2489$	$0{,}2577$	$0{,}2717$

In allen diesen Fällen entspricht dem Winkel $\varphi = \varphi_1''$ das absolute Minimum und dem Winkel $\varphi = \varphi_2'$ das absolute Maximum von v, abgesehen vom Falle $\lambda = 0$, in welchem die zwei Maxima und ebenso die zwei Minima von v gleich gross sind, während dann auch die 4 ausgezeichneten Kurbelstellungen gemäss der Beziehung:

$$\varphi_1'' + \varphi_1' = \varphi_2'' + \varphi_2' = 180^0$$

zugleich in Beziehung auf den zu $B_0 B_1$ senkrechten Durchmesser des Kurbelkreises symmetrisch liegen. Die Werthe von α $\left(\text{für } \lambda < \frac{1}{4}\right)$ können mit einer Genauigkeit von 4 Decimalstellen zusammengefasst werden in der empirischen Formel:

$$\alpha = 0{,}2105\,(1 + 0{,}96\,\lambda + 0{,}81\,\lambda^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Wenn mit μ das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der nach Gl. (5) bestimmten Masse M bezeichnet, also

$$M_1 = \mu \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q \pi r}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gesetzt und dieses Verhältniss μ nicht viel $< \delta$ gefunden wird, so ist die obige Bestimmung von M einer Correctur bedürftig. Setzt man zu dem Ende:

$$m = M_1 f_1(\varphi) \text{ mit } f_1(\varphi) = \sin^2\varphi\,(1 \mp 2\lambda \cos\varphi)$$

$$= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \mp \lambda \sin\varphi \sin 2\varphi \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

nach Gl. (4) im vorigen Paragraph, so sind die den eminenten Werthen von v entsprechenden Winkel φ bestimmt durch die Gleichung (11) in §. 92, also hier durch die Gleichung:

$$Q\pi r \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{M_1 c^2}{2} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

$$2 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{\alpha\mu}{\delta} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = 0,$$

die wegen $\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = \sin 2\varphi \mp \lambda (2 \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi)$

$$= \sin 2\varphi \mp \lambda \sin\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (3) die Form erhält:

$$\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi - \frac{\alpha\mu}{\delta} [\sin 2\varphi \mp \lambda \sin\varphi (1 + 3\cos 2\varphi)] = \frac{2}{\pi} \quad \cdot (9).$$

Sie tritt an die Stelle von Gl. (1) und lässt erkennen, dass jetzt die ihren 4 Wurzelwerthen φ_1'', φ_1', φ_2'', φ_2' entsprechenden ausgezeichneten Kurbelstellungen nicht in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$ des Kurbelkreises symmetrisch sind. Um zu erkennen, für welche von ihnen $v = v'$ und für welche $v = v''$, ob nämlich $\varphi' = \varphi_1'$ oder $= \varphi_2'$, sowie ob $\varphi'' = \varphi_1''$ oder $= \varphi_2''$ ist, handelt es sich nach §. 92 um die betreffenden Werthe von

$$A - \frac{mc^2}{2} = Q\pi r f(\varphi) - \frac{M_1 c^2}{2} f_1(\varphi)$$

$$= \left[f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi)\right] Q\pi r,$$

also um die Function $F(\varphi) = f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi)$ . . . . (10),

deren 4 ausgezeichneten Werthen $F(\varphi_1'')$, $F(\varphi_1')$, $F(\varphi_2'')$ und $F(\varphi_2')$ der grösste $= F(\varphi')$ und der kleinste $= F(\varphi'')$ zu entnehmen ist, um damit schliesslich nach §. 92, Gl. (12) einen corrigirten Werth von M zu finden:

$$M = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} = \frac{\alpha_1}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \quad \ldots\ldots\ (11).$$

So findet man z. B. für $\lambda = 0$ und $\mu = \frac{1}{5}\delta$:

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = 42^0\,44'; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 143^0\,24'$$

$$F(\varphi'') = -0{,}11436;\ F(\varphi') = 0{,}09726$$

$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2116 = 1{,}005\,\alpha;$$

dagegen für $\lambda = 0$ und $\mu = \delta$:

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = 56^0\,13'; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 152^0\,23'$$
$$F(\varphi'') = -0{,}16304\,; \; F(\varphi') = 0{,}07383$$
$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2369 = 1{,}125\,\alpha.$$

Die Schiebermasse M_1 hat also eine Verdrehung der ausgezeichneten Kurbelstellungen im Sinne der Kurbeldrehung zur Folge, sowie eine Vergrösserung des Ungleichförmigkeitsgrades δ oder der rotirenden Masse, die einem gegebenen Werthe von δ entspricht. Die Resultate obiger zwei Beispiele entsprechen der Formel:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

die mit hinlänglicher Annäherung als allgemein gültig betrachtet werden kann, wenn λ sehr klein und μ nicht viel $> \delta$ ist.

Wird aber zur Prüfung des Einflusses eines grösseren Werthes von λ auf dieses Verhältniss der Coefficienten α_1 und α z. B. $\lambda = \frac{1}{5}$ angenommen nebst $\mu = \delta$, so findet man:

$$\varphi_1'' = 69^0\,8'; \qquad \varphi_1' = 159^0\,46'; \qquad \varphi_2'' = 52^0\,48'; \qquad \varphi_2' = 146^0\,26'$$
$$F(\varphi_1'') = -0{,}20229; \; F(\varphi_1') = 0{,}04760; \; F(\varphi_2'') = -0{,}16543; \; F(\varphi_2') = 0{,}09212$$
$$= F(\varphi'') \qquad\qquad\qquad\qquad = F(\varphi')$$
$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2944 = 1{,}142\,\alpha$$

entsprechend der folgenden Verallgemeinerung von Gl. (12):

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 + \frac{1 + 0{,}68\,\lambda}{8}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

§. 95. **Zweifache Schubkurbel mit gleichen constanten Schubkräften.**

Zwei gleiche Schubkurbelgetriebe seien mit einer gemeinschaftlichen Kurbel- und Schwungradwelle so verbunden, dass, wenn das erste sich in einer Todlage befindet, die Kurbel des zweiten sich seit dem letzten Durchgange durch die entsprechende Todlage (d. h. durch die obere, wenn jene eine obere, durch die untere, wenn jene eine untere ist) um den Winkel ω ($< \pi$) gedreht hat; dieser Winkel heisse der Voreilungswinkel des zweiten Getriebes vor dem ersten. Fallen die Schubrichtungen AC (Fig. 103) der beiden Getriebe zusammen, so bilden die Kurbelrichtungen AB selbst diesen Winkel ω; fallen die Kurbeln zusammen, so sind die Schubrichtungen unter dem Winkel ω gegen einander geneigt. Im Allgemeinen können sowohl die Kurbeln wie die Schubrichtungen gegen einander geneigt sein, so dass die Summe dieser Neigungswinkel $= \omega$ ist.

Für jedes der beiden Getriebe gelten die im Vorhergehenden für die einfache Schubkurbel gebrauchten Bezeichnungen r, l, λ, v, P, Q, M_1; dagegen sei M die gesammte auf den Abstand r von der Axe der gemeinsamen Kurbelwelle reducirte rotirende Masse und A die Arbeitsumme aller Kräfte, gerechnet vom Anfange einer Periode, der hier mit dem Durchgange des ersten Getriebes durch eine obere Todlage (der Kurbelrichtung AB_0, Fig. 103, entsprechend) zusammenfalle. Ist dann in irgend einem Augenblicke der Drehungswinkel seit dem letzten Durchgange durch eine Todlage für die erste Kurbel $=\varphi$, für die zweite $=\psi$, also

$$\psi=\omega+\varphi \text{ oder } \psi=\omega+\varphi-\pi,$$

jenachdem
$$\omega+\varphi<\pi \text{ oder } >\pi$$

ist, so ergiebt sich nach Gl. (2) und (3) im vorigen Paragraph und mit Rücksicht darauf, dass für die Bewegung von einer zur folgenden Todlage die Arbeitsumme der Kräfte für jede einzelne der beiden Schubkurbeln $=$ Null ist:

$$A=[f(\varphi)+f(\psi)-f(\omega)]\,Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

mit
$$f(\varphi)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\varphi\mp\frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right)-\frac{\varphi}{\pi}$$

$$f(\psi)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\psi\mp\frac{\lambda}{2}\sin^2\psi\right)-\frac{\psi}{\pi}$$

$$f(\omega)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\omega-\frac{\lambda}{2}\sin^2\omega\right)-\frac{\omega}{\pi}.$$

Dabei gilt das obere oder untere Vorzeichen des Gliedes mit λ im Ausdrucke von $f(\varphi)$, jenachdem das erste Getriebe, im Ausdrucke von $f(\psi)$ aber, jenachdem das zweite Getriebe zuletzt in einer oberen oder unteren Todlage sich befunden hat.

Unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss von M_1 zu M ein höchstens mit δ^2 vergleichbarer kleiner Bruch ist, können nach §. 92 die Maxima und Minima von v als der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi}=0$$

entsprechend betrachtet werden, sofern es hier nur auf die möglichst zutreffende Kenntniss dieser Maxima und Minima selbst und nicht der Configurationen des Getriebes ankommt, in denen sie stattfinden, somit auch als entsprechend der Gleichung:

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}=0 \text{ mit } F(\varphi)=f(\varphi)+f(\psi) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist hiernach das grösste Maximum von $F(\varphi) = F(\varphi')$, das kleinste Minimum $= F(\varphi'')$ gefunden, so ist, da $f(\omega)$ constant,

$$A' - A'' = [F(\varphi') - F(\varphi'')]\, Q \pi r$$

und ergiebt sich damit der dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende Werth von M nach Gl. (12) in §. 92, wenn darin ausserdem m' und m'' als die den Winkeln φ' und φ'' entsprechenden Werthe von

$$m = M_1 [\sin^2 \varphi (1 \mp 2 \lambda \cos \varphi) + \sin^2 \psi (1 \mp 2 \lambda \cos \psi)] \quad \ldots \quad (3)$$

nach Gl. (4) in §. 93 eingesetzt werden. In diesem Ausdrucke von m ist das erste Glied mit λ mit demselben Vorzeichen wie in $f(\varphi)$, das zweite mit demselben Zeichen wie in $f(\psi)$ zu nehmen. Bei Vernachlässigung von M_1 wird einfach:

$$M = \frac{\alpha'}{\delta} \frac{2 Q \pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Gewöhnlich ist der Voreilungswinkel ω ein rechter, und wenn dann die Periode in 4 Theile getheilt wird, Drehungswinkeln von je 90^0 entsprechend, so ist für das erste und dritte Viertel:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$f(\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \psi \mp \frac{\lambda}{2} \sin^2 \psi\right) - \frac{\psi}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin \varphi \mp \frac{\lambda}{2} \cos^2 \varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin \varphi - \cos \varphi \mp \frac{\lambda}{2}\right) - 2\, \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

mit dem oberen Zeichen für das erste, dem unteren für das dritte Viertel.

Für das zweite und vierte Viertel ist:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi - \pi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$f(\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \psi \pm \frac{\lambda}{2} \sin^2 \psi\right) - \frac{\psi}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \sin \varphi \pm \frac{\lambda}{2} \cos^2 \varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\left(3 - \sin \varphi - \cos \varphi \pm \frac{\lambda}{2} \cos 2\varphi\right) - 2\, \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

mit dem oberen Zeichen für das zweite, dem unteren für das vierte Viertel.

Ein Maximum oder Minimum von $F(\varphi)$ entspricht also im ersten und dritten Viertel der Periode denjenigen spitzen Winkeln φ, für welche nach Gl. (5):

$$\sin\varphi - \cos\varphi - 4\,\frac{\varphi}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, also

$$\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{4}{\pi} = 0$$

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1 = \sin 2\varphi = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

ist. Diese Winkel sind: $\varphi = 19^0\,12'$ und $\varphi = 70^0\,48'$.

Im zweiten resp. vierten Viertel der Periode entsprechen dagegen einem Maximum oder Minimum von $F(\varphi)$ die stumpfen Winkel φ, für welche nach Gl. (6):

$$-\sin\varphi - \cos\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi - 4\,\frac{\varphi}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, oder den spitzen Winkeln $\varphi' = \pi - \varphi$, für welche

$$-\sin\varphi' + \cos\varphi' \pm \frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi' + 4\,\frac{\varphi'}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, also

$$-\cos\varphi' - \sin\varphi' \mp \lambda\sin 2\varphi' + \frac{4}{\pi} = 0$$

$$(\cos\varphi' + \sin\varphi')^2 = \left(\frac{4}{\pi} \mp \lambda\sin 2\varphi'\right)^2$$

$$1 + \sin 2\varphi' = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \mp \frac{8}{\pi}\lambda\sin 2\varphi' + \lambda^2\sin^2 2\varphi'$$

$$\sin 2\varphi'\left(1 \pm \frac{8}{\pi}\lambda - \lambda^2\sin 2\varphi'\right) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ist, indem dabei das obere Zeichen des Gliedes mit λ sich auf das zweite, das untere auf das vierte Viertel der Periode bezieht.

Die Rechnungsresultate gemäss diesen Gleichungen (5)—(8) für verschiedene Werthe von λ enthält die folgende Zusammenstellung, in der mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 die Werthe von φ beziehungsweise für das 1te, 2te, 3te, 4te Viertel der Periode bezeichnet sind, insbesondere mit den Bezeichnungen φ_1', φ_2' . . . einem Maximum, mit den Bezeichnungen φ_1'', φ_2'' . . . einem Minimum von $F(\varphi)$, also von A und von v entsprechend.

$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{1}{8}$	$\lambda = \frac{1}{6}$	$\lambda = \frac{1}{5}$	$\lambda = \frac{1}{4}$
$\varphi_1'' = 19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$
$\varphi_1' = 70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$
$\varphi_2'' = 109^0\,12'$	$104^0\,8'$	$103^0\,3'$	$102^0\,18'$	$101^0\,20'$
$\varphi_2' = 160^0\,48'$	$165^0\,52'$	$166^0\,57'$	$167^0\,42'$	$168^0\,40'$
$\varphi_3'' = 19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$	$19^0\,12'$
$\varphi_3' = 70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$	$70^0\,48'$
$\varphi_4'' = 109^0\,12'$	$123^0\,38'$	—	—	—
$\varphi_4' = 160^0\,48'$	$146^0\,22'$	—	—	—
$F(\varphi_1'') = -0{,}0211$	$-0{,}0523$	$-0{,}0628$	$-0{,}0711$	$-0{,}0836$
$F(\varphi_1') = 0{,}0211$	$-0{,}0102$	$-0{,}0206$	$-0{,}0289$	$-0{,}0414$
$F(\varphi_2'') = -0{,}0211$	$-0{,}0473$	$-0{,}0566$	$-0{,}0641$	$-0{,}0756$
$F(\varphi_2') = 0{,}0211$	$0{,}0473$	$0{,}0566$	$0{,}0641$	$0{,}0756$
$F(\varphi_3'') = -0{,}0211$	$0{,}0102$	$0{,}0206$	$0{,}0289$	$0{,}0414$
$F(\varphi_3') = 0{,}0211$	$0{,}0523$	$0{,}0628$	$0{,}0711$	$0{,}0836$
$F(\varphi_4'') = -0{,}0211$	$-0{,}0010$	—	—	—
$F(\varphi_4') = 0{,}0211$	$0{,}0010$	—	—	—

Das Fehlen von Angaben an einigen Stellen dieser Tabelle wird dadurch veranlasst, dass es im letzten Viertel der Periode ein Maximum und Minimum von $F(\varphi)$ nicht giebt, wenn der mit dem unteren Zeichen genommenen Gleichung (8) ein unmöglicher Werth von $\sin 2\varphi' > 1$ entsprechen würde; das ist der Fall für

$$\lambda > -\frac{4}{\pi} + \sqrt{2},\ \text{d. i. } \lambda > 0{,}141.$$

Uebrigens ist in allen Fällen:

$$F(\varphi_1'') = -F(\varphi_3');\ F(\varphi_1') = -F(\varphi_3'');\ F(\varphi_2'') = -F(\varphi_2');$$

ferner das kleinste Minimum dasjenige, welches im ersten Viertel, das grösste Maximum das jenem Minimum absolut genommen gleiche, welches im dritten Viertel der Periode stattfindet, also

$$\varphi'' = \varphi_1'' \text{ und } \varphi' = \varphi_3'$$

$$\alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} = F(\varphi_3').$$

Indem endlich der den Minimal- und Maximalwerthen von $F(\varphi)$ im ersten und dritten Viertel entsprechende Winkel φ nach Gl. (7) von λ unabhängig ist, ergiebt sich das Maximum von $F(\varphi) = F(\varphi_3') = \alpha'$ nach Gl. (5) um $\frac{\lambda}{4}$ grösser, als derjenige Werth, welcher $\lambda = 0$ entspricht, nämlich

$$\alpha' = 0{,}0211 + \frac{\lambda}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

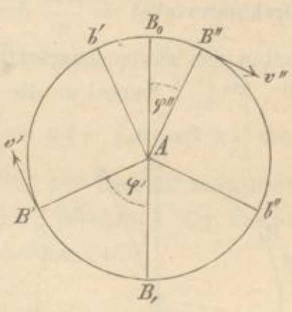
Die Vergleichung dieser Coefficienten α' von Gl. (4) mit den Coefficienten α von Gl. (5) im vorigen Paragraph ergiebt

für $\lambda = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\alpha' = 0{,}0211$	$0{,}0523$	$0{,}0628$	$0{,}0711$	$0{,}0836$
$\alpha = 0{,}2105$	$0{,}2384$	$0{,}2489$	$0{,}2577$	$0{,}2717$
$\frac{\alpha'}{\alpha} = 0{,}100$	$0{,}219$	$0{,}252$	$0{,}276$	$0{,}308.$

Die Werthe von $\frac{\alpha'}{\alpha}$ lassen erkennen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse der zweifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als diese Masse für die zwei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn sie unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden; wie man sieht, nimmt der auf diesem Umstande beruhende Vortheil der zweifachen Schubkurbel mit wachsender Grösse von λ erheblich ab.

Zu bemerken ist schliesslich, dass die zwei Schiebermassen M_1 eine Correction von Gl. (4) nicht nöthig machen, weil auch hier, wie bei der einfachen Schubkurbel, $m' = m''$ und deshalb Gl. (12) in §. 92 mit Gl. (9) daselbst identisch ist. Indem nämlich $\varphi'' = 19^0\,12'$ und $\varphi' = 70^0\,48'$ sich zu 90^0 ergänzen, ist die dem Maximum v' von v entsprechende Kurbellage $B'Ab'$ (Fig. 105) der dem Minimum v'' entsprechenden Lage $B''Ab''$ symmetrisch gegenüber liegend in Bezug auf die Verbindungsgerade B_0B_1 der Todpunkte, so dass der von der ersten oder zweiten Schiebermasse M_1 herrührende Bestandtheil von m in der einen Lage dem von der zweiten resp. ersten Masse M_1 herrührenden Bestandtheile in der anderen Lage gleich ist. Anders wird es sich verhalten, wenn schon bei der Bestimmung von φ' und φ'' auf die Schiebermassen M_1 Rücksicht genommen wird gemäss Gl. (11) in §. 92, was dann zu geschehen hätte, wenn das Verhältniss von M_1 zu M ein nicht erst mit δ^2, sondern schon mit δ vergleichbarer Bruch wäre; hier mag indessen von einem solchen Falle abgesehen werden. —

Fig. 105.

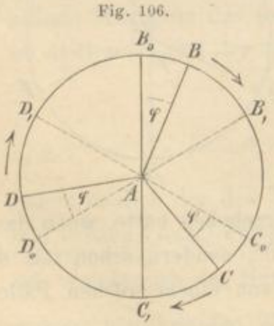


Aus dem Umstande, dass im Falle $\lambda = 0$ sich die relativen Minima sowohl wie die relativen Maxima von $F(\varphi)$ einander gleich und die einen absolut genommen gleich den anderen ergeben haben, kann gefolgert werden, dass der dabei zu Grunde liegende Voreilungswinkel $\omega = 90^0$ in diesem Falle der vortheilhafteste ist, indem jede Aenderung desselben eine solche Verschiebung jenes gleichmässigen Wechsels von Minimal- und Maximalwerthen voraussichtlich zur Folge haben würde, wodurch das absolute Minimum verkleinert, das absolute Maximum vergrössert, also auch α' vergrössert wird. In anderen Fällen ist es aber denkbar, dass ein von 90^0 etwas verschiedener Voreilungswinkel ω einem kleineren Coefficienten α' entsprechen und somit vortheilhafter sein würde; ein erheblicher Gewinn ist indessen nicht davon zu erwarten, und mag auf die Untersuchung auch dieser Frage hier verzichtet werden.

§. 96. Dreifache Schubkurbel mit gleichen constanten Schubkräften.

Wenn n gleiche Schubkurbelgetriebe mit einer gemeinschaftlichen Kurbelwelle so verbunden sind, dass die Durchgänge der einzelnen Getriebe durch entsprechende Todlagen nach Drehungen jener Welle um je $\frac{2\pi}{n}$ auf einander folgen, wie es insbesondere bei übereinstimmenden Schubrichtungen aller Einzelgetriebe dann der Fall ist, wenn ihre Kurbeln unter gleichen Winkeln $= \frac{2\pi}{n}$ gegen einander geneigt, somit symmetrisch rings um die Welle gruppirt sind, so umfasst die Periode auch nur einen solchen Drehungswinkel $= \frac{2\pi}{n}$ der Kurbelwelle, nach welchem dieselbe Configuration des zusammengesetzten Getriebes wiederkehrt, indem nun die 1te, 2te, 3te . . . Kurbel an die vorher von der 2ten, 3ten, 4ten . . . Kurbel eingenommene Stelle gelangt ist. Anwendung findet eine solche Anordnung zuweilen im Falle $n = 3$, der hier vorausgesetzt wird. Dabei seien (Fig. 106) die Lagen des 1ten, 2ten, 3ten Kurbelzapfens

Fig. 106.



zu Anfang der Periode:	B_0	C_0	D_0
in der Mitte „ „	B_1	C_1	D_1
zu Ende „ „	C_0	D_0	B_0,

indem die Winkel $B_0AB_1 = B_1AC_0 = C_0AC_1 = C_1AD_0 = D_0AD_1 = D_1AB_0 = \frac{\pi}{3}$ sind. Der Drehungswinkel φ wird in der ersten Hälfte der Periode von den Anfangslagen, in der zweiten Hälfte von den Mittellagen der Kurbeln an gerechnet, im einen und anderen Falle folglich bis $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Unter diesen Umständen ist, wenn wieder r, λ, Q für jede einzelne der drei Schubkurbeln dieselben Bedeutungen haben, wie nach §. 94 für die einfache Schubkurbel, und wenn die durch Gl. (3) in §. 94 bestimmte Function $f(\varphi)$ zur Abkürzung mit $f_0(\varphi)$ oder $f_1(\varphi)$ bezeichnet wird, jenachdem sie mit dem oberen oder unteren Zeichen des Gliedes mit λ verstanden, der betreffende Winkel nämlich von der oberen oder unteren Todlage (AB_0 oder AC_1 in Fig. 106) an gerechnet ist, die Arbeitssumme aller Kräfte für die erste Hälfte der Periode:

$$A = \left[f_0(\varphi) + f_0\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f_1\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] Q\pi r$$

oder, weil allgemein

$$f_0(\varphi) + f_1(\pi - \varphi) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\pi - \varphi}{\pi} \end{array}\right\} = 0 \text{ ist,}$$

$$A = \left[f_0(\varphi) + f_1\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] Q\pi r.$$

Für die Mitte der Periode $\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right)$ ist danach:

$$A = \left[f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_1\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] Q\pi r = 0,$$

und deshalb für die zweite Hälfte der Periode, gerechnet von der Mitte oder auch vom Anfange der ganzen Periode:

$$A = \left[f_0\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_1(\varphi) + f_1\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] Q\pi r$$
$$= \left[f_1(\varphi) + f_0\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] Q\pi r,$$

ein Ausdruck, der aus dem auf die erste Hälfte der Periode bezüglichen durch Vertauschung von f_0 mit f_1, also durch Umkehrung der Zeichen aller Glieder mit λ hervorgeht. Wird also in beiden Fällen

$$A = F(\varphi) \,.\, Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gesetzt, so ist nun

$$F(\varphi) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right] - \frac{\varphi}{\pi} \\ + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\right] - \left(\frac{1}{3} + \frac{\varphi}{\pi}\right) \\ - \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] + \left(\frac{1}{3} - \frac{\varphi}{\pi}\right) \end{array}\right.$$

und beziehen sich dabei die oberen Zeichen auf die erste, die unteren auf die zweite Hälfte der Periode, während in jeder Hälfte φ von 0 bis $\frac{\pi}{3}$ veränderlich ist. Wegen

$$cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)-cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\,sin\frac{\pi}{3}\,sin\,\varphi$$

und $$sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=sin\frac{2\pi}{3}\,sin\,2\varphi=sin\frac{\pi}{3}\,sin\,2\varphi$$

ist auch:

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}\left[1-cos\,\varphi+2\,sin\frac{\pi}{3}\,sin\,\varphi\pm\frac{\lambda}{2}\left(sin\frac{\pi}{3}\,sin\,2\varphi-sin^2\varphi\right)\right]-3\frac{\varphi}{\pi}$$

oder wegen $1=2\,cos\frac{\pi}{3}$, also

$$cos\,\varphi-2\,sin\frac{\pi}{3}\,sin\,\varphi=2\left(cos\frac{\pi}{3}\,cos\,\varphi-sin\frac{\pi}{3}\,sin\,\varphi\right)=2\,cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$$

und $$sin\frac{\pi}{3}\,sin\,2\varphi-sin^2\varphi=sin\frac{\pi}{3}\,sin\,2\varphi-\frac{1-cos\,2\varphi}{2}$$

$$=sin\frac{\pi}{3}\,sin\,2\varphi+cos\frac{\pi}{3}\,cos\,2\varphi-\frac{1}{2}=cos\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)-\frac{1}{2}$$

schliesslich auch:

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}-cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\pm\frac{\lambda}{4}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)-\frac{1}{2}\right]-3\frac{\varphi}{\pi}\quad\ldots(2).$$

Die Maximal- und Minimalwerthe von $F(\varphi)$ entsprechen den zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ liegenden Wurzeln der Doppelgleichung:

$$\frac{dF}{d\varphi}=0,\ \text{also}\ sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\pm\frac{\lambda}{2}\,sin\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)=\frac{3}{\pi}\quad\ldots\ldots(3),$$

und wenn insbesondere φ' und φ'' diejenigen dieser Wurzelwerthe sind, denen das grösste Maximum und das kleinste Minimum von $F(\varphi)$ entspricht, so ist

$$A'-A''=[F(\varphi')-F(\varphi'')]\,Q\pi r$$

und nach §. 92, Gl. (9) bezw. Gl. (12) bei Vernachlässigung des Einflusses der Schiebermassen M_1:

$$M=\frac{\alpha''}{\delta}\,\frac{3\,Q\pi r}{c^2}\ \text{mit}\ \alpha''=\frac{F(\varphi')-F(\varphi'')}{3}\quad\ldots\ldots\ldots(4).$$

Folgende Zusammenstellung enthält die Resultate der Rechnung nach den Gleichungen (2) und (3) für die zwei Fälle $\lambda=0$ und $\lambda=\frac{1}{5}$, indem dabei die dem Minimum und Maximum von $F(\varphi)$ entsprechenden Winkel für die erste Hälfte der Periode mit φ_1'' und φ_1', für die zweite mit φ_2'' und φ_2' bezeichnet sind.

$\lambda = 0$		$\lambda = \frac{1}{5}$	
$\varphi_1'' = 12^0 44'$	$F(\varphi_1'') = -0,0090$	$\varphi_1'' = 0^0 20'$	$F(\varphi_1'') = 0,0000$
$\varphi_1' = 47^0 16'$	$F(\varphi_1') = 0,0090$	$\varphi_1' = 39^0 18'$	$F(\varphi_1') = 0,0290$
$\varphi_2'' = 12^0 44'$	$F(\varphi_2'') = -0,0090$	$\varphi_2'' = 20^0 42'$	$F(\varphi_2'') = -0,0290$
$\varphi_2' = 47^0 16'$	$F(\varphi_2') = 0,0090$	$\varphi_2' = 59^0 40'$	$F(\varphi_2') = 0,0000$

Hiernach ist $\varphi' = \varphi_1'$ und $\varphi'' = \varphi_2''$; ferner nach Gl. (4)

$$\text{für } \lambda = 0:\ \alpha'' = 0,0060 = 0,029\,\alpha,$$

$$\text{für } \lambda = \frac{1}{5}:\ \alpha'' = 0,0193 = 0,075\,\alpha,$$

unter $\alpha\left(= 0,2105 \text{ für } \lambda = 0, \text{ bezw. } = 0,2577 \text{ für } \lambda = \frac{1}{5}\right)$ den Coefficienten von Gl. (5) in §. 94 verstanden. Die Verhältnisse von α'' zu α, die hier wieder in demselben Sinne und in ähnlichem Grade von λ abhängen wie bei der zweifachen Schubkurbel (§. 95) die Verhältnisse $\alpha' : \alpha$, lassen erkennen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse der dreifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als diese Masse für die drei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn sie unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden.

Aus dem Umstande, dass die Winkel $\varphi' = \varphi_1'$ und $\varphi'' = \varphi_2''$ sich zu 60^0 ergänzen, ist schliesslich leicht ersichtlich, dass die diesen zwei Winkeln entsprechenden Kurbellagen in Bezug auf den Durchmesser $B_0 C_1$, Fig. 106, symmetrisch sind, dass also die Summen der auf die Kurbelzapfen reducirten Schiebermassen M_1 für diese zwei Kurbellagen, nämlich m' und m'' gemäss den Bezeichnungen in Gl. (12), §. 92, gleich gross sind, und dass somit obige Gleichung (4) die dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende Grösse der rotirenden Masse M mit einer solchen Annäherung liefert, womit δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, falls auch das Verhältniss $M_1 : M$ ein mit δ^2 vergleichbarer Bruch ist.

§. 97. Einfache Schubkurbel mit veränderlicher Schubkraft.

Die Schubkraft wird in der Weise veränderlich angenommen, wie es in §. 93 vorausgesetzt wurde, dass so nach Gl. (9) daselbst die vom Anfange einer (eine ganze Umdrehung der Kurbelwelle umfassenden) Periode, nämlich vom Durchgange durch eine obere Todlage an gerechnete Arbeit der Kräfte:

$$A = f(\varphi) \, . \, Q \pi r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ist mit

$$f(\varphi) = \frac{[1 + ln] \dfrac{\Phi}{2\,\varepsilon} - \beta \dfrac{\Phi}{2\,\varepsilon}}{1 + ln \dfrac{1}{\varepsilon} - \beta \dfrac{1}{\varepsilon}} - \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Darin ist

$$\Phi = 1 - cos\, \varphi \pm \frac{\lambda}{2} sin^2 \varphi$$

mit dem oberen Vorzeichen des letzten Gliedes für die erste Hälfte, dem unteren für die zweite Hälfte der Periode, während auch in Gl. (2)

$$[1 + ln] \frac{\Phi}{2\,\varepsilon} = \frac{\Phi}{2\,\varepsilon} \text{ oder } = 1 + ln \frac{\Phi}{2\,\varepsilon}$$

ist, jenachdem $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist, unter φ_1 den durch Gl. (10) in §. 93 bestimmten, von λ und ε abhängigen und ausserdem für beide Hälften der Periode im Allgemeinen verschiedenen Winkel verstanden. Diese besondere Art von Veränderlichkeit der Schubkraft entspricht näherungsweise dem Gesetze, nach welchem der Dampfdruck auf den Kolben einer Dampfmaschine bei jedem Kolbenschube sich ändert, indem dabei ε den sogenannten Füllungsgrad, β das Verhältniss des mittleren Vorderdampfdruckes zum Mittelwerthe des Hinterdampfdruckes bei der Einströmung (während des Kolbenweges $\varepsilon \, . \, 2\,r$) bedeutet.

Die grössten und kleinsten Werthe von $f(\varphi)$ und somit von A entsprechen der Gleichung:

$$\frac{d\,f(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\left[\dfrac{2\,\varepsilon}{\Phi}\right] - \beta}{1 + ln \dfrac{1}{\varepsilon} - \beta \dfrac{1}{\varepsilon}} \, \frac{1}{2\,\varepsilon} \, \frac{d\Phi}{d\varphi} - \frac{1}{\pi} = 0,$$

in welcher Gleichung $\left[\dfrac{2\,\varepsilon}{\Phi}\right]$ die Bedeutung 1 oder $\dfrac{2\,\varepsilon}{\Phi}$ hat, jenachdem $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist. Mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von Φ folgt daraus:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = sin\, \varphi \pm \frac{\lambda}{2} sin\, 2\,\varphi = \frac{1}{\pi}\left(1 + ln \frac{1}{\varepsilon} - \beta \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{2\,\varepsilon}{\left[\dfrac{2\,\varepsilon}{\Phi}\right] - \beta} \quad \ldots \quad (3),$$

und zwar hat diese Gleichung, mit Rücksicht auf die doppelten Vorzeichen der Glieder mit λ (auf der linken Seite sowie im Ausdrucke von Φ) und auf die doppelte Bedeutung von $\left[\frac{2\,\varepsilon}{\Phi}\right]$, vier verschiedene Formen, jenachdem sie auf die erste oder zweite Hälfte der Periode bezogen wird und dabei $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist. Immer ergeben sich zwischen den hier in Betracht kommenden Grenzen im Ganzen 4 Wurzelwerthe derselben, von denen meistens jeder der 4 Formen von Gl. (3) einer angehört, entsprechend zwei kleinsten und zwei grössten Werthen von $f(\varphi)$, also von A und von v, und wenn dann wieder φ' und φ'' diejenigen dieser Winkel φ sind, die beziehungsweise dem grösseren Maximum und dem kleineren Minimum von $f(\varphi)$ entsprechen, so ist nach §. 92, Gl. (9) bei Abstraction von der Schiebermasse M_1:

$$M = \frac{\alpha}{\delta}\,\frac{Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha = f(\varphi') - f(\varphi'') \quad \ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Während bei der Schubkurbel mit constanter Schubkraft (§. 94) der Coefficient α in der analogen Gleichung (5) daselbst nur von λ abhing, ist er hier zugleich von β und von ε abhängig. Bei dem transcendenten Charakter von Gl. (3) kann er indessen nur durch eine empirische Näherungsformel als Function dieser drei Grössen ausgedrückt werden auf Grund seiner Berechnung nach obigen Gleichungen für verschiedene Werthe von λ, β und ε, als welche beispielsweise angenommen seien:

$$\lambda = 0 \text{ und } \frac{1}{5},\ \beta = \frac{1}{20} \text{ und } \frac{1}{5},\ \varepsilon = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ und } 1.$$

Die Annahme $\varepsilon = 1$ entspricht einer constanten Schubkraft, also den aus §. 94 bekannten (von β unabhängigen) Werthen von α. In allen diesen Fällen ergiebt sich, ebenso wie bei der Schubkurbel mit constanter Schubkraft, das in der ersten Hälfte der Periode stattfindende Minimum von $f(\varphi)$ als das kleinere, das in der zweiten Hälfte stattfindende Maximum als das grössere, ist also (mit den in §. 94 festgesetzten Bezeichnungen φ_1'', φ_1', φ_2'', φ_2'):

$$\varphi'' = \varphi_1'' \text{ und } \varphi' = \varphi_2'.$$

Ersterer Winkel ist stets kleiner, letzterer (ausser im Falle $\varepsilon = 1$) grösser, als der durch Gl. (10) in §. 93 bestimmte Winkel φ_1, nämlich

$$\begin{array}{llll}
\text{für } \lambda = 0 \text{ als } \varphi_1 = & 60^0 & 90^0 & 120^0 \text{ in jeder,} \\
\text{für } \lambda = \frac{1}{5} \text{ als } \varphi_1 = \Big\{ & 65^0\,20' & 95^0\,41' & 124^0\,36' \text{ in der ersten,} \\
 & 55^0\,24' & 84^0\,19' & 114^0\,40' \text{ in der zweiten} \\
\text{halben Periode für } \varepsilon = & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}.
\end{array}$$

1) Für $\lambda = 0$ und $\beta = 0{,}05$ findet man

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	$21^0\,29'$	$32^0\,16'$	$37^0\,51'$	$39^0\,32'$
$\varphi' = \varphi_2' =$	$103^0\,10'$	$122^0\,23'$	$135^0\,11'$	$140^0\,28'$
$f(\varphi'') =$	$-0{,}0590$	$-0{,}0872$	$-0{,}1012$	$-0{,}10525$
$f(\varphi') =$	0,2390	0,1688	0,1283	0,10525
$\alpha =$	0,2980	0,2560	0,2295	0,2105

Diese Werthe von α können zusammengefasst werden in der Formel:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2105 + (1-\varepsilon)(0{,}1531 - 0{,}1670\,\varepsilon + 0{,}0856\,\varepsilon^2)\\ &= 0{,}2105 + 0{,}1531\,(1-\varepsilon)(1 - 1{,}091\,\varepsilon + 0{,}559\,\varepsilon^2)\;.\;.\;.\;.\;(5).\end{aligned}$$

2) Für $\lambda = 0$ und $\beta = 0{,}2$ ergiebt sich

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	$18^0\,24'$	$30^0\,58'$	$37^0\,33'$	$39^0\,32'$
$\varphi' = \varphi_2' =$	$95^0\,51'$	$119^0\,14'$	$134^0\,22'$	$140^0\,28'$
$f(\varphi'') =$	$-0{,}0507$	$-0{,}0839$	$-0{,}1004$	$-0{,}10525$
$f(\varphi') =$	0,3182	0,1882	0,1332	0,10525
$\alpha =$	0,3689	0,2721	0,2336	0,2105

entsprechend dem Ausdrucke:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2105 + (1-\varepsilon)(0{,}3531 - 0{,}6842\,\varepsilon + 0{,}4488\,\varepsilon^2)\\ &= 0{,}2105 + 0{,}3531\,(1-\varepsilon)(1 - 1{,}938\,\varepsilon + 1{,}271\,\varepsilon^2)\;.\;.\;.\;.\;(6).\end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind zusammen zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2105 + (1-\varepsilon)\,f(\beta)\,[1 - f_1(\beta)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta)\,.\,\varepsilon^2]\\ \text{mit}\qquad f(\beta) &= 0{,}0864 + 1{,}333\,\beta\\ f_1(\beta) &= 0{,}808 + 5{,}65\,\beta;\; f_2(\beta) = 0{,}321 + 4{,}75\,\beta\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(7).$$

3) Im Falle $\lambda = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}05$ ergiebt sich

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	$26^0\,30'$	$39^0\,11'$	$45^0\,32'$	$47^0\,25'$
$\varphi' = \varphi_2' =$	$96^0\,31'$	$114^0\,48'$	$127^0\,42'$	$132^0\,35'$
$f(\varphi'') =$	$-0{,}0732$	$-0{,}1074$	$-0{,}1240$	$-0{,}12885$
$f(\varphi') =$	0,2708	0,1981	0,1538	0,12885
$\alpha =$	0,3440	0,3055	0,2778	0,2577

$$\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2577 + (1-\varepsilon)(0{,}1389 - 0{,}1038\,\varepsilon + 0{,}0344\,\varepsilon^2)\\ &= 0{,}2577 + 0{,}1389\,(1-\varepsilon)(1 - 0{,}747\,\varepsilon + 0{,}248\,\varepsilon^2)\;.\;.\;.\;.\;(8).\end{aligned}$$

4) Mit $\lambda = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}2$ findet man

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	$22^0\,46'$	$37^0\,41'$	$45^0\,11'$	$47^0\,25'$

$\varphi' = \varphi_2' =$	$89^0\,42'$	$111^0\,52'$	$127^0\ \ 0'$	$132^0\,35'$
$f(\varphi'') =$	$-0{,}0630$	$-0{,}1034$	$-0{,}1231$	$-0{,}12885$
$f(\varphi') =$	$0{,}3500$	$0{,}2182$	$0{,}1589$	$0{,}12885$
$\alpha =$	$0{,}4130$	$0{,}3216$	$0{,}2820$	$0{,}2577$

$$\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2577 + (1-\varepsilon)(0{,}3351 - 0{,}6094\,\varepsilon + 0{,}3896\,\varepsilon^2)\\ &= 0{,}2577 + 0{,}3351\,(1-\varepsilon)(1 - 1{,}819\,\varepsilon + 1{,}163\,\varepsilon^2)\ \ldots\ldots (9).\end{aligned}$$

Aus (8) und (9) zusammen folgt für $\lambda = 0{,}2$:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2577 + (1-\varepsilon)\,f(\beta)\,[1 - f_1(\beta)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta)\,.\,\varepsilon^2]\\ \text{mit}\qquad f(\beta) &= 0{,}0735 + 1{,}308\,\beta\\ f_1(\beta) &= 0{,}389 + 7{,}15\,\beta;\ f_2(\beta) = -\,0{,}057 + 6{,}10\,\beta\end{aligned}\right\}\ \ldots (10).$$

Endlich ergiebt sich durch Zusammenfassung von Gl. (7) und (10) für alle Fälle, mit Rücksicht zugleich auf §. 94, Gl. (6):

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 0{,}2105\,(1 + 0{,}96\,\lambda + 0{,}81\,\lambda^2) +\\ &\quad + (1-\varepsilon)\,f(\beta,\lambda)\,[1 - f_1(\beta,\lambda)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta,\lambda)\,.\,\varepsilon^2]\\ \text{mit}\qquad f(\beta,\lambda) &= 0{,}0864 + 1{,}333\,\beta - (0{,}0645 + 0{,}125\,\beta)\,\lambda\\ f_1(\beta,\lambda) &= 0{,}808 + 5{,}65\,\beta - (2{,}095 - 7{,}50\,\beta)\,\lambda\\ f_2(\beta,\lambda) &= 0{,}321 + 4{,}75\,\beta - (1{,}890 - 6{,}75\,\beta)\,\lambda\end{aligned}\right\}\ \ldots (11).$$

Hiernach ist es leicht, Tabellen für den praktischen Gebrauch zu berechnen, denen die Werthe von α für beliebige Werthe von ε und wenigstens für solche Werthe von β, λ entnommen werden können, die nicht viel $> 0{,}2$ sind. —

Die Berücksichtigung der Schiebermasse M_1 kann in erster Annäherung dadurch geschehen, dass nach §. 92, Gl. (12) gesetzt wird:

$$M = \frac{1}{\delta}\left(\frac{A' - A''}{c^2} - \frac{m' - m''}{2}\right)$$

oder, da nach §. 93, Gl. (3):

$$\begin{aligned}m' &= M_1\,\sin^2\varphi'\,(1 + \lambda\cos\varphi')^2\\ m'' &= M_1\,\sin^2\varphi''\,(1 - \lambda\cos\varphi'')^2\end{aligned}$$

ist, auch dadurch, dass statt Gl. (4) gesetzt wird:

$$M = \frac{\alpha}{\delta}\,\frac{Q\pi r}{c^2} - \frac{\alpha_1}{\delta}\,M_1\ \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

mit den wie oben bestimmten Werthen von α und mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,[\sin^2\varphi'\,(1 + \lambda\cos\varphi')^2 - \sin^2\varphi''\,(1 - \lambda\cos\varphi'')^2]\ \ldots (13).$$

Für $\varepsilon = 1$ ist $\varphi' + \varphi'' = 180^0$, also $\sin\varphi' = \sin\varphi''$, $\cos\varphi' = -\cos\varphi''$ und somit $\alpha_1 = 0$. Dagegen findet man für andere Werthe von ε die in folgender Zusammenstellung enthaltenen Werthe von α_1.

	$\varepsilon = 0{,}25$	$\varepsilon = 0{,}5$	$\varepsilon = 0{,}75$
$\lambda = 0$ $\beta = 0{,}05$	0,4070	0,2141	0,0602
$\lambda = 0$ $\beta = 0{,}2$	0,4450	0,2484	0,0698
$\lambda = 0{,}2$ $\beta = 0{,}05$	0,4043	0,2033	0,0528
$\lambda = 0{,}2$ $\beta = 0{,}2$	0,4512	0,2365	0,0611

§. 98. Zweifache Schubkurbel mit gleichen veränderlichen Schubkräften.

Hiermit wird ein Fall vorausgesetzt, der sich von dem in §. 95 behandelten dadurch unterscheidet, dass die Schubkräfte der mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle verbundenen zwei gleichen Schubkurbelgetriebe nicht constant, sondern in der Weise veränderlich sind, wie es im vorigen Paragraph für die einfache Schubkurbel angenommen wurde. Mit den Bezeichnungen von §. 95, unter ω insbesondere wieder den Voreilungswinkel des zweiten Getriebes vor dem ersten verstanden, ist dann auch hier ebenso wie dort die vom Anfange einer Periode (vom Durchgange des ersten Getriebes durch die obere Todlage) an gerechnete Arbeitsumme aller Kräfte:

$$A = [f(\varphi) + f(\psi) - f(\omega)]\, Q\pi r = [F(\varphi) - f(\omega)]\, Q\pi r,$$

und die dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende, auf die Kurbelzapfen (auf den Abstand r von der Axe der Kurbelwelle) reducirte rotirende Masse bei Abstraction vom Einflusse der Schiebermassen:

$$M = \frac{\alpha'}{\delta}\, \frac{2\,Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} \cdots\cdots\cdots (1),$$

unter $F(\varphi')$ das grösste Maximum, $F(\varphi'')$ das kleinste Minimum von $F(\varphi) = f(\varphi) + f(\psi)$ verstanden. Nur hat jetzt $f(\varphi)$ die durch Gl. (2) im vorigen Paragraph bestimmte, weniger einfache Bedeutung und ebenso

$$f(\psi) = f(\omega + \varphi) \text{ resp. } f(\omega + \varphi - \pi),$$

jenachdem $\omega + \varphi < \pi$ oder $> \pi$ ist. Auch ist es bei der somit ziemlich complicirten Form von $F(\varphi)$ jetzt vorzuziehen, die Maxima und Minima dieser Function durch unmittelbares Probiren zu ermitteln, indem die Werthe derselben für solche Configurationen während einer Periode ermittelt werden, die mit gleichen Intervallen des Drehungswinkels φ auf einander folgen. Die Annahme dieser Intervalle zunächst etwa $= 10^0$ genügt, um diejenigen derselben zu erkennen, in denen φ' und φ'' enthalten sind, wonach durch Interpolation mit kleineren Differenzen von etwa 1 bis 2^0 innerhalb fraglicher Intervalle die Werthe $F(\varphi')$ und $F(\varphi'')$ selbst mit genügender Annäherung zu finden sind. —

Wenn wieder, wie es gewöhnlich der Fall ist, $\omega = 90^0$ und zunächst $\lambda = 0$ angenommen wird, so findet zwischen oberer und unterer Todlage, somit zwischen erster und zweiter Hälfte der Periode kein Unterschied statt; ausserdem tauschen in den zwei Hälften jeder halben Periode die Functionen $f(\varphi)$ und $f(\psi)$ nur ihre Werthe um, so dass die Berechnung von $F(\varphi) = f(\varphi) + f(\psi)$ nur für eine Vierteldrehung der Kurbelwelle nöthig ist. Beispielsweise für $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$ entsprechen folgende Werthe dieser Functionen den beigesetzten Winkeln φ.

$\varphi =$	0	10^0	20^0	26^0	28^0	30^0	40^0
$f(\varphi) =$	0	−0,0424	−0,0587	−0,0565	−0,0538	−0,0502	−0,0189
$f(\psi) =$	0,2287	0,2384	0,2365	0,2305	0,2277	0,2246	0,2041
$F(\varphi) =$	0,2287	0,1960	0,1778	0,1740	0,1739	0,1744	0,1852

$\varphi =$	50^0	60^0	70^0	72^0	73^0	80^0	90^0
$f(\varphi) =$	0,0327	0,1012	0,1640	0,1738	0,1783	0,2049	0,2287
$f(\psi) =$	0,1760	0,1457	0,0999	0,0909	0,0863	0,0528	0
$F(\varphi) =$	0,2087	0,2469	0,2639	0,2647	0,2646	0,2577	0,2287

Daraus ist zu schliessen: $F(\varphi') = 0,2647$ für φ' nahe $= 72^0$,

$F(\varphi'') = 0,1739$ für φ'' nahe $= 28^0$,

somit $\alpha' = 0,0454$ für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$.

Durch die Aenderung des Verhältnisses β wird das Aenderungsgesetz der Function $F(\varphi)$ voraussichtlich nur unerheblich geändert, so dass es bei anderen Werthen von β und übrigens denselben Werthen von ω, λ, ε genügt, den Verlauf dieser Function nur in der Nähe von $\varphi = 28^0$ und $\varphi = 72^0$ zu untersuchen, um ihr Minimum und Maximum zu finden. So ergiebt sich beispielsweise für $\beta = 0,2$:

$\varphi =$	25^0	28^0	29^0	30^0	72^0	73^0	74^0
$f(\varphi) =$	−0,0444	−0,0375	−0,0346	−0,0315	0,2601	0,2654	0,2703
$f(\psi) =$	0,2920	0,2839	0,2810	0,2781	0,0967	0,0915	0,0863
$F(\varphi) =$	0,2476	0,2464	0,2464	0,2466	0,3568	0,3569	0,3566

$$F(\varphi') = 0,3569 \text{ für } \varphi' \text{ nahe } = 73^0,$$
$$F(\varphi'') = 0,2463 \text{ für } \varphi'' \text{ nahe } = 28,5^0,$$
$$\alpha' = 0,0553 \text{ für } \omega = 90^0,\ \lambda = 0,\ \varepsilon = 0,25 \text{ und } \beta = 0,2.$$

Wenn λ nicht $= 0$ ist, so sind auch die beiden Todlagen nicht gleichwerthig, indem vielmehr das doppelte Vorzeichen des Gliedes mit λ im

Ausdrucke von Φ (Gl. 2, §. 97) ein verschiedenes Aenderungsgesetz von $F(\varphi)$ in beiden Hälften der Periode bedingt. Es ist dann diese Function durch die ganze Periode, also für eine volle Umdrehung der Kurbelwelle für hinlänglich viele in gleichen Intervallen auf einander folgende (in der ersten Hälfte der Periode von der oberen, in der zweiten von der unteren Todlage an gerechnete) Winkel φ zu berechnen, um ihren Verlauf vollständig zu übersehen. So ergiebt sich beispielsweise für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0,2$, $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$ die folgende Uebersicht:

$\varphi =$	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$f(\varphi) =$	0	−0,0450	−0,0689	−0,0720	−0,0548	−0,0183	0,0360	0,1021	0,1523
$f(\psi) =$	0,1851	0,2034	0,2094	0,2046	0,1902	0,1671	0,1361	0,0976	0,0522
$F(\varphi) =$	0,1851	0,1584	0,1405	0,1326	0,1354	0,1488	0,1721	0,1997	0,2045
$\varphi =$	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
$f(\varphi) =$	0,1851	0,2034	0,2094	0,2046	0,1902	0,1671	0,1361	0,0976	0,0522
$f(\psi) =$	0	−0,0397	−0,0485	−0,0285	0,0170	0,0837	0,1617	0,2176	0,2513
$F(\varphi) =$	0,1851	0,1637	0,1609	0,1761	0.2072	0,2508	0,2978	0,3152	0,3035
$\varphi =$	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$f(\varphi) =$	0	−0,0397	−0,0485	−0,0285	0,0170	0,0837	0,1617	0,2176	0,2513
$f(\psi) =$	0,2677	0,2703	0,2616	0,2435	0,2175	0,1847	0,1460	0,1021	0,0533
$F(\varphi) =$	0,2677	0,2306	0,2131	0,2150	0,2345	0,2684	0,3077	0,3197	0,3046
$\varphi =$	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
$f(\varphi) =$	0,2677	0,2703	0,2616	0,2435	0,2175	0,1847	0,1460	0,1021	0,0533
$f(\psi) =$	0	−0,0450	−0,0689	−0,0720	−0,0548	−0,0183	0,0360	0,1021	0,1523
$F(\varphi) =$	0,2677	0,2253	0,1927	0,1715	0,1627	0,1664	0,1820	0,2042	0,2056

In jedem Viertel der Periode giebt es wieder, wie man sieht, ein Minimum und ein Maximum von $F(\varphi)$, doch sind jetzt die vier Minima und ebenso die vier Maxima verschieden, und zwar ist das kleinste Minimum im ersten Viertel zwischen $\varphi = 30^0$ und 40^0, das grösste Maximum im dritten Viertel zwischen $\varphi = 60^0$ und 70^0 zu vermuthen. In der That kann nach folgender Berechnung von Zwischenwerthen:

$\varphi =$	30°	32°	34°	68°	69°	70°
$f(\varphi) =$	— 0,0720	— 0,0701	— 0,0675	0,2083	0,2131	0,2176
$f(\psi) =$	0,2046	0,2024	0,1999	0,1113	0,1067	0,1021
$F(\varphi) =$	0,1326	0,1323	0,1324	0,3196	0,3198	0,3197

$$F(\varphi') = 0{,}3198 \text{ für } \varphi' = \varphi_2' \text{ nahe } = 69^0,$$
$$F(\varphi'') = 0{,}1322 \text{ für } \varphi'' = \varphi_1'' \text{ nahe } = 33^0,$$

also $\alpha' = 0{,}0938$ für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}25$ und $\beta = 0{,}05$ gesetzt werden.

Unter übrigens gleichen Umständen, aber mit $\beta = 0{,}2$ findet man:

	Erste Hälfte der Periode.			Zweite Hälfte der Periode.		
$\varphi =$	35^0	36^0	37^0	68^0	69^0	70^0
$f(\varphi) =$	$-0{,}0452$	$-0{,}0422$	$-0{,}0390$	0,2955	0,3008	0,3058
$f(\psi) =$	0,2514	0,2484	0,2454	0,1182	0,1131	0,1079
$F(\varphi) =$	0,2062	0,2062	0,2064	0,4137	0,4139	0,4137

und ist daraus zu schliessen:

$$F(\varphi') = 0{,}4139 \text{ für } \varphi' = \varphi_2' \text{ nahe } = 69^0,$$
$$F(\varphi'') = 0{,}2061 \text{ für } \varphi'' = \varphi_1'' \text{ nahe } = 35{,}5^0,$$
$$\alpha' = 0{,}1039 \text{ für } \omega = 90^0,\ \lambda = 0{,}2,\ \varepsilon = 0{,}25 \text{ und } \beta = 0{,}2.$$

Folgende Zusammenstellung enthält die Hauptresultate dieser Rechnungen für $\omega = 90^0$ und zugleich die Werthe von α', die nach §. 95 der Voraussetzung $\varepsilon = 1$ (unabhängig von β) entsprechen. In der vorletzten Columne sind die Werthe des Coefficienten α nach §. 97 hinzugefügt, und in der letzten die Verhältnisse von α' zu α, die wieder erkennen lassen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse dieser zweifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als sie für die zwei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn dieselben unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden.

λ	ε	β	α'	α	$\frac{\alpha'}{\alpha}$
0	0,25	0,05	0,0454	0,2980	0,152
0	0,25	0,2	0,0553	0,3689	0,150
0	1	—	0,0211	0,2105	0,100
0,2	0,25	0,05	0,0938	0,3440	0,273
0,2	0,25	0,2	0,1039	0,4130	0,252
0,2	1	—	0,0711	0,2577	0,276

Um α' oder $\frac{\alpha'}{\alpha}$ als empirische Functionen von λ, ε und β auszudrücken, sind diese 6 Gruppen zusammengehöriger Werthe kaum ausreichend, doch können sie zu schätzungsweiser Interpolation für andere Fälle dienen.

§. 99. Einfache Schubkurbel, deren Schubkraft für den Hin- und Hergang constant, aber verschieden gross ist.

In den vorhergehenden Paragraphen 93—98 wurde eine Schubkraft vorausgesetzt, die für die Bewegung des Schiebers im einen Sinne ebenso gross, bezw. ebenso veränderlich ist, wie für die Bewegung im anderen Sinne. Nicht selten kann es sich indessen auch anders verhalten, z. B. im Falle eines Kurbelschubgetriebes, dessen Schieber (etwa als Sägegatter) bei der Bewegung im einen Sinne einen grösseren Widerstand zu überwinden hat, als bei der umgekehrten Bewegung. Bei der folgenden Untersuchung dieses Falles für die einfache Schubkurbel werde indessen wieder ausgegangen von ihrer Verwendung als Schubkurbelgetriebe, und es sei

P_1 die als constant vorausgesetzte Grösse der Schubkraft für den Hingang des Schiebers, entsprechend der Bewegung des Getriebes von der oberen zur unteren Todlage oder der ersten Hälfte der Periode,

P_2 die gleichfalls constante Grösse der Schubkraft für den Hergang des Schiebers, entsprechend der Bewegung des Getriebes von der unteren zur oberen Todlage oder der zweiten Hälfte der Periode.

Setzt man dann

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = (1-p)\,P \text{ und } P_2 = (1+p)\,P, \\ P = \dfrac{P_1 + P_2}{2} \text{ und } p = \dfrac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1),$$

so ist

und folgt mit übrigens den früheren Buchstabenbezeichnungen aus der Bedingung des Beharrungszustandes:

$$(P_1 + P_2)\,2\,r = Q\,.\,2\pi r$$

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = P = \frac{\pi}{2}\,Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

übereinstimmend mit Gl. (6), §. 93, bei veränderter Bedeutung von P. Hiernach und mit Rücksicht auf die Bedeutung von Φ nach §. 93, Gl. (5) ist nun die vom Anfange der Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte für den Hingang:

$$A_1 = P_1 r\,\Phi - Q r\,\varphi = \left(\frac{P_1}{2\,P}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r = \left(\frac{1-p}{2}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r.$$

Für $\varphi = \pi$ ist $\Phi = 2$, also $A_1 = -\,p\,Q\pi r$, und deshalb die gleichfalls vom Anfange der ganzen Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte für den Hergang:

$$A_2 = -p\,Q\pi r + P_2 r\,\Phi - Q\,r\,\varphi = \left(-p + \frac{P_2}{2P}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r$$
$$= \left(-p + \frac{1+p}{2}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r.$$

Durch Einsetzung von $\Phi = 1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi$, und zwar im Ausdrucke von A_1 mit dem oberen, im Ausdrucke von A_2 mit dem unteren Vorzeichen des Gliedes mit λ, ergiebt sich auch:

$$A_1 = \left[\frac{1-p}{2} - \frac{1-p}{2}\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}\right] Q\pi r,$$
$$A_2 = \left[\frac{1-p}{2} - \frac{1+p}{2}\left(\cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}\right] Q\pi r,$$

überhaupt also die vom Anfange der Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte:

$$A = f(\varphi)\,.\,Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit
$$f(\varphi) = \frac{1-p}{2} - \frac{1 \mp p}{2}\left(\cos\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Dieser Ausdruck von $f(\varphi)$, worin die oberen Zeichen für den Hingang (die erste Hälfte der Periode), die unteren für den Hergang gelten, geht, wie es sein muss, für $p = 0$ in den Ausdruck (3), §. 94, über.

Wenn nun das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der auf den Kurbelzapfen reducirten rotirenden Masse M ein selbst in Vergleich mit dem Ungleichförmigkeitsgrade δ kleiner Bruch ist und deshalb die Kurbellagen, die den Maximal- und Minimalwerthen der Geschwindigkeit des Kurbelzapfens (deren Mittelwerth $= c$ ist) entsprechen, nach §. 92 gemäss der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0$$

bestimmt werden können, so ergeben sich die betreffenden Winkel φ nach Gl. (3) und (4) als Wurzeln der Doppelgleichung:

$$(1 \mp p)\left(\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) = \frac{2}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

die sich von Gl. (1) in §. 94 durch den Factor $(1 \mp p)$ auf der linken Seite unterscheidet. In jeder Hälfte der Periode giebt es ein Maximum und ein Minimum von $f(\varphi)$, und wenn insbesondere wieder φ' und φ'' die dem grössten Maximum resp. kleinsten Minimum entsprechenden Wurzeln von Gl. (5) sind, so folgt aus Gl. (12) in §. 92 bei Abstraction vom Einflusse der Schiebermasse:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha = f(\varphi') - f(\varphi'') \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

Indem aber jetzt die betreffenden ausgezeichneten Kurbelstellungen einander nicht in Beziehung auf den Durchmesser $B_0 B_1$, Fig. 104, des Kurbelkreises symmetrisch gegenüber liegen, sind m' und m'' nicht einander gleich, so dass die Schiebermasse M_1 in erster Annäherung zu berücksichtigen ist durch die Gleichung:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} - \frac{\alpha_1}{\delta} M_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

mit
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[\sin^2\varphi'(1 \mp \lambda\cos\varphi')^2 - \sin^2\varphi''(1 \mp \lambda\cos\varphi'')^2] \quad \ldots (8)$$

nach §. 93, Gl. (3). Die zwei oberen und zwei unteren Vorzeichen der Glieder mit λ gehören hier nicht nothwendig zusammen, indem vielmehr an jeder Stelle das Zeichen — oder + zu nehmen ist, jenachdem der betreffende Winkel φ' resp. φ'' der ersten oder zweiten Hälfte der Periode angehört, also vom oberen oder unteren Todpunkte aus gerechnet wird.

Ist $\frac{M_1}{M}$ nicht viel $< \delta$, so ist auch das für solchen Fall in §. 94 angegebene Verfahren zur endgültigen Bestimmung von M nur mit Rücksicht auf die jetzt erweiterte Bedeutung von $f(\varphi)$ zu modificiren. Nach den Gleichungen (8)—(11) daselbst ist also obige Doppelgleichung (5) zu ersetzen durch:

$$(1+p)\left(\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha\mu}{\delta}[\sin 2\varphi \mp \lambda\sin\varphi(1+3\cos 2\varphi)] = \frac{2}{\pi} \quad . (9)$$

mit $\mu = \frac{M_1}{M}$, unter M hier den durch Gl. (6) bestimmten Näherungswerth verstanden, und ist dann ferner mit

$$f_1(\varphi) = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \mp \lambda\sin\varphi\sin 2\varphi \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

und
$$F(\varphi) = f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

der corrigirte Werth von M:

$$M = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

§. 100. Getriebe mit unstetig veränderlichen Kräften und bewegten Massen.

Während die bisher besprochenen Anwendungen der allgemeinen Erörterungen von §. 92 sich nur auf Schubkurbelmechanismen bezogen, werde schliesslich noch ein Getriebe irgend welcher Art, dabei aber vorausgesetzt, dass die beständig wirkende treibende Kraft nur zeitweilig einen Widerstand (d. h. einen hier einzig in Betracht kommenden Nutzwiderstand) zu überwinden hat, wie es z. B. bei Hammer-, Poch- und Walzwerken, Lochmaschinen und dergleichen Arbeitsmaschinen vorkommt. Dabei kann es ausserdem der Fall sein, dass mit der plötzlichen Einwirkung des Widerstandes zugleich (wie bei Hammer- und Pochwerken) ein plötzlicher Zuwachs an bewegter Masse, somit ein Stoss mit plötzlicher Geschwindigkeitsabnahme verbunden ist. Unter solchen Umständen sei der Weg des (in unveränderlichem Abstande r von der Axe der Schwungradwelle gelegenen) Reductionspunktes während einer Periode $= a + b$, und zwar

a der mit Ueberwindung des Widerstandes zurückgelegte Theil dieses Weges (erster Theil der Periode),

b der andere Theil (Leerlauf),

P die im Reductionspunkte nach dessen Bewegungsrichtung beständig angreifend gedachte und als constant vorausgesetzte treibende Kraft,

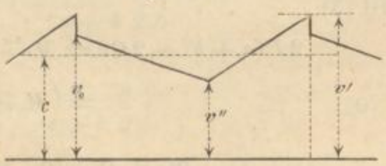
Q der gleichfalls constante und im Reductionspunkte entgegen seiner Bewegungsrichtung angreifend gedachte (auf denselben reducirte), aber nur während des ersten Theiles der Periode wirksame Widerstand,

M die unveränderliche (zumeist vom Schwungrade herrührende) auf den Abstand r von der Axe der Schwungradwelle reducirte rotirende Masse,

m die ebenso verstandene, aber nur während des ersten Theiles jeder Periode zugleich mit dem Widerstande Q hinzukommende reducirte Masse.

Das diesen Voraussetzungen entsprechende Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit v des Reductionspunktes ist durch Fig. 107 dargestellt, indem darin die Zeiten als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten abgetragen sind.

Fig. 107.



Nachdem zu Ende des Leerlaufs die Geschwindigkeit am grössten $= v'$ geworden ist, wird sie durch den Stoss der Masse M gegen die ruhende Masse m plötzlich auf v_0 erniedrigt, um dann im ersten Theile der neuen Periode noch weiter bis zum Minimum v'' abzunehmen und im zweiten Theile wieder bis v' zu wachsen; im einen wie im anderen Falle sind die bewegende Kraft und die bewegte Masse zeitweilig constant, ist also die Bewegung im ersten Theile der Periode gleichförmig verzögert, im zweiten gleichförmig beschleunigt, entsprechend je einem geraden Stücke der Geschwindigkeitslinie, Fig. 107.

Von den genannten Grössen seien gegeben: a, b, Q, m, ferner die mittlere Geschwindigkeit des Reductionspunktes $= c$ und der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung der Schwungradwelle $= \delta$; unbekannt sind: P, M, v_0, v'', v'. Zur Bestimmung dieser 5 Unbekannten, von denen übrigens die drei letzten nur als Hülfsgrössen zur Bestimmung von P und M in Betracht kommen, sind 5 Gleichungen erforderlich, die sich wie folgt ergeben.

Zunächst giebt die Gleichung der lebendigen Kraft, angewendet auf den ersten und auf den zweiten Theil der Periode:

$$(M+m)(v''^2 - v_0^2) = 2(P-Q)a \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$M(v'^2 - v''^2) = 2Pb \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Ferner entspricht dem Umstande, dass die Bewegungsgrösse durch den Stoss keine Aenderung erfährt, die Gleichung:

$$(M+m)v_0 = Mv' \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

und der Definition des Ungleichförmigkeitsgrades die Gleichung:

$$v' - v'' = \delta c \;\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

Endlich wird mit Rücksicht darauf, dass die Bewegung im ersten Theile der Periode gleichförmig verzögert, im zweiten gleichförmig beschleunigt ist, die Grösse c als mittlere Geschwindigkeit charakterisirt durch die Gleichung:

$$\frac{2a}{v_0 + v''} = \frac{2b}{v'' + v'} = \frac{a+b}{c} \;\ldots\ldots\ldots\; (5),$$

welche, indem sie zwei Ausdrücke der Periodendauer einander gleich setzt, als die dem vorliegenden Falle entsprechende Form von Gl. (4) in §. 92 zu betrachten ist.

Durch Addition von Gl. (1) und (2) ergiebt sich mit Rücksicht auf Gl. (3):

$$2P(a+b) - 2Qa = Mv'^2 - (M+m)v_0^2 + mv''^2$$

$$= \left(M - \frac{M^2}{M+m}\right)v'^2 + mv''^2$$

$$P(a+b) = Qa + \frac{Mm}{M+m}\frac{v'^2}{2} + m\frac{v''^2}{2} \;\ldots\ldots\ldots\; (6),$$

wie auch unmittelbar einleuchtet, da $\frac{Mm}{M+m}\frac{v'^2}{2}$ der Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoss und $m\frac{v''^2}{2}$ die lebendige Kraft ist, womit die Masse m zu Ende des ersten Theiles jeder Periode unabhängig vom Getriebe ihre Bewegung fortsetzt.

Mit $\mu = \frac{m}{M}$ ist ferner nach Gl. (3):

$$v' = (1 + \mu) v_0$$

und mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung nach Gl. (4):

$$v'' = v' - \delta c = \left(1 + \mu - \delta \frac{c}{v_0}\right) v_0 = (1 + \mu - \delta) v_0.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke von v' und v'' in Gl. (5) giebt:

$$\frac{2a}{2 + \mu - \delta} \frac{1}{v_0} + \frac{2b}{2 + 2\mu - \delta} \frac{1}{v_0} = \frac{a+b}{c},$$

also wieder mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung unter der Voraussetzung, dass μ ein höchstens mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist:

$$\frac{v_0}{c} = \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{b}{a+b}\left(1 - \mu + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{a+2b}{a+b}\frac{\mu}{2} \quad . \ (7),$$

somit
$$\frac{v'}{c} = (1+\mu)\frac{v_0}{c} = 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{a}{a+b}\frac{\mu}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (8)$$

und
$$\frac{v''}{c} = \frac{v'}{c} - \delta = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{a}{a+b}\frac{\mu}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (9).$$

Indem aus diesen zwei letzten Gleichungen

$$v' + v'' = 2c\left(1 + \frac{a}{a+b}\frac{\mu}{2}\right)$$

folgt, ergiebt sich daraus durch Multiplication mit Gl. (4):

$$v'^2 - v''^2 = 2\,\delta c^2\left(1 + \frac{a}{a+b}\frac{\mu}{2}\right)$$

und somit nach Gl. (2):

$$M = \frac{Pb}{\delta c^2}\left(1 - \frac{a}{a+b}\frac{\mu}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \ (10).$$

Endlich folgt aus (6) mit Rücksicht auf (8) und (9) und indem mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\frac{M}{M+m} = 1 - \mu$$

gesetzt, überhaupt die Producte kleiner Grössen gegen 1 vernachlässigt werden:

$$P(a+b)=Qa+\frac{mc^2}{2}\left[(1-\mu)\left(1+\delta+\frac{a}{a+b}\mu\right)+1-\delta+\frac{a}{a+b}\mu\right]$$

$$=Qa+mc^2\left(1-\frac{\mu}{2}+\frac{a}{a+b}\mu\right)$$

$$=Qa+mc^2\left(1+\frac{a-b}{a+b}\frac{\mu}{2}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Wenn vorläufig $\mu=0$ gesetzt wird, ergiebt sich aus (11) ein erster Näherungswerth von P und damit aus (10) ein solcher von M; mit dem diesem letzteren entsprechenden Werthe von μ können dann aus (11) und (10) corrigirte Werthe von P und M gefunden und nöthigenfalls wiederholt in gleicher Weise corrigirt werden.

In manchen der hierher gehörigen Fällen (z. B. bei Walzwerken, Lochmaschinen und dergl.) kann übrigens ohne in Betracht kommenden Fehler endgültig

$$m=0, \text{ also } \mu=0$$

gesetzt werden, nach Gl. (10) und (11) folglich:

$$P=\frac{a}{a+b}Q \text{ und } M=\frac{Pb}{\delta c^2}=\frac{ab}{a+b}\frac{Q}{\delta c^2} \ldots \ldots (12).$$

§. 101. Bestimmung der Dimensionen eines Schwungrades.

Nachdem im Vorhergehenden gezeigt wurde, wie die auf den Abstand r von der Axe der Schwungradwelle reducirte rotirende Masse M eines Getriebes, bezw. einer zusammengesetzten Maschine gemäss einem gegebenen Ungleichförmigkeitsgrade δ der rotirenden Bewegung dieser Welle bestimmt werden kann, handelt es sich noch darum, die Dimensionen des Schwungrades der Masse M entsprechend zu wählen. Ist aber M_0 der Theil von M, der event. von anderen rotirenden Massen herrührt, somit $(M-M_0)r^2$ die erforderliche Grösse des Trägheitsmoments des Schwungrades selbst für seine Axe, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, dieses Trägheitsmoment $=J$ auch als Function der Dimensionen des Schwungrades auszudrücken, um dann in der Gleichung:

$$J=(M-M_0)r^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

die verlangte Bedingungsgleichung für die Wahl fraglicher Dimensionen zu erhalten.

J besteht aus den Trägheitsmomenten des Schwungringes und des Armsystems sammt Nabe. Was zunächst den Schwungring betrifft, so sei

m seine Masse,

μ seine specifische Masse (Masse der Volumeinheit),

R der Radius seiner Mittellinie,

F der Flächeninhalt seines Querschnittes,

dF ein Element von F in der Entfernung x von der Geraden AA, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehend mit der Axe des Schwungrades parallel ist.

Dann ist, wenn x algebraisch verstanden, nämlich positiv oder negativ gesetzt wird, je nachdem die Entfernung des Flächenelements dF von der Radaxe $> R$ oder $< R$ ist, das Trägheitsmoment des Ringes

$$= \int \mu \,.\, 2\pi (R+x)\, dF \,.\, (R+x)^2 = \mu \,.\, 2\pi \int (R+x)^3\, dF$$
$$= \mu \,.\, 2\pi \left(R^3 F + 3R^2 \int x\,dF + 3R \int x^2 dF + \int x^3 dF\right),$$

alle Integrale ausgedehnt gedacht über den ganzen Querschnitt. Indem aber gemäss den Eigenschaften des Schwerpunktes

$$\int x\,dF = 0$$

und, falls der Querschnitt des Ringes, wie üblich, in Bezug auf seine Schwerpunktsaxe AA symmetrisch ist, auch

$$\int x^3 dF = 0$$

ist, ergiebt sich mit

$$\int x^2 dF = F f^2$$

$=$ dem Trägheitsmoment des Ringquerschnittes in Bezug auf jene Symmetrieaxe AA das Trägheitsmoment des Ringes für seine Axe auch

$$= \mu \,.\, 2\pi R F (R^2 + 3f^2) = m (R^2 + 3f^2) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist a die grösste radiale, b die grösste axiale Dimension von F, so ist insbesondere für einen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{rechteckigen Querschnitt:} & f^2 = \dfrac{a^3 b}{12} : ab = \dfrac{a^2}{12} \\ \text{elliptischen Querschnitt:} & f^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 \dfrac{b}{2} : \pi \dfrac{a}{2}\dfrac{b}{2} = \dfrac{a^2}{16} \end{array}\right\} \quad \ldots (3).$$

Was die Arme des Schwungrades betrifft, so mögen sie der Einfachheit wegen wie prismatische Stäbe in Rechnung gebracht werden, die sich (behufs Berücksichtigung des Einflusses der Nabe) bis zur Radaxe erstrecken; der dadurch begangene Fehler kommt nicht in Betracht in Vergleich mit dem oft viel grösseren, der durch Vernachlässigung oder wenigstens nur ungefähre Schätzung der oben mit M_0 bezeichneten

Masse begangen zu werden pflegt und als Consequenz der auch nur angenähert zutreffenden Berechnungsweise von M gerechtfertigt ist. Wird dann mit

m_1 die Masse eines Armes,

μ_1 seine specifische Masse,

$R_1 = R - \frac{a}{2}$ die der obigen Auffassung entsprechende Länge,

F_1 der Flächeninhalt seines Querschnittes bezeichnet, ferner mit

dF_1 ein Flächenelement im Abstande y von der mit der Radaxe parallelen Schwerpunktsaxe A_1A_1 des Querschnittes, dessen Entfernung von der Radaxe $= x$ ist, und mit

$F_1 f_1^2 = \int y^2 dF_1$ das Trägheitsmoment des Armquerschnittes für die Axe A_1A_1, so ergiebt sich das Trägheitsmoment des Armes für die Radaxe

$$= \int\int \mu_1 dF_1 dx (x^2 + y^2) = \mu_1 \int dF_1 \int x^2 dx + \mu_1 \int dx \int y^2 dF_1$$

$$= \mu_1 \frac{R_1^3}{3} \int dF_1 + \mu_1 F_1 f_1^2 \int dx = m_1 \left(\frac{R_1^2}{3} + f_1^2\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

mit $m_1 = \mu_1 F_1 R_1$. Nach (3) ist dabei wieder im Falle eines

$$\left.\begin{array}{l} \text{rechteckigen Querschnittes: } f_1^2 = \frac{h^2}{12} \\ \text{elliptischen Querschnittes: } f_1^2 = \frac{h^2}{16} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (5),$$

unter h die Armbreite, d. i. die rechtwinkelig zur Radaxe gemessene grösste Querschnittsdimension verstanden.

Ist also $G = mg$ das Gewicht des Schwungringes und αG das Gewicht aller Arme sammt Nabe, so folgt aus Gl. (2) und (4) das Trägheitsmoment des ganzen Schwungrades:

$$J = \frac{G}{g}\left[R^2 + 3f^2 + \frac{\alpha}{3}(R_1^2 + 3f_1^2)\right] \quad \ldots\ldots (6),$$

wofür in der Regel ohne in Betracht kommenden Fehler gesetzt werden kann:

$$J = \frac{G}{g} R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \quad \ldots\ldots (7).$$

Wenn durch Gleichsetzung dieses Ausdruckes mit dem Ausdrucke (1) für angenommene Werthe von R und α das Gewicht G des Schwungringes gefunden ist, so ergiebt sich sein Querschnitt F aus der Gleichung:

$$G = 2\pi R F \gamma \quad \ldots\ldots (8),$$

unter γ sein specifisches Gewicht verstanden.