Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen

urn:nbn:de:bsz:31-282938

also
$$M = \frac{mR + \mu' a (R - r)}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Die Kraft $P = \frac{M}{R + h}$, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, mit den hier betrachteten Reibungswiderständen im Gleichgewichte ist, geht in den durch Gl. (2) bestimmten Grenzwerth über, wenn R unendlich gross und $\alpha =$ Null wird.

Uebrigens ist das hier zuletzt betrachtete Rollenlager mit einem grösseren Widerstandsmoment verbunden, als das unter 4) besprochene, für welches nach Gl. (4) insbesondere mit $m_2 = m_1 = m$ sich ergiebt:
$$M = \frac{mR}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q$$
$=$ dem von der Walzenreibung herrührenden Bestandtheile des Widerstandsmoments nach Gl. (5).

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen.

§. 83. **Spannung von Zugkraftorganen bei Rollengetrieben.**

Die üblichen Zugkraftorgane (§. 28), Riemen, Seile und Ketten, insbesondere die zwei ersteren pflegen zur Getriebebildung mit Rollen kraftschlüssig so gepaart zu werden, dass die Reibung, die dem gegenseitigen Drucke beider Theile, bedingt durch die Spannung des Zugkraftorgans, entspricht, ein relatives Gleiten verhindert, insoweit es nicht die unvermeidliche Folge der verschieden grossen Spannungen und somit auch verschieden grossen Dehnungen ist, die dem Zugkraftorgane beim Auflaufen auf die Rolle und beim Ablaufen von derselben wegen ihres Drehungswiderstandes zukomen. Ausser der Reibung, die bei solcher Paarung einer Rolle mit einem sich gleichzeitig an verschiedenen Stellen auf- und abwickelnden Zugkraftorgane dem durch die Spannungs- und Dehnungsänderung desselben längs dem Rollenumfange bedingten partiellen relativen Gleiten entspricht, kann noch ein weiterer Bewegungswiderstand durch die sogenannte Steifigkeit verursacht werden, nämlich als Widerstand gegen die Krümmung des gestreckten Zugkraftorgans bei seiner Aufwickelung auf eine Rolle oder Trommel resp. gegen die Streckung desselben bei der Abwickelung. Die quantitative Beurtheilung jener Reibung und dieses Steifigkeitswiderstandes erfordert die Kenntniss der Spannung, die das Zugkraftorgan unter gegebenen Umständen haben muss, damit sein relatives Gleiten längs dem Umfange der Rolle, über die es hinweggeführt ist, auf das erwähnte partielle Gleiten beschränkt bleibe, nicht aber zu gleicher Zeit auf das ganze Zugkraftorgan sich erstrecke. Diese Spannung ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ein Band (unter welcher Bezeichnung hier der Kürze halber irgend ein Zugkraftorgan verstanden werde) sei längs der krummen Oberfläche eines starren Körpers K so ausgespannt, dass seine Mittellinie eine Curve bildet, deren Krümmungsradien normal zur Fläche sind; die Spannung des freien, d. h. ausser Berührung mit dem Körper K befindlichen und somit gerade gestreckten Bandes sei einerseits $= S_1$, andererseits $= S_2$, und es handle sich um die Beziehung, die zwischen S_1 und S_2 stattfinden muss, wenn ein Gleiten des Bandes im Sinne von S_1, also entgegen S_2 eben soll erfolgen können, während μ den betreffenden Reibungscoefficienten und α den gesammten Biegungswinkel, d. h. die Summe der Contingenzwinkel aller Bogenelemente des gekrümmten Theiles $B_1 B_2$ der Bandmittellinie bedeute. Indem bei fraglichem Grenzzustande die Spannung des Bandes von B_1 bis B_2 stetig von S_1 bis S_2 abnimmt, sei sie an irgend einer Stelle $= X$, an einer im Sinne gegen B_1 hin unendlich nahe benachbarten Stelle $= X + dX$, und $d\varphi$ der Contingenzwinkel des dazwischen liegenden Bogenelementes der Bandmittellinie. Der Normaldruck zwischen dem betreffenden Bandelemente und dem Körper K ist dann

$$= 2\, X \sin \frac{d\varphi}{2} = X\, d\varphi,$$

die Reibung $= \mu X\, d\varphi$, und da sie dem vorausgesetzten Grenzzustande entsprechend auch $= dX$ ist, ergiebt sich:

$$\frac{dX}{X} = \mu\, d\varphi; \quad ln \frac{S_1}{S_2} = \mu \alpha$$

oder $$S_1 = m S_2 \text{ mit } m = e^{\mu \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden.

Ist nun bei einem offenen oder einfachen Rollengetriebe (Fig. 30, §. 30) S_1 die Spannung des ablaufenden, S_2 die des auflaufenden Bandes im Falle einer getriebenen, d. h. entgegen einem Widerstande umzutreibenden Rolle, oder umgekehrt S_1 die Spannung des auflaufenden, S_2 die des ablaufenden Bandes im Falle einer treibenden Rolle, d. h. einer solchen, die, durch eine treibende Kraft gedreht, das gespannte Band durch Reibung mitnehmen soll, so ist, wenn r den Radius der Rolle (bis zur Mittellinie des Bandes gerechnet) und Qr im ersten Falle das Widerstandsmoment der Rolle, im zweiten das sie umtreibende Kraftmoment bedeutet,

$$S_1 - S_2 = Q.$$

Damit also ein relatives Gleiten des Bandes auf der Rolle wenigstens im Ganzen, d. h. längs der ganzen Berührungsfläche nicht stattfinde, nach Gl. (1) somit $S_1 < m S_2$ sei, muss auch

$$Q + S_2 < m S_2,\quad S_2 > \frac{1}{m-1} Q,\quad S_1 > \frac{m}{m-1} Q \quad \ldots\ldots (2)$$

sein, wenn m die durch Gl. (1) bestimmte Bedeutung hat, unter α den Mittelpunktswinkel des vom Bande umspannten Umfangsbogens der Rolle verstanden.

Bei dem geschlossenen oder doppelten Rollengetriebe (Fig. 31, §. 30) sind S_1 und S_2 von der Anfangsspannung S abhängig, die im Falle $Q = 0$ gleichmässig in der ganzen Länge $= 2\,l$ des endlosen Bandes stattfindet, und die somit einen gewissen Minimalwerth haben muss, um den Bedingungen (2) zu genügen. Wenn nämlich die Längen, die ein ungespanntes Bandstück von der Länge $= 1$

für die Spannungen $S \qquad S_1 \qquad S_2$

annimmt, beziehungsweise $= 1 + \varepsilon \qquad 1 + \varepsilon_1 \qquad 1 + \varepsilon_2$

sind, so verhält sich

$$S : S_1 : S_2 = \varepsilon : \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

und indem nun in Folge des am Umfange der getriebenen Rolle stattfindenden Widerstandes Q resp. in Folge der am Umfange der anderen Rolle stattfindenden gleich grossen treibenden Kraft Q ein Stück $= x$ der einen Bandhälfte, indem deren Spannung sich von S auf S_1 erhöht, zur anderen Seite hinüber gleitet, indem hier die Spannung sich auf S_2 vermindert, ändert sich die Gesammtlänge nicht, ist also (unter $2\,l$ die ganze Bandlänge im spannungslosen Zustande verstanden)

$$(l - x)(1 + \varepsilon_1) + (l + x)(1 + \varepsilon_2) = 2\,l(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{x}{l}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2\,\varepsilon.$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\,\varepsilon,\ \text{also}\ S_1 + S_2 = 2\,S,$$

so dass gemäss den Bedingungen (2) sein muss:

$$S > \frac{1}{2}\,\frac{m+1}{m-1}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da Q für beide Rollen denselben Werth $= S_1 - S_2$ hat und

$$\frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$$

um so grösser ist, je kleiner m, also je kleiner $\mu\alpha$, so muss die Bestimmung von S mit Rücksicht auf diejenige von beiden Rollen geschehen, für welche $\mu\alpha$ den kleineren Werth hat.

Für Lederriemen und für Drahtseile pflegt man im Durchschnitt $\mu = 0{,}25$ anzunehmen, während α wenig von π verschieden ist. Indem damit

$$m = e^{\mu\alpha} = 2{,}19 \text{ und } \frac{1}{2}\frac{m+1}{m-1} = 1{,}34$$

sich ergiebt, kann dann schliesslich etwa

$$S = 1{,}5\,Q, \quad S_1 = 2\,Q, \quad S_2 = Q$$

gesetzt werden, entsprechend einer Sicherheit der Spannung S im Betrage von etwa 12 % des erforderlichen Grenzwerthes.

Uebrigens ist der Reibungscoefficient μ in hohem Grade schwankend und besonders bei Riemengetrieben (Rollengetrieben mit Lederriemen als Zugkraftorganen) von verschiedenen Umständen in noch nicht genügend aufgeklärter Weise abhängig, nach Versuchen von Prof. Pinzger* z. B. wachsend mit der Wölbung der Rollenoberfläche und wesentlich (etwa im Verhältnisse 5 : 3) grösser für schmiedeiserne als für gusseiserne Rollen. Die Wölbung (entsprechend dem Ueberschusse des Rollendurchmessers in der Mitte über denselben an den Rändern) bedingt dabei nicht sowohl den Reibungscoefficienten selbst, als vielmehr die Riemenspannung, die bei gegebenem Reibungscoefficienten ein Gleiten des Riemens ermöglicht oder verhindert. Noch grösser wird die Unsicherheit in Betreff der zur Uebertragung einer gewissen Umfangskraft Q erforderlichen Riemenspannung S, wenn die nach Angaben von Prof. Radinger in Amerika den dort üblichen grossen Riemengetrieben zu Grunde liegende Anschauung zutreffend ist, derzufolge der Druck zwischen Riemen und Rolle nicht nur von der Riemenspannung, sondern auch wesentlich vom Atmosphärendrucke herrühren soll in Folge einer theilweisen Verdrängung der zwischen beiden Elementen befindlichen Luft, die bei ruhigem und gleichmässigem Auflegen des Riemens durch das stets stattfindende partielle Gleiten desselben längs der Rolle ermöglicht oder erleichtert werden mag. Auf Grund dieser Anschauung würde, wenn in Centimetern ausgedrückt b die Breite des Riemens und a die Länge des von ihm umspannten Bogens des Rollenumfanges bedeutet, und wenn am n^{ten} Theile der Berührungsfläche $= ab$ die Luft zwischen Rolle und Riemen vollständig verdrängt, somit der Atmosphärendruck mit etwa 1 Kgr. pro Quadratcentim. ausgeübt würde, dem eben beginnenden Gleiten des Riemens die Gleichung entsprechen:

$$S_1 = m S_2 + \mu \frac{ab}{n}$$

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1878, Nr. 14.

oder, wenn die höchstens zulässige Riemenspannung pro 1 Centim. Breite $= k$ Kgr., also $b = \frac{S_1}{k}$ gesetzt wird:

$$S_1 = \frac{m S_2}{1 - \frac{\mu a}{n k}}.$$

Aus der Gleichung $S_1 = S_2 + Q$ würde also folgen:

$$S_2 = \frac{Q}{\frac{m}{1 - \frac{\mu a}{n k}} - 1} = \frac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q,$$

demnächst $S_1 = S_2 + Q$ und $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Damit ein totales Gleiten nicht stattfinde, muss also sein:

$$\left.\begin{array}{c} S_2 > \dfrac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q; \quad S_1 > \dfrac{m}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \\ S > \dfrac{1}{2} \dfrac{m + 1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Mit $a = \pi r$, unter r den Rollenhalbmesser in Centimetern verstanden, und mit den Annahmen:

$$\mu = 0{,}25, \quad m = 2{,}19, \quad k = 10, \quad n = 10$$

ergiebt sich beispielsweise:

$$S > \frac{1}{2} \frac{3{,}19 - 0{,}00785\, r}{1{,}19 + 0{,}00785\, r} Q,$$

insbesondere z. B. für	$r = 20$	40	60	80	100 Centim.
	$S > 1{,}13$	0,96	0,82	0,70	0,61 Q,
also	$S_2 = S - \frac{1}{2} Q > 0{,}63$	0,46	0,32	0,20	0,11 Q
und	$S_1 = S + \frac{1}{2} Q > 1{,}63$	1,46	1,32	1,20	1,11 Q.

Bei einem Rollenhalbmesser $r = \frac{1}{0{,}00785} = 127$ Centimeter

wäre $S = \frac{1}{2} Q, \quad S_2 = 0, \quad S_1 = Q$

schon ausreichend, würde also unter den hier zu Grunde liegenden (bezüglich auf n freilich ganz willkürlichen) Voraussetzungen der Atmosphärendruck allein genügen, um die zur Uebertragung der Kraft Q erforderliche Reibung zu vermitteln. —

Der hier besprochenen günstigen Wirkung des Atmosphärendruckes steht, und zwar bei allen Rollengetrieben, eine ungünstige gegenüber in dem Einflusse der Centrifugalkraft, die den Druck des Bandes auf die Rolle bei grosser Geschwindigkeit wesentlich verkleinern kann. Ist nämlich p das Gewicht der Längeneinheit des Bandes, v seine Geschwindigkeit = der Peripheriegeschwindigkeit der Rolle, bezogen auf den bis zur Bandmittellinie gerechneten Halbmesser r, so ist die Centrifugalkraft eines dem Mittelpunktswinkel $d\varphi$ des umspannten Bogens entsprechenden Bandelementes

$$=\frac{p\,r\,d\varphi}{g}\,\frac{v^2}{r}=p\frac{v^2}{g}d\varphi,$$

und indem sie dem Normaldrucke $= X d\varphi$, der nach obiger Entwickelung durch die Bandspannung X verursacht wird, gerade entgegenwirkt, ist die betreffende Reibung nur

$$=\mu\left(X-p\frac{v^2}{g}\right)d\varphi.$$

Für den Grenzzustand bezüglich auf Rutschen des Bandes ist sie wieder $= dX$, und folgt dann aus der Gleichung:

$$\frac{dX}{X-p\frac{v^2}{g}}=\mu\,d\varphi$$

durch Integration zwischen den Grenzen S_2 und S_1 von X, 0 und α von φ:

$$ln\frac{S_1-p\frac{v^2}{g}}{S_2-p\frac{v^2}{g}}=\mu\alpha$$

$$S_1-p\frac{v^2}{g}=m\left(S_2-p\frac{v^2}{g}\right)\text{ mit } m=e^{\mu\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Diese Beziehung tritt an die Stelle von Gl. (1), und da die damit zu verbindende Gleichung $S_1-S_2=Q$ durch gleiche Abzüge von S_1 und S_2 nicht geändert wird, so erfahren auch die Bedingungen (2) für S_2 und S_1 sowie die Bedingung (3) für $S=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$ nur die Aenderung, dass auf der rechten Seite der Summand $p\frac{v^2}{g}$ hinzuzufügen ist. Dieselbe Bemerkung gilt von den Gleichungen (4). Wenn dabei die Zahlenwerthe von v und g auf das Meter als Längeneinheit bezogen werden, so ist auch unter p das Bandgewicht pro 1 Mtr. Länge zu verstehen.

Für ein bestimmtes Band hat S_1 einen gewissen als höchstens zulässig gegebenen Werth. Aus der Bedingung:

$$S_1 > \frac{m}{m-1} Q + p \frac{v^2}{g}$$

folgt also die durch das Band bei gegebener Geschwindigkeit v höchstens übertragbare Umfangskraft:

$$max\, Q = \frac{m-1}{m}\left(S_1 - p \frac{v^2}{g}\right).$$

Sie wäre $= 0$ für $$v = v_0 = \sqrt{\frac{g S_1}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Indem aber die übertragbare Arbeitstärke $= Qv$ am grössten wird für

$$S_1 v - p \frac{v^3}{g} = max, \text{ also } S_1 - 3p \frac{v^2}{g} = 0,$$

also für $$v = v_1 = \sqrt{\frac{g S_1}{3p}} = 0{,}577\, v_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

entsprechend $$max\,(Qv) = \frac{2}{3} \frac{m-1}{m} S_1 v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

ist es nicht nur nöthig, dass $v < v_0$, sondern auch rathsam, dass $v \leqq v_1$ sei. Die Berücksichtigung des Atmosphärendruckes bei Riemengetrieben hat eine Aenderung von v_0 und v_1 nicht zur Folge, nur eine solche von $max\,(Qv)$, indem nach Gl. (4) zu setzen ist:

$$\frac{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}}{m} \text{ statt } \frac{m-1}{m}.$$

Wenn z. B. die Dichte eines Lederriemens $= 0{,}9$ angenommen wird, also das Gewicht eines Cubikcentimeters $= 0{,}0009$ Kgr. oder das Gewicht eines Lederprisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratcentim. Querschnitt $= 0{,}09$ Kgr., so ist für einen Riemen von b Centim. Breite und 0,45 Centim. Dicke das Gewicht pro 1 Mtr. Länge:

$$p = 0{,}09 \,.\, 0{,}45\, b = 0{,}0405\, b \text{ Kgr.}$$

Hiermit und mit obiger Annahme: $S_1 = 10\, b$ Kgr. folgt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81 \,.\, 10}{3 \,.\, 0{,}0405}} = 28{,}4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

Wenn ferner ein Drahtseil aus n Eisendrähten von je d Millim. Durchmesser besteht und in Folge der spiralförmigen Windungen der Drähte in den Litzen und der Litzen im Seile die Länge des letzteren $= 0{,}9$ von der Drahtlänge angenommen wird, so ist bei einer zulässigen specifischen Spannung der Drähte von 6 Kgr. pro Quadratmillim. (abgesehen von der hinzukommenden Biegungsspannung beim Umlegen um eine Rolle):

$$S_1 = \frac{1}{0{,}9} \cdot 6\, n \frac{\pi d^2}{4},$$

indem dann auch der Cosinus des durchschnittlichen Neigungswinkels der Drahtmittellinien gegen die Seilmittellinie $= 0{,}9$ ist. Weil ferner die Dichte des Drahteisens $= 7{,}7$ gesetzt werden kann, also das Gewicht eines Prisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratmillim. Querschnitt = dem Gewichte eines Cubikcentimeters $= 0{,}0077$ Kgr., ergiebt sich:

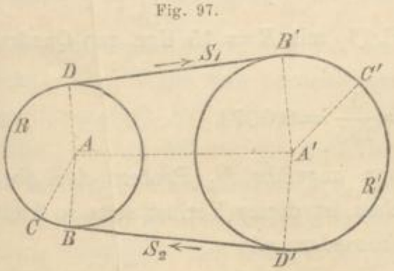
$$p = \frac{1}{0{,}9} \cdot 0{,}0077\, n \frac{\pi d^2}{4}$$

und somit $$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 6}{3 \cdot 0{,}0077}} = 50{,}4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

§. 84. Reibung in Folge partiellen Gleitens des Zugkraftorgans bei Rollengetrieben.

Wie schon im vorigen Paragraph bemerkt wurde, ist ein gewisses partielles Gleiten des mit einer Rolle gepaarten Zugkraftorgans unvermeidlich in Folge der verschiedenen Spannungen S_1 und S_2, somit auch der verschiedenen Dehnungen ε_1 und ε_2, womit es einerseits auf die Rolle aufläuft und andererseits von ihr abläuft. Bei doppelten Rollengetrieben ist in Folge dessen die (auf die Mittellinie des Zugkraftorgans bezogene) Peripheriegeschwindigkeit der treibenden Rolle $= v'$ etwas grösser, als die der getriebenen $= v$, und ist dann auch in demselben Verhältnisse die von der Umfangskraft $Q = S_1 - S_2$ der treibenden Rolle pro Secunde geleistete Arbeit Qv' grösser, als die auf die andere gleichzeitig übertragene Arbeit Qv.

Fig. 97.



Ist nämlich (Fig. 97) R die getriebene, R' die treibende Rolle, so muss das Band, da längs dem Bogen BD der getriebenen Rolle R seine Spannung von S_2 bis S_1, seine Dehnung von ε_2 bis ε_1 zunimmt, nothwendig im Sinne seiner Bewegung relativ gegen R gleiten

Indem dieses Gleiten den Grenzzustand des Gleichgewichtes bezüglich auf die Reibung voraussetzt, entsprechend der Gleichung

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha},$$

erstreckt es sich nicht längs dem ganzen umspannten Bogen BD, sondern nur längs dem Theile CD, dessen Mittelpunktswinkel α durch jene Gleichung bestimmt ist, während bis C die Spannung $= S_2$, die Dehnung $= \varepsilon_2$ bleibt. Ebenso bleibt auf der treibenden Rolle die Spannung des Bandes $= S_1$, seine Dehnung $= \varepsilon_1$ bis zu einer gewissen Stelle C' des umspannten Bogens $B'D'$, während es längs dem Bogen $C'D'$ in dem Maasse, wie die Spannung und Dehnung allmählig bis S_2 und ε_2 abnehmen, entgegen seinem Bewegungssinne relativ gegen R' gleitet. Indem nun die Peripheriegeschwindigkeiten der Rollen gleich den Geschwindigkeiten der sie ohne Gleitung berührenden Bandstücke $B'C'$ und BC, also proportional den Längen sind, die dasselbe Bandstück bei den Dehnungen ε_1 und ε_2 besitzt, ergiebt sich

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2}$$

und der verhältnissmässige Geschwindigkeitsverlust = dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste:

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2}$$

oder sehr nahe, wenn E der Elasticitätsmodul, F der Querschnitt des Bandes ist:

$$\frac{v' - v}{v} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{S_1 - S_2}{EF} = \frac{Q}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn z. B. nach vorigem Paragraph für das Millimeter als Längeneinheit im Falle eines Lederriemens von b Millim. Breite und 4,5 Millim. Dicke, also $F = 4{,}5\,b$ Quadratmillim. Querschnitt

$$S_1 = b \text{ Kgr.} = \frac{1}{4{,}5} F \text{ Kgr. und } Q = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{9} F \text{ Kgr.}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich nach Gl. (1) mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillimeter

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{1}{9\,E} = \frac{1}{135} = 0{,}0074 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

entsprechend einem Arbeitsverlust von ungefähr $^3/_4$ Procent der übertragenen Arbeit. Bei Drahtseilgetrieben ist dieser Verlust stets so klein, dass er nicht in Betracht kommt; insbesondere mit

$$S_1 = \frac{1}{0{,}9} \cdot 6\,n\,\frac{\pi d^2}{4} = 6\,F \text{ und } Q = \frac{1}{2} S_1 = 3\,F$$

nach vorigem Paragraph wäre mit $E = 20000$:

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{3}{E} = \frac{3}{20000} = 0{,}00015 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Mit dem Umstande, dass ein hinlänglich gespannter Riemen sich von der Stelle B resp. B' an, wo er auf eine Rolle R resp. R' (Fig. 97) aufläuft, zunächst bis zu einer gewissen Stelle C resp. C' ohne Gleitung auf die Rolle auflegt, hängt es auch zusammen, dass die Mittellinie des auf eine Rolle auflaufenden Riemenstücks in der Mittelebene dieser Rolle liegen muss, um Sicherheit gegen das Abfallen des Riemens zu gewähren, wogegen das ablaufende Riemenstück ohne Nachtheil unter einem ziemlich beträchtlichen Winkel gegen fragliche Mittelebene geneigt sein darf; wäre nämlich jene Bedingung für das auflaufende Riemenstück nicht erfüllt, so würde es sich spiralförmig auf die betreffende Rolle auflegen und somit unvermeidlich alsbald den Rand derselben erreichen, wenn nicht durch andere Umstände ein seitliches Gleiten des Riemens in solchem Sinne veranlasst wird, dass er sich mit seiner Mittellinie stets aufs Neue der Mittelebene der Rolle zuwendet. Ein solcher Umstand, der indessen auch nur sehr kleine Abweichungen von jener fundamentalen Regel einer Riemenführung unschädlich machen kann, ist, wie nebenbei hier bemerkt werden mag, die übliche convexe Wölbung einer Riemenrolle, die zur Folge hat, dass bei transversaler Bewegung des Riemens der in Beziehung darauf hintere Riemenrand mit seiner Annäherung an die Mittelebene verlängert wird. Mit solcher longitudinalen Dehnung ist aber eine transversale Contraction, somit ein seitliches Gleiten im Sinne von dem schwächer gespannten gegen den stärker gespannten Riemenrand verbunden.

In noch höherem Grade mag übrigens dem Abfallen des Riemens aus folgendem Grunde durch die Wölbung der Rollen entgegen gewirkt werden. Es seien $s_1 = \frac{S_1}{b}$ und $s_2 = \frac{S_2}{b}$ die den Riemenspannungen S_1 und S_2 entsprechenden specifischen, d. h. auf die Einheit der Riemenbreite bezogenen Spannungen. Wenn nun zunächst bei der getriebenen Rolle R, Fig. 97, das Riemenstück BC aus irgend einem Anlass eine seitliche Verschiebung erfährt, so wird dadurch die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_2$, am anderen $< s_2$, während sie bei D in der ganzen Breite gleichmässig $= s_1$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2 e^{\mu \alpha}$ ergiebt sich somit α für den schwächer gespannten Rand (Spannung $< s_2$) grösser, so dass an diesem das longitudinale Gleiten im Sinne der Riemenbewegung früher beginnt und durch convexe Biegung eine seitliche Ablenkung gegen den stärker gespannten Rand hin zur Folge hat, wodurch die Mittellinie des Riemens sich gegen die Mittelebene der Rolle zurückbewegt. Ebenso wird in Folge einer seitlichen Verschiebung des Riemenstücks $B'C'$ auf der treibenden Rolle R' die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_1$, am anderen $< s_1$, während sie bei D' in der ganzen Breite gleichmässig $= s_2$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2\, e^{\mu\alpha}$ ergiebt sich also hier α grösser für den stärker gespannten Rand (Spannung $> s_1$), so dass an ihm das longitudinale Gleiten entgegen dem Bewegungssinne des Riemens früher beginnt und dadurch jetzt mit concaver Biegung wieder eine seitliche Ablenkung gegen diesen stärker gespannten Rand hin zur Folge hat.

§. 85. Steifigkeit von Zugkraftorganen.

Die Steifigkeit eines Zugkraftorgans äussert sich dadurch, dass der Krümmungsradius desselben nur stetig sich ändern, dass er insbesondere nicht plötzlich von ∞ in r oder umgekehrt übergehen kann, unter r den um die halbe Dicke des Zugkraftorgans vergrösserten Radius einer mit ihm gepaarten Rolle verstanden. Ist dann S die Spannung des Zugkraftorgans an einer Stelle, wo es gerade gestreckt, also noch nicht oder nicht mehr mit der Rolle in Berührung ist, so ist in Bezug auf deren Axe der Hebelarm von S im Allgemeinen nicht $= r$, sondern $= r + s$, unter s eine Grösse verstanden, die positiv oder negativ sein kann, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und je nach den Ursachen, die der Steifigkeit zu Grunde liegen.

In letzterer Hinsicht ist namentlich zu unterscheiden, ob die Steifigkeit von der Elasticität des Materials herrührt oder von innerer Reibung bei discontinuirlicher Beschaffenheit des Zugkraftorgans, wie solche insbesondere bei Seilen und Ketten vorliegt. Im ersten Falle ist s stets positiv, einerlei ob es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und es wird die Arbeit, die zur Biegung des gestreckten Bandes bei seiner Aufwickelung auf die Rolle oder Trommel aufgewendet werden muss, bei der Abwickelung wieder gewonnen; im zweiten Falle aber ist s nur bei der Aufwickelung positiv, bei der Abwickelung dagegen negativ, indem die Streckung des gebogenen nicht minder wie die Biegung des gestreckten Bandes den Aufwand einer gewissen Arbeit erfordert. Wenn also, wie gewöhnlich, die Steifigkeit von beiden Ursachen zugleich herrührt, so findet bei der Aufwickelung jedenfalls eine Absperrung statt, einem positiven s entsprechend, während bei der Abwickelung s positiv, Null oder negativ sein kann, jenachdem die Elasticität oder die innere Reibung von überwiegendem Einflusse ist.

Insofern die Steifigkeit von der Elasticität herrührt, kann sie als Bewegungswiderstand in Betracht kommen, wenn das durch einen Nutzwiderstand gespannte Zugkraftorgan, insbesondere z. B. ein Drahtseil auf eine Windetrommel aufzuwinden ist. Der Biegungswiderstand eines solchen Drahtseils ist wesentlich kleiner, als der eines homogenen Stabes von gleicher Dicke und gleichem Material; indem nämlich in Folge spiralförmiger Windung der Drähte in den Litzen und der Litzen im Seile jeder Draht periodisch in die kleinste und die grösste Entfernung von der Trommelaxe gelangt, ist damit wegen relativer Verschiebung der Drähte gegen einander keine wesentliche Aenderung ihrer mittleren Spannung verbunden. Abgesehen von der durch diese Verschiebung bedingten inneren Reibung kann somit die Arbeit, die ein aus n Drähten von je d Millim. Durchmesser bestehendes Seil pro Längeneinheit zur Aufwickelung auf eine Trommel von r Millim. Radius erfordert, dem n-fachen der betreffenden Biegungsarbeit A pro Längeneinheit eines einzelnen Drahtes gleich gesetzt werden. Letztere ist (siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit", S. 394, Gl. 694):

$$A = \frac{EJ}{2r^2} = \frac{E}{2r^2}\frac{\pi d^4}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn also jeder Draht im Sinne der Seilmittellinie die Kraft

$$S = \frac{6}{0,9}\frac{\pi d^2}{4}$$

zu übertragen hätte, entsprechend einer specifischen Spannung $= 6$ Kgr. pro Quadratmillim. im Sinne der Drahtmittellinie, falls der Cosinus ihres durchschnittlichen Neigungswinkels gegen die Seilmittellinie (wie in §. 83) $= 0,9$ gesetzt wird, so wäre, da diese Kraft S bei der Aufwickelung eines Seilstücks von der Länge $= 1$ auch die Arbeit S verrichtet, der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die elastische Seilsteifigkeit:

$$\frac{A}{S} = \frac{0,3\,E}{64}\left(\frac{d}{r}\right)^2 = \frac{3000}{32}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

mit $E = 20000$ Kgr. pro Quadratmillimeter für Eisendraht. Bei $r > 800\,d$ ist er $< 0,00015$ und deshalb zu vernachlässigen.

Von Wichtigkeit dagegen, und zwar nicht nur bei Winden, sondern auch bei Rollengetrieben ist dieser elastische Biegungswiderstand von Zugkraftorganen insofern, als er mit erhöhter Anstrengung derselben verbunden ist. Insbesondere wird dadurch die specifische Spannung der Drähte eines Drahtseils bei obiger Bedeutung der Buchstaben um

$$k = E\frac{d}{2\,r}$$

vergrössert, und wenn diese Vergrösserung z. B. für Eisendraht höchstens $= 12$ Kgr. pro Quadratmillim. sein soll, damit die Gesammtspannung < 18 Kgr. bleibe und somit höchstens etwa $^1/_3$ der Zugfestigkeit erreiche, so muss mit $E = 20000$:

$$r > \frac{20000}{24}\,d,\ \text{d. i.} > 833\,d$$

sein. In dem gewöhnlichen Falle eines aus 36 Drähten (6 Litzen zu je 6 Drähten) bestehenden Seiles ist der äussere Durchmesser desselben ungefähr $= 8\,d$, und muss also der Rollenhalbmesser wenigstens 100 mal so gross sein, wie die Seildicke, wenn jene höchstens zulässige Anstrengung nicht überschritten werden soll.

Fast unbeschränkt ist die Wahl des Rollenhalbmessers bei einem Riemengetriebe, wenn auch die Riemenspannung höchstens $= {}^1/_3$ der Zugfestigkeit werden soll. Der Zuwachs k dieser Spannung eines Riemens von der Dicke d auf einer Rolle vom Halbmesser r ist jedenfalls

$$< E\frac{d}{2\,r},$$

da der Riemen sich nicht vollständig wie ein homogener elastischer Stab verhält, mit seiner Biegung vielmehr eine relative Verschiebung der Gewebefasern in um so höherem Grade verbunden ist, je stärker der Riemen gebogen wird. Mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillim. und $d = 4{,}5$ Millim. ist also selbst für $r = 50$ Millim.

$$k < \frac{15\,.\,4{,}5}{100},\ \text{d. i.} < 0{,}68$$

und bleibt also die resultirende specifische Spannung, wenn sie im gestreckten und somit auch in der Mittelfläche des gebogenen Riemens (wie in den vorigen Paragraphen) $= \frac{1}{4{,}5} = 0{,}22$ Kgr. pro Quadratmillim. angenommen wird, wesentlich $< 0{,}9$ Kgr., während die Zugfestigkeit guten Rindsleders zu wenigstens 2,7 Kgr. pro Quadratmillim. anzunehmen ist. —

Die innere Reibung als Ursache der Steifigkeit eines Zugkraftorgans von discontinuirlicher Beschaffenheit, nämlich der Widerstand gegen die mit einer Krümmungsänderung seiner Mittellinie verbundene relative Bewegung seiner Bestandtheile (insbesondere der Fäden oder Drähte eines Seils, der Glieder einer Kette) ist sehr leicht zu beurtheilen und in Rechnung zu bringen bei einer Kette, die in Folge ihrer Paarung mit einer Rolle oder Trommel sich auf- oder abwickelt. Ist r der Halbmesser der letzteren (gerechnet bis zur Mittellinie der Kette), d der Durchmesser des Rundeisens, woraus die Kettenglieder verfertigt sind, oder der Bolzendurchmesser bei sogenannten Gelenk- oder Laschenketten, und ist α der Mittelpunktswinkel des einem einzelnen Kettengliede entsprechenden Bogenstücks der von der Kette umspannten Rolle, so haben sich zwei auf einander folgende Kettenglieder um den Winkel α gegen einander zu drehen während die Rolle sich um denselben Winkel dreht, also ein Kettenstück $= r\alpha$ sich auf- oder abwickelt. Ist dann S die Kettenspannung an der Auf- oder Abwickelungsstelle und μ der Reibungscoefficient, so wirkt jener relativen Verdrehung der Kettenglieder eine Reibung $= \mu S$ mit einer Arbeit $= \mu S \frac{d}{2} \alpha$ entgegen, während die Zugkraft S der Kette die Arbeit $Sr\alpha$ verbraucht oder verrichtet, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung der Kette handelt. Somit ist die dem Gleichgewichtszustande entsprechende, am Hebelarme r wirkende Umfangskraft Q der Rolle für den Fall der Aufwickelung bestimmt durch die Gleichung:

$$Qr\alpha = Sr\alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Qr = S\left(r + \frac{\mu d}{2}\right)$$

und für den Fall der Abwickelung durch die Gleichung:

$$Sr\alpha = Qr\alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Qr = S\left(r - \frac{\mu d}{2}\right),$$

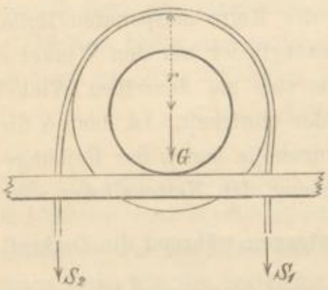
allgemein also $$Qr = S(r + s) \text{ mit } s = \pm \frac{\mu d}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Der verhältnissmässige Arbeitsverlust ist $= \pm \frac{s}{r} = \frac{\mu d}{2r}$.

Bei **Seilen** hängt die analoge Grösse s von sehr mannigfachen Umständen ab: von der Beschaffenheit des Materials der Fäden oder Drähte und von der Art, wie das Seil aus ihnen hergestellt ist, insbesondere von ihrer mehr oder weniger starken Drehung in den Litzen und der letzteren im Seile, ferner von Substanzen, die absichtlich und dauernd (Theer) oder unabsichtlich und zeitweilig (Wasser in feuchtem Medium) das Seil durchdringen, von der Seilspannung und vom Radius der Rolle, vielleicht auch von der Geschwindigkeit, sofern die der Krümmungsänderung entsprechende relative Verschiebung der Fäden und Drähte eine gewisse Zeit erfordert, überhaupt also von einer so grossen Zahl und von so gearteten Umständen, dass ein genügender Aufschluss über die Wirkung derselben nur von Versuchen zu erwarten ist, die bisher nur in wenig umfassender Weise angestellt wurden.

Am meisten Vertrauen scheinen einige Versuche Weisbach's zu verdienen, bei denen, wie Fig. 98 andeutet, die Versuchsrollen mit zwei auf ihren Axen fest sitzenden und auf einer horizontalen Schienenbahn laufenden gleichen Rädern verbunden waren. Das zu prüfende Seil wurde über die Rolle gelegt, beiderseits mit gleichen Gewichten S_2 belastet, und dann zunächst auf der einen, demnächst auf der anderen Seite allmählig so lange weiter belastet bis der Apparat zu rollen anfing. Das dazu nöthige Zulagegewicht wäre in beiden Fällen ganz gleich, wenn die Schienenbahn genau horizontal wäre; setzt man aber $S_1 = S_2 +$ dem arithmetischen Mittel der beiden Fällen entsprechenden Zulagegewichte, so wird dadurch ein etwaiger kleiner Fehler der horizontalen Schienenlage eliminirt und ist, unter G das Gewicht des Apparates und unter m die Constante der Walzenreibung (§. 81) verstanden,

Fig. 98.



$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + m(S_1 + S_2 + G)$$

oder
$$(S_1 - S_2)r = S_2 s_2 - S_1 s_1 + m(S_1 + S_2 + G).$$

Dafür kann, da S_1 und S_2 hier nur sehr wenig verschieden sind, mit $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ ohne in Betracht kommenden Fehler auch gesetzt werden:

$$(S_1 - S_2)r = S(s_2 - s_1) + m(2S + G)$$

und ergiebt sich daraus die Grösse $s_2 - s_1$, nachdem die Constante m durch einen zweiten Versuch bestimmt wurde, bei welchem unter übrigens gleichen Umständen statt des Versuchsseiles eine so biegsame Schnur benutzt wird, dass für dieselbe s_1 und s_2 = Null gesetzt werden können. Da ferner die von der Elasticität herrührenden Bestandtheile von s_1 und s_2 einander gleich zu setzen sind, so können in der gefundenen Differenz $s_2 - s_1$ unter s_1 und s_2 auch die von der Elasticität unabhängigen, nur von innerer Reibung herrührenden betreffenden Grössen verstanden werden. Von diesen ist s_1 hier negativ und absolut genommen dem positiven s_2 gleich zu setzen, allgemein also $s_2 - s_1 = \pm 2s$, unter $r + s$ den Hebelarm verstanden, mit welchem bei alleiniger Rücksicht auf die von innerer Reibung herrührende Steifigkeit sich das betreffende, durch die Kraft S gespannte Seil auf die

Rolle vom Radius r aufwickelt resp. davon abwickelt. Weisbach fand diese Grösse ziemlich entsprechend der empirischen Formel:

$$s_2 - s_1 = \pm 2s = a + b\frac{r}{S},$$

unter a und b Constante verstanden, die von der Dicke und sonstigen Beschaffenheit des Seiles abhängen. Insbesondere ergab sich, wenn r in Centimetern, S in Kilogrammen ausgedrückt wird, für ein getheertes Hanfseil von 4,18 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}565 + 1{,}5\frac{r}{S} \text{ Centim.},$$

für ein neues ungetheertes Hanfseil von 1,96 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}164 + 0{,}086\frac{r}{S} \text{ Centim.},$$

für ein Drahtseil von 1,74 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}238 + 0{,}49\frac{r}{S} \text{ Centim.},$$

für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile von 1,53 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}0694 + 0{,}57\frac{r}{S}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Grösse s von der Dicke und der Herstellungsart des Seiles, z. B. auch bei Drahtseilen von der Anzahl und Dicke der Drähte bei gegebener Seildicke abhängt, bleibt näherer Prüfung vorbehalten. Setzt man aber vorläufig den Absolutwerth von s proportional d^2, unter d hier den Seildurchmesser in Centimetern verstanden, eine Annahme, die insbesondere auch den Folgerungen Eytelwein's und Redtenbacher's aus älteren Versuchen Coulomb's mit Hanfseilen entspricht, so ergiebt sich aus obigen Resultaten der Weisbach'schen Versuche im Mittel:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für Hanfseile: } s = \pm\left(0{,}019 + 0{,}027\frac{r}{S}\right)d^2 \text{ Centim.} \\ &\text{für Drahtseile: } s = \pm\left(0{,}027 + 0{,}102\frac{r}{S}\right)d^2 \text{ Centim.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4).$$

Hiernach ist u. A. der bei einem Seilgetriebe durch die Seilsteifigkeit verursachte Arbeitsverlust zu beurtheilen. Ist dabei S_1 die Spannung des straffen, S_2 die des schlaffen Seilstückes und Q die Umfangskraft, so ist mit Bezug auf die getriebene sowohl wie die treibende Rolle (vom Halbmesser r):

$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + Qr,$$

indem dabei die Grössen s_1 und s_2, die hier nur mit ihren von der Elasticität unabhängigen Bestandtheilen in Betracht kommen, für die genannten zwei Fälle sich dadurch unterscheiden, dass für die getriebene Rolle s_2 positiv und s_1 negativ, für die treibende umgekehrt s_1 positiv und s_2 negativ ist. Indem also das obere Vorzeichen auf den ersten, das untere auf den zweiten Fall bezogen wird, ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \pm \frac{S_2 s_2 - S_1 s_1}{Qr}$$

oder, wenn nach Gl. (4) die Absolutwerthe von s_1 und s_2 beziehungsweise

$$= \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_1}\right) d^2 \text{ und } = \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_2}\right) d^2$$

gesetzt werden, unter d die Seildicke verstanden, und mit $S_1 + S_2 = 3\,Q$ (§. 83):

$$\sigma = \frac{\alpha(S_1 + S_2) + 2\beta r}{Qr} d^2 = \left(\frac{3\,\alpha}{r} + \frac{2\,\beta}{Q}\right) d^2$$

$$= 3\,\alpha \frac{d^2}{r} + \frac{2\,\beta}{\gamma} \text{ mit } Q = \gamma d^2.$$

Für ein Seil von gegebener Art sind α, β, γ Constante, ist somit σ um so kleiner, je kleiner d und je grösser r ist. Setzt man insbesondere für ein Drahtseil nach Gl. (4) für das Centimeter als Längeneinheit

$$\alpha = 0{,}027 \text{ und } \beta = 0{,}102,$$

ferner im Falle von $n = 36$ Drähten zu je d_1 Millimeter $= \frac{10\,d}{8}$ Millimeter Durchmesser nach §. 83:

$$S_1 = 2\,Q = \frac{6}{0{,}9} n \frac{\pi d_1^2}{4} = 60\,\pi d_1^2 = \frac{6000}{64} \pi d^2,$$

also
$$\gamma = \frac{3000}{64} \pi = 147,$$

so ergiebt sich
$$\sigma = 0{,}08 \frac{d^2}{r} + 0{,}0014 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Für Lederriemen fehlt es an bekannt gewordenen Versuchen über den Einfluss der Steifigkeit. Nimmt man aber etwa an, dass durch die bei der Streckung des von der Rolle ablaufenden Riemens verrichtete Elasticitätsarbeit die durch innere Reibung bei der Biegung des auflaufenden und bei der Streckung des ablaufenden Riemens verbrauchte Arbeit gerade aufgewogen wird, so besteht der ganze Arbeitsverlust für die getriebene oder für die treibende Rolle in derjenigen Arbeit, die zur Biegung des Riemens erfordert wird. Dieselbe ist nach Gl. (1) für ein Riemenstück von der Länge 1:

$$A = \frac{EJ}{2\,r^2} = \frac{E}{2\,r^2}\frac{b\,d^3}{12},$$

unter b die Breite, d die Dicke des Riemens verstanden, und da die gleichzeitige Arbeit der Umfangskraft Q selbst $= Q$ ist, so wäre der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \frac{A}{Q} = \frac{E b\, d^3}{24\, Q r^2}$$

oder für das Millimeter als Längeneinheit mit $E = 15$ und

$$S_1 = 2\,Q = \frac{1}{4{,}5}\,b\,d, \text{ also } \frac{b\,d}{Q} = 9:$$

$$\sigma = \frac{45}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2.$$

Insbesondere mit $d = 4{,}5$ Millim. wird $\sigma = \frac{114}{r^2}$ oder, wenn wie in Gl. (5) der Radius r in Centimetern ausgedrückt ist,

$$\sigma = \frac{1{,}14}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

ein Ausdruck, der freilich einstweilen nur als Nothbehelf zu betrachten ist in Ermangelung anderweitiger, besser begründeter Anhaltspunkte.

§. 86. Beispiele.

1) Der Arbeitsverlust bei Riemengetrieben rührt her von dem partiellen Gleiten des Riemens auf den Rollen, von der Steifigkeit desselben und von der durch die Riemenspannung vermehrten Zapfenreibung der die Rollen tragenden Wellen. Sind r und r' die Halbmesser der Rollen in Centimetern, so ist der durch die zwei ersten Umstände verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84, Gl. (2) und §. 85, Gl. (6)

$$= 0{,}0074 + 1{,}14\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

z. B. $=$	0,030	0,013	0,009	0,008
für $r = r' =$	10	20	40	100 Centim.

Bei dem geringen Grade von Zuverlässigkeit dieser Werthe kann der betreffende Arbeitsverlust für Rollen von wenigstens 20 Centim. Radius allgemein zu 0,01 der übertragenen Arbeit geschätzt werden.

Sind ferner w und w' die Halbmesser der betreffenden Wellenzapfen, und ist μ' der Coefficient der Zapfenreibung im Sinne von §. 72, Q die Umfangskraft, so ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die den

Riemenspannungen S_1 und S_2 (§. 83) entsprechenden Zapfenreibungen, da jene Spannungen einen hinlänglich kleinen Winkel zu bilden pflegen, um ihre Resultante $= S_1 + S_2$ setzen zu können,

$$= \frac{\mu'(S_1 + S_2)\,w}{Q r} + \frac{\mu'(S_1 + S_2)\,w'}{Q r'}$$

$$= 3\,\mu'\left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } S_1 + S_2 = 3\,Q$$

$$= 0{,}2\left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } \mu' = 0{,}067$$

$$= 0{,}03 \text{ bis } 0{,}06 \text{ mit } \frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075 \text{ bis } 0{,}15.$$

Bei liegenden Wellen stellt sich aber dieses Verhältniss wesentlich günstiger heraus mit Rücksicht auf das Gewicht G der Wellen, das in der Regel viel $> 3\,Q$ ist. Liegen dann die Wellen über einander, so hat die Riemenspannung lediglich die Wirkung, dass die untere Welle um den Betrag $3\,Q$ entlastet und dieser Theil ihres Gewichtes von den Lagern der oberen Welle getragen wird, so dass im Falle $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'}$ für beide zusammen gar keine Vermehrung der Zapfenreibung durch das Riemengetriebe bedingt wird. Je mehr freilich die durch die Wellenaxen gehende Ebene einer horizontalen Lage sich nähert, desto grösser wird der durch die Riemenspannung verursachte Zuwachs an Reibung, indem er bei gleicher Höhenlage beider Axen für die Welle vom Gewichte G bedingt wird durch den Druck:

$$\sqrt{G^2 + 9\,Q^2} - G, \text{ z. B. } = 3\,Q \quad Q \quad 0$$
$$\text{für } G = 0 \quad 4\,Q \quad \infty$$

Sofern aber thatsächlich $G > 4\,Q$ zu sein pflegt, ergiebt sich der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung, insoweit diese von der Riemenspannung herrührt, doch nur höchstens etwa $= \frac{1}{3}$ des obigen ohne Rücksicht auf G ermittelten Werthes, d. h. höchstens $= 0{,}01$ bis $0{,}02$ für $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075$ bis $0{,}15$.

Bei Zahnrädergetrieben mit horizontalen Wellen findet ein Einfluss der Axenlage auf die Vergrösserung der Zapfenreibung durch den Theilrissdruck Q in umgekehrtem Sinne statt: liegen die Axen über einander, so findet eine solche Vermehrung derselben statt, die dem Druckzuwachse $\sqrt{G^2 + Q^2} - G$ entspricht; liegen sie aber in gleicher Höhe, so wird die eine Welle um Q entlastet und dieser Betrag des Zapfendruckes auf die andere Welle übertragen.

2) Bei Drahtseilgetrieben ist der vom Gleiten des Seiles auf den Rollen herrührende verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84 verschwindend klein. Der durch die Seilsteifigkeit verursachte ist für jede der beiden Triebrollen nach Gl. (5) in §. 85 zu beurtheilen, insbesondere mit $d = 0{,}01\,r$

$$= 0{,}0008\,d + 0{,}0014 = 0{,}002 \text{ bis } 0{,}003$$

zu setzen bei einem Seildurchmesser $d = {}^3/_4$ bis 2 Centimeter, für beide Triebrollen zusammen folglich $= 0{,}004$ bis $0{,}006$.

Die Verhältnisse $\frac{w}{r}$ und $\frac{w'}{r'}$ sind der grossen Rollendurchmesser wegen hier wesentlich kleiner, als bei Riemengetrieben, im Durchschnitt etwa $= 0{,}03$. Die durch die Seilspannung verursachte Vermehrung der Zapfenreibungsarbeit wird dann für das Seilgetriebe selten mehr als 0,005 der übertragenen Arbeit ausmachen, somit der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust kaum mehr als 0,01 abgesehen von den durch die Gewichte der Rollen sammt Wellen verursachten Zapfenreibungen, die je nach Umständen sehr verschieden sein können und in jedem Falle besonders beurtheilt werden müssen.

Liegen aber die beiden Triebrollen in so grosser Entfernung, dass das Seil an gewissen mittleren Stellen (in Abständen von etwa 100 Meter) der Unterstützung bedarf, so wird dadurch ein weiterer Arbeitsverlust bedingt, der für jede solche Zwischenstation, d. h. für je zwei über einander liegende Tragrollen (für das straffe und für das schlaffe Seilstück) oder für eine statt dessen eingeschaltete zweispurige, einerseits als getriebene, andererseits als treibende sich verhaltende Zwischenrolle mit Rücksicht auf die Seilsteifigkeit nach Obigem zu etwa 0,005 der übertragenen Arbeit veranschlagt werden kann ausser den Zapfenreibungsarbeiten, die den Eigengewichten und den von ihnen getragenen Seilgewichten dieser Zwischenrollen entsprechen.

Bei grosser, zuweilen bis 25 Mtr. pro Secunde betragender (nach §. 83 sogar bis 50 Mtr. zu erhöhender) Geschwindigkeit des langen Seiles mag schliesslich auch durch die dadurch mit in Bewegung versetzte adhärirende Luft ein merklicher Widerstand verursacht werden können.

3) Bei einem Kettenrädergetriebe sind die Verhältnisse vor Allem insofern abweichend von denen des Riemen- und des Seilgetriebes, als die Spannung S_2 des schlaffen Kettenstückes fast = Null sein darf und somit die Spannung S_1 des anderen nur wenig grösser als die Umfangskraft Q zu sein braucht. Die Glieder der in solchem Falle üblichen Gelenkkette sind durch Bolzen (Radius $= b$) drehbar verbunden, und indem die Zähne

des treibenden Rades in die Lücken zwischen diesen Kettenbolzen, letztere in die Zahnlücken des getriebenen Rades eingreifen, ist ein relatives Gleiten der Kette im Sinne ihrer Bewegung bezüglich auf die Räder ausgeschlossen. Dagegen findet eine relativ gleitende Bewegung der Kettenbolzen gegen die Zähne der Räder statt gleich als ob die Kette eine mit Triebstöcken statt der Zähne versehene Zahnstange wäre, die mit den Zahnrädern in Eingriff ist. Der dadurch verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, der somit hier an die Stelle des in §. 84 betrachteten tritt, ist nach §. 76, Gl. (5)

$$=\frac{\pi\mu}{z}$$

für das treibende oder getriebene Rad, wenn z die Zähnezahl desselben bedeutet. Die Steifigkeit äussert sich als Reibungswiderstand gegen die relative Drehung der Kettenglieder um die sie verbindenden Bolzen; er kommt wegen $S_2 = 0$ für das treibende Rad nur an der Aufwickelungsstelle, für das getriebene nur an der Abwickelungsstelle in Betracht und zwar nach §. 85, Gl. (3) mit einem verhältnissmässigen Arbeitsverlust

$$=\mu\frac{b}{r}$$

im einen oder anderen Falle, unter r den Theilrisshalbmesser des betreffenden Rades verstanden. Indem endlich dergleichen Kettenrädergetriebe zur Uebertragung grosser Kräfte Q dienen, die grösser, als die Gewichte der betreffenden Wellen zu sein pflegen, sind die Zapfenreibungen der letzteren hier dem Drucke Q entsprechend zu berechnen, da der entsprechende Zapfendruck für beide Wellen zusammen hier durch die Gewichte derselben in ähnlicher Weise nur wenig vergrössert wird wie bei Riemen- und Seilgetrieben umgekehrt die Spannung des Zugkraftorgans nur wenig den durch das überwiegende Wellengewicht bedingten Zapfendruck zu vergrössern pflegt. Unter w den Radius des betreffenden Wellzapfens verstanden, ist dann der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung

$$=\mu'\frac{w}{r}.$$

Insbesondere mit $\pi\mu = 0{,}4$ (§. 76) und $\mu = \mu' = 0{,}08$ wäre also der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust für das einzelne Rad

$$=0{,}08\left(\frac{5}{z}+\frac{b+w}{r}\right)$$

und ebenso für das andere mit event. veränderten Werthen von z, w, r.